# 浙 江 工 业 大 学
# 线 性 代 数 期 末 试 卷
# （ 2018～2019 第二学期）

**任课教师：_______________学院班级：________________选课班中编号：______**

**学号：____________________ 姓名：__________________得分：_____________**

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | |

**一. 填空题(每空 3 分, 共 30 分)**

| 本题得分 | |
|---|---|

1. 行列式$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$，则其第一行元素的余子式之和$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=$__________.

2. 设$\alpha=(1,\ -1,\ \ 2)^T$，$\beta=(-2,\ 1,\ 1)^T$，则$(\alpha\beta^T)^{2019}=$________________.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，$|(A^*)^{-1}|=$____________.

4. 设向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关，且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_3-\alpha_1$，则向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性___________关.

5. 已知 $4\times 3$矩阵 $A$ 的秩为 2，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所包含向量个数为________ ，若非齐次线性方程组$A\mathrm{x}=b$有 3 个解向量$\xi_1,\xi_2,\xi_3$，其中$\xi_1+\xi_2=(2,4,6)^T$，$\xi_2+\xi_3=(1,3,5)^T$，$A\mathrm{x}=b$的通解为_______________.

6. 设向量$\alpha=(1,\ 1,\ 1,\ -4)^T$和$\beta=(-2,\ 1,\ 3,\ 2)^T$，则$\langle\alpha,\beta\rangle=$______.

7. 设 3 阶方阵$A$与 $B$ 相似，并且$A-E$，$A+2E$，$A-3E$均不可逆，则$|A|=$ ______，$|B-2E|=$______.

| 本题得分 | |
|---|---|

## 二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 已知矩阵$A=(\alpha,\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$，$B=(\beta,\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ 均为 4 维列向量，且$|A|=4$，$|B|=-2$，则 $|A+B|=$ ( ).

   (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

2. 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶矩阵， $AB=O$，且$B\neq O$，则必有( ).

   (A) $|A^*|=0$ (B) $|B|\neq 0$

   (C) $|A|\neq 0$ (D) $(A+B)^2=A^2+B^2$

3. $n$阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似的充分条件是( ).

   (A) $A^2$ 与 $B^2$ 相似 (B) $A$ 与 $B$ 有相同的特征值

   (B) $A$ 与 $B$ 有相同的特征向量 (D) $A$ 与 $B$ 和同一个对角阵相似

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$，若 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$的秩为 1，则$a=$ ( ).

   (A) 1 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) $-1$

5. 设 $A$ 为 3 阶矩阵，$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$为可逆矩阵，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

   则 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$ ( ).

   (A) $\alpha_1+\alpha_2$ (B) $\alpha_2+2\alpha_3$ (C) $\alpha_2+\alpha_3$ (D) $\alpha_1+2\alpha_2$

**三、计算题（每题 10 分，共 50 分）**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 本题总得分 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}$.

2. 已知 3 阶方阵$A$和$B$满足$AB=-3B+2A$，且$A=\begin{pmatrix}-1&4&1\\2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$B$.

3. 已 知 向 量 组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\1\\3\\-5\end{pmatrix}$， 求

$span(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$的维数和一组基,并求剩余向量在这组基下的坐标.

4. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=3\\ \lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases}$,

问$\lambda$取什么值时，上述方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？

并在有无穷多解时，求出该方程组的通解.

5. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 0 & 4 & a\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$的一个特征向量为 $p=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

（1） 证明 $a=3$.

（2） 求出矩阵$A$的特征值和特征向量, 并讨论矩阵$A$是否可以相似对角化. 若可以，求出相似变换矩阵$P$，以及相似对角阵$\Lambda=P^{-1}AP$；若不可以，说明理由.

## 四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

| 1 | 2 | 本题总得分 |
|---|---|---|
| | | |

1. 已知$n$阶方阵$A$满足$2A^2+A-E=O$，证明$A+2E$可逆, 并求其逆矩阵.

2. 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，证明：$A$ 的秩 $\mathrm{R}(A)=2$.