11/12 浙江工业大学高等数学(下)考试试卷 A

学院：_______ 班级：______ 姓名:________ 学号:________

任课教师（请务必填上）：

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、填空题（本题满分 33 分，每小题 3 分）

1、设 $\vec{a}=\{2,1,2\}$，$\vec{b}=\{4,-1,10\}$，$\vec{c}=\vec{b}-\lambda\vec{a}$，且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $\lambda=$ 3 。

2、设 Z 是方程 $z=x+y\sin z$ 所确定的 x、y 的函数，则 $\frac{\partial z}{\partial y}-\sin z\frac{\partial z}{\partial x}=$ 0 。

3、函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,1)$，沿方向 $\vec{l}=\{0,1,2\}$ 的方向导数＝ $\sqrt{5}$ 。

4、已知 $z=\sqrt{xy}+\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $-\frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3}}$ 。

5、交换积分次序 $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)dy=$ $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$ 。

6、曲线积分 $\int_L(axy^3-y^2\cos x)dx+(y+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 与路径无关，L 为平面上光滑曲线，则 $a,b=$ 2, -2 。

7、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 是 发散 （绝对收敛、条件收敛、发散）的 。

8、把 $\ln(2+x)$ 展开为 x 的幂级数，则该级数的收敛半径 $R=$ 2 。

9、设函数 $f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,3,\cdots$， 则 $S(1)=$ 0 。

10、设曲面 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\ge 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则下列结论中正确的是 C 。

（A）$\iint_{\Sigma}xdS=4\iint_{\Sigma_1}xdS$； （B）$\iint_{\Sigma}ydS=4\iint_{\Sigma_1}ydS$；

（C）$\iint_{\Sigma}zdS=4\iint_{\Sigma_1}zdS$； （D）$\iint_{\Sigma}xyzdS=4\iint_{\Sigma_1}xyzdS$。

二、试解下列各题（本题满分 20 分，每小题 5 分）：

1、设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，求：$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

2、已知 $z=x^y$，（$x>0,x\neq 1$），求：dz

$$dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$$

3、求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 点处的切线方程。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{(1+t)^2}\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}\qquad \frac{dz}{dt}=2t.$$

$$\vec{T}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right)\qquad \text{切线：}\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

4、讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的连续性与偏导数存在之间的关系（证明或举例）。

连续 $\not\Rightarrow$ 偏导数存在.

举例：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在.

$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\ \text{不存在}.$$

偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 连续.

举例：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 偏导数存在但不连续.

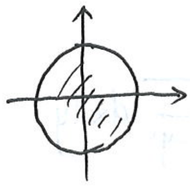
$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\overset{2}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\quad \text{偏导数存在}.$$

$$\text{而}\ \lim_{\substack{\Delta y=k\Delta x\\ \Delta x\to 0}}f(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}=\frac{k}{1+k^2}\ \text{与}k\text{有关}$$

$$\therefore \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(\Delta x,\Delta y)\ \text{不存在}\quad \therefore \text{在}(0,0)\text{不连续}.$$

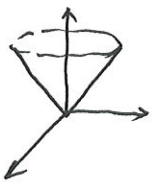
三、试解下列各题（本题满分 20 分，每小题 5 分）：

1、设 D：$x^2+y^2\le 1$，.求 $\iint\limits_D (x^3y+y^2)dxdy$



$$\iint\limits_D (x^3y+y^2)dxdy = 0+\iint\limits_D y^2dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho^2\sin^2\theta\,\rho\,d\rho$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\cdot(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

2、求：$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω：$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h$，$(h>0)$



法一. $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^h dz\iint\limits_{D_z}z^2dxdy=\int_0^h z^2\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi}{5}h^5$

法二. $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h z^2dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho d\rho\int_\rho^h z^2dz=\frac{\pi}{5}h^5$

法三. $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{\pi}{5}h^5$

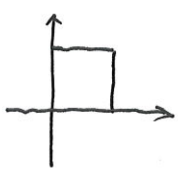
3、求：$\oint\limits_L[(x-1)^2+(y-1)^2]ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$$

$$\oint_L[(x-1)^2+(y-1)^2]ds=\int_0^{2\pi}\left[(\cos t-1)^2+(\sin t-1)^2\right]\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(3-2\cos t-2\sin t)dt$$
$$=(3t-2\sin t+2\cos t)\Big|_0^{2\pi}=6\pi$$

4、设 L 是正方形 D：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$ 的正向边界，$f(x)$ 为正值连续函数，试证：

$$\oint\limits_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2$$



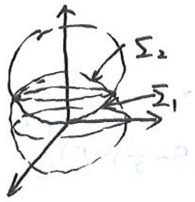
$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy.$$

而 $\iint\limits_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy$ （轮换对称性.

$$\therefore\iint\limits_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy=\frac{1}{2}\left\{\iint\limits_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy+\iint\limits_D\left[f(y)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy\right\}$$
$$\ge\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D 2dxdy+\iint\limits_D 2dxdy\right]$$
$$=2\cdot S(D)=2$$

四、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）：

1、求两球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围空间体的表面积。



$$S=\iint_{\Sigma_1} dS+\iint_{\Sigma_2} dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy+\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

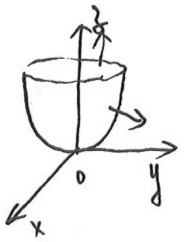
D_{xy}: $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2} \\ z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}\end{cases}$

$x^2+y^2\le\frac{15}{16}$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{4}}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\rho\,d\rho$$

$$=\frac{5}{2}\pi$$

2、求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$是曲面 $z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$ 部分的外侧。



法一. $D_{xy}: x^2+y^2\le 1.$ $\vec{n}=(2x,2y,-1)$

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(z^2+x)+z\right]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[-2x^2\underbrace{-2x(x^2+y^2)^2}_{0(对称性)}+x^2+y^2\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[-\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right]\rho\,d\rho$$

$$=0$$

法二. 补上 $\Sigma_1: z=1.$ $x^2+y^2\le 1$ 上侧

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}(1+1)dv=2\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=2\int_0^1\pi z\,dz=\pi$$

$$\iint_{\Sigma_1}=0+\iint_{D_{xy}}1\,dxdy=\pi$$

$$\therefore\iint_{\Sigma}=0$$

五、（8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$的收敛域（含端点）及和函数。

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\right|}{\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right|}=1 \quad R=1.$

又 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ 收敛　$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n} \quad x\in(-1,1]$

$\therefore S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{n-1}=(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=-\frac{1}{1+x}$

$\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x-\frac{1}{1+x}dx$

$S(x)-S(0)=-\ln|1+x|\Big|_0^x=-\ln(1+x)$

而 $S(0)=0 \quad \therefore S(x)=-\ln(1+x) \quad x\in(-1,1]$

六、（8 分）求椭球面$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$在第一卦限上的一个切平面，使它与椭球面及三个坐标面围成的体积最小。

设切点 (x_0,y_0,z_0)　$\vec{n}=(2x_0,\frac{y_0}{2},\frac{2}{9}z_0)$

切平面：$2x_0(x-x_0)+\frac{y_0}{2}(y-y_0)+\frac{2}{9}z_0(z-z_0)=0$

$2x_0x+\frac{y_0}{2}y+\frac{2}{9}z_0z=2$

截距为：$\frac{1}{x_0}$，$\frac{4}{y_0}$，$\frac{9}{4z_0}$.

$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\frac{4}{y_0}\cdot\frac{9}{4z_0}-\frac{1}{8}V_{椭}$

而 $V_{\frac{1}{8}椭}$ 固定，即求 $V_1=\frac{3}{2x_0y_0z_0}$ 的最小值.

即求 $f(x,y,z)=xyz$ 在 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 上的最大值.

$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1)$

$$\begin{cases}L_x=yz+2x\lambda=0\\ L_y=xz+\frac{\lambda}{2}y=0\\ L_z=xy+\frac{2\lambda}{9}z=0\\ L_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1=0\end{cases}\Rightarrow 2x^2=\frac{y^2}{2}=\frac{2}{9}z^2$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad y=\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad z=\sqrt{3}$

切平面：$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\sqrt{3}$

$\frac{2}{3}\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{\sqrt{3}}{3}(y-\frac{2}{3}\sqrt{3})+\frac{2}{9}\sqrt{3}(z-\sqrt{3})=0$