习　题　四

1．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(6,8,1)^{\mathrm{T}}$，求 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

解：$3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}$.

2．设 $\boldsymbol{\alpha}=(6,1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,2,-1,3)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$.

解：$\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-12\\0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\1/3\\1\end{pmatrix}$.

3．将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

（1）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

解：（1）令 $a=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4$，即

$$a=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

求解得 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T=(1,\ 0,\ -1,\ 0)^T$，即 $a=a_1-a_3$.

（2）令 $a=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4$，即

$$a=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},$$

求解得 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T=(5/4,\ 1/4,\ -1/4,\ -1/4)^T$，即

$$a=\frac{5}{4}a_1+\frac{1}{4}a_2-\frac{1}{4}a_3-\frac{1}{4}a_4.$$

4．判别下列向量组的线性相关性:

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$;

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}ax\\bx\\cx\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}ay\\by\\cy\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}az\\bz\\cz\end{pmatrix}$, 其中 a,b,c,x,y,z 全不为零;

解:（1）方法一: 对矩阵 $A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=2<3$, 所以 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 线性相关.

方法二: 因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&5&5\end{vmatrix}=0,$$

所以 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 线性相关.

（2）对矩阵 $A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 做初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\-1&2&1\\2&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\0&1&3\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\0&0&6\\0&0&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{5}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\0&0&6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, 所以 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 线性无关.

（3）方法一: 对矩阵 $A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{c}{a}r_1]{r_2+\frac{b}{a}r_1} \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a}r_1} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为$R(A)=1<3$，所以a_1，a_2，a_3线性相关.

方法二：因为

$$|A|=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}=0,$$

所以a_1，a_2，a_3线性相关.

5. 设有向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，以及向量$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$，问$a,b$为何值时，

（1）向量$\boldsymbol{\gamma}$不能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示；

（2）向量$\boldsymbol{\gamma}$能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，且表示式唯一；

（3）向量$\boldsymbol{\gamma}$能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，且表示式不唯一，并求其表示式.

解：令$\boldsymbol{\gamma}=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$，即

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}.$$

因为系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-(a+4),$$

所以，当$|A|=-(a+4)\neq 0$，即$a\neq -4$时，上述方程组有唯一解.

当$a=-4$时，对增广矩阵做初等行变换

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{5}{2}r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-r_2 \\ r_1+r_2}]{\frac{2}{3}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2b+2 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{array}\right),$$

当 $-2b\neq 0$，即 $b\neq 0$ 时，$R(A)=2<R(A|b)=3$，方程组无解．当 $b=0$ 时，$R(A)=R(A|b)=2$，方程组有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ -(2k+1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

综上所述，当 $a\neq -4$ 时，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一；

当 $a=-4$，$b=0$ 时，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，通用表示式是 $\boldsymbol{\gamma}=ka_1-(2k+1)a_2+a_3$，$k\in R$；

当 $a=-4$，$b\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能由向量组 A 线性表示.

6．证明：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

证明：令 $x_1(a_1+a_2)+x_2(a_1-a_2)=0$，那么 $(x_1+x_2)a_1+(x_1-x_2)a_2=0$．因为 a_1,a_2 线性无关，所以 $x_1+x_2=0$，$x_1-x_2=0$，求解得唯一解 $x_1=x_2=0$，所以 a_1+a_2，a_1-a_2 线性无关.

7．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明：方法一：（必要性 =>）令 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=0$，那么

$$(x_1+x_2-x_3)(a_1+a_2)+(-x_1+x_2+x_3)(a_2+a_3)+(x_1-x_2+x_3)(a_1+a_3)=0.$$

由 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_2 的线性无关性知 $x_1+x_2-x_3=-x_1+x_2+x_3=x_1-x_2+x_3=0$，求解得唯一解 $x_1=x_2=x_3=0$，因此 a_1,a_2,a_3 线性无关.

（充分性 <=）令 $x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$，那么

$$(x_3+x_1)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0.$$

由 a_1,a_2,a_3 的线性无关性知，$x_3+x_1=x_1+x_2=x_2+x_3=0$，求解得唯一解

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$，所以 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$ 线性无关.

方法二：依题意知

$$[a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1] = [a_1, a_2, a_3]C,$$

其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 因为 $|C| = 2 \neq 0$，即 C 为可逆矩阵，所以

$$R(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1) = R([a_1, a_2, a_3]C) = R(a_1, a_2, a_3),$$

因此 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$ 线性无关的充要条件是 a_1, a_2, a_3 线性无关.

方法三：令 $\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2, \\ b_2 = a_2 + a_3, \\ b_3 = a_3 + a_1, \end{cases}$ 求解得 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3), \\ a_2 = \dfrac{1}{2}(-b_1 + b_2 + b_3), \\ a_3 = \dfrac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3), \end{cases}$

即向量组 b_1, b_2, b_3 和 a_1, a_2, a_3 可以相互表示，故二者等价，所以

$$R(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1) = R(b_1, b_2, b_3) = R(a_1, a_2, a_3),$$

因此 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$ 线性无关的充要条件是 a_1, a_2, a_3 线性无关.

8．设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{L}\, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为 n 维非零向量，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若

$$\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3, \mathbf{L}, \boldsymbol{A\alpha}_{s-1} = \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{A\alpha}_s = \boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{L}\, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明：因为 $a_s \neq 0$，所以 a_s 线性无关.

令 $x_{s-1}a_{s-1} + x_s a_s = 0$，则 $A(x_{s-1}a_{s-1} + x_s a_s) = 0$，即 $x_{s-1}a_s = 0$．因为 $a_s \neq 0$，所以 $x_{s-1} = 0$，因此 a_{s-1}, a_s 线性无关.

假设 $a_{s-k+1}, \mathbf{L}, a_{s-1}, a_s (0 < k < s)$ 线性无关．令 $x_{s-k}a_{s-k} + \mathbf{L} + x_{s-1}a_{s-1} + x_s a_s = 0$，则 $A(x_{s-k}a_{s-k} + x_{s-k+1}a_{s-k+1} + \mathbf{L} + x_s a_s) = 0$，即 $x_{s-k}a_{s-k+1} + \mathbf{L} + x_{s-1}a_s + 0 = 0$．由 $a_{s-k+1}, \mathbf{L}, a_s$ 的线性无关性知 $x_{s-k} = \mathbf{L} = x_{s-1} = 0$，进而由 $x_s a_s = 0$ 得 $x_s = 0$，所以

$a_{s-k}, a_{s-k+1}, \mathbf{L}, a_{s-1}, a_s$ 线性无关.

9．如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，但其中任意 3 个向量都线性无关，证明必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

证明：因为 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关，所以存在一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$. 下面证 k_1,k_2,k_3,k_4 均不为零. 假设 $k_1=0$，那么 $k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$. 由 a_2,a_3,a_4 的线性无关性知 $k_2=k_3=k_4=0$，所以 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，这与 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零矛盾，因此 $k_1\neq 0$. 同理可证，$k_2\neq 0, k_3\neq 0, k_4\neq 0$. 所以必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$.

10．问 a 取什么值时下列向量组线性相关？

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}.$$

解：方法一：若 a_1,a_2,a_3 线性相关，则矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 的秩 $R(A)<3$，所以

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2)=0,$$

求解得 $a=-1$ 或 $a=2$.

方法二：若 a_1,a_2,a_3 线性相关，则矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 的秩 $R(A)<3$. 对矩阵 A 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-1&a\\1&a&-1\\a&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&a+1&-(a+1)\\0&a+1&1-a^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&a+1&-(a+1)\\0&0&(1+a)(2-a)\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)<3$，所以 $a+1=0$ 或 $(1+a)(2-a)=0$，求解得 $a=-1$ 或 $a=2$.

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$．$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

证明: 因为

$$n=R(E)=R(AB)\le R(B)\le n,$$

所以 $R(B)=n$. 又因为 B 是 $m\times n$ 矩阵, 所以 B 的列向量线性无关.

12．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{L},\boldsymbol{\alpha}_n\in\boldsymbol{R}^n$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{L},\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关当且仅当任一 n 维实向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{L},\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

证明: （=>）只需证明对任意的向量 b，方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\mathbf{L}+x_na_n=b$ 都有解. 因为向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$ 线性无关, 所以

$$n=R(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n)\le R(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n,b)\le n,$$

所以 $R(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n)=R(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n,b)$，因此方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\mathbf{L}+x_na_n=b$ 有（唯一）解, 即 b 可由 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$ 线性表示（且表示式唯一）.

（<=）令 e_i 为第 i 个 n 维单位向量. 因为任意的向量均可由 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$ 线性表示, 所以向量组 $e_1,e_2,\mathbf{L},e_n$ 可以由向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$ 线性表示, 因此

$$R\left(e_1,e_2,\mathbf{L},e_n\right)\le R\left(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n\right),$$

又因为 $R\left(e_1,e_2,\mathbf{L},e_n\right)=n$ 且 $R\left(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n\right)\le n$，所以 $R\left(a_1,a_2,\mathbf{L},a_n\right)=n$，即向量组 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_n$ 线性无关.

13. 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

证明: 依题意知

$$\left(b_1,b_2,b_3\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

所以

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

即向量组 a_1, a_2, a_3 可由向量组 b_1, b_2, b_3 线性表示. 又因为向量组 b_1, b_2, b_3 可由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示，所以向量组 b_1, b_2, b_3 和向量组 a_1, a_2, a_3 等价.

14. 求下列各向量组的秩及其一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$;

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

解：（1）对矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 做初等行变换

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，且 $a_4 = -3a_1 + 5a_2 - a_3$.

（2）对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}r_2}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&5/9\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&-11/9\\0&1&5/9\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $a_3=-\frac{11}{9}a_1+\frac{5}{9}a_2$.

（3）对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $a_4=a_1+3a_2-a_3$，

$a_5=-a_2+a_3$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{L},\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\mathbf{L},\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个同维向量组，秩分别为 r_1 和 r_2，向量组 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ 的秩为 r_3．证明：$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$.

证明：因为 $C=A\cup B$，所以 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_s$ 可以由向量组 C 线性表示，因此

$$r_1=R(A)\le R(C)=r_3.$$

同理可得 $r_2=R(B)\le R(C)=r_3$，因此 $r_3\ge\max\{r_1,r_2\}$．又因为

$$r_3 = R(a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t) \le R(a_1, \cdots, a_s) + R(b_1, \cdots, b_t) = r_1 + r_2,$$

所以，$\max\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2$.

16．设向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{K}$，其中 $\boldsymbol{K}$ 是 $s \times r$ 矩阵. 证明向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $R(\boldsymbol{K}) = r$.

证明:（必要性）因为向量组 B 线性无关，所以

$$r = R(B) = R(AK) \le R(K) \le r,$$

因此 $R(K) = r$.

（充分性）若 $R(K) = r$，则

$$R(B) = R(AK) \ge R(A) + R(K) - s = R(K) = r,$$

又因为 $R(B) = R(AK) \le R(K) = r$，所以 $R(B) = r$，即向量组 B 线性无关.

复　习　题　四

1．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，而$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则:

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？理由是什么？

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？理由是什么？

解：（1）能．因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，所以$\alpha_2,\alpha_3$也线性无关，又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，即存在数$x_2,x_3$使得$\alpha_1=x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$．令数$x_4=0$，则$\alpha_1=x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，即$\alpha_1$可以由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.

（2）不能．令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

很显然，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，但是$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

2．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$，请分析向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的线性相关性.

解：记矩阵

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_s,$$

令$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)D\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0.$$

因为$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性无关，所以

$$D\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=0.$$

因为

$$|D|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{s-1} +(-1)^{1+s}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{s-1} =1+(-1)^{1+s},$$

所以，当s为奇数时，$|D|=1+(-1)^{1+s}=2\neq 0$，所以$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$，即向量组$b_1, b_2, \cdots, b_s$线性无关.

当s为偶数时，$|D|=1+(-1)^{1+s}=0$，所以$(x_1, x_2, \cdots, x_s)$有非零解，即向量组$b_1, b_2, \cdots, b_s$线性相关.

3．设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且存在正整数k，使方程组$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$，且已知$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，试证明：$\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

证明：因为$A^{k-1}a\neq 0$，所以$A^{k-i}a\neq 0\,(i=1,\cdots,k)$，且$A^{k-1}a$线性无关.

令$x_{k-2}A^{k-2}a+x_{k-1}A^{k-1}a=0$，则

$$A\left(x_{k-2}A^{k-2}a+x_{k-1}A^{k-1}a\right)=x_{k-2}A^{k-1}a+x_{k-1}A^{k}a=x_{k-2}A^{k-1}a=0,$$

所以$x_{k-2}=0$，即向量组$A^{k-2}a, A^{k-1}a$线性无关.

下面用归纳假设证明．假设$A^{i}a, \cdots, A^{k-1}a\ (i=1,\cdots,k-2)$线性无关，令$x_{i-1}A^{i-1}a+x_iA^ia+\cdots+x_{k-2}A^{k-2}a+x_{k-1}A^{k-1}a=0$，则

$$A\left(x_{i-1}A^{i-1}a+x_iA^ia+\cdots+x_{k-2}A^{k-2}a+x_{k-1}A^{k-1}a\right)$$

$$=x_{i-1}A^{i}a+x_iA^{i+1}a+\cdots+x_{k-2}A^{k-1}a+x_{k-1}A^{k}a$$

$$=x_{i-1}A^{i}a+x_iA^{i+1}a+\cdots+x_{k-2}A^{k-1}a=0$$

所以 $x_{i-1}=x_i==\cdots=x_{k-2}=0$，进而有 $x_{k-1}=0$，所以 $A^{i-1}a, A^{i}a, \cdots, A^{k-1}a$ 线性无关.

综上所证，$a, Aa, A^2a, \cdots, A^{k-1}a$ 线性无关.

4.设 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1= \qquad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+ \qquad \boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\end{cases}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证明：因为

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^n(n-1)\neq 0$$

所以

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}^{-1},$$

因此，向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 可以相互表示，故二者等价.

5．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个 n 维向量组，且 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 等于 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 都等于 r，则（　D　）.

（A）两个向量组等价；

（B）当 $s=t$ 时，两个向量组等价；

（C）$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$；

（D）当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 能被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 也可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

6．设向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩与向量组 $\boldsymbol{B}$ 相同，且向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，证明向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价．

证明：因为向量组 A 的秩与向量组 B 相同，不失一般性，设向量组 A 与向量组 B 的极大无关组分别为 $A_0: a_1, a_2, \cdots, a_r$ 与 $B_0: b_1, b_2, \cdots, b_r$．又因为向量组 A 可由向量组 B 线性表示，所以存在 r 阶系数矩阵 X 使得

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_r\right)=\left(b_1, b_2, \cdots, b_r\right) X .$$

因为

$$r=R\left(a_1, a_2, \cdots, a_r\right)=R\left(\left(b_1, b_2, \cdots, b_r\right) X\right) \leq R(X) \leq r,$$

所以 X 可逆，假设其逆矩阵为 X^{-1}，则

$$\left(b_1, b_2, \cdots, b_r\right)=\left(a_1, a_2, \cdots, a_r\right) X^{-1},$$

即向量组 B 可由向量组 A 线性表示.

综上所述，向量组 A 和向量组 B 可相互线性表示，故二者等价.

7．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A} | \boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$．

证明：$R(A+B) \leq R(A+B | B)=R(A | B) \leq R(A)+R(B)$.