3-2

t=1 时，$E_\xi[\xi(1)]=E[2\cos(2\pi+\theta)]=\frac{1}{2}\cdot 2\cos(2\pi+0)+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(2\pi+\frac{\pi}{2})=1$

t_1=0，t_2=1 时，

$$R_\xi(0,1)=E[\xi(0)\xi(1)]=4E[\cos\theta\cos(2\pi+\theta)]=4E[\cos^2\theta]=4\cdot\frac{1}{2}\cos^2 0+4\cdot\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2}=2$$

3-6

（**1**）若平稳，则需满足均值为常数，自相关仅是$\boldsymbol{\tau}$ 的函数：

① 均值：$m(t)$与θ彼此统计独立，因此有：

$$E[z(t)]=E[m(t)\cos(\omega_c t+\theta)]=E[m(t)]\cdot E[\cos(\omega_c t+\theta)]$$
$$=E[m(t)]\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega_c t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=E[m(t)]\cdot 0=0$$

② 自相关：

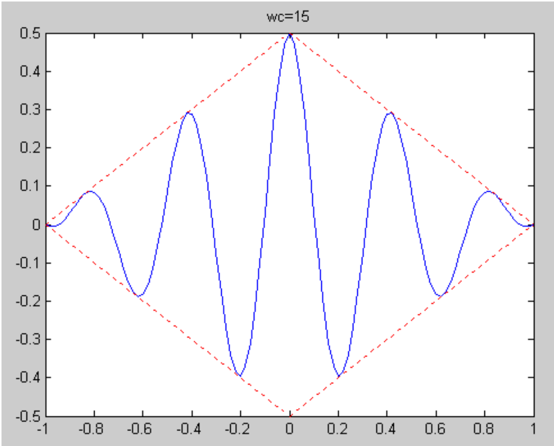
$$R_z(t_1,t_2)=E[z(t_1)z(t_2)]=E[m(t_1)\cdot\cos(\omega_c t_1+\theta)\cdot m(t_2)\cdot\cos(\omega_c t_2+\theta)]$$
$$=E[m(t_1)\cdot m(t_2)]\cdot E[\cos(\omega_c t_1+\theta)\cdot\cos(\omega_c t_2+\theta)]$$
$$=R_m(\tau)\cdot\frac{1}{2}E\left\{\cos[\omega_c(t_1+t_2)+2\theta]+\cos\omega_c(t_1-t_2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau=R_z(\tau)$$

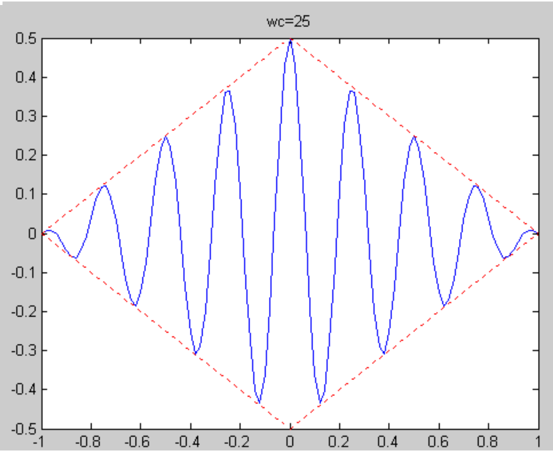
综上，随机过程 $z(t)$是平稳的，证毕

（**2**）

$$R_z(\tau)=\frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\tau)\cos\omega_c\tau & -1<\tau<0\\ \frac{1}{2}(1-\tau)\cos\omega_c\tau & 0\le\tau<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

【注】ω_c 不同，图形会有所不同，但可看作正弦波与三角波的乘积。以下两图分别是 $\omega_c=15$ 和 $\omega_c=25$ 的图，供参考。





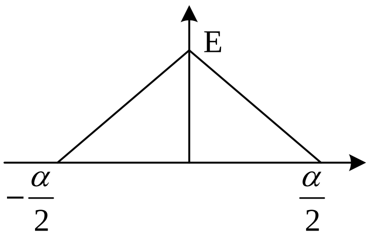
（3）对于平稳随机过程，满足维纳—辛钦关系：$P_z(\omega) \Leftrightarrow R_z(\tau)$

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} R_m(\tau)\cos\omega_c\tau$$

$$\cos\omega_c\tau \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$$

$R_m(\tau)$ 是三角波，因此：$R_m(\tau) \Leftrightarrow Sa^2(\frac{\omega}{2})$

【注】：三角波的频谱函数（《信号与系统》书上）：



上图三角波的频谱函数为：$\frac{E\alpha}{2} Sa^2(\frac{\omega\alpha}{4})$

$R_m(\tau)$ 对应：$E = 1, \alpha = 2$，【注】完毕

时域相乘对应频域卷积：

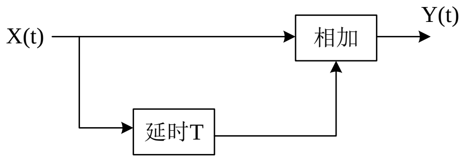
$$P_z(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)] * \frac{1}{2} Sa^2(\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{4}\left[Sa^2(\frac{\omega+\omega_c}{2}) + Sa^2(\frac{\omega-\omega_c}{2})\right]$$

$$P_z(f) = \frac{1}{4}\left\{Sa^2[\pi(f+f_c)] + Sa^2[\pi(f-f_c)]\right\}$$

功率 $P = R_Z(0) = \frac{1}{2}$。

3—7

（1）$Y(t) = X(t) + X(t-T)$



（2）

平稳过程通过线性系统仍是平稳过程，因此，Y(t)是平稳过程，自相关只与时间间隔 τ 有关：

$$\begin{aligned}R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\{[X(t)+X(t-T)][X(t+\tau)+X(t+\tau-T)]\}\\ &= E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t)X(t+\tau-T)]+E[X(t-T)X(t+\tau)]+E[X(t-T)X(t+\tau-T)]\\ &= 2R_X(\tau)+R_X(\tau-T)+R_X(\tau+T)\end{aligned}$$

根据维纳－辛钦定理，有 $R_Y(\tau)\Leftrightarrow P_Y(\omega), R_X(\tau)\Leftrightarrow P_X(\omega)$，因此

$$P_Y(\omega)=2P_X(\omega)+P_X(\omega)e^{-j\omega T}+P_X(\omega)e^{j\omega T}=2(1+\cos\omega T)P_X(\omega)$$

（3）Y(t)的平均功率：

$R_Y(0)=2R_X(0)+R_X(-T)+R_X(T)=2R_X(0)+2R_X(T)$，（相关函数是偶函数）

3-8

（1）从理想带通滤波器输出的噪声是带通白噪声，因此其自相关函数为：

$$R(\tau)=n_0B\frac{\sin\pi B\tau}{\pi B\tau}\cos 2\pi f_c\tau \qquad \text{（式 3.7-7）}$$

【注】当然也可以利用平稳过程通过线性系统的性质来求，可以认为是白噪声（输入平稳过程）通过理想带通（线性系统）来求输出平稳过程的功率谱密度，然后利用维纳－辛钦关系求自相关。

（2） $N_o=R(0)=n_0B$

（3）高斯过程通过线性系统后仍是高斯过程，因此，为了求一维概率密度函数，只需求出其均值和方差即可，设输入噪声为 $n_i(t)$，输出噪声为 $n_o(t)$：

$$E[n_o(t)]=E[n_i(t)]\cdot H(0)=0$$

$$\sigma^2=\text{交流功率}=\text{总功率}-\text{直流功率}=\text{总功率}=n_0B$$

因此，一维概率密度函数： $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n_0B}}\exp[-\dfrac{x^2}{2n_0B}]$