浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷 A
（ 2016 ～ 2017 第 一 学 期 ）

任课教师：______________学院班级：___________________班中编号：_________

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的常数项＝________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}=$_____.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{10}=$__________.

4. 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=$___________.

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$_______________.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,p,q,r 均不为零，则齐次线性方程组

   $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量的个数为_________.

7. 已知向量$\boldsymbol{\gamma}=(3 \quad 2 \quad k)^{\mathrm{T}}$能被向量$\boldsymbol{\alpha}=(1 \quad 1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}=(1 \quad 2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$线性表示，则

$k=$____，与$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$都正交的所有向量为_______.

8. 矩阵$\boldsymbol{A}$相似于$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则$R(\boldsymbol{B})=$____，$|\boldsymbol{B}|=$_____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=-2$，则行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+2c_1 \\ a_2 & b_2+2c_2 \end{vmatrix}=$ (　　　　).

(A) −1　　(B) −3　　(C) 1　　(D) 3

2. 设n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 (　　　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　(C) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AC}$　　(D) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$

3. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性表示，则(　　　　).

(A) 若$s>k$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关　(B) 若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性无关，则$s>k$

(C) 若$s>k$，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性相关　(D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s>k$

4. $\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则关于$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的解的命题正确的是 (　　　　).

(A) 若$R(\boldsymbol{A})=m$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解　(B) 若$R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=m$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解

(C) 若$R(\boldsymbol{A})=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解　(D) 若$R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解

5. 已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是同阶正交阵，则以下不一定是正交阵的是 (　　　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(B) $\boldsymbol{B}^{-1}$　　(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　(D) $\boldsymbol{AB}$

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a-b-c-d & 2a & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c-d & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b-d & 2c \\ 2d & 2d & 2d & d-a-b-c \end{vmatrix}$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\5\\a\\3\end{pmatrix}$ 的秩为 3，求 a 的值，以及向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

4. 求线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3\lambda x_3=2\\-x_1+2\lambda x_2-3x_3=-2\lambda\\\lambda x_1-2x_2+3x_3=2\lambda^2\end{cases}$$

在 λ 取何值时无解、有唯一解、有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解.

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}$与对角阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$相似，

（1）证明：$a=3,\ b=2$；

（2）求出相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. (5 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

2. （5 分）已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}$ 相似，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.