第二章 矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，凡是涉及到多方面相互关联的多元数量关系，往往可以用矩阵来描述和处理。本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、矩阵的分块及分块矩阵的运算。

第一节 矩阵及有关概念

一、矩阵

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m **行** n **列矩阵**，简称 $m \times n$ **矩阵**，通常用大写黑体字母表示，记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，为了更清楚地表明矩阵的行、列数，有时也写作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

在许多实际问题涉及到表格时，经常会转化为矩阵来研究.

例如某工厂向四个商店销售三种产品的数量（单位：件）分别如下表：

产品 销量 商店	产品 I	产品 II	产品 III
商店甲	2	3	5
商店乙	4	5	6
商店丙	3	4	6
商店丁	4	5	7

则该工厂各产品的销售量可以用矩阵表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&5\\4&5&6\\3&4&6\\4&5&7\end{pmatrix}.$$

又如四个城市间的单向航线如图 2.1 所示：

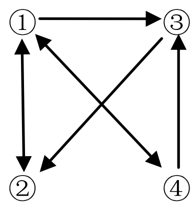

图 2.1

若记 $$a_{ij}=\begin{cases}1 & i\text{市到}j\text{市有1条单向航线}\\0 & i\text{市到}j\text{市没有单向航线}\end{cases}$$

则图 2.1 可以用矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 表示:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

对于一般非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_1\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{2.2}$$

其系数可以构成一个 m 行 n 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\tag{2.3}$$

称为线性方程组（2.2）的**系数矩阵**，而称

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}\tag{2.4}$$

为线性方程组（2.2）的**增广矩阵**，一个线性方程组对应唯一的系数矩阵和增广矩阵，它和增广矩阵是一一对应的.

二、特殊矩阵

1. **零矩阵**

若一个矩阵的所有元素都为零，则称这个矩阵为**零矩阵**，记为$\boldsymbol{O}$ 或$\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

2. **行矩阵与列矩阵**

只有一行元素的矩阵为**行矩阵**，如$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

只有一列元素的矩阵为**列矩阵**，如$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

3. **方阵**

行数等于列数的矩阵称为**方阵**，例如$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$是$n\times n$**方阵**，也称为$n$**阶方阵**或$n$**阶矩阵**，记作$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$，元素$a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$所在的直线称为方阵的**主对角线**。

一阶方阵(a)就是元素a，不改变方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$中元素排列顺序所构造的$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**方阵A的行列式**，记为$|\boldsymbol{A}|$或$\det \boldsymbol{A}$.

4. **上三角矩阵**

主对角线以下的元素全为零的n阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**上三角矩阵.**

5. **下三角矩阵**

主对角线以上的元素全为零的n阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**下三角矩阵.**

6. **对角矩阵**

主对角线以外的元素都为零的n阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$称为**对角矩阵**，对角矩阵既是上三角矩阵又是下三角矩阵，即当$i \neq j$时，$a_{ij}=0.$

特别，主对角元都相等的n阶对角阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$称为**数量矩阵**，而主对角元都是 1 的$n$阶数量矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$称为$n$阶**单位矩阵**，记作$\boldsymbol{E}_n$或$\boldsymbol{E}$.

三．矩阵的相等

若两个矩阵的行数相等，列数也相等时，称它们是**同型矩阵.**

定义 2　若$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，且对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$**相等**，记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注　不同型的零矩阵是不相等的，如$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不相等.

思考题一

1．$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$是否相等？你能从中得到什么结论？

2．不同型的零矩阵是不相等的，请问不同型的单位矩阵相等吗？为什么？

第二节 矩阵的基本运算

一、矩阵的加法

定义 3　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$是同型矩阵，规定$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相加的和矩阵为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

根据定义容易验证矩阵的加法满足以下运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵）：

（1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$，$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此可以定义矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

二、数乘矩阵

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\lambda$ 是一个数，规定数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\lambda\boldsymbol{A}$ 简称**数乘矩阵**，根据定义容易验证矩阵的数乘满足以下运算性质（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，λ,μ 为数）：

（1） $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$；

（2） $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$；

（3） $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

（4） $0\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\lambda\bullet\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$；

（5） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，λ 为实数，则 $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$.

矩阵加法与数乘运算合起来统称为矩阵的**线性运算**。若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n},\lambda,\mu$ 为数，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 线性运算出矩阵 $\mu\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}=(\mu a_{ij}+\lambda b_{ij})_{m\times n}$.

三、矩阵的乘法

定义 5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，若记

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则以 c_{ij} 为元素构成的矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注 （1）只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时才可以相乘；（2）乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 1 某地区有四个工厂Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，生产 1、2、3 三种产品，一年中各工厂生产各种产品的数量可表示为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ik}\ (i=1,2,3,4;k=1,2,3)$ 是第 i 个工厂生产第 k 种产品的数量，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ 的两列分别表示各种产品的单位价格（元）及单位利润（元），其中 b_{k1} 及 $b_{k2}\ (k=1,2,3)$ 分别是第 k 种产品的单位价格及单位利润，记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{4\times 2}$，则 c_{i1} 和 $c_{i2}\ (i=1,2,3,4)$ 分别是第 i 个工厂生产三种产品的总收入及总利润.

例 2 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 由定义可得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1\times4+0\times(-1)+3\times2 & 1\times1+0\times1+3\times0 & 1\times0+0\times3+3\times1 \\ 2\times4+1\times(-1)+0\times2 & 2\times1+1\times1+0\times0 & 2\times0+1\times3+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

注意此时 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

例 3 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{pmatrix},\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

此例说明矩阵的乘积一般不满足交换律，而且还说明了两个非零矩阵的乘积，可能是零矩阵，因此矩阵的乘法需要注意：（1）任意两个矩阵未必可乘;（2）交换律一般不成立，即一般来说 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 成立，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**;（3）消去律一般不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，因此由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，这是因为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

但矩阵的乘法仍满足以下运算性质（假设运算都可行）：

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

（2） $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC};(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

（3） $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

（4） $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$；

（5）$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

（6）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

例 4　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$,求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解　设 $\boldsymbol{B}$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵，即 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\2a+c&2b+d\end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&b\\c+2d&d\end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可推出 $b=0,a=d$.

所以所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为 $\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$，其中 a,c 为任意数.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda&&\\&\ddots&\\&&\lambda\end{pmatrix}$ 为数量阵，容易验证：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda\boldsymbol{E},\boldsymbol{\Lambda}_m\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}=\lambda(\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A})=\lambda\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}_n=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{E}_n)=\lambda(\boldsymbol{AE}_n)=\lambda\boldsymbol{A}.$$

由此可见数量阵乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，等于数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，这就是称其为数量阵的缘由，且当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，有 $\boldsymbol{\Lambda}_n\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}_n$ 表明数量阵与任何同阶方阵都是可交换的.

设有线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad(2.6)$$

记矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 即为线性方程组（2.6）的系数矩阵，称 $\boldsymbol{X}$ 为未知数向量（变元），$\boldsymbol{b}$ 为常数向量，而由

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

可知方程组（2.6）可以表示为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b} \tag{2.7}$$

（2.7）式称为线性方程组（2.6）的**矩阵表示式**.

容易证明两个同阶对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

的乘积

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵，同样可以证明，有限个同阶对角阵的乘积还是对角矩阵，而且还可以证明，有限个同阶上（下）三角矩阵的乘积还是上（下）三角矩阵（读者证明）.

四、方阵的幂

定义 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$$

由定义可知只有方阵才有幂，容易验证方阵的幂有以下运算性质（k,l 为正整数）：

（1） $\boldsymbol{A}^{k+l}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l$；

（2） $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$；

（3） $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

注：由于矩阵乘法的不可交换性，一般来说 $(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，由此

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2, (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

等熟知的乘法公式一般不再成立，但只要 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，这些公式就都成立了.

上节中有一个四城市间的单向航线矩阵 $\boldsymbol{A}$，由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{A}^2=(b_{ij})$，则 b_{ij} 表示从 i 市经一次中转到 j 市的单向航线条数，例如 $b_{42}=2$ 表示从④市经一次中转到②市的单向航线有 2 条（④$\longrightarrow$①$\longrightarrow$②，④$\longrightarrow$③$\longrightarrow$②）.

例 5　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$（k 为正整数）.

解法一　首先计算

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\lambda\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\bullet\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\lambda\\0&1\end{pmatrix},$$

于是猜测 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&k\lambda\\0&1\end{pmatrix}$,下面用数学归纳法证明之.

当 $k=2$ 时，由上可知结论成立. 假设 $k=n$ 时结论成立，则 $k=n+1$ 时，

$$\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{A}^n\bullet\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&n\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&(n+1)\lambda\\0&1\end{pmatrix},$$

所以对任意的正整数 k，都有 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&k\lambda\\0&1\end{pmatrix}$.

解法二　记　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$

易见 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，则依 Newton 二项公式有 $\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^k=\sum_{i=0}^{k}\boldsymbol{C}_k^i\boldsymbol{B}^i$，而

$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&\lambda\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\lambda\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,得到 $\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,其中 n 为大于等于 2 的正整数.

因此 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{C}_k^0\boldsymbol{B}^0 + \boldsymbol{C}_k^1\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + k\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & k\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 6 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{C}^{100}$

解 $\boldsymbol{C}^{100} = \underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{100} = \boldsymbol{A}\underbrace{(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})}_{99}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{BA})^{99}(\boldsymbol{AB}) = 14^{99}\boldsymbol{C}$.

五、矩阵的转置

定义 7 把 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行（列）依次换为列（行）得到的 $n \times m$ 矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，

$$\text{即若 } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 则有 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

容易验证矩阵的转置满足以下运算性质：

（1） $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,其中 λ 为实数;

（2） $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \pm \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

（3） $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

（4） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$;

（5） $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

定义 8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵.**

由定义可得，若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵或反对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定是方阵，并且对称矩阵的元素以主对角线为对称轴对应相等，而反对称矩阵的主对角线上所有元素都为 0，其它元素以主对角线为对称轴互为相反数.

例 7 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$ 是对称阵.

证明： $(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$,

所以 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$ 是对称阵.

例 8 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{AB} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{AB} \Leftrightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$.

此例表明，对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵.

思考题二

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，试问 $|\lambda \boldsymbol{A}| = |\lambda||\boldsymbol{A}|$ 吗？$\lambda \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda|\boldsymbol{A}|$ 有什么区别呢？

2 .设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，试问 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$ 一定成立吗？$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$ 呢？

3. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可乘，试问 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 一定成立吗？

4. 非对角矩阵之积可以是对角矩阵吗？

5. 分别举例说明下列结论不成立：

（1） $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

（2） $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

（3） $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E}$

（6） 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，

$$(\boldsymbol{AB})^2 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}), (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$$

（7）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，试问 $\boldsymbol{A}^k (k \geq 2)$ 还是 n 阶对称矩阵吗？

7. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶反对称矩阵，试问 $\boldsymbol{B}^k (k \geq 2)$ 还是 n 阶反对称矩阵吗？

第三节 逆矩阵

一、伴随矩阵

定义 9 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，称 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$，其中 A_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

注 A^* 中第 i 行元素是矩阵 A 的行列式 $|A|$ 中第 i 列对应元素的代数余子式.

例 9 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 因为
$$A_{11}=(-1)^{1+1}|d|=d, A_{12}=(-1)^{1+2}|c|=-c,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}|b|=-b, A_{22}=(-1)^{2+2}|a|=a,$$
所以
$$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 10 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$，求 A^*.

解 因为 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=-3$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0$，$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=-11$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=4$，$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3$，

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6$，$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$，$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$，

所以
$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

方阵 A 与伴随矩阵 A^* 有如下重要关系：

定理 1 设 A^* 为 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，则
$$AA^*=A^*A=|A|E \tag{2.8}$$

证明 记 $AA^*=B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+...+a_{in}A_{jn}$，由行列式按行（列）展开定理，得 $b_{ij}=\begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$，即 $AA^*=|A|E$，同理可证 $A^*A=|A|E$.

二．逆矩阵及其性质

1. 逆矩阵

定义 10 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得
$$AB=BA=E \tag{2.9}$$

则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆**（或称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵），称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，若不存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足（2.9），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

定理 2　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

证明　设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

2. 矩阵可逆的条件

下面讨论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分条件、必要条件以及求逆矩阵的公式.

定理 3　$\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*} \tag{2.10}$$

证明　必要性：设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即有 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，两边取行列式，得 $|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，进一步可得 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

充分性：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由于 $\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故可得 $\boldsymbol{A}(\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|})=(\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

于是由逆矩阵定义知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异矩阵**；如果 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵.**

由定理 3，还可得下面推论:

推论　若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵（即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$）.

证明　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{B}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，且

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{EB}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$.

例 11　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，且 $ad-bc\neq 0$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　因为 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，由例 9 知 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 12 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$，证明 A 可逆并求 A^{-1}.

证明 先算出 $|A|=-2\neq 0$ 知 A^{-1} 存在，由例 10 知 $A^*=\begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$,

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -11 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

例 13 若方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 $A+2E$ 可逆，并求其逆.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 可得 $A(A+2E)-3(A+2E)=-4E$，

即 $(A-3E)(A+2E)=-4E$，即 $-\dfrac{(A-3E)}{4}(A+2E)=E.$

由定理 3、4 推论可知 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=-\dfrac{A-3E}{4}.$

3. 逆矩阵的性质

设 n 阶矩阵 A,B 均可逆，则有

（1）当 λ 是非零实数时，λA 也可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

（2）AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

（3）A^{T} 可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

（4）A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A,|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$;

（5）A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|},A^*=|A|A^{-1},|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明 性质（1），（2），（3），（4）由定理 3 之推论易验证，下证性质（5）.

由定理 1 可得 $AA^*=|A|E$，又因 $|A|\neq 0$，可得 $\dfrac{A}{|A|}\bullet A^*=E$，因此 A^* 可逆，且

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|},A^*=|A|A^{-1},|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^n\frac{1}{|A|}=|A|^{n-1}.$$

例 14 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足矩阵方程 $AX=A+2X$, 求矩阵 X.

解 由 $AX=A+2X$，可得 $(A-2E)X=A$，又

$$(A-2E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}，|A-2E|\neq 0, \text{则 } A-2E \text{ 可逆，有 } X=(A-2E)^{-1}A.$$

而 $$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{|A-2E|}(A-2E)^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因此 $$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&-1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}.$$

例 15 设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$, 求 $|(4A)^{-1}-3A^*|$.

解法一 由逆矩阵性质（1）和性质（5）可知

$$(4A)^{-1}-3A^*=\frac{1}{4}A^{-1}-3|A|A^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}-\frac{3}{2}A^{-1}=-\frac{5}{4}A^{-1},$$

则有 $$|(4A)^{-1}-3A^*|=|-\frac{5}{4}A^{-1}|=(-\frac{5}{4})^3|A^{-1}|=(-\frac{5}{4})^3\frac{1}{|A|}=-\frac{125}{32}.$$

解法二 $(4A)^{-1}-3A^*=\frac{1}{4}A^{-1}-3A^*=\frac{1}{4}\frac{A^*}{|A|}-3A^*=-\frac{5}{2}A^*.$

则有 $$|(4A)^{-1}-3A^*|=|-\frac{5}{2}A^*|=(-\frac{5}{2})^3|A^*|=(-\frac{5}{2})^3|A|^2=-\frac{125}{32}.$$

例 16 设 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 X 使其满足矩阵方程 $AXB=C$.

解 因为 $|A|=6\neq 0,|B|=2\neq 0$，故 A,B 都可逆，用 A^{-1} 左乘方程，B^{-1} 右乘方程，

有

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}，即 X=A^{-1}CB^{-1}，而 A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},$$

因此有 $$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}.$$

例 17 在军事密码学中，发送方将要传送的信息数字化后用一个矩阵 X 表示，双方约定好一个可逆阵 $\boldsymbol{A}$，加密后即为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为发送出去的密码，接收方收到后，只须计算 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即为明码，现在我们将 26 个英文字母分别与正整数 $1,2,3,\ldots,26$ 一一对应，如 $\begin{matrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{Z}\\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow\\ 1 & 2 & \cdots & 26\end{matrix}$，已知发送方传出密码为 $7,13,39,67$，约定可逆矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ 试破解密码.

解 由题意可知 $$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 39\\ 13 & 67\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 11\end{pmatrix},$$ 因此明码为 $2,1,3,11$，对应字母为 b,a,c,k，即密码为 $back$。

思考题三

1. 试问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 行第 j 列元素是 $\boldsymbol{A}$ 中哪个元素的代数余子式？
2. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，试问 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$ 成立吗？
3. 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$ 或 $\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}}$ 吗？为什么？
4. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是否可逆？是否成立有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 呢？
5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 中若有两个可逆，则其余一个也可逆，试证明之.
6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，举例说明 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ 不成立.
7. 伴随矩阵都有哪些性质？试列举之.

第四节 分块矩阵

在处理大型矩阵（即行数与列数都较大）时，常把它转化为小型矩阵（即行数与列数较小的矩阵）来处理，这种处理方法就是本节要介绍的分块矩阵法，这种方法能使原矩阵结构显得简单而清晰，使一些运算变得较为简单.

一．分块矩阵的定义

定义 11 将矩阵用一些横线和纵线分割成若干个小块，每个小块称为矩阵的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E} \\ O & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$

可以按行分块 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix};$

也可以按列分块 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}.$

显然一个矩阵的分块矩阵是不唯一的，与矩阵的分法有关，因此，在利用分块矩阵讨论具体问题时，应采用适当的分块法，使问题的解决更为简便.

二．分块矩阵的运算

对分块矩阵进行运算时，可以把每一个子块当成矩阵的元素来处理，因此它与矩阵的运算相类似，但要注意保证运算可行性.

1. 加法

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分块法一致，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中每一 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 都是同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}+\boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2}+\boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

2. 数乘

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$, λ 为实数，则

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \lambda\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \lambda\boldsymbol{A}_{21} & \lambda\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \lambda\boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

3. 乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \boldsymbol{B}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\ldots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}, i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,r.$

例 18 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别分成 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&3\\2&4\end{pmatrix}.$$

特别，设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{l}$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵，将按 $\boldsymbol{B}$ 列分块：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_n\right)$，这在后面会经常用到这个结论.

4. 转置矩阵

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

三．分块对角矩阵

定义 12 形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix}$ 的分块矩阵称为**分块对角矩阵**，简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots,\boldsymbol{A}_r)$，其中 $A_i(i=1,2,\dots,r)$ 为方阵.

分块对角矩阵有以下性质：

（1）$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots,\boldsymbol{A}_r)$，则有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\dots|\boldsymbol{A}_r|, \boldsymbol{A}^k=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^k,\boldsymbol{A}_2^k,\dots,\boldsymbol{A}_r^k)$;

（2）若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\dots,r)$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1},\dots,\boldsymbol{A}_r^{-1})$.

例 19 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, 求 $|\boldsymbol{A}|, \boldsymbol{A}^{-1}$.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, 则有

$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|=-3$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

所以
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

例 20 证明实矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 首先必要性显然成立，下证充分性.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n)$, 特殊地，有 $\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=0(j=1,2,...,n)$,而

$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+...+a_{mj}^2=0.$$

可得 $a_{ij}=0(i=1,2,..,m)$ 即 $A=O$.

思考题四

1. 一个矩阵的分块矩阵唯一吗？
2. 分块矩阵可乘的条件是什么？如何计算？
3. 试比较分块矩阵和对角阵的定义和运算。
4. 试给出分块上三角矩阵和分块下三角矩阵的定义

习 题 二

（A）

1. 下列矩阵中，哪些是对角矩阵、三角矩阵、数量矩阵、单位矩阵?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2y-x & 3\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2z & 2x-y & 4\end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x, y, z.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

（1） 计算 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B};$

（2）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{X};$

（3）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}, 2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$.

4. 计算下列乘积矩阵：

（1）$(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix};$

（2）$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3);$

（3）$\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix};$

（4）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix};$

（5）$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$

（6）$(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};$

（7）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};$

（8）$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

5. 设有 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1 & c_1 & d_1\\ b_2 & c_2 & d_2\\ b_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1, |\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}|$.

6. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$; （2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$; （3）比较（1）和（2）的结果，可以得出什么结论？

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

8. 求下列矩阵的 k 次幂，其中 k 为正整数

（1）$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$; （2）$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$; （3）$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$，其中 k 为正整数.

10. 证明任何一个方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$

14. 求下列矩阵的逆矩阵

（1）$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$; （2）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$; （3）$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$; （4）$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

17. 解下列矩阵方程：

（1） $\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&4\end{pmatrix}$.

（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，已知$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求$\boldsymbol{B}$.

19. 设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-4\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{B}$.

20. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=0$，证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$可逆，并求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$

21. 已知$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，且对某个正整数m有$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，并求其逆

22. 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，试证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是不可逆矩阵

23. 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，求（1）$|2\boldsymbol{A}^{-1}|$ （2）$|\boldsymbol{A}^*|$ （3）$|(\boldsymbol{A}^*)^*|$ （4）$|3\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

24. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，求$|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}|$（$k$为正整数）

25. （1）设$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，证明$\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}$.

（2）设$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，且$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^{2014}$.

26. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，　（2）$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \\ 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

27. 利用分块矩阵求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

28.　设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 利用分块矩阵计算 $\boldsymbol{A}^{2014}$.

29.　设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, 利用分块矩阵计算 $\left|\boldsymbol{A}^{2014}\right|$

30.（1）设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的逆；

（2）利用（1），求 $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$ 的逆.

31.　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 可逆，证明 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}.$$

（B）

1．设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}, \boldsymbol{B}_{n\times m} (m \neq n)$，则下列结果不为 n 阶方阵的是（　　）

（A）$\boldsymbol{BA}$　　（B）$\boldsymbol{AB}$　　（C）$(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$　　（D）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵, 则必有（　　）

（A）$\boldsymbol{ACB} = \boldsymbol{E}$　　（B）$\boldsymbol{CBA} = \boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{E}$　　（D）$\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{E}$

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{C}^2 =$（　　）

（A）$3\boldsymbol{E}$　　（B）$2\boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{E}$　　（D）$\boldsymbol{O}$

4. 下列结论中不正确的是 （ ）

（A）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

（B）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times 1$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

（C）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$.

（D）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则对任意正整数 k,m 有 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，则下列矩阵为对称矩阵的是 （ ）

（A） $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ （B）$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶方阵） （C） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ （D）$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶对称矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则下列矩阵为对称矩阵的是 （ ）

（A） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$ （B） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$ （C） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ （D） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有（ ）

（A）$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$ （B）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

（C）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ （D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则必有（ ）

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （C）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$ （D）$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

9. 以下结论正确的是（ ）.

(A) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（B）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵.

（D）对任意的同阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则下列结论中不正确的是 （ ）

（A） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ （B） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$

（C） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ （D） $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，则必有 （ ）

（A） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ （B） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ (D) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则　（　　）

（A） $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆，必有 $\boldsymbol{AB}$ 可逆；　　（B） $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆，必有 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆；

（C） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆；　　（D） $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 均不可逆，必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆。

13. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 必能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为同阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 应满足条件（　　）

（A） $\boldsymbol{A}\neq 0$　　（B） $|\boldsymbol{A}|\neq 0$　　（C） $\boldsymbol{A}=0$　　（D） $|\boldsymbol{A}|=0$

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵， $|\boldsymbol{A}|=-2,|\boldsymbol{B}|=3,$ 则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{AB})^{*}\right|=$（　　）

（A） $\dfrac{2^{2\boldsymbol{n}-1}}{3}$　　（B） $-\dfrac{2^{2\boldsymbol{n}-1}}{3}$　　（C） $\dfrac{2}{3}$　　（D） $\dfrac{46}{3}$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则 $(k\boldsymbol{A})^{*}=$（　　）

（A） $\boldsymbol{A}^{*}$　　（B） kA^{*}　　（C） $k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}$　　（D） $k^{n}\boldsymbol{A}^{*}$

16. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

（A） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_1^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_2^{*}\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_2^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_1^{*}\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^{*}\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^{*}\end{pmatrix}$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则必有（　　）

（A） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　（B） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　（C） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆　　（D） $\boldsymbol{A}$ 可逆

18. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异（$n\geq 2$）， $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则（　　）

（A） $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{A}$　　（B） $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}+1}\boldsymbol{A}$

（C） $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}-2}\boldsymbol{A}$　　（D） $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}+2}\boldsymbol{A}$

19. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵， $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA},$ 则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为（　　）

（A） $\boldsymbol{E}$　　（B） $-\boldsymbol{E}$　　（C） $\boldsymbol{A}$　　（D） $-\boldsymbol{A}$

20. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与一切同阶方阵均可交换，则 $\boldsymbol{A}$ 必是数量阵.

21. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 次幂零阵，即 $\exists m \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A}^m = 0,$ 证明：满足矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XB}$ 的只能是 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，已知 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$ 可逆，证明：满足矩阵方程 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可交换.

23. 证明: (1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的反对称矩阵， $\boldsymbol{A}^{-1}$ 则也是反对称矩阵.

(2) 不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.