19/20 浙江工业大学高等数学 A（下）期末试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________

任课教师（请务必填上）:_________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、 填空题（本题满分 33 分，每小题 3 分）

1、已知 $y_1 = e^{2x}$ 与 $y_2 = 2xe^{2x}$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，则 $p=$________，$q=$_______。$-4, 4$

2、微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3y^2}$ 的通解为____________________。$y^3 = x^2 + C$

3、已知向量 $\bar{a}=(1,2,-2)$ 与向量 $\vec{b}=(2,3,\lambda)$ 垂直，则 $\lambda=$_______。4

4、设 $z=\cos(xy)$，则 $dz=$____________________。$dz=-y\sin(xy)dx - x\sin(xy)dy$

5、设 $z=f\left(x^2-y^2\right)$，其中 f 可导，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。0

6、函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(0,\ 1,\ 2)$ 的方向导数

为___________。$\sqrt{5}$

7、$\int_0^2 dy\int_y^2 e^{-x^2}dx=$______________。$\dfrac{1}{2}(1-e^{-4})$

8、设曲线 l 为连接 $(a,\ a)$ 与 $(b,\ b)$ 的直线段 $(a<b)$，

则 $\int_l (x^2+y^2)ds=$ ______________。$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$

9、设 Σ：$x^2+y^2+z^2=4$，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)^n dS=$_________。$4^{n+2}\pi$

10、设 $G: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le 3$，则三重积分 $\iiint_G xdV=$_________。3

11、设 $f(x)$ 是 2π 为周期的周期函数，在 $\left[-\pi,\pi\right)$ 上的表达式为 $f(x)=\pi-x$，

则其傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 在 7π 处的值 $S\left(7\pi\right)=$________。π

二、选择题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1、 若$z=f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处可微，则下列结论**错误**的是　　　　（ B ）

（A） $f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处连续；

(B) $f_x(x,y),f_y(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处连续；

(C) $f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处偏导数存在；

(D) 曲面Σ： $z=f(x,y)$在$\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$处存在切平面。

2、设$\dfrac{(x+ay)dy-ydx}{(x^2+y^2)}$在右半平面内为某个二元函数的全微分，则$a=$（ B ）

（A） -1 ； (B) 0 ； (C) 1 ； (D) 2 。

3、设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x$=4处条件收敛，则该幂级数的收敛半径　　　　（ A ）

（A）等于 4； (B) 大于 4 ； (C） 小于 4 ； (D) 不确定 。

4、以下命题中正确的是：　　　　（ C ）

(A) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$满足$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则该级数收敛；

(B) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；

(C) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$收敛；

(D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散。

三、试解下列各题（本题满分 12 分，每小题 6 分）

1、设$f(x)$为 R 上的连续函数，且满足方程： $f(x)-\int_0^x f(t)dt=x^2+1$，求$f(x)$。

解：方程两边求导得： $f'(x)-f(x)=2x$　　　　3 分

由一阶线性微分方程通解公式可得：

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(-1)dx}\left(\int\mathrm{e}^{\int(-1)dx}2xdx+C\right)$$

$$=-2(x+1)+Ce^x$$　　　　5 分

由 $f(0)=1$，得：C=3，从而 $f(x)=-2(x+1)+3e^{x}$.　6 分

2、求曲面Σ：$e^{z}-z+xy=2$ 在 $(1,\ 1,\ 0)$ 处的切平面与法线方程。

解：曲面Σ：$e^{z}-z+xy=2$ 在 $(1,\ 1,\ 0)$ 处的法向量为：(1,1,0)　　2 分

从而切平面方程：$x+y-2=0,$　　4 分

法线方程：$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1} \\ z=0 \end{cases}$　　6 分

四、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1、计算 $\iint\limits_{D} e^{-x^{2}-y^{2}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|\ x^{2}+y^{2}\le 2\}$。

解：原式 $=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\sqrt{2}}e^{-r^{2}}rdr$　4 分

$=\pi(1-e^{-2})$　7 分

2、计算 $\int_{C}\left(e^{x}\sin y-y\right)dx+\left(e^{x}\cos y-3x\right)dy$，其中 C 为上半圆周 $(x-2)^{2}+y^{2}=4,\ y\ge 0$，方向由点 A$(4,0)$ 到原点 $O(0,0)$。

解：原式 $=\oint_{C+OA}-\int_{OA}$　2 分

$=\iint_{\mathrm{D}}(-2)\ dxdy-\int_{OA}$　5 分

$=-2\cdot 2\pi-0=-4\pi$　7 分

五、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 8 分）

1、一直线过点 $M_{0}(2,-1,3)$ 且与直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ 相交，又平行于平面 $3x-2y+z+5=0$，求此直线的方程。

解：设两直线的交点为 $A(2t+1,-t,t-2)$，$\overrightarrow{M_{0}A}=(2t-1,-t+1,t-5)$，　2 分

因为 $\overrightarrow{M_{0}A}$ 与已知平面的法向量 $\vec{n}=(3,-2,1)$ 垂直，所以

$(2t-1,-t+1,t-5)\cdot(3,-2,1)=0$，得：　4 分

$t=\dfrac{10}{9}$　所以：$\overrightarrow{M_{0}A}=\left(\dfrac{11}{9},\ ,-\dfrac{1}{9},-\dfrac{35}{9}\right)$　6 分

直线的方程：$\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-35}$　8 分

2 、 求 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$ ， 其 中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h)$ 的下侧。

解：取Σ_1：$z=h$，（$\sqrt{x^2+y^2}\le h$) 的上侧，

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$ 3 分

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}x^2dxdy+0$$ 6 分

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r^3\cos^2\theta dr$$

$$=-\frac{\pi}{4}h^4$$ 8 分

3、求幂级数 $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$ 的收敛域以及和函数。

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore R=2$ 2 分

当 $x=-2$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散；

当 $x=2$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛， 收敛域为$(-2,2]$ 4 分

$$s(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-x}{2}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{-x}{2}}(t)^{n-1}dt=-\int_0^{\frac{-x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(t)^{n-1}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{-x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(t)^{n-1}dt=-\int_0^{\frac{-x}{2}}\frac{1}{1-t}dt$$ 6 分

$$=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(x\in(-2,2]\right)$$ 8 分

六、（本题满分 5 分）

设 $x_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 是方程 $\tan x = x$ 的正根，且从小到大排序，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$ 收敛。

证明：$\because x_n >(n-1)\pi(n=2,\ 3,\cdots)\ \therefore \dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{1}{(n-1)^2\pi^2}(n=2,\ 3,\cdots)$，3 分

$\because \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2\pi^2}$ 收敛，所以由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$ 收敛。 5 分