浙江工业大学 04/05(二)高等数学 A II 考试试卷 A 标准答案

一、填空题（每小题 4 分）：

1．1，　　**2．**$(-\frac{y}{x^2})e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy$**，**　　**3．**$2x+y+4z-7=0$**，**　　4．2

5． $e^{\sqrt{2}}-1$**，** **6．** $-6p$**，7．** $(1-L,L+1)$ **(或闭区间、半开半闭区间)**　　**8．0**

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$**，其中** $f(u,v)$ **一阶偏导数连续，求:** $\frac{\partial z}{\partial x}$**，** $\frac{\partial z}{\partial y}$

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$

2．求函数 $u=2xy-z^2$ **在点（**$1,-1,1$**）处沿方向** $\vec{l}=(1,1,0)$ **的方向导数，并问该函数沿什么方向的方向导数的最大？**

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=2y$**，** $\frac{\partial u}{\partial y}=2x$**，** $\frac{\partial u}{\partial z}=-2z$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,-1,1)}=-2$**，** $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,-1,1)}=2$**，** $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,-1,1)}=-2$

$$\vec{l}^0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

故所求方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$

沿方向 $(-2,2,-2)$ **的方向导数的最大。**

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求： $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy$**，其中区域** D **由曲线** $x=2$, $y=x$, $xy=1$ **所围成。**

解： $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy$

$=\int_1^2(x^3-x)dx \qquad =2\frac{1}{4}$

2．求：$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ **其中**Ω**：由**$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **及** $z = x^2 + y^2$ **所围成的闭区域。**

解： 方法一 $D_{xy}: x^2+y^2 \le \frac{\sqrt{5-1}}{2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{x^x+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^y}} zdz = \int_0^{2p} dq \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} rdr \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} zdz$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)-\frac{1}{16}\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\frac{1}{48}\left(\sqrt{5}-1\right)^3\right] p$$

方法二 $\left.\begin{matrix} z=\sqrt{1-x^2-y^2} \\ z=x^2+y \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^2+z-1=0 \Rightarrow z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **（负的舍去）**

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} zdz \iint\limits_{D_z} dxdy + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} zdz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)-\frac{1}{16}\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\frac{1}{48}\left(\sqrt{5}-1\right)^3\right] p$$

四、试解下列各题（每小题 6 分）：

1． **计算曲线积分** $\int_L (2x^2+2xy+3y)dx-(x+y+1)dy$ **，其中** L **是从**$O(0,0)$ **沿曲线** $y=x^2$ **到** $A(1\,,1)$ **的弧段。**

解：$\int_L (2x^2+2xy+3y)dx-(x+y+1)dy$

$$=\int_0^1 \left[2x^2+2x^3+3x^2-(x+x^2+1)2x\right]dx \quad =\int_0^1 \left(3x^2-2x\right)dx=0$$

2． **设有一半径为** 1（m）**，高为** 2（m）**的圆柱形容器，盛有** 1.5（m）**高的水，放在离心机上高速旋转，因受离心力的作用，水面呈抛物面形，问当水刚要溢出容器时，液面的最低点距容器底面的距离是多少？**

解：设水面呈抛物面的方程为 $z=k(x^2+y^2)+h$ **（**h **为液面的最低点距容器底面的距离），抛物面过点**$(1,0,2)$ **，代入得**$2=k+h$ （1）

又水的体积为$V_{\text{水}}=1.5p = \iiint\limits_{\Omega} dv$

$$\iiint\limits_{\Omega} dv == \int_0^{2p} dq \int_0^1 rdr \int_0^{kr^2+h} dz$$

$=p\left(\frac{k}{2}+h\right)$ **（2）；** **由（1）和（2）得** $h=1$

五、（8 分）判别级数的收敛性，收敛级数指出是绝对收敛还是条件收敛

1． $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$　　　2． $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

解 1． $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}n^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$　　**原级数绝对收敛。**

解 2． $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{2}{n-1})$

$\lim_{n\to\infty}u_n n^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{2}{n-1})n^{\frac{3}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{n-1}n^{\frac{3}{2}}=2$ **原级数绝对收敛。**，

六、（8 分）设曲面 Σ **是由曲线段：** $\begin{cases}x=0\\ y=e^z\end{cases}$ **，** $0\le z\le 1$**，绕** oz **轴旋转而成的下侧，计算曲面积分** $I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+2zdxdy$ 。

解： $I=\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_上}+\iint_{\Sigma_下}-\iint_{\Sigma_上}-\iint_{\Sigma_下}$

$\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_上}+\iint_{\Sigma_下}=\iiint_{\Omega}[2(x+y)+2]dv=\iiint_{\Omega}2(x+y)dv+\iiint_{\Omega}2dv$

$=0+p(e^2-1)$

$=p(e^2-1)$

$\iint_{\Sigma_上}=\iint_{\Sigma_上}2zdxdy=2pe^2$

$\iint_{\Sigma_下}=\iint_{\Sigma_下}2zdxdy=0$

$I=\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_上}+\iint_{\Sigma_下}-\iint_{\Sigma_上}-\iint_{\Sigma_下}=p(e^2-1)-2pe^2=p(-1-e^2)$

七、（8 分）求幂级数 $\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$ **的收敛半径、收敛域及和函数。**

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=\frac{1}{3}$,收敛半径 $R=3$

当 $x=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛

当 $x=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散

收敛区间为 $(-3,3]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}x^{n-1}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

$$\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n}=\ln(1+\frac{x}{3})$$

八、（8 分）求球面 Σ ：$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$ 上距平面 $x+y+z=0$ 的最近点与最远点（$a>0$），并证明 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^2dS\geq 36pa^4$

解（1）：设 (x,y,z) 为球面上任意一点，则距平面 $x+y+z=0$ 的距离

$$d=\frac{|x+y+z|}{\sqrt{3}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

设 $F(x,y,z,l)=x+y+z+l(x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2)$

$$F_x=1+2lx-2la=0$$

$$F_y=1+2ly-2la=0$$

$$F_z=1+2lz-2la=0$$

得最远点 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}a,\frac{3+\sqrt{3}}{3}a,\frac{3+\sqrt{3}}{3}a\right)$，最近点 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}a,\frac{3-\sqrt{3}}{3}a,\frac{3-\sqrt{3}}{3}a\right)$

（2） 因为 $\left(x+y+z+3\sqrt{a}\right)^2\geq\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}a+\frac{3-\sqrt{3}}{3}a+\frac{3-\sqrt{3}}{3}a+\sqrt{3}a\right)^2=9a^2$

所以 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x+y+z+\sqrt{3}a\right)^2ds\geq\iint\limits_{\Sigma}9a^2ds=36pa^4$