浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2019 ～ 2020 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：___________________选课班中编号：_____

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 四阶行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=$____________.

2. 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in R^3$，方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}),\ \boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\right)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=1, |\boldsymbol{B}|=2$，则

   $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$______.

3. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}=$ ____________.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$ ______________, $|\boldsymbol{BA}|=$______.

5. 向量组$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$与向量组$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$等价，则 $a=$______, $b=$______.

6. 向量空间$\boldsymbol{V}$ 的一组基为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$在这组基下的坐标为_____.

7. $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则当 $k=$______时 $\boldsymbol{\eta}=k\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 6，则 $a=$_____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵，则以下一定正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　(B) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　(C) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　(D) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，k 为非零常数，则 $(k\boldsymbol{A})^*=$（　　）.

(A) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$　(B) $k\boldsymbol{A}^*$　(C) $k^3\boldsymbol{A}^*$　(D) $k^4\boldsymbol{A}^*$

3. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都为 4 维向量，则以下命题正确的是（　　）.

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的倍数，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则每个向量都可表示为其余向量的线性组合

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则每个向量都不能表示为其余向量的线性组合

4. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，则以下也可作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$　(B) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$

(C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$　(D) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{\alpha}$

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 0，则以下结论错误的是（　　）.

(A) $|\boldsymbol{A}|=0$　(B) $\boldsymbol{A}$ 与零矩阵相似

(C) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$　(D) $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值也全是 0

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$的秩、极大无关组，

并用该极大无关组表示其余向量.

4. 试问当k取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=k\\4x_1+kx_2+2x_3=k+2\\(k+5)x_1+x_2+4x_3=k^2+4\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在其有无穷多解时给出通解.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\varLambda}$.

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. (6 分) 已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解.

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ ，证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$.