浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2016 ～ 2017 第 二 学 期 ）

标准答案与评分标准

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分	

1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&b\\c&7\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$可交换，即

$\boldsymbol{AB}$=$\boldsymbol{BA}$，则$b=$__5__，$c=$__0__。

2. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0.1&0&0\\0.2&0.2&0\\0.3&0.4&0.5\end{pmatrix}$。

3. 行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&2\\-2&-1&0&-3\\3&1&2&-5\end{vmatrix}$，则$\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=$__0__。

4. 设三元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{0}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=2$，则该方程组的解集$\boldsymbol{X}_A$的秩$R(\boldsymbol{X}_A)=$__1__。

5. 向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^T$，向量$\boldsymbol{\beta}=(2,0,3,3)^T$，则向量$\boldsymbol{\alpha}$的模长$\|\boldsymbol{\alpha}\|=$__2__，向量$\boldsymbol{\alpha}$与向量$\boldsymbol{\beta}$的内积$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=$__8__。

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$的三个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$__2__

，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 =$ <u>-2</u>。

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零方阵，且 $\boldsymbol{AB}=O$，则 $t=$ <u>-3</u>。

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 下列命题正确的是 (A)。

(A) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 也可逆。

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 B 都是 n 阶可逆方阵，则 $\boldsymbol{A}+B$ 也可逆。

(C) 若 $AB=O$，且 $\boldsymbol{A}\neq O$，则必有 $B=O$。

(D)若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\neq O$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则必有(B)。

(A) $\boldsymbol{A}P_1P_2=B$　　　　(B) $P_1P_2\boldsymbol{A}=B$

(C) $\boldsymbol{A}P_2P_1=B$　　　　(D) $P_2P_1\boldsymbol{A}=B$

3.设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 $B=AC$，$R(A)=r_1$，$R(B)=r$，

则 (C)。

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$　　(C) $r=r_1$　　(D) r与r_1的关系依C而定

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T,\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & t\end{pmatrix}^T$ 线性相关，则（ C ）。

(A) $t>5$　　(B) $t<5$　　(C) $t=5$　　(D) $t\neq 5$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n （$n\geq 3$) 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，则必有 $(3\boldsymbol{A})^*=$ (D)。

(A) $3\boldsymbol{A}^*$　　(B) $3^{-1}\boldsymbol{A}^*$　　(C) $3^n\boldsymbol{A}^*$　　(D) $3^{n-1}\boldsymbol{A}^*$

1	2	3	4	5	本题总得分

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ 的值

解： $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$=3\times(-75)$ ………………8 分

$=-225$ ………………10 分

2. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。

解：$\boldsymbol{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ………………4 分

$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=3$ ………………6 分

极大无关组：α_1，α_2，α_3 ………………8 分

$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ ………………10 分

3. 设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$， $AX=A+2X$，求矩阵 X。

解： $(A\text{-}2E)X=A$

得 $X=(A-2E)^{-1}A$..................4 分

$$(A\text{-}2E\vdots A)=\begin{pmatrix}2&2&3&\vdots&4&2&3\\1&-1&0&\vdots&1&1&0\\-1&2&1&\vdots&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&3&-8&-6\\0&1&0&\vdots&2&-9&-6\\0&0&1&\vdots&-2&12&9\end{pmatrix}$$

..................8 分

$\therefore X=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$..................10 分

4. 当 λ 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases}-x_1+\lambda x_2+2x_3=1\\x_1-x_2+\lambda x_3=2\\-5x_1+5x_2+4x_3=-1\end{cases}$$

（1）有唯一的解？（2）没有解？（3）有无穷多解？并在有无穷多解时给出该方程组的通解。

解：$D=\begin{vmatrix}-1&\lambda&2\\1&-1&\lambda\\-5&5&4\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(5\lambda+4)$..................4 分

（1） 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，有唯一解。..................6 分

（2） 当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时， $R(\overline{A})=3>R(A)=2$，无解。..................8 分

（3） 当 $\lambda=1$ 时，有无穷多解。

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ -5 & 5 & 4 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

即有 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in R \text{..................} \textcolor{red}{10\text{ 分}}$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量。（2）$\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能对角化，求出相应的相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$ 为对角矩阵。

解：（1）$|A-\lambda E|=\lambda(\lambda+1)(1-\lambda)$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$

..................4 分

代入（$A-\lambda_i E$）$x=0$ $(i=1,2,3)$ 得

$\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$ ，

$\lambda_2=0$ 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2 \neq 0$ ，

$\lambda_3=1$ 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_3 \neq 0$ 。..................7 分

（2）$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。相似变换矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ . . . . 10 分

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. （6 分）已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-16E=\boldsymbol{O}$，

证明 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}-3E)^{-1}$。

证明：由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-16E=\boldsymbol{O}$ 得

$(A-3E)(A+5E)=E$ . . . . 4 分

$\therefore \boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-3E)^{-1}=A+5E$ . . . . 6 分

2. (4 分) 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s)K$，其中 K 是由表示系数构成的 $s\times t$ 矩阵。若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性无关，证明：矩阵 K 的秩 $R(K)=t$。

证明： 记 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t)$, $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s)$,

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，得 $R(B)=t$。

由 $B=AK$ 得

$t=R(B)=R(AK)\le R(K_{s\times t})\le t$

即有 $R(K)=t$。 . . . . 4 分