浙江工业大学 2017 - 2018 学年第一学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：__________ 得分：__________

一. 填空题，共 28 分，每空 2 分。

1. 已知随机事件 A, B 满足 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$，$P(A) = 0.3$，则 $P(B) =$ _____.

2. 已知球员每次投篮的命中率为 p，且是否命中相互独立. 设某球员投篮 3 次中至少命中一次的概率为 0.875，则命中率 $p =$ _____，该球员 5 次投篮至少命中 2 次的概率为 _____.

3. 已知离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.4, & -1 \le x < 0, \\ 0.8, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x, \end{cases}$$

   则 $P(X \ge 0) =$ _____.

4. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\mathrm{E}X =$ _____，$\mathrm{Var}(X) =$ _____.

5. 已知 $\lambda > 0$，随机变量 $X \sim P(\lambda)$，若 $P(X \le 1 | X \le 2) = \frac{4}{5}$，则 $\lambda =$ _____，$\mathrm{E}X^2 =$ _____.

6. 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Cx^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则常数 $C =$ _____，$Y = X^2$ 的密度函数 $f_Y(y) =$ __________.

7. 已知随机变量 X, Y，$\mathrm{E}X = -2$，$\mathrm{E}Y = 2$，$\mathrm{Var}(X) = 1$，$\mathrm{Var}(Y) = 4$，相关系数 $\rho = -0.5$，则 $\mathrm{E}(X + 2Y) =$ _____，$\mathrm{Var}(X + 2Y) =$ _____.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的简单样本. 令 $\bar{X} = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + \cdots + X_5)$ 为样本均值. 若

$$C\frac{\bar{X}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2}}$$

   服从 t-分布，则自由度为 _____，$C =$ _____.

二. 选择题，共 12 分，每题 3 分。

1. 某随机变量的密度函数可能是 (　　).

A) $\begin{cases}\sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　B) $\begin{cases}\sin x, & 0 \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

C) $\begin{cases}\sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　D) $\begin{cases}\sin x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2. 设 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 是独立同分布随机变量序列，且 $\mathrm{E}X_1 = 1$，$\mathrm{Var}(X_1) = 2$. 令 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则根据中心极限定理，(　　).

A) $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \le nx) = \Phi(x)$

B) $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \le \sqrt{n}x) = \Phi(x)$

C) $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \le 2nx) = \Phi(x)$

D) $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \le \sqrt{2n}x) = \Phi(x)$

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单样本，其中 μ_0 已知而 σ^2 未知，则不为统计量的是 (　　).

A) $\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$　　B) $X_1 + X_4 - 2\mu$

C) $\max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$　　D) $\frac{1}{\sigma^2}(X_1 - X_2)^2$

4. 已知一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一组简单样本，$\bar{X}$ 和 S 分别为样本均值和样本标准差，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信下限是 (　　).

A) $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　　B) $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$　　C) $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$　　D) $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha}$

三. 解答题，共 5 题，60 分。

1. (8 分) 电报通讯中不断发出信号 0 和 1，根据统计资料，发出信号为 0 和 1 的概率分别为 0.6, 0.4. 由于受到信号干扰，若发出信号为 0 时，接收到的信号为 0, 1 和模糊信号 x 的概率分别为0.7, 0.1, 0.2；而发出信号为 1 时，接收到的信号为 0, 1, x 的概率分别为 0.05, 0.85, 0.1.

   1) 求接收到信号为 x 的概率；

   2) 若接收到的信号为 x，求此时发出信号为 0 的概率.

2. (8 分) 设随机变量 X, Y 的分布律分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

   且满足 $P(X^2 = Y^2) = 1$.

   1) 求 (X, Y) 的联合分布律；

   2) 判断 X, Y 是否独立.

3.（10 分）设连续型随机变量的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{1+x^2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1）求常数 C；

2）求 $Y = X^2 + 1$ 的期望和方差.

4.（12 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(x^2+y), & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

1）求常数 k；

2）求 $P(X<Y)$.

3）求 X,Y 的边缘密度函数，并判断独立性.

5. (10 分) 假设某种产品的使用寿命（单位：小时）服从正态分布，标准差为 150. 现从一批产品中随机抽取 25 件样本，测得样本均值 $\bar{x} = 2537$. 问：在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，能否认为这批产品的平均寿命为 2500 小时？($z_{0.025} = 1.96$，$z_{0.05} = 1.65$)

6. (12 分) 已知总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一组简单样本.

1) 求 θ 的矩估计量，并判断其是否为无偏估计；

2) 求 θ 的极大似然估计量.