# Experiment 1

## FFT 与谱分析

# 1. 实验目的

- 进一步加深 DFT 算法原理和基本性质的理解。
- 熟悉 FFT 算法，增强对 FFT 结果的分析能力。
- 掌握用 FFT 对连续信号和离散时间信号进行谱分析的方法， 了解误差及其产生的原因。

## 2. 实验内容

- 对给定的信号逐个用 FFT 进行谱分析，并画图。

$$x_1[n] = R_4[n]$$

$N$=8,16

$$x_2[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 3 \\ 8-n & 4 \le n \le 7 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

$N$=8,16

$$x_3[n] = \begin{cases} 4-n & 0 \le n \le 3 \\ n-3 & 4 \le n \le 7 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

$N$=8,16

$$x_4[n] = \cos\frac{\pi}{4}n$$

$N$=8,16

$$x_5[n] = \sin\frac{\pi}{8}n$$

$N$=8,16

$$x_6(t) = \cos(8\pi t) + \cos(16\pi t) + \cos(20\pi t)\,, \quad f_s = 16\text{Hz}, \quad f_s = 64\text{Hz}$$

$N$=16, 32, 64

$$x_7[n] = x_4[n] + x_5[n]$$

$N$=8,16

$$x_8[n] = x_4[n] + jx_5[n]$$

$N$=8,16

$$x_9[n] = \{1,2,3,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$$

$N$=16

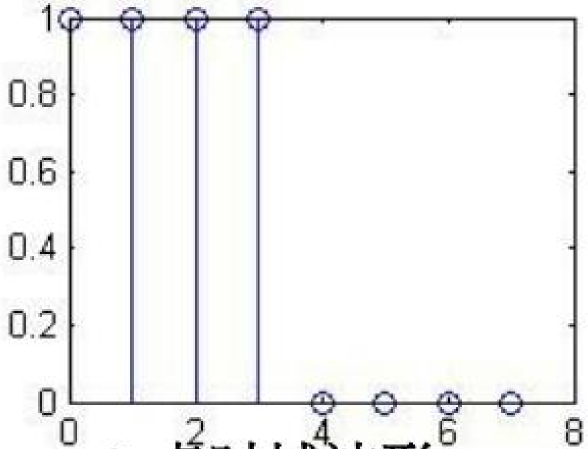
$$x_{10}[n] = \{1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4\}$$

$N$=16

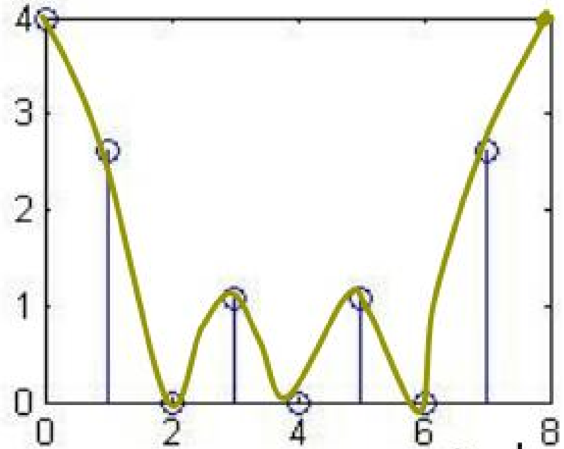
$$x_{11}[n] = \{1,0,0,0,2,0,0,0,3,0,0,0,4,0,0,0\}$$

$N$=16

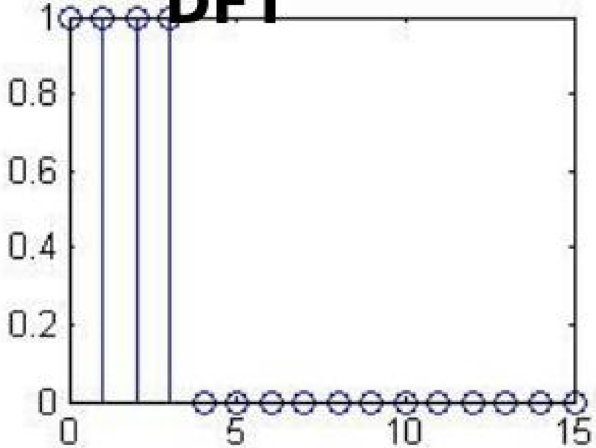
(1) $x_1[n] = R_4[n]$



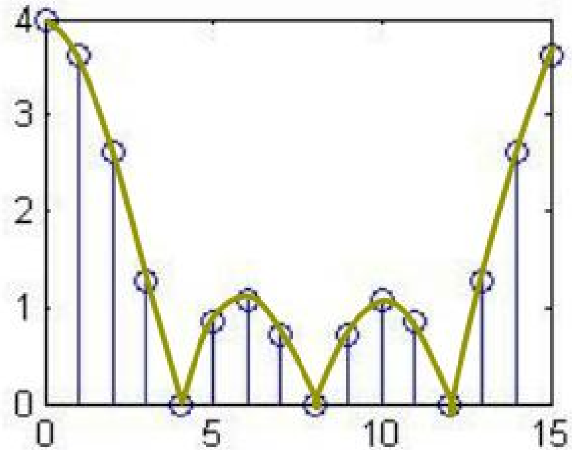
8 点时域波形



8 点 DFT



16 点时域波形

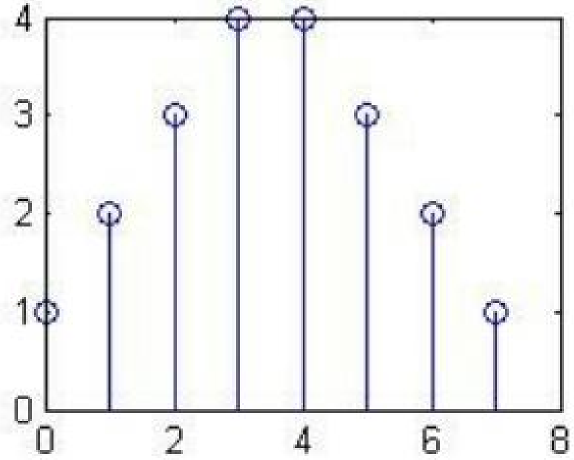


16 点 DFT

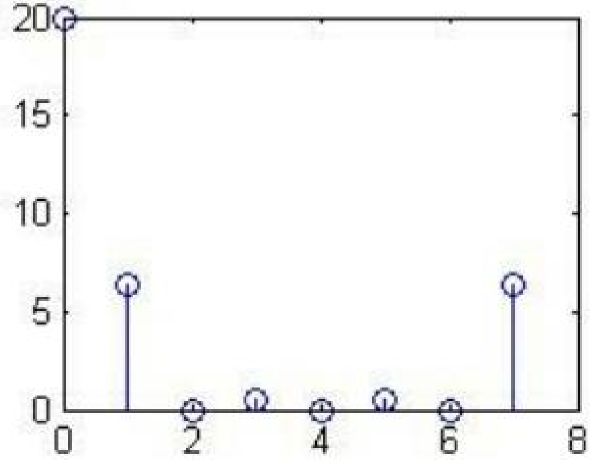
```
clear
i=0;
close all;
N=8

n=0:N-1;
x1=[1 1 1 1 0 0 0 0];
m=0:2*N-1;
x2=[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

f1=fft(x1,N);
f2=fft(x2,2*N);
```

```
subplot(2,2,1)
stem(n,x1)

subplot(2,2,2)
stem(n,abs(f1))

subplot(2,2,3)
stem(m,x2)

subplot(2,2,4)
stem(m,abs(f2))
```

(2) $x_2[n]=\{1,2,3,4,4,3,2,1\}$

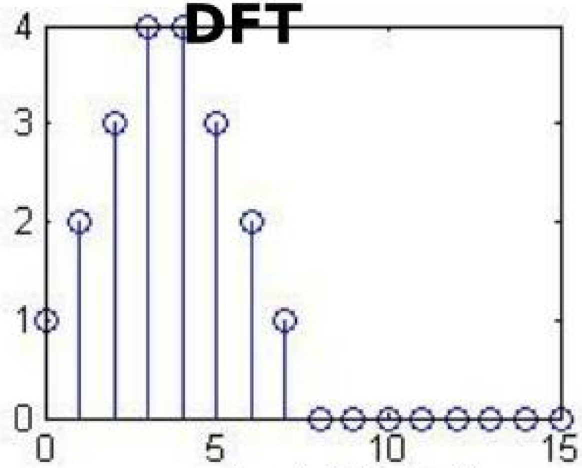


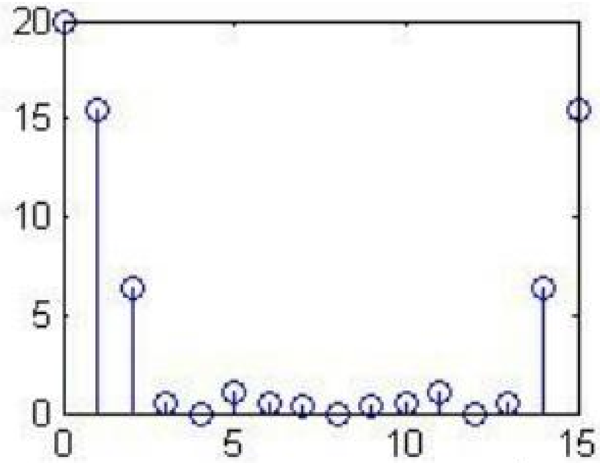

8 点时域波形




8 点

DFT



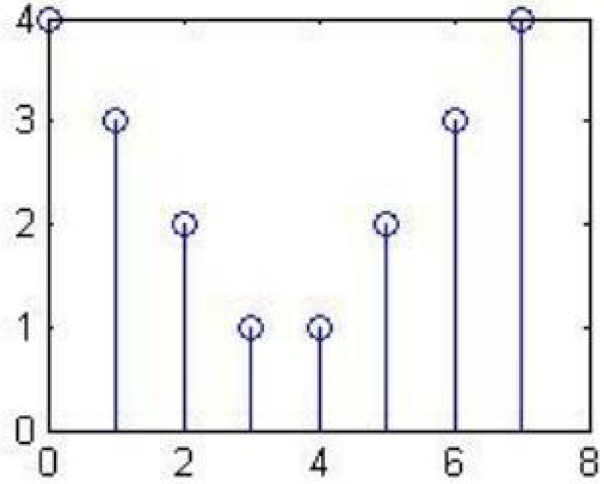




**16** 点时域波形

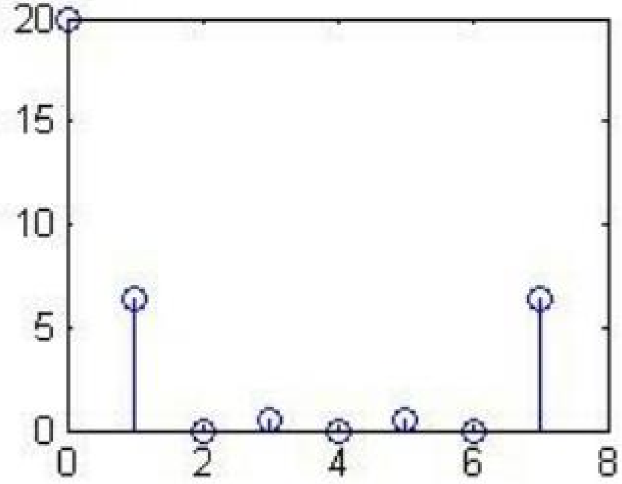
**16** 点

**DFT**

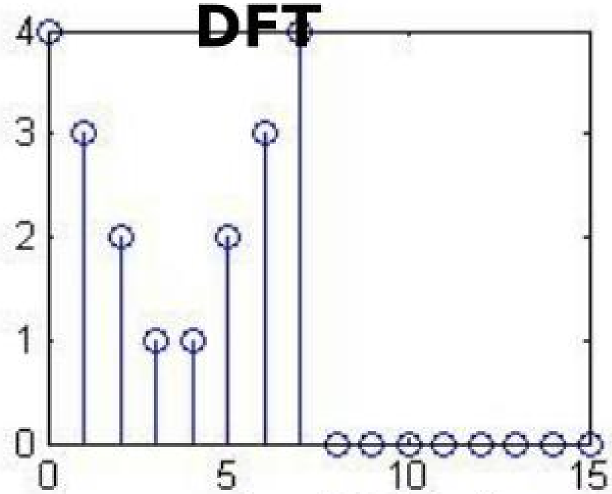
(3) $x_3[n] = \{4,3,2,1,1,2,3,4\}$



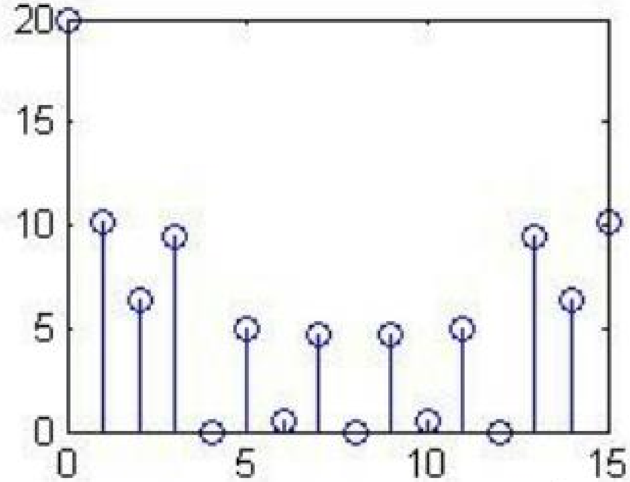

8 点时域波形




8 点 DFT

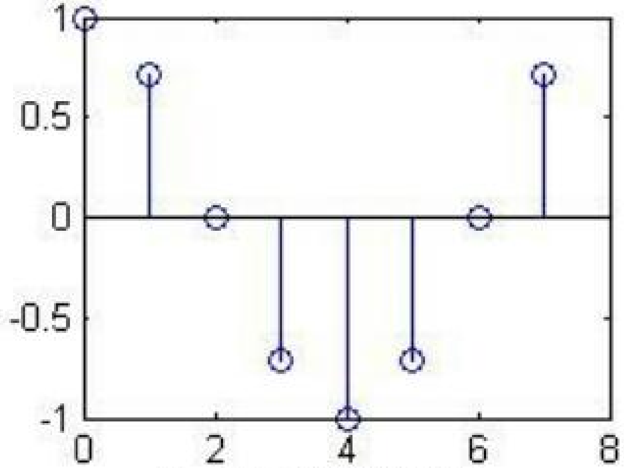



16 点时域波形

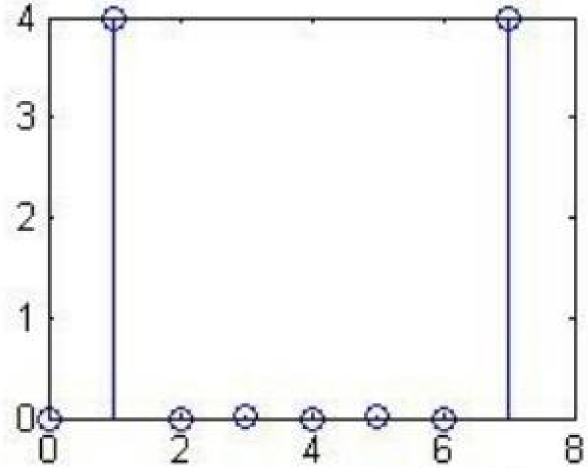



16 点 DFT

(4) $x_4[n] = \cos\dfrac{\pi n}{4}$ 周期为 8

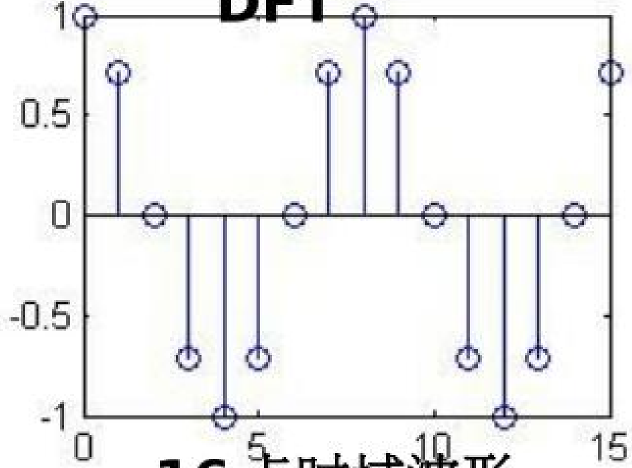


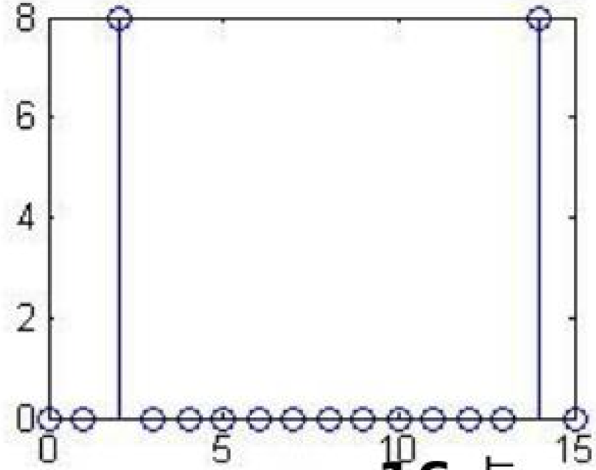
8 点时域波形



8 点

DFT



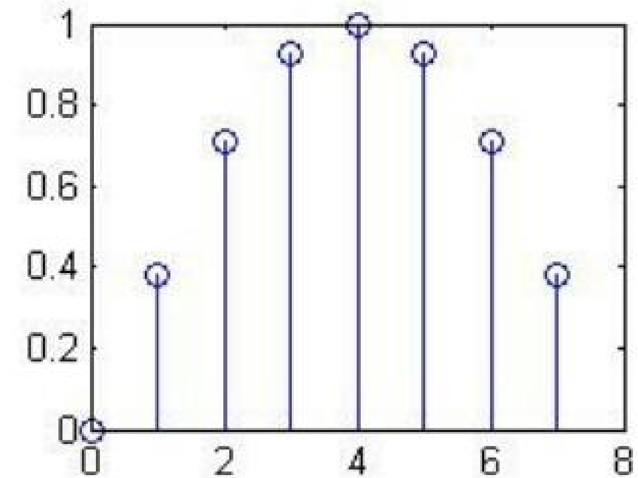


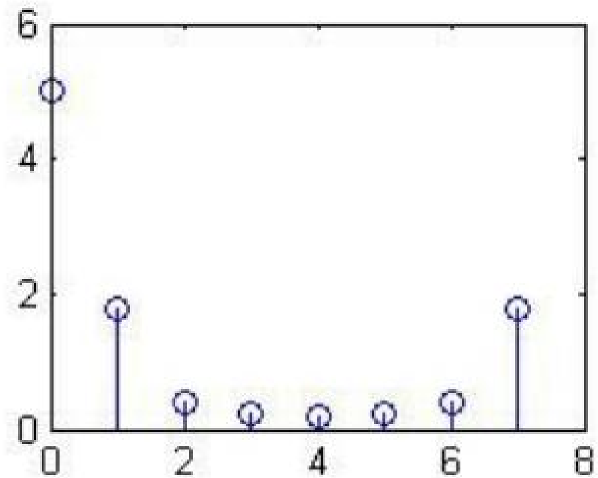
16 点时域波形

**16** 点

**DFT**

(5) $x_5[n]=\sin\dfrac{\pi n}{8}$



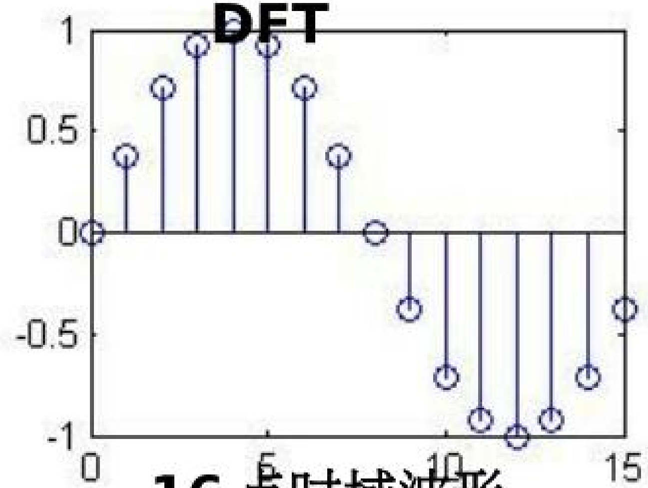


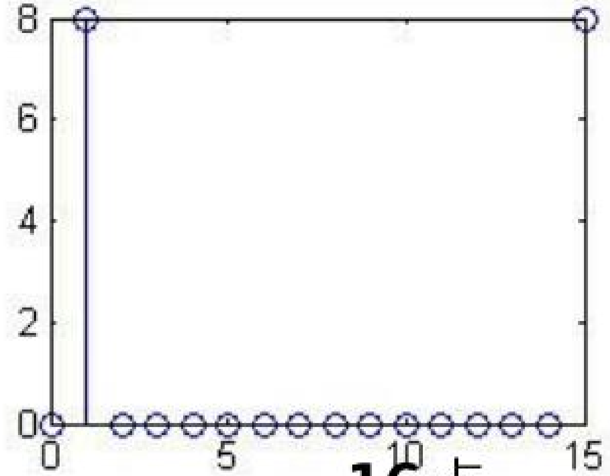
周期为 **16**，所以 8 点 **DFT** 会有截断效应

8 点时域波形

**DFT**

8 点





**16** 点时域波形

**DFT**

**16** 点

(6) $x_6(t)=\cos(8\pi t)+\cos(16\pi t)+\cos(20\pi t)$

分析：最高频率为 $f_{\max}$=10Hz，

- 采样频率 $f_s$=16Hz，频谱混叠，

  采样后得到的 DT 信号为 $$x_6[n]=\cos\frac{\pi n}{2}+\cos\pi n+\cos\frac{5\pi n}{4}$$

  可以计算出，$x_6[n]$ 周期为 8

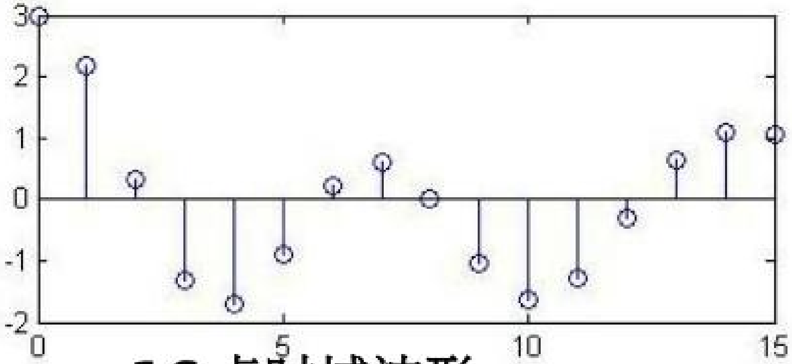
- 采样频率 $f_s$=64Hz， $$x_6[n]=\cos\frac{\pi n}{8}+\cos\frac{\pi n}{4}+\cos\frac{5\pi n}{16}$$

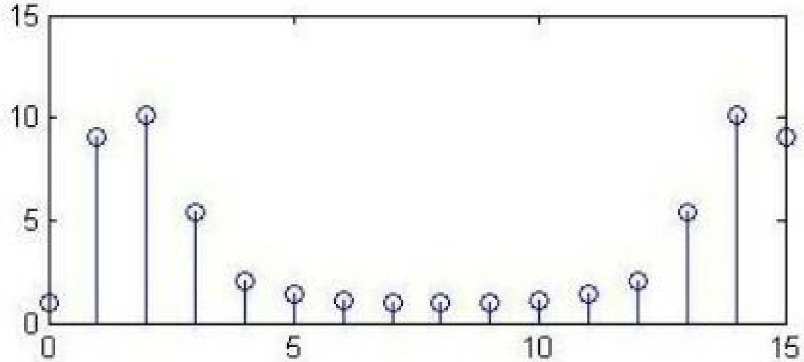
  $x_6[n]$ 周期为 32

```
N=16;
fs=64;
n=0:N-1;
x1=cos(8*pi*n/fs)+cos(16*pi*n/fs)+cos(20*pi*n/fs);
m=0:2*N-1;
x2=cos(8*pi*m/fs)+cos(16*pi*m/fs)+cos(20*pi*m/fs);
l=0:4*N-1;
x3=cos(8*pi*l/fs)+cos(16*pi*l/fs)+cos(20*pi*l/fs);
f1=fft(x1,N);
f2=fft(x2,2*N);
f3=fft(x3,4*N);
```

$$x_6[n] = \cos\frac{\pi n}{8} + \cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{5\pi n}{16}$$

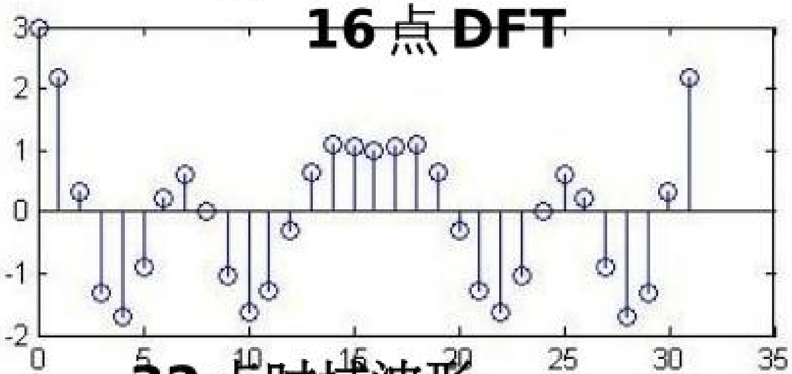
周期 $N$=32

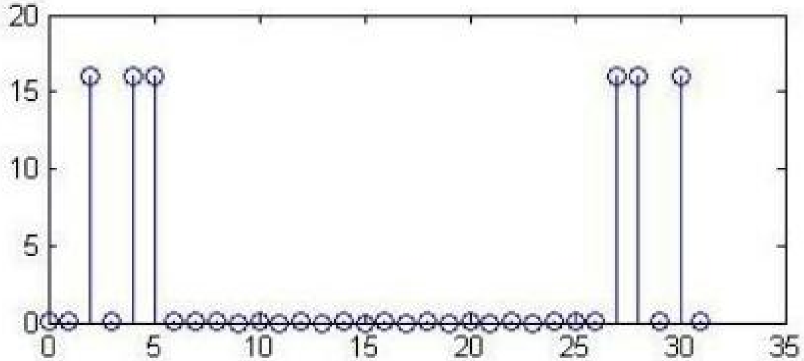




**16 点时域波形**

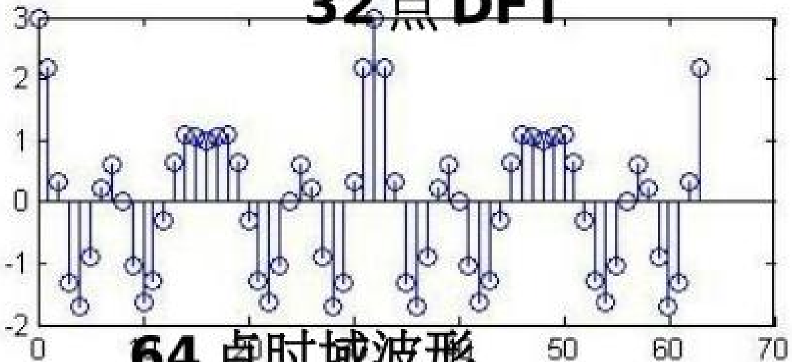
**16 点 DFT**

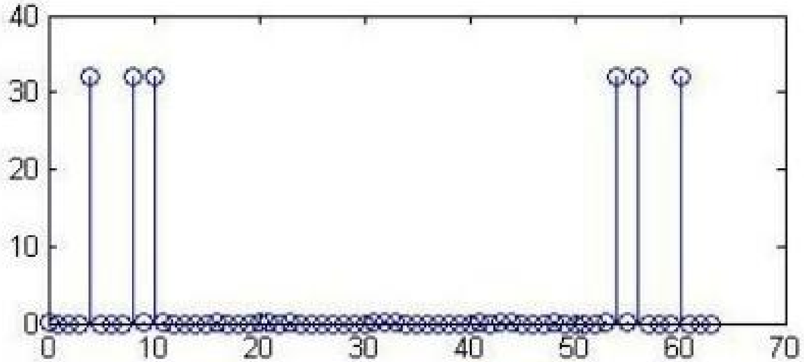




**32 点时域波形**

**32 点 DFT**

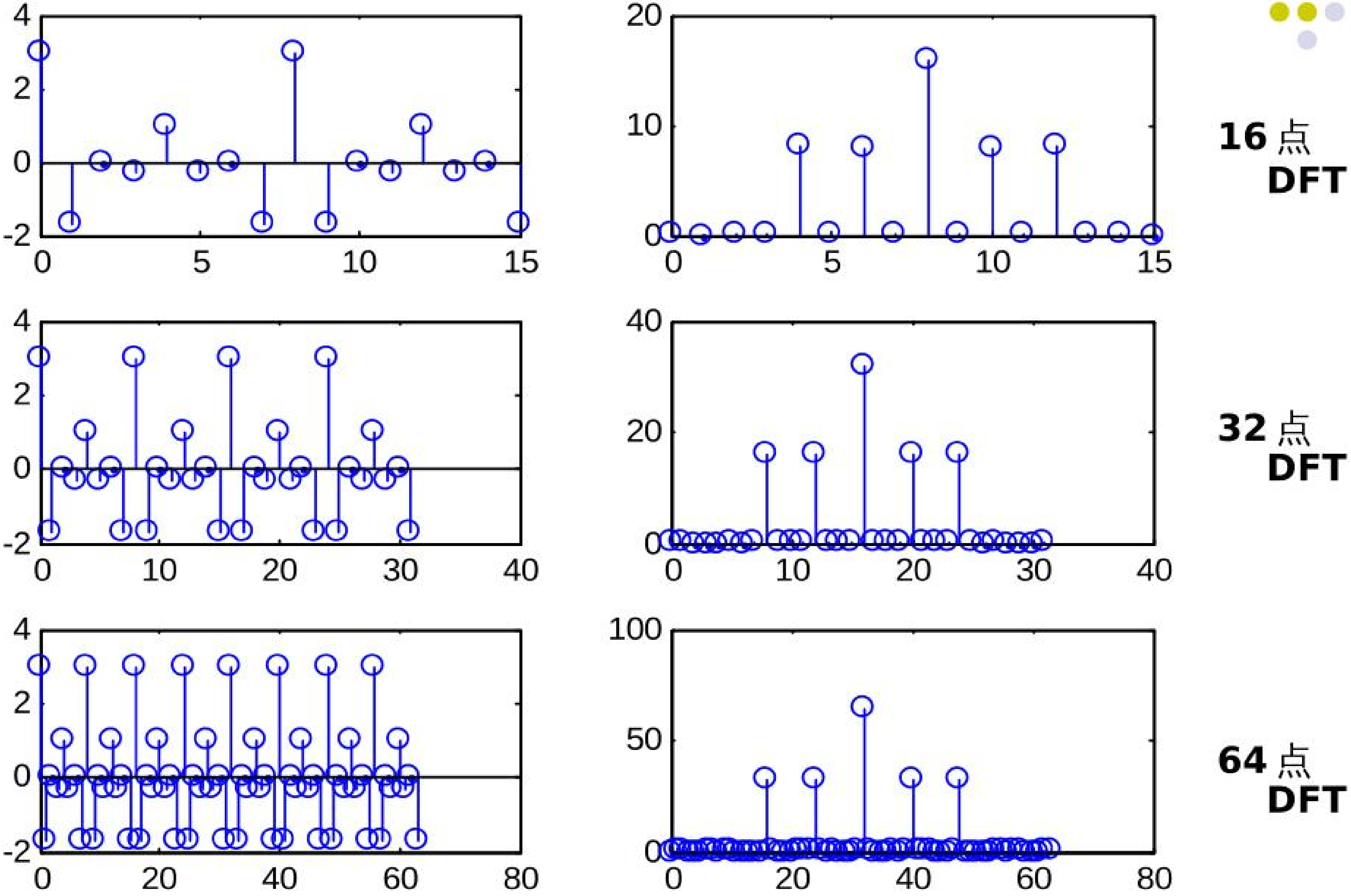




**64 点时域波形**

**64 点 DFT**

$$x_6[n] = \cos\frac{\pi n}{2} + \cos\pi n + \cos\frac{5\pi n}{4}$$ 周期 $N$=8



(7) $x_7[n] = x_4[n] + x_5[n]$

**N=8,16**

$$X_7(k) = X_4(k) + X_5(k)$$

周期为 16，所以 8 点 DFT 会有截断效应

分析:

$x_4[n]$ 是实偶对称的，所以 $X_4(k)$ 也是实偶对称的；

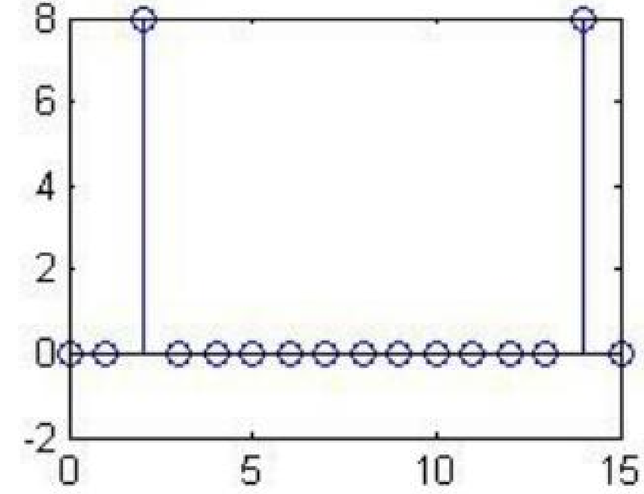
$x_5[n]$ 是实奇对称的，所以 $X_5(k)$ 是纯虚奇对称的。

由此可见，

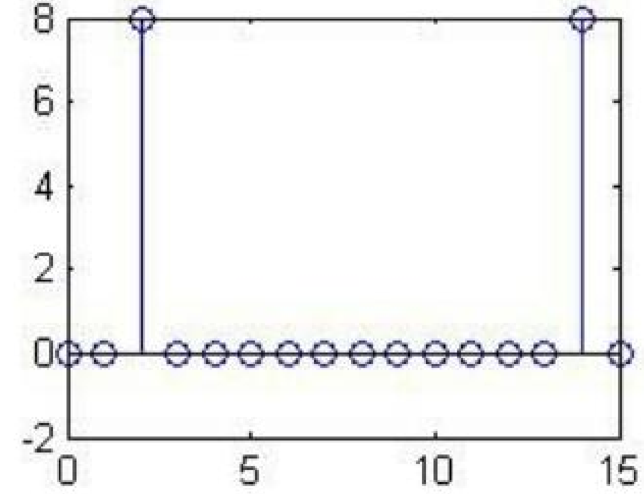
$X_4(k)$ 等于 $X_7(k)$ 的实部，

$X_5(k)$ 的虚部等于 $X_7(k)$ 的虚部

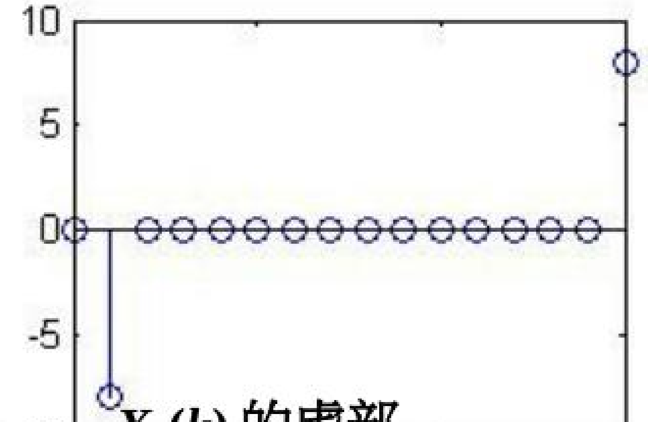
# 16 点 DFT



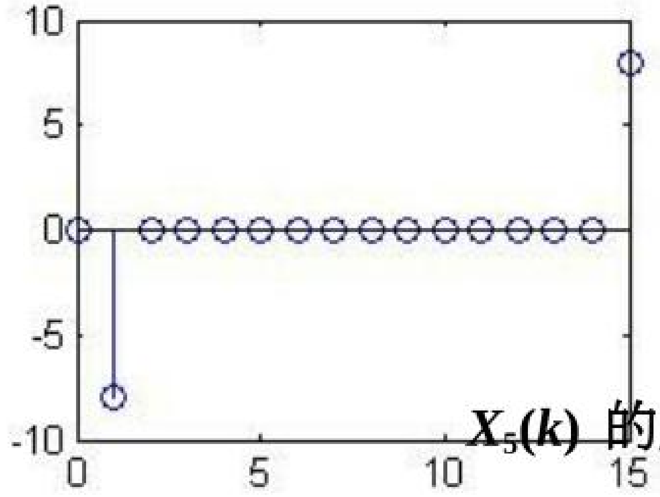

$X_7(k)$ 的实部




$X_4(k)$




$X_7(k)$ 的虚部




$X_5(k)$ 的虚

(8) $x_8[n] = x_4[n] + jx_5[n]$

$$X_8(k) = X_4(k) + jX_5(k)$$

分析:

$x_4[n]$ 是实偶对称的，所以 $X_4(k)$ 也是实偶对称的;

$x_5[n]$ 是实奇对称的，所以 $X_5(k)$ 是纯虚奇对称的。

由此可见， $X_8(k)$ 是实函数，并且

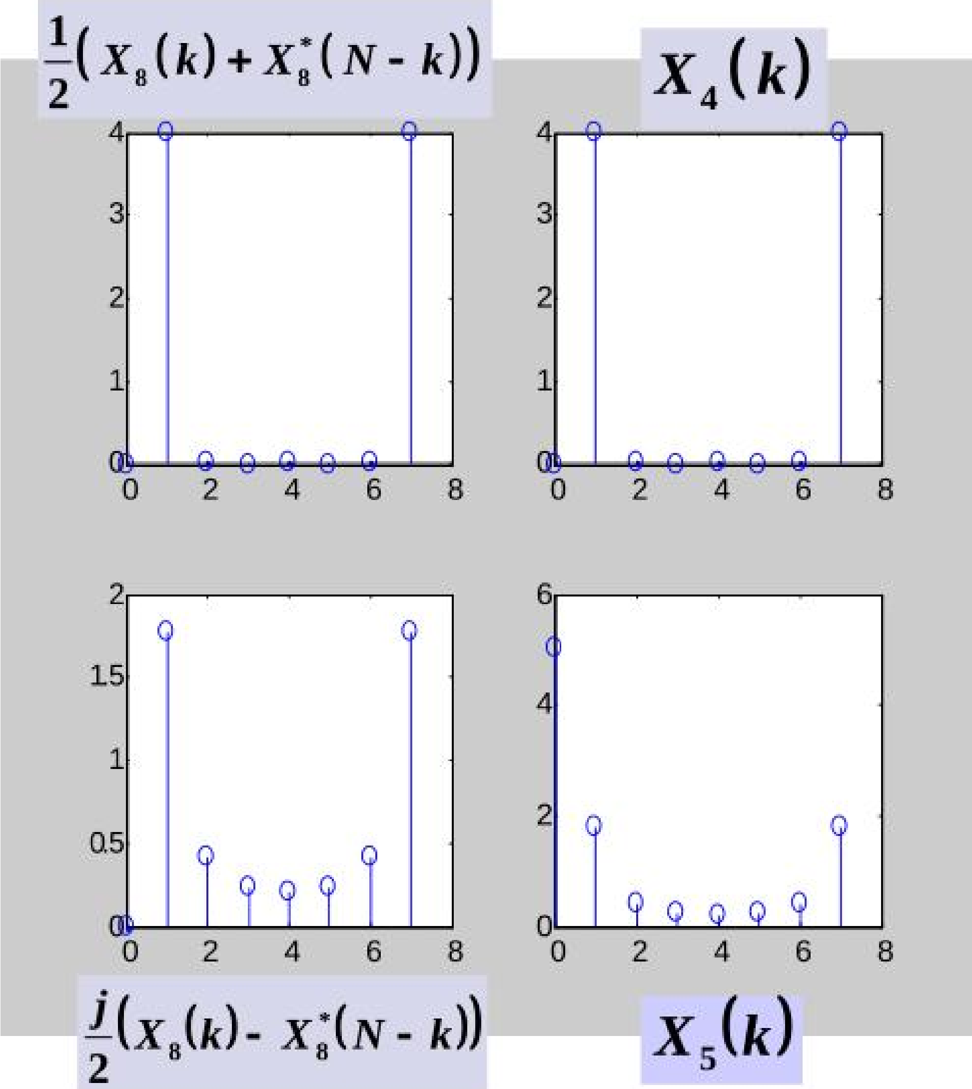
$$x_4[n] \xleftrightarrow{DFT} X_4(k) = \frac{1}{2}\left(X_8(k) + X_8^*(N-k)\right)$$

$$x_5[n] \xleftrightarrow{DFT} X_5(k) = \frac{j}{2}\left(X_8(k) - X_8^*(N-k)\right)$$

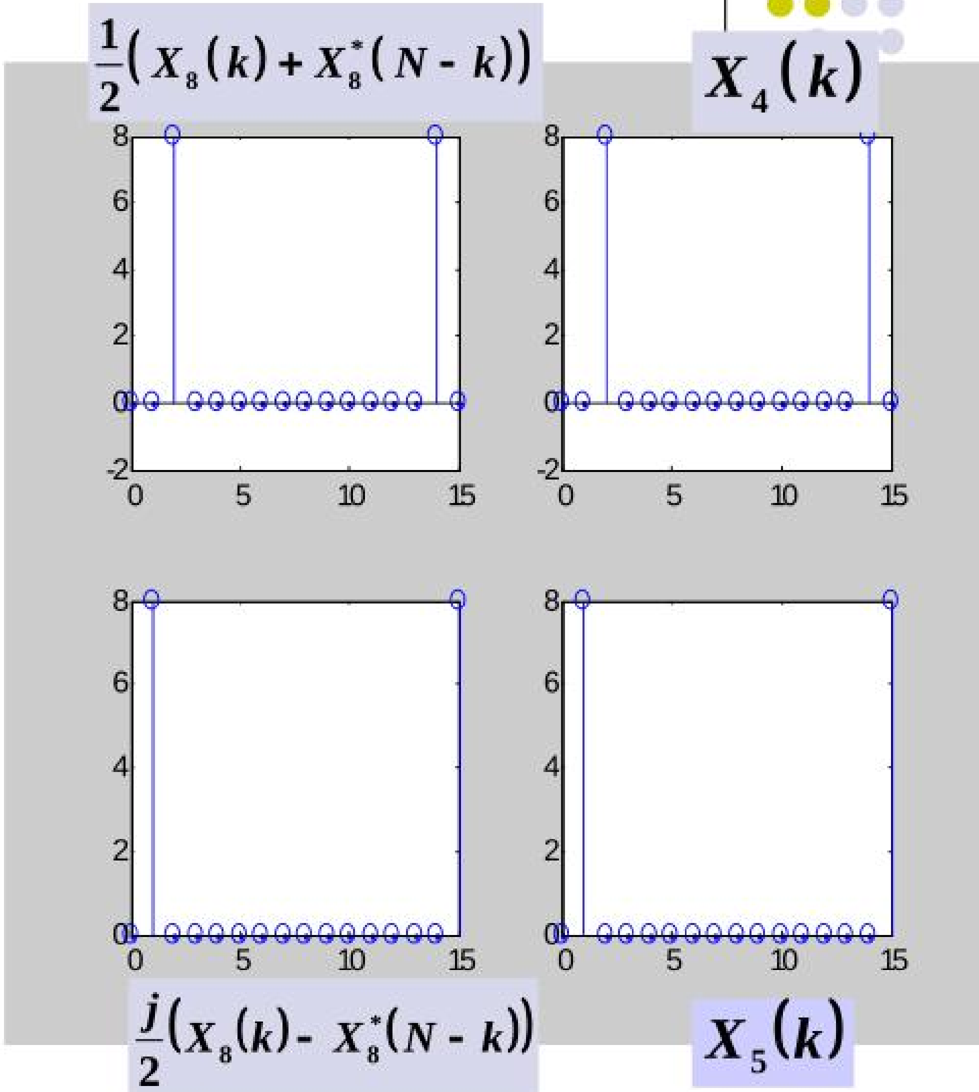
```
clear
close all;
N=8;
n=0:N-1;
x51=sin(0.125*pi*n); x41=cos(0.25*pi*n);  x81=x41+j*x51;

m=0:2*N-1;
x52=sin(0.125*pi*m);  x42=cos(0.25*pi*m);  x82=x42+j*x52;

f41=fft(x41,N);   f51=fft(x51,N);    f81=fft(x81,N);
f83=f81;
for i=2:N
f83(i)=conj(f81(N+2-i));
end

f42=fft(x42,2*N);   f52=fft(x52,2*N);   f82=fft(x82,2*N);
f84=f82;
for i=2:2*N
f84(i)=conj(f82(2*N+2-i));
end
```

```
figure(1)
subplot(2,2,1); stem(n,(f81+f83)/2);
subplot(2,2,2); stem(n,f41);
subplot(2,2,3); stem(n,abs((f81-f83)*j/2));
subplot(2,2,4); stem(n,abs(f51));

figure(2)
subplot(2,2,1); stem(m,(f82+f84)/2);
subplot(2,2,2); stem(m,f42);
subplot(2,2,3); stem(m,abs((f82-f84)*j/2));
subplot(2,2,4); stem(m,abs(f52));
```

## N=8




## N=16




周期为 16， 所以 8 点 DFT 会有截断效

(9)

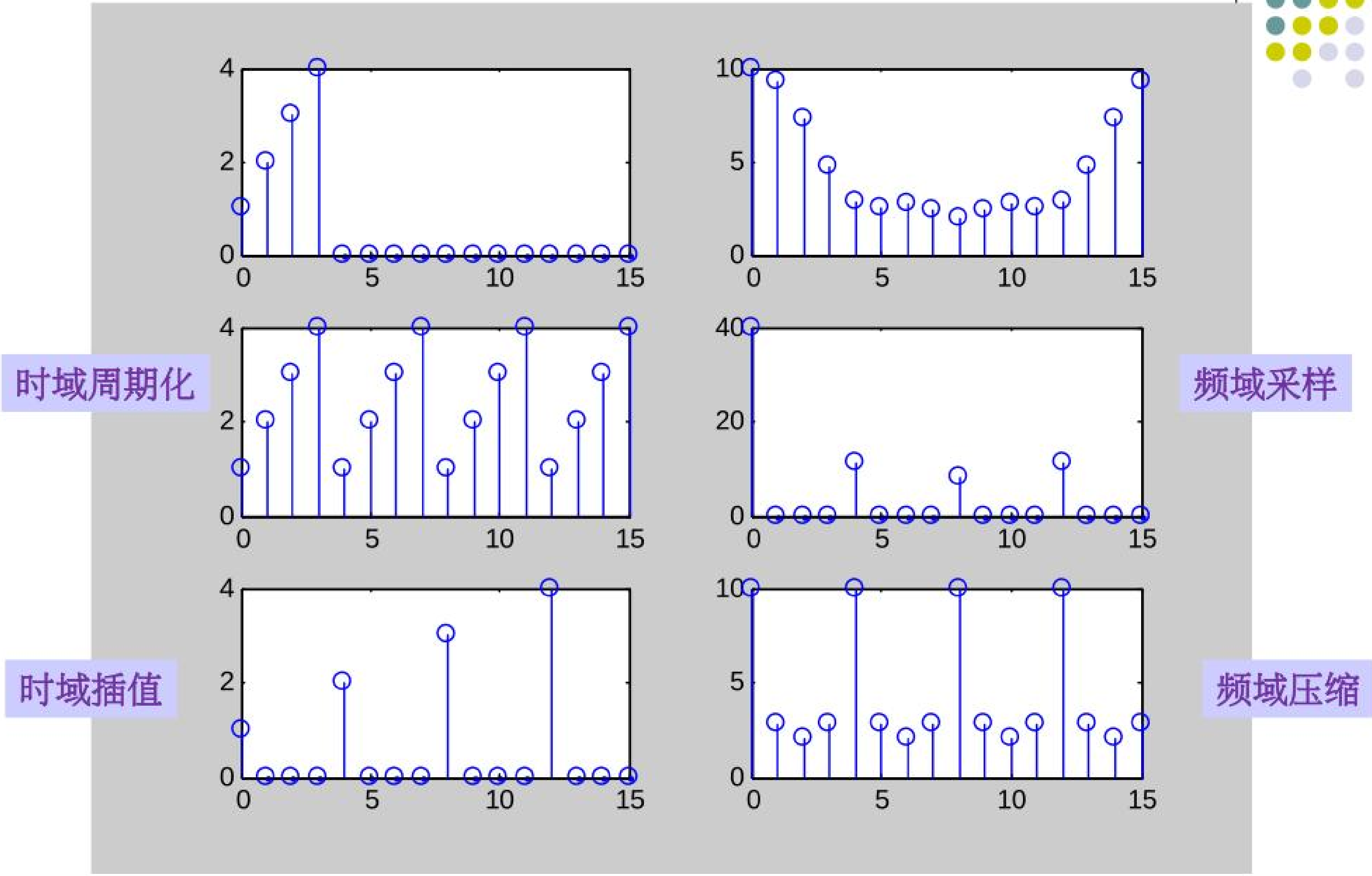
$$x_9[n]=\{1,2,3,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$$

$$x_{10}[n]=\{1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4\}$$

$$x_{11}[n]=\{1,0,0,0,2,0,0,0,3,0,0,0,4,0,0,0\}$$

$N$=16

分析信号末尾补零、周期性延拓、时域插值在频谱上的变化


时域周期化
频域采样
时域插值
频域压缩

$x[n]$ 是长度为 $N$ 的有限长序列，其 $N$ 点 DFT 为 $X[k]$ 。现将 $x[n]$ 每两个序列值之间插入 $r$-1 个零，得到长度为 $rN$ 的新序列 $y[n]$ 。设 $Y[k]$ 为 $y[n]$ 的 $rN$ 点 DFT 。求 $Y[k]$ 与 $X[k]$ 的关系。

解:

$$x[n] \xleftarrow{N-DFT} \xrightarrow{} X[k] \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{r}\right] & n = mr \quad (m = 0,1,\cdots,N-1) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$y[n]$ 是长度为 $rN$ 的序列

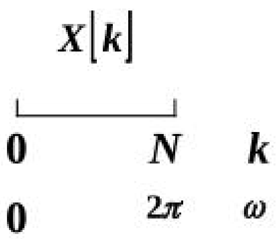
对 $y[n]$ 做 $rN$ 点 DFT

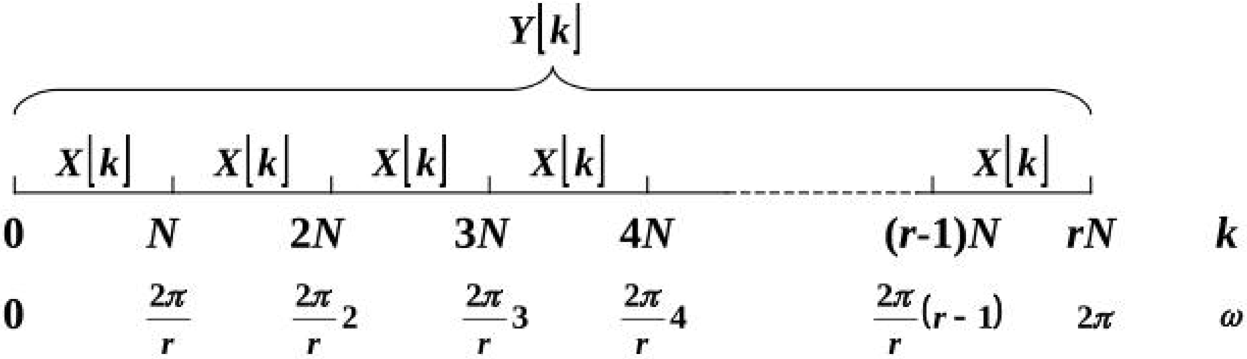
$$Y[k]=\sum_{n=0}^{rN-1} y[n]W_{rN}^{kn} \qquad k=0,1,\cdots,rN-1$$

$$\overset{n=mr}{=\!=\!=}\sum_{m=0}^{N-1} y[mr]W_{rN}^{kmr}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} y[mr]W_{N}^{km}=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_{N}^{km}$$

$$=X[k] \qquad \color{red}{k=0,1,\cdots,rN-1}$$



# 实验报告要求

- 对 **11** 个信号的频谱进行比较分析，简要回答思考题，简述相应的 **DFT** 原理。
- 结合对信号 $x_6(t)$ 的不同采样率下的频谱分析，简要说明对连续信号做谱分析应注意哪些?
- 结合实验内容，总结说明用 **FFT** 对周期信号作谱分析时，时域截取长度的选择应注意什么?
- 总结实验所得主要结论。