计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE


# 基于等价关系的完全确定时序逻辑电路状态化简算法

尚 奥 裴晓鹏 吕迎春 陈泽华
(太原理工大学信息工程学院 太原 030024)

**摘 要** 完全确定时序逻辑电路状态化简是指找到并合并逻辑电路中的等价状态，进而简化电路，提高电路安全性，节约硬件电路成本。电路状态化简的关键是依据等价关系找到电路中的最大状态等价类集合。针对此类问题，提出了一种基于等价关系构建状态转移系统矩阵进行状态化简的算法，并将粒计算理论中的分层粒化思想用于最大等价类集合的求取过程中。在定义输出矩阵和次态矩阵的基础上，根据输出矩阵对原始状态进行初级等价类的划分与标记，可以得到初态标记矩阵和次态标记矩阵，然后构建状态转移系统矩阵。利用等价关系将状态转移系统矩阵中相同的列进行合并，则完成一次对原始状态最大等价类的划分。根据迭代原则，等价类粒子由粗到细，直到分类不再改变时便得到最终的最大状态等价类集合。最后进行状态合并，得到最小化状态表。算法分析表明，该算法简单、准确、有效。

**关键词** 状态化简，等价关系，粒计算，时序逻辑电路
**中图法分类号** TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.01.019

## State Reduction Algorithm for Completely Specified Sequential Logic Circuit Based on Equivalence Relation

SHANG Ao PEI Xiao-peng LV Ying-chun CHEN Ze-hua
(Department of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract** State reduction of the completely specified sequential logic circuit refers to find and combine the equivalent states in the logic circuit. The reduction can simplify the circuit, improve its safety and decrease its hardware cost at the same time. The key point for state reduction is to find the maximal state equivalence classes. In this paper, an equivalence relation based algorithm was proposed by introducing granular computing method. By defining output matrix, sub-state matrix, and marking the initial states in the matrices, the initial state mark matrix and the sub-state mark matrix were obtained. Then, state transition system matrix was constructed, and the the initial states in the state table was continuously partitioned from coarser granularity to finer granularity until the maximal state equivalence classes were obtained. The experimental results and complexity analysis show the accuracy and efficiency of the proposed algorithm.

**Keywords** State reduction, Equivalence relation, Granular computing, Sequential logic circuits

## 1 引言

时序逻辑电路的优化一直是电路设计中的基础性研究问题，其优化的主要目标之一是找到并合并电路中的等价状态，以消去冗余，提高电路的简洁性和安全性。根据输出和次态是否含有不确定项，时序逻辑电路可以分为完全确定时序逻辑电路和非完全确定时序逻辑电路。本文主要研究完全确定时序逻辑电路的状态化简。

常用的时序逻辑电路状态化简方法有观察法[1]、隐含表法[2-3]、划分法[4]。观察法根据等价状态的定义直接通过观察分析进行划分，适合状态较少的情况，适用范围小。传统的隐含表法[2]和隐含表法的改进算法[3]是通过填写隐含表，进行顺序比较和关联比较，从而得到等价状态，过程直观，但算法繁琐，复杂度较高。文献[5]提出利用图论理论构建连接矩阵来进行状态化简。文献[6]提出了基于粒计算理论[7]的状态化简算法，通过对原始状态进行分层粒化，由粗粒度到细粒度对论域元素进行持续划分，直至最终状态。文献[8]提出了一种状态化简的并行算法；文献[9]改进了文献[8]中的并行算法，提高了化简效率。

粒计算理论[7]是人工智能领域内一种处理复杂知识表达系统的新方法，可以有效求解等价关系、相容关系等知识模型的相关问题，其核心思想是采用由粗到细、不断求精的方法对问题进行分层粒化，降低问题的复杂性，使问题的求解简单有效。

本文在文献[6,8-9]的基础上通过定义输出矩阵和次态矩阵，来描述状态转移表中的状态输出和次态转移情况，利用

到稿日期：2017-03-03 返修日期：2017-06-19 本文受国家自然科学基金资助项目(61402319)，山西省自然科学基金项目(2014021022-4)资助。
尚 奥(1992－)，男，硕士，主要研究方向为粒计算、数字逻辑电路；裴晓鹏(1991－)，男，硕士，主要研究方向为粗糙集、三支决策；吕迎春(1977－)，女，博士，讲师，主要研究方向为新型传感器、智能系统；陈泽华(1974－)，女，博士，教授，CCF会员，主要研究方向为粒计算、智能信息处理及应用，E-mail：zehuachen@163.com(通信作者)。

等价关系得到初级等价类的划分并对其进行标记,标记的数字代表不同的粒子,在粒子不断细化的过程中将矩阵迭代运算变为状态转移系统矩阵的标记,并得到最大等价类集合,从而最终实现状态化简。

## 2　基本概念

状态转移表用来描述时序逻辑电路的逻辑功能,能够直观地反映电路中输入、输出与相对应的状态转移之间的关系。

**定义1**　$\Omega=(X,Q,Z,Q',\delta,\lambda)$表示时序逻辑电路,$X$表示输入集合,$X=\{x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_{m-1}\}$,$X\neq\varnothing$。其中,$m$为不同输入的总数;$Q$表示初始状态集合,$Q=\{q_1,\cdots,q_j,\cdots,q_n\}$,$Q\neq\varnothing$,$n$为初始状态个数;$Q'=\delta(q,x_i)$表示某一时刻,输入为$x_i$时,状态$q$的次态;$Z=\lambda(q,x_i)$表示某一时刻,输入为$x_i$时,状态$q$的输出。

本文讨论两个输入的情况,即$X=\{x_0,x_1\}$。

**定义2**[6]　假设状态$q_j$和$q_h$是原始状态转移表中的两个状态。若对于所有可能的输入序列,电路均有相同的输出序列,则称状态$q_j$和$q_h$等价,$q_j$和$q_h$是等价状态,记作$(q_j,q_h)$。

等价状态有如下3个基本性质:

自反性:$\forall q_j,\exists(q_j,q_j)$;

对称性:$(q_j,q_h)\rightarrow(q_h,q_j)$;

传递性:$(q_h,q_j),(q_j,q_s)\rightarrow(q_h,q_s)$。

在传递性的基础上,合并所有等价状态构成的集合,构成等价类,记作$\{q_j,q_h,q_s\}$。

**定义3**[3]　不是任何其他等价类子集的等价类称为一个最大等价类。若某一状态与其他状态都不等价,则它可独立构成一个最大等价类。

最大等价类集合是指所有最大等价类构成的集合。最大等价类集合中的每个最大等价类可以合并成最简状态转换的一个状态,最简状态转换表中的数目等于最大等价类集合中最大等价类的数目。

**定义4**　输出矩阵$Z(x)$是指在不同输入下,状态转移表中所有输出的矩阵表示形式:

$$Z(x)=\begin{bmatrix}\lambda(q_j,x_0)\\\lambda(q_j,x_1)\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中,$\lambda(q_j,x_0)$表示输入为$x_0$时,状态$q_j$对应的输出;$\lambda(q_j,x_1)$表示输入为$x_1$时,状态$q_j$对应的输出。

**定义5**　次态矩阵$B(x)$表示状态转移表中初始状态和次态之间的状态转移关系,每一个输入对应引出次态矩阵的一行:

$$\begin{cases}B(x)=(b_{ij})_{m\times n}\\\text{若 }\delta(q_j,x_i)=q_u\text{,则 }b_{ij}=q_u\end{cases}\tag{2}$$

其中,$B(x)$表示状态转移表中不同输入下各原始状态与对应的次态之间的状态转移情况,其中矩阵的行代表对应的输入,列代表该时刻的所有初始状态对应的次态,原始状态$q_j$转移到状态$q_u$,则$b_{ij}=q_u$。

**定义6**　根据输出矩阵$Z(x)$对原始状态集合$Q$进行划分,将矩阵$Z(x)$中列向量相同的分为一类,记为$\pi_1=Q/Z(x)$,定义为:

$$Q/Z(x)=\bigcup\{(q_i,q_j)\mid\lambda(q_i,x_m)=\lambda(q_j,x_m)\}\tag{3}$$

完成划分后根据划分情况进行等价类的标记,此时可将等价类标记为$\{1,2,\cdots,r-1,r\}$。

**定义7**　在得到标记的等价类后,每个状态可用其被包含的等价类的标记表示,则得到初态标记矩阵$Z^*(x)$,同理得到次态标记矩阵$B^*(x)$,定义为:

$$Z^*(x)=(c_{wv})_{1\times n},c_{wv}\in\{1,2,\cdots,r-1,r\}\tag{4}$$

$$B^*(x)=(d_{pv})_{m\times n},d_{pv}\in\{1,2,\cdots,r-1,r\}\tag{5}$$

此时得到的标记输出矩阵$Z^*(x)$只有一行,它直观地反映出各状态的分类情况。$Z^*(x)$和$B^*(x)$随着分类和标记情况的改变而动态变化。

**定义8**　由$Z^*(x)$和$B^*(x)$得到状态转移系统矩阵$M(x)$:

$$M(x)=\begin{bmatrix}B^*(x)\\Z^*(x)\end{bmatrix}_{(m+1)\times n}\tag{6}$$

$M(x)$可以将状态转移表中的信息以矩阵形式完整地表述,且通过相同列向量的合并可以直观地得出更加细化的等价类划分定义$\pi_i=Q/M(x)$:

$$Q/M(x)=\bigcup\{(q_i,q_j)\mid\lambda(q_i,x_m)=\lambda(q_j,x_m),\ \delta(q_i,x_m)=\delta(q_j,x_m)\}\tag{7}$$

通过$M(x)$的更新迭代,等价类粒子不断细化,当$M(x)$保持不变时,即可得到最大等价类集合。

## 3　状态化简算法描述

### 3.1　算法依据

等价类中的所有状态在同一输入情况下需满足输出相等和次态等价这两个条件。首先根据输出矩阵$Z(x)$得到初始的等价类划分,并且后续所有操作都基于此初始等价类进行划分,从而保证了输出相等的要求;由于时序逻辑电路的次态是一个动态变化的过程,因此将初始状态的次态情况和输出情况相结合来构建状态转移系统矩阵$M(x)$,通过迭代不断得到输出相等且次态等价的等价类划分,对每次得到的划分进行标记,不同的标记代表不同的等价类粒子,划分由粗到细,粒子数目由少到多,直到划分不再变化,即得到最终的最大等价类集合。

### 3.2　基于状态转移系统矩阵的时序逻辑电路状态化简算法

**算法1**　基于状态转移系统矩阵的时序逻辑电路状态化简算法

输入:完全确定时序逻辑电路逻辑状态转移表

输出:最大等价类集合

1. 根据电路的状态转移表,得到初始状态集合Q,输出矩阵Z(x)和次态矩阵B(x)。
2. 根据输出矩阵Z(x),对初始状态进行初级划分$\pi_1$=Q/Z(x),将划分得到的r个等价类依次标记为1,…,r。将每个等价类中的状态都用该等价类的标记来表示,则得到初态标记矩阵Z*(x)和次态标记矩阵B*(x),并由Z*(x)和B*(x)构建状态转移系统矩阵M(x)。
3. 由M(x)得到次级划分$\pi_2$=Q/M(x)。比较$\pi_2$和$\pi_1$的划分结果是否一致,若一致,则终止划分,转至步骤5;否则,转至步骤4。
4. 将$\pi_2$划分中得到的新的等价类标记为"r+1,r+2,…"类,然后将所有状态按照新的标记表示,从而得到更新的Z*(x),B*(x)和M(x),由M(x)得到新的划分$\pi_3$=Q/M(x),比较$\pi_3$和$\pi_2$的划分是

否一致，若一致，则终止划分；否则重复该过程。

5. 当 $\pi_k=\pi_{k-1}$(k=1,2,3,…)时，得到最终的等价状态划分，$\pi_k$ 得到的划分即为最大等价类集合。合并最大等价类集合，得到与原状态转移表等价的最小化状态表，状态化简结束。

## 4 实例分析

**例 1** 已知一个完全确定时序逻辑电路的逻辑状态转移表(见表 1[6])，化简表中的初始状态集。

表 1 逻辑状态转移表

Table 1 Logic state transition table

| initial state | sub-state / output | |
|---|---|---|
| | $x=0$, sub-state/output | $x=1$, sub-state/output |
| $A$ | $C/0$ | $B/1$ |
| $B$ | $F/0$ | $A/1$ |
| $C$ | $F/0$ | $G/0$ |
| $D$ | $D/1$ | $E/0$ |
| $E$ | $C/0$ | $E/1$ |
| $F$ | $C/0$ | $G/0$ |
| $G$ | $C/1$ | $D/0$ |

(1)根据定义 1、定义 4 和定义 5 可得：

原始状态集合为：$Q=\{A,B,C,D,E,F,G\}$；

输出矩阵为：$Z(x)=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$；

次态矩阵为：$B(x)=\begin{bmatrix}C&F&F&D&C&C&C\\B&A&C&E&E&C&D\end{bmatrix}$。

(2)根据定义 6 可从输出矩阵 $Z(x)$得到如下划分：

$\pi_1=Q/Z(x)=\{\{A,B,E\},\{C,F\},\{D,G\}\}$

记$\{A,B,E\}$为“1”类，$\{C,F\}$为“2”类，$\{D,G\}$为“3”类。由定义 7 可得初态标记矩阵 $Z^*(x)$和次态标记矩阵 $B^*(x)$：

$Z^*(x)=[1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$

$$B^*(x)=\begin{bmatrix}2&2&2&3&2&2&2\\1&1&3&1&1&3&3\end{bmatrix}$$

此时次态标记矩阵每一行中相同的数值对应的原始状态在相应的输入下的次态具有等价关系。

根据定义 8，由初态标记矩阵和次态标记矩阵构造状态转移系统矩阵：

$$M(x)=\begin{bmatrix}2&2&2&3&2&2&2\\1&1&3&1&1&3&3\\1&1&2&3&1&2&3\end{bmatrix}$$

(3)此时矩阵 $M(x)$中既包含对应不同输入下的输出信息，又包含对应的状态转移信息。相同的非零元素列表示对应的原始状态在特定输入下的输出相同且次态等价，可将其划分为一类，由此根据定义 8 可得：

$\pi_2=Q/M(x)=\{\{A,B,E\},\{C,F\},\{D\},\{G\}\}\neq\pi_1$

(4)取新得到的$\{G\}$为“4”类，此时初态标记矩阵可以按分类情况重新标记为：

$Z^*(x)=[1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]$

得到更新的次态标记矩阵：

$$B^*(x)=\begin{bmatrix}2&2&2&3&2&2&2\\1&1&4&1&1&4&3\end{bmatrix}$$

由初态标记矩阵和次态标记矩阵得到更新的状态转移系统矩阵：

$$M(x)=\begin{bmatrix}2&2&2&3&2&2&2\\1&1&4&1&1&4&3\\1&1&2&3&1&2&4\end{bmatrix}$$

$\pi_3=Q/M(x)=\{\{A,B,E\},\{C,F\},\{D\},\{G\}\}=\pi_2$

此时得到 $\pi_3=\pi_2$，满足终止条件，结束划分。得到的最大等价类集合为：$\{\{A,B,E\},\{C,F\},\{D\},\{G\}\}$。

(5)可以选用状态 $A$ 代表等价类$\{A,B,E\}$，选用状态 $C$ 代表等价类$\{C,F\}$，选用状态 $D$ 代表等价类$\{D\}$，选用状态 $G$ 代表等价类$\{G\}$。

此时，初始状态集合 $Q=\{A,B,C,D,E,F,G\}$可以被简化为最小化状态集合 $Q=\{A,C,D,G\}$。初始状态表 1 可简化为最小化状态，如表 2 所列。

表 2 最小化状态表

Table 2 Minimized state table

| reducted ststes | $x=0$, sub-state/output | $x=1$, sub-state/output |
|---|---|---|
| $A$ | $C/0$ | $A/1$ |
| $C$ | $C/0$ | $G/0$ |
| $D$ | $D/1$ | $A/0$ |
| $G$ | $C/1$ | $D/0$ |

实例结果表明，采用所提算法进行状态化简之后，该逻辑电路可由原来的 7 个初始状态化简合并为 4 个初始状态，消除了 3 个冗余初始状态；相应地，在硬件电路中可由 3 个触发器减少为 2 个触发器。当电路中初始状态规模较大时，化简结果将更加明显，可以在很大程度上减少硬件消耗，降低电路复杂性，提高电路性能并减少功耗。

## 5 算法分析

文献[2]提出的隐含表法和文献[3]提出的隐含表法的改进算法都要通过填写隐含表，经过顺序比较和关联比较得到等价对，进而求得最大等价类，过程直观，但是算法繁琐且编程实现困难。

文献[8]提出了一种状态化简的并行算法，此算法将状态输出矩阵和状态转换矩阵相乘，得到次级输出矩阵，基于等价关系根据输出矩阵的列向量进行等价类的划分。由于算法中存在矩阵相乘，当原始状态数量增大时，参与运算的矩阵规模剧增，导致算法效率低下。文献[9]优化了文献[8]中的并行算法，将状态转移矩阵进行了融合，缩减了矩阵相乘的规模，但是当次态比较复杂时会出现状态转移矩阵无法表示的情况。

文献[6]提出了基于粒计算理论的状态化简算法，该算法避免了矩阵相乘运算，但算法中的状态转移矩阵的每行只有一个非零元素，当状态数增多时，转移矩阵将变为大规模稀疏矩阵，占用的存储空间较多，算法空间复杂度较高。

本文提出的基于等价关系的算法根据输出矩阵得到初始等价类划分并进行标记，进而得到初态标记矩阵和次态标记矩阵，并构建状态转移系统矩阵。状态转移系统矩阵中相同的列即可构成等价类，不同的等价类标记为不同的粒子，通过不断细化粒子得到最终的等价类划分。所提算法与文献[2-3,6,8-9]中得出的结果一致。算法构建的矩阵规模小，且不含零元素，避免了大规模稀疏矩阵的出现，节约了存储空间；并且算法不需要进行矩阵相乘运算，降低了算法的复杂度。

算法复杂度分析:文献[8]提出的并行化简算法在不同输入下利用矩阵相乘进行迭代运算,当迭代次数为$\omega$时,时间复杂度为$O(|X||\omega|^2)$;文献[6]提出了基于粒计算理论的状态化简算法,该算法的主要时间开销为等价类的求交过程,时间复杂度为$O(|\omega|^2)$;本文提出基于等价关系的状态化简算法,只需比较矩阵中的相同列即可,时间复杂度为$O(|\omega|)$,得到大幅降低。

结束语　本文提出了一种基于等价关系的状态化简算法,与传统的隐含表法或根据输出矩阵和状态转移矩阵相乘进行迭代计算的方法不同,首先定义了输出矩阵,根据输出矩阵得到初级分类并标记,然后又定义了初态标记矩阵和次态标记矩阵并构建状态转移系统矩阵,通过寻找相同的列即可得到等价类的划分。本文的创新之处在于:1)将粒计算理论中的分层粒化思想在时序逻辑电路状态化简问题中进行了新的定义和应用;2)将对应多个输入的相同行输出矩阵定义为只有一行的初态标记矩阵,将状态转移矩阵由大规模稀疏矩阵转化为规模很小的次态标记矩阵,大大减少了矩阵的存储空间;3)每次根据状态转移系统矩阵得到的等价类划分即为该次迭代的最终划分结果,避免了其他算法中等价类的求交运算;4)算法基于矩阵求解,但避免了矩阵相乘,只需判断状态转移系统矩阵中相同的列即可,降低了算法复杂度。下一步可以尝试将该算法应用于求取不完全确定时序逻辑电路[10]中的最大相容类[11]和最小闭覆盖[12],并进行状态化简。

## 参考文献


[1] 刘宝琴,罗嵘,王德生.数字电路与系统(第2版)[M].北京:清华大学出版社,2007.

[2] 刘培植.数字电路与逻辑设计[M].北京:北京邮电大学出版社,2009.

[3] ZHAO H,SUN F R. Discussion on State Reduction Method in Synchronous Sequential Circuit Design [J]. Automation and Instrumentation,2010(5):120-122.(in Chinese)
赵贺,孙凤茹.同步时序电路设计中状态化简方法探讨[J].自动化与仪器仪表,2010(5):120-122.

[4] 边计年,薛宏熙,苏明,等.数字系统设计自动化(第2版)[M].北京:清华大学出版社,2005.

[5] CHANG Q M,YUE C Q. A Graph Theory Method for State Reduction of Digital Systems [C]// Academic Annual Conference on Electrician Theory. 2006.(in Chinese)
常青美,岳彩青.一种数字系统状态化简的图论方法[C]//电工理论学术年会.2006.

[6] ZHANG K Y,ZHANG Y,CHEN Z H. GrC-Based State Reduction Algorithm for Completely Specified Sequential Logic Circuit [J]. Journal of Chinese Computer Systems,2016,37(8):1786-1789.(in Chinese)
张凯英,张裕,陈泽华.基于粒计算的完全确定时序逻辑电路状态化简算法[J].小型微型计算机系统,2016,37(8):1786-1789.

[7] 苗夺谦,王国胤,刘清,等.粒计算:过去,现在与展望[M].北京:科学出版社,2007.

[8] WANG W Z. A Parallel Algorithm for State Simplification[C]// CAD/CG 1988. 1988:831-838.(in Chinese)
王文章.状态化简的一个并行算法[C]//全国计算机辅助设计与图形学学术会议.1988:831-838.

[9] LU Y P,LIN Y P,YANG G Z,et al. A State Minimization Algorithm for Completely Specified Sequential Machine[J]. Journal of Hunan University,1997,24(1):97-102.(in Chinese)
陆应平,林亚平,杨贯中,等.完全定义时序机的状态化简算法[J].湖南大学学报 1997,24(1):97-102.

[10] PAULL M C,UNGER S H. Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions[J]. Ire Transactions on Electronic Computers,1959,EC-8(3):356-367.

[11] DAMIANI M. The state reduction of nondeterministic finite-state machines[J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems,1997,16(11):1278-1291.

[12] GRASSELLI A,LUCCIO F. A method for minimizing the number of internal states in incompletely specified machines[OL]. http://www.researchgate.net/publication/238705600_A_method_for_minimizing_the_number_of_internal_states_in_incompletely_specified_machines.


(上接第117页)


[9] MENG X F,CI X. Big data management:concepts,techniques and challenges[J]. Journal of Computer Research and Development,2013,50(1):146-169.(in Chinese)
孟小峰,慈祥.大数据管理:概念、技术与挑战[J].计算机研究与发展,2013,50(1):146-169.

[10] WU W Z,LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences,2011,181(18):3878-3897.

[11] WU W Z,LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2013,54(8):1107-1129.

[12] GU S M,WU W Z,XU Y H. On granulation in incomplete multi-labeled information systems[J]. Journal of Nanjing University(Natural Sciences),2013,49(5):567-573.(in Chinese)
顾沈明,吴伟志,徐优红.不完备多标记信息系统中粒度研究[J].南京大学学报(自然科学),2013,49(5):567-573.

[13] SHE Y H,LI J H,YANG H L. A local approach to rule induction in multi-scale decision tables[J]. Knowledge-Based Systems,2015,89(C):398-410.

[14] HAO C,FAN M,LI J H,et al. Optimal scale selection in multi-scale selection in multi-scale contexts based on granular scale rules[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2016,29(3):272-280.(in Chinese)
郝晨,范敏,李金海,等.多标记背景下基于粒规则的最优标记选择[J].模式识别与人工智能,2016,29(3):272-380.

[15] LI F,HU B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables[J]. Information Sciences,2017,381:193-208.