浙江工业大学 2018 - 2019 学年第一学期
概率论与数理统计试卷

姓名：______________ 学号：______________ 班级：______________ 任课教师：______________

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	总 分
得分								

分位点数据

$$\Phi(1) = 0.8413, \quad \Phi(2) = 0.9773, \quad t_{0.025}(8) = 2.306, \quad t_{0.05}(8) = 1.860,$$
$$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \quad \chi^2_{0.975}(15) = 6.262, \quad \chi^2_{0.05}(15) = 24.996, \quad \chi^2_{0.95}(15) = 7.261.$$

一. 填空题，共 22 分，每空 2 分。

1. 已知随机事件 A, B 满足 $P(B) = \frac{1}{3}$，且 $P(A|\bar{B}) = 2P(A|B)$，则 $P(B|A) =$ _____。
2. 随机变量 X 的期望 $EX = -1$，且 $E(X+1)^2 = 2$，则 $EX^2 =$ _____。
3. 已知随机变量 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$3P(X \leq 2) = 5P(X \leq 1)$，则 $\lambda =$ _____。
4. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U[a, a+4]$。若 $EX = 1$，则 $a =$ _____，$E|X| =$ _____。
5. 已知二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 1; 1^2, 2^2; -0.5)$。设 $Z = 2X + Y + 1$，则 $EZ =$ _____，$Var(Z) =$ _____。
6. 某机器有 400 个元件，设不同元件是否损坏是相互独立的，且每个元件在一天内损坏的概率均为 0.1，根据中心极限定理，求该机器一天内损坏的元件数目在 34 到 46 之间的概率约为 _____。
7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知。现有 X 的一组样本观测值

$$24, 28, 31, 35, 27, 34, 27, 31, 24,$$

其样本均值的观测值 $\bar{x} =$ _____，样本方差的观测值 $s^2 =$ _____。根据该组观测值，均值 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信上限是 _____。

二. 选择题，共 18 分，每题 3 分。

1. 已知随机事件 A, B, C 满足 $A \subset B \cup C$，则 (　　)
   A）$AB \subset C$　　B）$A\bar{B} \subset C$　　C）$\bar{A}B \subset C$　　D）$\bar{A}\bar{B} \subset C$

2. 设随机变量 X 的分布函数为 F，$Y = 2X - 1$ 的分布函数为 F_Y，则 $F_Y(y) =$ (　　)
   A）$F(\frac{1}{2}y - 1)$　　B）$F(\frac{1}{2}y + 1)$　　C）$F(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2})$　　D）$F(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2})$

3. 已知甲盒中有 2 红 2 蓝共 4 个球，乙盒中有 3 红 3 蓝共 6 个球。从甲盒中随机取两个球，取到红球的个数记为 X；从乙盒中随机取两个球，取到红球的个数为 Y；从甲、乙两盒中各取一个球，取到红球的个数为 Z。分别记 X, Y, Z 的方差为 α, β, γ，则 (　　)
   A）$\alpha > \beta > \gamma$　　B）$\beta > \alpha > \gamma$　　C）$\gamma > \alpha > \beta$　　D）$\gamma > \beta > \alpha$

4. 设随机变量 X 服从指数分布 $Exp(\frac{1}{2})$，则由切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon > 0$，(　　)
   A）$P(|X - 2| \geq \varepsilon) \geq \frac{4}{\varepsilon^2}$　　B）$P(|X - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \geq \frac{4}{\varepsilon^2}$
   C）$P(|X - 2| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon^2}$　　D）$P(|X - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon^2}$

5. 已知 $\theta > 0$，随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim U[0, \theta]$，$Y \sim U[\theta, 2\theta]$。设 $U = aX + bY$，则使得 U 是 θ 最有效的无偏估计时，(　　)
   A）$a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{3}{5}$　　B）$a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{5}$
   C）$a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{4}{7}$　　D）$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

6. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$。X_1, X_2, X_3 是 X 的一组样本，记 $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$。若

$$C[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2]$$

   服从 χ^2-分布，则 (　　)
   A）自由度为 3，$C = 1$　　B）自由度为 3，$C = 2$
   C）自由度为 2，$C = 1$　　D）自由度为 2，$C = 2$

三. 解答题，共 5 题，60 分。

1. (14 分) 设盒中有 3 个红球和 2 个蓝球，从中随机取出 2 个球，记取出的红球数为 X；将取到的蓝球放回，红球不放回，然后再从中随机选出 2 个球，记第二次取到的红球数为 Y。

    1) 求 X 的分布律；

    2) 求 (X,Y) 的联合分布律，并求 $P(X<Y)$；

    3) 求 Y 的分布律。

2. (12 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} x + c, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} . \end{cases}$$

1) 求常数 c；

2) 求 X 的分布函数 $F_X(x)$；

3) 求 $Y = -\ln X$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

3. (14 分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-2x}, & 0<y<x<\infty,\\ 0, & \text{其他}\ .\end{cases}$$

1) 验证常数 $C=4$；

2) 计算边缘分布 $f_X(x), f_Y(y)$，并判断 X, Y 的独立性；

3) 计算 $P(X+Y<2)$。

4. (10 分) 设离散型总体 X 的分布律为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ \ k=1,2,3,\cdots.$$

其中 $0<p<1$ 是未知参数。给定 X 的一组样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 p 的矩估计和极大似然估计。

5. (10 分) 假设某设备的电压值服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ (单位：伏特)。现对该设备的电压值进行 16 次测量，测得样本标准差 $s=3.6$ 伏特。取显著水平 $\alpha=0.05$，能否认为该设备电压值的标准差显著高于正常水平 3 伏特？