03 年

10. 若 $y = e^{rx}$ 是微分方程 $y'' + 7y' + 12y = 0$ 的解，则 $r =$ ________。

10. -3 or -4

4. 微分方程 $y'' + y' = e^x + x$ 的一个特解的形式为（　　）

（A） $y^* = ae^x + bx$；　　（B） $y^* = axe^x + bx + c$；

（C） $y^* = ae^x + x(bx + c)$；　　（D） $y^* = axe^x + x(bx + c)$；

4.C

4. 求微分方程 $y''' - y'' = x$ 的通解。

4. 解：令 $y'' = p$，则 $y''' = p'$，于是

$p' - p = x$，一阶线性方程，得通解为 $p = C_1e^x - x - 1$. 从而得 $y'' = C_1e^x - x - 1$.

解得 $y = C_1e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

2. 求微分方程 $(4x^3 + 2xy)dx + (x^2 + 1)dy = 0$ 的通解。

2. 解： $y' + \dfrac{2x}{x^2+1}y = -\dfrac{4x^3}{x^2+1}$ ----------一阶线性方程

$p(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$，$Q(x) = -\dfrac{4x^3}{x^2+1}$，得通解为

$$y = e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\left[\int -\frac{4x^3}{x^2+1}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx + C\right] = \frac{1}{1+x^2}(C - x^4)$$

1、（8 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x) = e^x + \int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$，求：$f(x)$

六、解：由积分方程得 $f(0)=1$, 对积分方程两边求导得

$f'=e^x-\int_0^x f(t)dt$, 且 $f'(0)=1$, 再次两边求导得 $f''=e^x-f$, 即求解以下微分

方程(令 $y=f(x)$) $\begin{cases} y''+y=e^x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ ，二阶常系数非齐 $c\in(0,\frac{1}{2})$, 次方程，特征方程为

$r^2+1=0$,

得 $r=\pm i$, 所以对应齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 设特解为 $y^*=ae^x$,

代入微分方程得 $2ae^x=e^x$, 解得 $a=\frac{1}{2}$. 故特解为 $y^*=\frac{1}{2}e^x$.

于是微分方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$, 代入初始条件，得 $C_1=\frac{1}{2}$ ，$C_2=\frac{1}{2}$.

积分方程的解为 $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^x)$

04 年

8. 已知 $y_1=e^{-2x}$ ， $y_2=3xe^{-2x}$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，则常数 $p=$______， $q=$______。

8． 4， 4；

2. 求微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的通解。

2.解：特征方程为 $r^2-2r=0 \quad r(r-2)=0\Rightarrow r_1=0, r_2=2.$

所以齐次通解 $\bar{y}=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1+C_2e^{2x}$

又 λ 为一重特征根。设非齐次特解 $y^*=(ax+b)xe^{2x}$

代入非齐次方程得 $4ax+2b+2a=x$

$$\therefore \begin{cases} 4a=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow y^*=\frac{1}{4}x(x-1)e^{2x}$$

$\therefore$ 非齐次通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}x(x-1)e^{2x}$

八、（7 分）连接两点 A（0，1）与 B（1，0）的一条曲线位于弦 AB 的上方，对于曲线上任意一点 $P(x,y)$，曲线与线段 AP 之间的面积为 x^3，求此曲线的方程。

八、如图建立坐标系

$\overline{AP}:\overline{Y}-1=\frac{y-1}{x}(X-0)\qquad ,y=f(x)$

$AP:\overline{Y}=f(z)$　　　则 A=$\int_0^x(f(X)-(1+\frac{y-1}{x}X)dX=x^3$

两边关于 x 求导

$$f(x)-1-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{2}xy'=3x^2\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=\frac{-6x^2-1}{x}$$

$$\Rightarrow y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int-\frac{6x^2+1}{x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c)=x(-6x+\frac{1}{x}+c)=-6x^2+cx+1$$

又过（1，0）点$\Rightarrow c=5$

$\therefore y=-6x^2+5x+1\qquad x\in[0,1]$

05 年

~~5.~~ 微分方程 $xy'+y=y\ln(xy)$ 的通解是________________________。

~~6.~~ 微分方程 $y'''-y''=2$ 的通解是__________________。

5. $y=\frac{1}{x}e^{cx}$；

6. $y=-x^2+c_1e^x+c_2x+c_3$

~~五~~、（7 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求：$f(x)$

六、（8 分）设函数 $f(x)$ 对一切 $x_1,x_2\in R$ 满足等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导，$f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，（1）证明 $f(x)$ 处处连续、可导；~~(2)~~ 求 $f(x)$。

五、　$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

$f(0)=0$, $f'(0)=1$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

06 年

~~6、~~ 微分方程 $y'''-y''=2$ 的通解是________________________。

6. $y=c_1+c_2x+c_3e^x$

~~3、~~ 求微分方程 $x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=1$ 的特解。

3. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$(一阶线性)

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left(\int\left(\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}\right)dx+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{\ln^2 x}{2}+c\right)$$

~~九、~~（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足：

$$f'(x)+f(x)=\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt$$

1、求导函数 $f'(x)$；

2、证明：当 $x\geq 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$。

九、（1）原式可化为 $(x+1)f'(x)=\int_0^x f(t)dt-(x+1)f(x)$ ，又 $f'(x)$ 可导

等式两边求导并化简得：$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$ （*）

且满足 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$

解初值问题（令 $f'(x)=p$，$f''(x)=p'$ 带入（*））得

$$f'(x)=p=-\frac{e^{-x}}{x+1} \qquad （4 分）$$

（2）因为当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}<0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)\leq f(0)=1$

令 $F(x)=f(x)-e^{-x}$

$F'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{xe^{-x}}{x+1}>0$

$F(x)\ge F(0)=0$，即 $f(x)\ge e^{-x}$

故有 $e^{-x}\le f(x)\le 1$ （8 分）

07 年

~~6.~~ 微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解是______________________________。

6. $y=c_1+c_2x+c_3e^{x}\cos 2x+c_4e^{x}\sin 2x$

~~1.~~ 设线性无关函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，c_1,c_2 是任意常数，则该方程的通解是（　　）

（A） $c_1y_1+c_2y_2+y_3$；　（B） $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$；

（C） $c_1y_1+c_2y_2+(c_1+c_2)y_3$；　（D） $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$。

1. B；

~~1.~~ 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解。

~~2.~~ 设有连接点 $O(0,0)$ 和点 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程。

四、 1、另 $y' = p, y'' = p'$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$y' = p = c(1+x^2), y'|_{x=0} = 3, c = 3$$

$y' = 3(1+x^2)$, （4 分）

$$y = 3x + x^3 + c$$

$y|_{x=0} = 1$， $c = 1$

$y = 3x + x^3 + 1$ （6 分）

2、 设弧 $\overset{\frown}{OP}$ 的方程为 $y=f(x), x\in(0,1]$

有 $x^2=\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}xf(x)$，且 $y|_{x=1}=1$，

$y'-\frac{1}{x}y=-4$（一阶线性）（3 分）

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -4e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$y=-4x\ln x+cx$（5 分）

$y|_{x=1}=1$

$y=-4x\ln x+x$（6 分）

08 年

~~7.~~ 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，$F(0)=1, F(x)>0$，$f(x)\cdot F(x)=x$，则当 $x\geq 0$ 时

$f(x)=$____________________。

7. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ，

~~10.~~ 微分方程 $y''+y'=xe^x$ 的一个特解的形式为（　　）

（A） $y^*=axe^x$； （B） $y^*=ae^x$；

（C） $y^*=x(ax+b)e^x$； （D） $y^*=(ax+b)e^x$；

10. D.

~~1.~~ 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-y}+1$ 的通解。

1. 解：令 $x-y=u, y=x-u, \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{u}$，即 $-u\,du= d$

$-\dfrac{u^2}{2}=x+c$

$u=x-y$ 代入得：$-\dfrac{(x-y)^2}{2}=x+c$

~~七~~、（9 分）设函数 $f(x)$（$x\geq 0$）二阶可导，$f'(x)>0$，$f(0)=1$，记曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 的切线及该点到 x 轴的垂线和 x 轴所围成三角形面积为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边是梯形面积为 S_2，且 $2S_1=S_2+1$，求此曲线 $y=f(x)$ 的方程。

七、（9 分）

解：$S_2=\int_0^x y(t)dt,\quad S_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{y'}$

$\dfrac{y^2}{y'}=\int_0^x y(t)dt+1$

两边求导并整理得：

$$\begin{cases} y'^2=yy'' \\ y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1 \end{cases}$$

解得 $y=e^x$

09 年

~~1~~、求微分方程 $x\ln x dy+ydx=0$ 满足条件 $y|_{x=e}=2$ 的特解。

1. 解：原方程可化为 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x\ln x}$

通解为：$\dfrac{1}{y}=c\ln x$

$x=e, y=2$ 代入得， $c=\dfrac{1}{2}$

特解为 $y=\dfrac{2}{\ln x}$

~~2~~、求微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解。

2． 解： 特征方程为： $r^2-4r+3=0$

特征根： $r_1=3, r_2=1$，

对应齐次方程的通解为 $c_1e^{3x}+c_2e^{x}$

原方程的一个特解为： $-2e^{2x}$

原方程的一个通解为 $c_1e^{3x}+c_2e^{x}-2e^{2x}$

~~七~~、（**10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，大于零，满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3}{2}ax^2$，若曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成图形 S 的面积为 2，（1）求函数 $f(x)$；（2）问 a 为何值时图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

七、（10 分）

解： 当 $x\neq 0$ 时， $\dfrac{x f'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{3}{2}a$， 即 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{3}{2}a$

$f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+Cx$，

又因为 $2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{C}{2}$ 所以 $C=4-a$

$f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$

旋转体体积

$V=\int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{10}a^2+a+16\right)$

令 $V'=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{5}a+1\right)=0$ 得 $a=-5$

$\therefore$ $a=-5$ 是唯一的极小值点，所以 $a=-5$ 时体积最小

10 年

~~4.~~ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，满足 $f''(x)+f'(x)=f(x)$， $f(a)=f(b)=0$，则在 $[a,b]$ 上（　　）

A） $f(x)$ 恒为零；　　　　B) 存在一个点 x_0，使 $f''(x_0)>0$；

C） $f(x)$ 不恒为零；　　　D) 存在一个点 x_0，使 $f'(x_0)>0$。

4 A

~~3.~~ 求微分方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解

3 解：令 $y'=P$；则 $y''=P'$

原方程化为 $P'-\frac{1}{x}P=x^2$

$y'=P=x^2+cx$

$y=\frac{1}{3}x^3+c_1x^2+c_2$.　6 分

~~六~~、（8 分）设函数 $y(x)$ 二阶导数连续，满足 $y(x)=1-\frac{1}{3}\int_0^x[y''(t)+2y(t)-6te^{-t}]dt$，且 $y'(0)=0$，试求 $y(x)$。

六、(8分)解：$y'(x)=-\frac{1}{3}\left[y''(x)+2y(x)-xe^{-x}\right]$

可化为 $\begin{cases} y''+3y'+2y=6xe^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ 3分

特征方程为：$r^2+3r+2=0$

特征根：$r_1=-1, r_2=-2$，

对应齐次方程的通解为 $c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ 5分

设原方程的一个特解为：$x(ax+b)e^{-x}$ 6分

解得特解为：$x(3x-6)e^{-x}$

原方程的一个通解为 $c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+x(3x-6)e^{-x}$ 7分

代入初始值得 $8e^{-x}-7e^{-2x}+x(3x-6)e^{-x}$ 8分

11年

13．微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解是__________________。

13．微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解是 $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$。

4. 求微分方程 $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时 $y=0, y'=-1$ 的特解。

令 $y'=p$

$p'-ap^2=0$

$\int \frac{dp}{p^2}=\int a\,dx$

$-\frac{1}{p}=ax+c$

$\because x=0$ 时 $y'=-1$

即 $x=0$ 时 $p=-1$

$\therefore c=1$

$\therefore p=-\frac{1}{ax+1}$

$y'=-\frac{1}{ax+1}$

当 $a\neq 0$ 时 $y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|+c_1$

而 $x=0$ $y=0$ $\therefore c_1=0$

$y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|$

当 $a=0$ 时 $y'=-1$ $y=-x+c_1$

$x=0.\ y=0$ 代入 得 $c_1=0$

$y=-x$

七、(9分) 设 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续非负函数，过点 $(2,\frac{2}{9})$，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,x=t,\ (t>1)$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为：$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，求曲线 $y=f(x)$ 的表达式。

$V(t) = \int_1^t \pi f(x) dx = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)]$

两边求导 $\pi f^2(t) = \frac{\pi}{3}[2t f(t) + t^2 f'(t)]$

则 $f(x)$ 是 $\begin{cases} 2xy + x^2 y' = 3y^2 \\ y|_{x=2} = \frac{2}{9} \end{cases}$ 的解.

$y' + \frac{2}{x} y = \frac{3y^2}{x^2}$

两边同除 y^2，令 $z = \frac{1}{y}$，则得 $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = -\frac{3}{x^2}$

先求 $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0$ 的解 可得 $z = cx^2$

令 $z = c(x) \cdot x^2$ 代入

$c'(x) x^2 = -\frac{3}{x^2}$

$c'(x) = -\frac{3}{x^4}$

$c(x) = \frac{1}{x^3} + c$.

$z = \frac{1}{x} + cx^2$.

即 $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + cx^2$ 再把 $y(2) = \frac{2}{9}$ 代入 得 $c = 1$

$\therefore y = \frac{x}{x^3+1}$

12 年

~~10~~. 微分方程 $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$ 的通解是______。

~~11~~. 微分方程 $y'' + y = 1$ 的通解是__________。

10. $(e^x + 1)(e^y - 1) = c$
11. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1$

~~1~~. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足方程 $f(x) - 2\int_0^x f(t)dt = x^2 + 1$，求：$f(x)$

解：

方程两边求导得 $f'(x) - 2f(x) = 2x$

这是一阶线性微分方程，从而有

$$f(x) = e^{\int 2dx}\left(\int 2xe^{\int -2dx}dx + c\right) = ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$$

由 $f(0)=1$ 得 $c=\frac{3}{2}$

从而得 $f(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-x-\frac{1}{2}$

13 年

~~8.~~ 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$ 的通解是 ______。

$x+y+1=ce^{y}$

~~1.~~ 对于微分方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}$，利用待定系数法求其特解 y^* 时，下面特解设法正确的是（ ）

A） $y^*=ae^{-x}$ B） $y^*=(ax+b)e^{-x}$ C） $y^*=axe^{-x}$ D） $y^*=ax^2e^{-x}$

B,C

~~5.~~ 解微分方程 $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$， $y(0)=-4$

$\frac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}\cdot 2x$ 1 分

$y=(x^2+c)e^{-x^2}$ 4 分 $y=(x^2-4)e^{-x^2}$

~~5.~~ 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$F(1)=1, F(x)>0$，且 $f(x)\cdot F(x)=\frac{1}{2}xe^{x}\ (x\geq 1)$，试求：$f(x)\quad (x\geq 1)$

记 $y=F(x)$，则 $y'=f(x)$，从而有初值问题 $\begin{cases} y'y=\frac{1}{2}xe^{x} \\ y|_{x=1}=1 \end{cases}$

分离变量，解方程得通解 $y^2=(x-1)e^{x}+c$，特解 $y^2=(x-1)e^{x}+1$ 5 分

从而 $f(x)=y'=\frac{xe^{x}}{2\sqrt{(x-1)e^{x}+1}}$

14 年

6. 微分方程 $y''+a^2y=0$ 的通解是______________。（常数 $a>0$）

7. 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为______________。

6．微分方程 $y''+a^2y=0$ 的通解是___。（常数 $a>0$） $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

7．已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为__。 $y=c_1(1-x)+c_2(1-x^2)+1$ 　　或者………（表示不唯一）

7．求微分方程 $xdy-ydx=x^2e^xdx$ 的通解。

解一：方程可化为一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=xe^x$ 　　1 分

通解 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^xe^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c\right)=x(e^x+c)$ 　　6 分

解二：方程可化为 $\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=e^xdx$ 　　3 分

从而有 $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=de^x$ 　　$\dfrac{y}{x}=e^x+c$ 　　6 分

15 年

~~8.~~ 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，则该方程的通解是____________________________。

$y=c_1(y_3-y_1)+c_2(y_3-y_2)+y_3$ 或………

~~1.~~ 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$， $y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解：令 $y'=p$， 　有 $\dfrac{1}{p}dp=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$， 　积分得 $y'=p=c_1(1+x^2)$

再积分有 　$y=c_1(x+\dfrac{1}{3}x^3)+c_2$，

从而满足初始条件的特解为 　$y=3x+x^3+1$

~~2.~~ 设函数 $f(x)$ 连续可导，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x(t-x)f(t)dt$，求 $f(x)$。

解： 积分方程两边求导二次得 　$f''(x)=e^x-f(x)$

二阶常系数微分方程 $f''(x)+f(x)=e^x$ 的通解为

$$f(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

由积分方程得初始条件 $f(0)=1,\ f'(0)=1$，从而有

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^x)$$

16 年

~~8~~. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=xy$ 的通解是______________________。

~~9~~. 微分方程 $y''+y=1$ 的通解是____________________。

8. $y=ce^{\frac{1}{2}x^2}$

9. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+1$

~~5~~. 求微分方程 $xy''+y'=\dfrac{1}{2}x$ 的通解

$(xy')'=\dfrac{1}{2}x$ $\qquad$ $xy'=\dfrac{1}{4}x^2+c_1$

$y'=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{c_1}{x}$ $\qquad$ $y=\dfrac{1}{8}x^2+c_1\ln x+c_2$

~~2~~. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，（1）写出微分方程 $y'+y=f(x)$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的一个特解 $y(x)$；（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$。

特解 $\quad y(x)=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$