习 题 五

1. 证明$\boldsymbol{V}=\left\{(x,y)^{\mathrm{T}} \mid x^2+y^2\le 1,\ \ x,y\in R\right\}$不是$\boldsymbol{R}^2$的一个子空间.

证明: 设$a=(1,0)^T\in R^2$, 显然$a\in V$, 但是$2a=(2,0)^T\in R^2$但$2a\notin V$, 所以V不是R^2的一个子空间.

2. 证明: 等价的两个向量组生成同一个向量空间.

证明: 设向量组A:$a_1,a_2,\cdots,a_m$和向量组B:$b_1,b_2,\cdots,b_n$等价, 则存在系数矩阵C_1和C_2 使得

$$[a_1,a_2,\cdots,a_m]=[b_1,b_2,\cdots,b_n]C_1,\ [b_1,b_2,\cdots,b_n]=[a_1,a_2,\cdots,a_m]C_2.$$

设向量组A和向量组B生成的向量空间分别为$L_1=span(a_1,a_2,\cdots,a_m)$, $L_2=span(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 则对任意向量$x\in L_1$, 存在系数 $l_1,l_2,\cdots,l_m$使得$x=l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_ma_m$, 进而有

$$x=[a_1,a_2,\cdots,a_m]\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_m\end{pmatrix}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]C_1\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_m\end{pmatrix}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_m\end{pmatrix},$$

即$x\in L_2$, 所以$L_1\subseteq L_2$.

同理可证, $L_2\subseteq L_1$, 因此$L_1=L_2$.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\12\\7\end{pmatrix}$, 问向量$\boldsymbol{\beta}$是否属于向量空间$Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$? 如果是, 求$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$下的坐标.

解: 设b 在a_1,a_2下的坐标为(x_1,x_2), 则$x_1a_1+x_2a_2=b$, 即求解此线性方程组的解.

对增广矩阵做初等行变换

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&-1&3\\6&0&12\\2&1&7\end{array}\right)\xrightarrow[3r_3]{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&-1&3\\3&0&6\\6&3&21\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cc|c}3&-1&3\\0&1&3\\0&5&15\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&0&6\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right),$$

求解得 $x_1=2, x_2=3$, 所以, b 在 a_1, a_2 下的坐标为 $(2,3)$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\\12\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\\7\end{pmatrix}$, 求由该向量组生成的子空间 $Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的一组基和该子空间的维数. 若向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$, 求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在此组基下的坐标.

解: 对矩阵 $A=[a_1,a_2,a_3,a_4,b]$ 做初等行变换, 即

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-4&-1\\-3&9&-1&5&1\\2&-6&4&-3&3\\-4&12&2&7&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\r_2-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-4&-1\\0&0&5&-7&-2\\0&0&0&5&5\\0&0&10&-9&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_3]{\frac{1}{5}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-4&-1\\0&0&1&-7/5&-2/5\\0&0&0&1&1\\0&0&10&-9&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-10r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&0&-6/5&-1/5\\0&0&1&-7/5&-2/5\\0&0&0&1&1\\0&0&0&5&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+\frac{7}{5}r_3\\r_4-5r_3}]{r_1+\frac{6}{5}r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

由 A 的行最简形得, 子空间 $Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的基为 a_1, a_3, a_4, 其维数为 3, 且 b 在 a_1, a_2, a_4 下的坐标为 $(1,1,1)$.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基, 并求向量 $\boldsymbol{\beta}=(5,2,-2)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标.

证明: 对矩阵 $A=\left[a_1, a_2, a_3, b\right]$ 做初等行变换, 即

$$(a_1, a_2, a_3, b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&5\\0&1&1&2\\-1&0&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&5\\0&1&1&2\\0&2&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

由 A 的行最简形得, 向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 因此是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基, 且 $b=(5,2,-2)^{\mathrm{T}}$ 在此组基下的坐标为 $(2,1,1)$.

6*. 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中取两组基: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$, 和 $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}}$.

（1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

（2）若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(1,1,1)$, 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

解:（1）对 $\left(a_1, a_2, a_3 \mid b_1, b_2, b_3\right)$ 做初等行变换

$$\left(a_1, a_2, a_3 \mid b_1, b_2, b_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&1&-4&-7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&-7&-11&-1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&0&-1&-4&-12&-8\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-27&-71&-41\\0&-1&0&-9&-20&-9\\0&0&-1&-4&-12&-8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right),$$

所以由基 a_1, a_2, a_3 到基 b_1, b_2, b_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

（2）$g = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} -139 \\ 38 \\ 24 \end{pmatrix},$

所以 g 在基 a_1, a_2, a_3 下的坐标为 $(-139, 38, 24)$.

7*.设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的两组基, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$,

$\boldsymbol{\beta}_2 = 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3 = -3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

（2）对 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}_1 - 2\boldsymbol{\beta}_2 + 2\boldsymbol{\beta}_3$, 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

解:（1）因为

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

所以由基 a_1, a_2, a_3 到基 b_1, b_2, b_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

（2）$g = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix},$

所以 g 在基 a_1, a_2, a_3 下的坐标为 $(-4, -7, 3)$.

8. 设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta} = (1,k,1,0)^{\mathrm{T}}$ 的夹角为 45^0, 求 k.

解: 因为

$$\frac{p}{4}=\arccos\frac{\langle a\,,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}=\arccos\frac{k+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{k^2+2}},$$

所以 $\dfrac{k+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{k^2+2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求解得 $k=2$.

9. 将下列向量组正交规范化:

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

解: （1）取 $g_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$g_2=a_2-\frac{\langle a_2,g_1\rangle}{\langle g_1,g_1\rangle}g_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$g_3=a_3-\frac{\langle a_3,g_1\rangle}{\langle g_1,g_1\rangle}g_1-\frac{\langle a_3,g_2\rangle}{\langle g_2,g_2\rangle}g_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

最后将他们单位化得

$$b_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ b_2=\frac{g_2}{\|g_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ b_3=\frac{g_3}{\|g_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

（2）取 $g_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$g_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$g_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle a_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

最后将他们单位化得

$$b_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ b_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\ b_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

10.已知 $a = (1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}, b = (2,3,1,-1)^{\mathrm{T}}, g = (-1,-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$, 求:

（1）内积 $\langle a, b\rangle$ 、$\langle a, g\rangle$；

（2）向量 a, b, g 的范数;

（3）与 a, b, g 都正交的所有向量.

解:（1）$\langle a, b\rangle = a^T b = 1\times 2 + 2\times 3 - 1\times 1 - 1\times(-1) = 6$,

$\langle a, g\rangle = a^T g = 1\times(-1) + 2\times(-1) + (-1)\times(-2) + 1\times 2 = 1$.

（2）$\|a\| = \sqrt{7}, \|b\| = \sqrt{15}, \|g\| = \sqrt{10}$.

（3）假设向量 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 与 a, b, g 都正交, 则

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases},$$

对系数矩阵做出等行变换

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -5\\ 0 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&-5\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以方程组的通解为

$$x=t_1\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R.$$

11. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&1&0&1\\-3&-2&0&1&-2\end{pmatrix}$, 并设 X_A 为齐次线性方程组 $AX=q$ 的解空间,

试求 X_A 的维数及其一组正交基.

解: 对矩阵 A 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&1&0&1\\-3&-2&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\2&1&-1&1&-3\\-3&-2&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&-1&-3&1&-5\\0&1&3&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-4\\0&-1&-3&1&-5\\0&0&0&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-4\\0&1&3&-1&5\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&-2&0&-2\\0&1&3&0&3\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, 所以 $R(X_A)=5-R(A)=2$, 且其一组基为

$$a_1=(2,-3,1,0,0)^T,\ a_2=(2,-3,0,2,1)^T.$$

下面对 a_1,a_2 进行正交化, 令 $x_1=a_1=(2,-3,1,0,0)^T$,

$$x_2=a_2-\frac{\langle a_2,x_1\rangle}{\langle x_1,x_1\rangle}x_1=(2,-3,0,2,1)^T-\frac{13}{14}(2,-3,1,0,0)^T=\frac{1}{14}(2,-3,-13,28,14)^T,$$

则 x_1, x_2 为 X_A 的一组正交基.

12. 已知 $a_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试由它出发构造 R^4 的一组规范正交基. 这样的基唯一吗？

解：令 $e_1 = (1,0,0,0)^T$，$e_2 = (0,1,0,0)^T$，$e_3 = (0,0,1,0)^T$，$e_4 = (0,0,0,1)^T$，显然 a_1, e_2, e_3, e_4 线性无关, 可以作为 R^4 的一组基. 下面对 a_1, e_1, e_2, e_3 进行正交化, 令

$$b_1 = a_1 = (1,1,1,1)^T,$$

$$b_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 = (0,1,0,0)^T - \frac{1}{4}(1,1,1,1)^T = \frac{1}{4}(-1,3,-1,-1)^T$$

$$\begin{aligned} b_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle e_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 \\ &= (0,0,1,0)^T - \frac{1}{4}(1,1,1,1)^T + \frac{1}{12}(-1,3,-1,-1)^T = \frac{1}{3}(-1,0,2,-1)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= e_4 - \frac{\langle e_4, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle e_4, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \frac{\langle e_4, b_3\rangle}{\langle b_3, b_3\rangle} b_3 \\ &= (0,0,0,1)^T - \frac{1}{4}(1,1,1,1)^T + \frac{1}{12}(-1,3,-1,-1)^T + \frac{1}{6}(-1,0,2,-1)^T \\ &= \frac{1}{2}(-1,0,0,1)^T \end{aligned}$$

再对 b_1, b_2, b_3, b_4 进行规范化, 得规范正交基

$$x_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T, \qquad x_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,3,-1,-1)^T,$$

$$x_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,-1)^T, \qquad x_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)^T.$$

显然, 如果 b_1, b_2, b_3, b_4 为规范正交基, 则 $\pm b_1, \pm b_2, \pm b_3, \pm b_4$ 均为规范正交基, 所以规范正交基不唯一.

13. 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解:

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+2x_3=0. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+x_4=0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+4x_4=0. \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$.

解:（1）对系数矩阵做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=2<3$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\in R,$$

其中 $x=(0,-1,1)^T$ 为基础解系.

（2）对系数矩阵做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=2<4$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R,$$

其中$x_1=(-1/2,3/2,1,0)^T$，$x_2=(0,-1,0,1)^T$ 为基础解系.

（3）对系数矩阵做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&-1&3\\1&-1&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&-2&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因为$R(A)=2<4$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R,$$

其中$x_1=(1,1,0,0)^T$，$x_2=(-2,0,1,1)^T$ 为基础解系.

（4）对系数矩阵做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因为$R(A)=2<4$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R,$$

其中$x_1=(-2,1,0,0)^T$，$x_2=(1,0,0,1)^T$ 为基础解系.

14. 选择 p,q 的值使下列线性方程组有解, 并求其解:

（1）$\begin{cases} px_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+px_2+x_3=p \\ x_1+x_2+px_3=p^2 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ \quad\ \ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=p \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=q \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} (2-p)x+2y-2z=1 \\ 2x+(5-p)y-4z=2 \\ -2x-4y+(5-p)z=-p-1 \end{cases}$；（4）$\begin{cases} px+qy+2z=1 \\ (q-1)y+z=0 \\ px+qy+(1-q)z=3-2q \end{cases}$.

解:（1）对增广矩阵做初等行变换

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 1 & p & 1 & p \\ p & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-pr_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 1-p & 1-p^2 & 1-p^3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p(1-p) \\ 0 & 0 & (1-p)(2+p) & (1-p)(1+p)^2 \end{array}\right),$$

当 $p-1\neq 0$ 且 $(1-p)(2+p)\neq 0$, 即 $p\neq 1$ 且 $p\neq -2$ 时, $R(A)=R(A\,|\,b)=3$, 方程组有唯一解.

当 $p=-2$ 时, 增广矩阵退化为

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

因为 $R(A)<R(A\,|\,b)$, 此时方程组无解.

当 $p=1$ 时, 增广矩阵退化为

$$
(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),
$$

因为 $R(A)=R(A|b)<3$, 此时方程组有无穷多解, 其通解为

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

（2）对增广矩阵做初等行变换

$$
(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2&2\\0&1&-1&-1&1\\1&1&-1&3&p\\1&-1&1&5&q\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2&2\\0&1&-1&-1&1\\0&-1&1&1&p-2\\0&-3&3&3&q-2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2&2\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&p-1\\0&0&0&0&q+1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&4&0\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&p-1\\0&0&0&0&q+1\end{array}\right),
$$

当 $p-1=0$ 且 $q+1=0$, 即 $p=1$ 且 $q=-1$ 时, $R(A)=R(A|b)<4$, 方程组有无穷多解, 且其通解为

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix},
$$

当 $p-1\neq0$ 或者 $q+1\neq0$, 即 $p\neq1$ 或者 $q\neq-1$ 时, $R(A)<R(A|b)$, 方程组无解.

（3）对增广矩阵做初等行变换

$$
(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2-p&2&-2&1\\2&5-p&-4&2\\-2&-4&5-p&-p-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-4&5-p&-p-1\\2&5-p&-4&2\\2-p&2&-2&1\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[2r_4]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & 5-p & -p-1\\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p\\ 2(2-p) & 4 & -4 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+(2-p)r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & 5-p & -p-1\\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p\\ 0 & 4(p-1) & (p-1)(p-6) & p(p-1)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & 5-p & -p-1\\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p\\ 0 & 0 & (p-1)(p-10) & (p-1)(p-4)\end{array}\right),$$

当$1-p=0$, 即 $p=1$时, $R(A)=R(A\,|\,b)=1<3$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

当 $p-10=0$, 即 $p=10$时, $R(A)=2<R(A\,|\,b)=3$, 方程组无解.

当$1-p\neq 0$且$p-10\neq 0$, 即 $p\neq 1$且$p\neq 10$时, $R(A)=R(A\,|\,b)=3$, 方程组有唯一解.

（4）对增广矩阵做初等行变换

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}p & q & 2 & 1\\ 0 & q-1 & 1 & 0\\ p & q & 1-q & 3-2q\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & 1\\ 0 & q-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -(1+q) & 2(1-q)\end{array}\right),$$

当 $p\neq 0, q\neq 1, q\neq -1$时, $R(A)=R(A\,|\,b)=3$, 方程组有唯一解.

当$q=-1$时, 增广矩阵退化为

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}p & q & 2 & 1\\ 0 & q-1 & 1 & 0\\ p & q & 1-q & 3-2q\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right),$$

$R(A) < R(A|b)$, 方程组无解.

当 $q=1$ 时, 增广矩阵退化为

$$(A|b) \xrightarrow{\cdots\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_2]{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$R(A) = R(A|b) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in R.$$

15. 设五元线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ -x_1 + x_5 = a_5 \end{cases},$$

证明: 此方程组有解当且仅当 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$; 在此条件下, 求其通解.

证明: 对增广矩阵做初等行变换

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_5+r_3 \\ r_5+r_4}]{\substack{r_5+r_1 \\ r_5+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + \cdots + a_5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_5+r_3 \\ r_5+r_4}]{\substack{r_5+r_1 \\ r_5+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + \cdots + a_5 \end{array}\right),$$

由增广矩阵的行最简形知，当且仅当 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$ 时，$R(A)=R(A\,|\,b)=4<5$，即方程组有解，且有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3+a_4 \\ a_3+a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\in R.$$

16. 设三元非齐次线性方程组 $AX=b$，其中矩阵 A 的秩为 2，且

$$h_1=(1,2,2)^T,\ h_2=(3,2,1)^T$$

是方程组的两个特解，试求此方程组的全部解.

解：因为 $R(A)=2$，所以导出组 $AX=0$ 解集的秩 $R(X_A)=3-2=1$，即 $AX=0$ 的基础解系只有一个向量. 令 $x=h_1-h_2=(-2,0,1)^T$，则 $Ax=A(h_1-h_2)=0$，即 x 是导出组 $AX=0$ 的解，所以 $x=(-2,0,1)^T$ 是导出组 $AX=0$ 的基础解系.

又因为 h_1 和 h_2 都是方程组 $AX=b$ 的特解，所以其通解为

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\in R \quad 或 \quad X=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\in R.$$

17. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$x_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad x_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

解：方法一：令 $B=(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$，设所求的齐次方程组为 $Ax=0$，则 $AB=0$，即 $B^TA^T=0$. 对 B^T 做初等变换

$$B^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

所以 $B^Tx=0$ 的基础解系为

$$h_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ h_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

令 $A=\left(h_1,h_2\right)^T=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\2&-3&0&1\end{pmatrix}$, 则齐次方程组 $Ax=0$, 即

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_2+x_4=0,\end{cases}$$

的基础解系就是 x_1,x_2.

方法二：设所求的齐次方程组为 $Ax=0$，因为 $R\left(X_A\right)=2$，所以 $R(A)$ $=n-R\left(X_A\right)=4-2=2$. 由基础解系 x_1 和 x_2 得 $Ax=0$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\ \text{即}\ \begin{cases}x_1=3t_2,\\x_2=t_1+2t_2,\\x_3=2t_1+t_2,\\x_4=3t_1,\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}x_2=\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{3}x_4,\\x_3=\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_4,\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0,\\x_1-3x_3+2x_4=0.\end{cases}$

令 $A=\begin{pmatrix}2&-3&0&1\\1&0&-3&2\end{pmatrix}$, 则齐次方程组 $Ax=0$, 即

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0,\\x_1-3x_3+2x_4=0,\end{cases}$$

的基础解系就是 x_1,x_2.

18. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 h_1,h_2,h_3 是其三个解, 且有 $h_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$,$h_2+h_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, 求该方程组的通解.

解: 因为 $R(A)=3$, 所以导出组 $AX=0$ 解集的秩 $R\left(X_A\right)=4-3=1$, 即 $AX=0$ 的基

础解系只有一个向量. 令 $x=2h_1-(h_2+h_3)=(3,4,5,6)^T$，则 $Ax=0$，即 x 是导出组 $AX=0$ 的解, 所以 $x=(3,4,5,6)^T$ 是导出组 $AX=0$ 的基础解系.

又因为 h_1 是方程组的特解, 所以其通解为

$$X=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\ t\in R.$$

19. 已知 x_1,x_2,x_3 是齐次线性方程组 $AX=q$ 的一组基础解系，记 $h_1=x_1-x_2$，$h_2=2x_2+x_3$，$h_3=-x_3+3x_1$，问 h_1,h_2,h_3 是否也可以作为 $AX=q$ 的基础解系？

解：因为 $Ah_1=A(x_1-x_2)=0$，$Ah_2=A(2x_2+x_3)=0$，$Ah_3=A(-x_3+3x_1)=0$，所以 h_1,h_2,h_3 也是方程组 $AX=q$ 的解.

又因为

$$(h_1,h_2,h_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad 且\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&2&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以 $R(h_1,h_2,h_3)=R\left((x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\right)=R(x_1,x_2,x_3)=3$，

即 h_1,h_2,h_3 线性无关, 所以 h_1,h_2,h_3 可以作为 $AX=q$ 的基础解系.

20. 设 A 是 $m\times s$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵，X 是 n 维列向量. 证明：若齐次方程组 $(AB)X=q$ 与 $BX=q$ 同解, 则有 $r(AB)=r(B)$.

证明：设 X_{AB} 和 X_B 分别为齐次方程组 $(AB)X=0$ 和 $BX=0$ 的解向量集合. 若 $(AB)X=q$ 与 $BX=q$ 同解, 即二者有相同的解集，因此有相同的基础解系, 即 $r(X_{AB})=r(X_B)$，所以

$$r(AB) = n - r(X_{AB}) = n - r(X_B) = r(B).$$

复 习 题 五

1.设 $V_1=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in R,\ x_1+x_2=x_3\right\}$；

$V_2=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in R,\ x_1\times x_2=x_3\right\}$；

问V_1、V_2关于R^3中的向量线性运算是否构成向量空间？

解：（1）设$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in V_1$，$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in V_1$，则$\begin{cases}x_1+x_2=x_3\\y_1+y_2=y_3\end{cases}$.

令$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}$，则$z_1+z_2=x_1+y_1+x_2+y_2=x_3+y_3=z_3$，所以

$(z_1,z_2,z_3)^T\in V_1$，因此V_1关于R^3中的向量线性运算<u>构成向量空间</u>.

（2）令$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$z=x+y=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，则$x\in V_2$，$y\in V_2$，但是$z_1\times z_2\neq z_3$，即

$z\notin V_2$，所以V_2关于R^3中的向量线性运算<u>不能构成向量空间</u>.

2. 设$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\k-2\end{pmatrix}$是$R^3$的基，则<u>　$k\neq 2$　</u>.

解：$\begin{vmatrix}2&0&0\\1&3&0\\-2&1&k-2\end{vmatrix}=6(k-2)\neq 0$.

3. 设$a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$，由它们生成空间V，则V的维数是（　C　）.

（A）$=4$；　（B）$=n$；　（C）≤ 4；　（D）≥ 4.

解：$R\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)\leq 4$.

4. 设$a\in R^n$，则a与任意n维向量都正交的充要条件是$\|a\|=$（　B　）.

（A）1;　　　（B）0;　　　（C）-1;　　　（D）∞.

解: $\langle a, e_i \rangle = a_i = 0,\ i = 1, \mathbf{L}, n \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \|a\| = 0$.

5. 设 $a, b, g \in R^n$, 则（　A　）是向量.

（A）$\langle a, b\rangle b + g$;　　　　（B）$g + \langle a, b\rangle$;

（C）$\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle$;　　　　（D）$\langle \langle a, b\rangle b, g\rangle$.

解:（B）运算无意义,（C）（D）是一个数.

6. 设 $a, b \in R^n$, 则 $G(a, b) = \begin{vmatrix} \langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle \end{vmatrix} = 0$ 是 a, b 线性相关的（ C ）条件.

（A）必要;　（B）充分;　（C）充要;　（D）既不充分也不必要.

解: $G(a, b) = \begin{vmatrix} \langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2 = 0$

$\Leftrightarrow a, b$ 线性相关.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵全体所构成的子空间的维数和一组基.

解: 设 X 为与 A 可交换的矩阵, 则 $AX = XA$, 即

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + 3x_{13} & x_{12} + x_{13} & 2x_{13} \\ x_{21} + 3x_{23} & x_{22} + x_{23} & 2x_{23} \\ x_{31} + 3x_{33} & x_{32} + x_{33} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} x_{13} = x_{23} = 0, \\ x_{31} = 3x_{33} - 3x_{11} - x_{21}, \\ x_{32} = x_{33} - 3x_{12} - x_{22}, \end{cases}$$

即 X 的通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ 3x_{33} - 3x_{11} - x_{21} & x_{33} - 3x_{12} - x_{22} & x_{33} \end{pmatrix},$$

因为 X 中自由变量个数为 5, 所以 X 构成的子空间的维数为 5, 且一组基为

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-3&0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$X_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\ X_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基, 且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

（1）证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基.

（2）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

（3）若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)$, 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

（1）证明: 因为

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}, \text{且}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\text{可逆},$$

所以

$$R(b_1,b_2,b_3)=R\left((a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right)=R(a_1,a_2,a_3)=3,$$

因此 b_1,b_2,b_3 线性无关, 是 $\boldsymbol{R}^3$ 一组基.

（2）因为

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

所以a_1, a_2, a_3到b_1, b_2, b_3的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（3）因为

$$g=(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=(b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=(b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

所以g 在b_1, b_2, b_3下的坐标为$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

9. 设 $AX=b$ 为非齐次线性方程组，$AX=q$ 为其导出组. 下列命题正确的有（ 2、4 ）.

（1）若 $AX=q$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解.

（2）若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=q$ 必有非零解.

（3）若 $AX=q$ 只有唯一零解，则 $AX=b$ 只有唯一解.

（4）若 $AX=b$ 只有唯一解，则 $AX=q$ 只有零解.

（5）若 $AX=b$ 无解，则 $AX=q$ 也无解.

解:（1）（3）可能无解，（5）齐次方程组一定有零解.

10. 设 $AX=b\ (b\neq q)$ 为 $m\times n$ 方程组，$r(A)=r(A|b)=r<n$，且已知x_1、x_2是 $AX=b$ 的两个不同解，h 是导出组 $AX=q$ 的解，则下列命题正确的有（ 2、3、4、5 ）.

（1）x_1+x_2是 $AX=b$ 的解；　（2）$\forall k\in R,\ k(x_1-x_2)+x_1$是 $AX=b$ 的解；

（3） $h+x_1$是 $AX=b$ 的解；　　（4）$\forall k\in R,\ \frac{1}{2}(x_1+x_2)+kh$是 $AX=b$ 的解.

（5）$\forall k_1$、$k_2\in R$，$k_1(x_1-x_2)+k_2h$ 是 $AX=q$ 的解；

解:（1） $A(x_1+x_2)=b+b=2b\neq b$，错.

（2）$\forall k\in R,\ A\big(k(x_1-x_2)+x_1\big)=kA(x_1-x_2)+Ax_1=k(b-b)+b=b$

（3） $A\left(h+x_1\right)=Ah+Ax_1=0+b=b$

（4） $\forall k\in R,\ A\left(\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+kh\right)=\dfrac{1}{2}A\left(x_1+x_2\right)+kAh=b$

（5） $\forall k_1$、$k_2\in R$，$A\left(k_1(x_1-x_2)+k_2h\right)=k_1A\left(x_1-x_2\right)+k_2Ah=k_1\left(b-b\right)=0$

11.n阶矩阵A可逆当且仅当（ 1-11 ）.

（1）$\exists$ n阶矩阵B，使$AB=BA=E$成立;（2）$|A|\neq 0$;

（3）$r(A)=n$;　　　　　　　　（4）A的列（行）秩为n;

（5）A的n列（行）线性无关;　　　（6）A的最大非零子式为$|A|$;

（7）$AX=0$只有零解（$r(X_A)=0$）;　（8）$\forall b,\ AX=b$均有唯一解;

（9）$\forall$ n阶矩阵B、C，$AB=AC$ 当且仅当 $B=C$;

（10）A可表为若干初等阵之积;　　（11）A等价于同阶单位阵E_n;

12、设$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，其中$a_i,b_i$ $(i=1,2,3)$全不为零. 则三条直线

$l_i: a_ix+b_iy+c_i=0$ $(i=1,2,3)$ 交于一点的充要条件为（ D ）.

（A）a,b,g 线性相关;　　（B）a,b,g 线性无关;

（C）$r(a,b,g)=r(a,b)$;　（D）a,b,g 线性相关，而a,b 线性无关.

解: 三条直线$l_i: a_ix+b_iy+c_i=0$ $(i=1,2,3)$ 交于一点的充要条件为方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}，即\ xa+yb=-g$$

有唯一解. 方程组有唯一解的充要条件为$R\left(a,b\right)=R\left(a,b,g\right)=2$，即$a,b,g$ 线性相关，a,b 线性无关.