

# 浙江工业大学

## 线性代数期末试卷

### ( 2018 ~ 2019 第一 学期 )

任课教师 \_\_\_\_\_ 学院班级: \_\_\_\_\_ 选课班中编号: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四
得分				

一. 填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分

1. 已知行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m$ ,  $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$ , 则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 2a_{23} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设向量组  $\alpha = (1, 0, a)^T, \beta = (2, 4, 3)^T, \gamma = (1, 3, 2)^T$  线性相关, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设矩阵  $A$  的秩为 2, 且  $\eta_1 = (1, 2, 3)^T, \eta_2 = (2, 1, 4)^T$  是三元非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的两个特解, 则方程组  $AX = 2\beta$  的通解为  $\underline{\hspace{4cm}}$ .

4. 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{bmatrix}$  的秩  $R(A) < 3$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  的逆矩阵  $A^{-1} = \underline{\hspace{4cm}}$ .

6. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ , 已知  $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  是它的一个特征向量, 则  $\alpha$  所对应的特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 设向量  $\alpha, \beta$  的长度依次为 2 和 3, 则向量  $\alpha + \beta$  与  $\alpha - \beta$  的内积

$\langle \alpha + \beta, \alpha - \beta \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 设矩阵  $A$  为三阶方阵，且  $A-E, A-2E, 2A+E$  均为不可逆矩阵，则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是三维向量空间  $R^3$  的两组基，若  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ，则  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  \_\_\_\_\_。

10. 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为正交矩阵，则  $2\alpha_1^T \alpha_3 + 3\alpha_2^T \alpha_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	
------	--

1. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{11} & a_{22} + a_{12} & a_{23} + a_{13} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则必有 ( )

(A)  $AP_1P_2 = B$     (B)  $AP_2P_1 = B$     (C)  $P_1P_2A = B$     (D)  $P_2P_1A = B$

2. 设  $AX = \beta$  为非齐次线性方程组，则下列命题正确的有 ( )

(A) 若  $AX = O$  有非零解，则  $AX = \beta$  有无穷多解

(B) 若  $AX = \beta$  有无穷多解，则  $AX = O$  必有非零解

(C) 若  $AX = O$  只有唯一零解，则  $AX = \beta$  必有非零解

(D) 若  $AX = \beta$  无解，则  $AX = O$  也无解

3. 设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次线性方程组  $AX = O$  的基础解系，则下列向量组中也是  $AX = O$  的基础解系的是 ( )

(A)  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$     (B)  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

(C)  $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + 4\xi_2 - \xi_3, 2\xi_1 + 3\xi_2$

(D)  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

4. 设  $\lambda$  是  $n$  阶可逆方阵  $A$  的特征值,  $p$  为对应的一个特征向量, 则以下结论正确的是 ( )

(A)  $p$  也是矩阵  $A^{-1}$  的属于特征值  $\lambda^{-1}$  的特征向量

(B)  $p$  也是矩阵  $A^T$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量

(C)  $(A - \lambda E)X = O$  的所有解都是  $A$  的特征向量

(D)  $(A - \lambda E)X = O$  的所有解都可表示为  $k p$

5. 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  相似的充分必要条件是 ( )

(A)  $a=0, b=2$  (B)  $a=0, b$  为任意常数

(C)  $a=2, b=0$  (D)  $a=2, b$  为任意常数

三、计算题 (每题 10 分,共 50 分)

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求向量组:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  的秩和一个极大无关组, 并把

其余向量用该极大无关组线性表示。

2. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T。$$

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + ax_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

- (1) 问  $a$ 、 $b$  满足何种关系时，方程组无解？
- (2) 问  $a$ 、 $b$  满足何种关系时，方程组有无穷多解？并在此时求出方程组的通解。

4. 若矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  相似于对角矩阵  $\Lambda$ ，试确定常数  $a$  的值，并求可逆矩阵

$P$ ，使  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

5. 若  $A^3 = O$ ，问  $A + E$  是否可逆？若可逆，求  $(A + E)^{-1}$ 。

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1	2	本题总得分

1. 设向量组 A 的秩与向量组 B 的秩相等，且向量组 A 可由向量组 B 线性表示，证明向量组 A 与向量组 B 等价。

2. 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  是 4 阶矩阵,  $A^*$  为 A 的伴随矩阵。若  $(1, 0, 0, 1)^T$  是方程组  $AX = O$  的一个基础解系。证明:  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是  $A^*X = O$  的一个基础解系。