浙江工业大学 2020-2021 学年第二学期

《高等数学 II》期末考试试卷

班级:______________ 学号:______________ 姓名:____________ 任课教师:____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 选择题（共5小题，每小题3分，合计15分）

(1) 一阶微分方程$\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足$y(0)=0$的解$y=\varphi(x)$ 是(　　).
(A)常值函数；(B) 单调递减函数; (C) 单调递增函数；(D) 偶函数.

(2) 直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+5}{1}$ 与直线$L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）
(A) $\dfrac{\pi}{2}$；　(B) $\dfrac{\pi}{3}$;　(C) $\dfrac{\pi}{4}$;　(D) $\dfrac{\pi}{6}$.

(3) 设$f(x,y)$ 的两个一阶偏导函数存在，且恒有$f'_x(x,y)>0, f'_y(x,y)<0$, 则（　　）.
(A) $f(0,0)<f(1,1)$;　(B) $f(0,0)>f(1,1)$;
(C) $f(0,1)<f(1,0)$;　(D) $f(0,1)>f(1,0)$.

(4) 设$z=f(x,y)$的全微分为$dz=xdx+ydy$，则点$(0,0)$ (　　).
(A) 是$f(x,y)$ 的极大值点;　(B) 是$f(x,y)$的极小值点;
(C) 不是$f(x,y)$的极值点;　(D) 不是$f(x,y)$的连续点.

(5) 设a是一个实常数. 已知无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$ 绝对收敛，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛，则下述关于a 的描述正确的是(　　).
(A) $a\in(0,\frac{1}{2})$;　(B) $a\in(\frac{1}{2},1)$;　(C) $a\in(1,\frac{3}{2})$;　(D) $a\in(\frac{3}{2},2)$.

二. 填空题（共5小题，每小题3分，合计15分）

(1) 设$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5,\vec{a}\perp\vec{b}$, 则$|(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})|=$ ________.

(2) 设函数$f(x,y)$ 可微，$g(x)$可导，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$, 则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(3) 微分方程$y''+2y'+3y=0$ 的通解为________________.

(4) 设有单位球面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$, 取内侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz=$ ________ .

(5) 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$,
其中$a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx$, $n=0,1,2,\cdots$, 则$S(\frac{7}{2})=$ __________.

三. 解答下列各题（18分）

(1) 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$的敛散性.

(2) 设$I(r)=\displaystyle\int_{C_r}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, 其中曲线$C_r$为椭圆$3x^2+4y^2=r^2$, 取正向。请计算极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I(r)$.

(3) 已知$f_n(x)$ 满足$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n\in\mathbb{N})$, 且$f_n(1)=\dfrac{e}{n}$, 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$的和函数.

四. 解答下列各题(24分)

(1) 计算$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4-y^2}dx$.

(2) 计算$\int_C |y|ds$, 其中曲线C为半圆$x^2+y^2=1,\ x\geq 0$.

(3) 计算$\iint\limits_{\Sigma} \frac{dxdy}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$ 在平面$z=\frac{1}{2}$ 上方的部分，取下侧.

(4) 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$, 其中$\Omega$为由曲面$x^2+y^2=2z$ 和平面$z=2$ 所围成的区域.

五. (12分) 设点$P(x,y,z)$为曲面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，并设S在点P处的切平面总与xoy 平面垂直：（1）求点P的轨线C的方程；（2）求C 在xoy 平面上的投影线的方程；（3）说明C是一条平面曲线，并求此C在它所在的平面上围成的区域的面积.

六. (8分) 设平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

(1) 计算积分$\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$;

(2) 设$f(x,y)$ 在D 上连续，且$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0, \iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明：

存在$(\xi,\eta)\in D$, 使得$|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D |xy-1|d\sigma\ge 1$.

七. (8分)设二元函数$u=\sqrt{x^2+2y^2}$.

(i) 据理说明上述函数在原点$(0,0)$处的偏导数是否存在？若存在，请求出.

(ii) 设$\vec{l}$为以点$(0,0)$为始点的平面单位向量，据理说明$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$是否存在？若存在，请求出.