第一章　行列式

行列式是线性代数中基本的运算工具之一. 本章先利用线性方程组，引出低阶行列式的定义；再通过排列的逆序数概念，给出 n 阶行列式的重要定义；随后讨论行列式的重要性质与计算方法；最后介绍利用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

第一节　n 阶行列式

一、二阶与三阶行列式

1、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为了消去未知数 x_2，第一个方程和第二个方程两边分别同乘上 a_{22} 与 a_{12} 后再相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

类似地，消去未知数 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时，方程组（1.1）的解是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1.2}$$

（1.2）式中的分子、分母都是由四个数组成的计算式, 这些计算式的结构完全一样，即都是两两相乘再相减，其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 是由方程组（1.1）中的未知数的四个系数来确定. 我们不妨把这四个数按照它们在方程组（1.1）中的位置，排成两行两列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}, \end{matrix} \tag{1.3}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \tag{1.4}$$

称（1.4）式是数表（1.3）所确定的**二阶行列式**，数 $a_{ij}\,(i=1,2;\, j=1,2)$ 称为行列式（1.4）的

元素或**元**，元素 a_{ij} 的第一个下标表明该元素位于第 i 行，称为**行标**，第二个下标表明该元素位于第 j 列，称为**列标**. 如图 1. 1 将 a_{11}, a_{22} 所组成的对角线称为**主对角线**，这两个元素称为**主对角元**；而 a_{12}, a_{21} 所组成的对角线称为**副对角线**. 因此，可以用对角线法则来记忆二阶行列式的定义，即二阶行列式是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

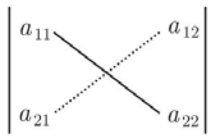

图 1.1

根据二阶行列式的定义，（1.2）式中的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则（1.2）式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组（1.1）的未知数的系数所确定的行列式，称为**系数行列式**. x_1 的表达式中的分子 D_1 是将系数行列式 D 中的第一列元素依次替换成常数项 b_1、b_2，x_2 的表达式中的分子 D_2 是将系数行列式 D 中的第二列元素依次替换成常数项 b_1、b_2.

2、三元线性方程组与三阶行列式

下面我们再利用消元法来求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

类同于上述二元线性方程组，经过稍显复杂的消元法计算，当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，方程组（1.5）的解是

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \tag{1.6}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

（1.6）式中分子和分母的计算式的结构完全相同，我们利用（1.6）式中的分母，给出三阶行列式的定义.

定义 1　由 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{1.7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.8}$$

称（1.8）式为数表（1.7）所确定的**三阶行列式**.

从定义（1.1）可知，三阶行列式含 6 项，每项都是不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则：图中三条实线上的三个元素的乘积项取正号，三条虚线上的三个元素的乘积项取负号，取正号的三个元素所在的实联线可以看做与主对角线平行，取负号的三个元素所在的虚联线可以看做与副对角线平行.

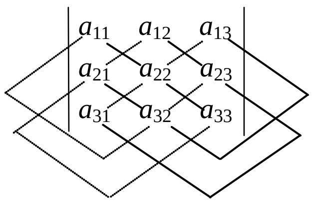

图 1.2

利用三阶行列式的定义，将（1.6）式中的分子写成三阶行列式，即

$$b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},\quad(1.9)$$

（1.6）式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 D, D_j （j =1, 2, 3）如（1.9）式所示.

注意用三阶行列式表示三元方程组的解与二元方程组解的行列式的表示规律完全相同，即分母都是由方程组的未知数的系数确定（称系数行列式），x_j （j =1, 2, 3）的表达式中的分子 D_j （j =1, 2, 3）是将系数行列式 D 中的第 j 列元素依次替换成常数项 b_1、b_2，b_3.

例 1 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D=1\times0\times1+2\times4\times(-1)+(-3)\times2\times(-2)-(-1)\times0\times(-3)-(-2)\times4\times1-1\times2\times2$$

$$=8.$$

注意：对角线法则只适用于二阶和三阶行列式. 为了给出四阶及更高阶行列式的定义，下面介绍全排列的相关知识.

二、n 阶行列式

1、全排列与逆序数

定义 2 把 n 个不同的元素排成一行，称为这 n 个元素的**全排列**.

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，易知 $P_n = n!$. 对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序）. 于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称为有一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的和，称为这个排列的**逆序数**.

如何来计算排列的逆序数呢？

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 到 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设 $q_1\, q_2 \cdots q_n$ 是这 n 个自然数的一个全排列，如果比 q_i 大的且排在 q_i 左边的元素有 t_i 个，就说元素 q_i 的逆序数是 t_i. 则这个排列的逆序数是全体元素的逆序数之和，即

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \,.$$

例 2　求排列 54312 的逆序数.

解　在排列 54312 中：

5 排在最左边，逆序数为 0；

4 的左边比 4 大的数有一个（5），故逆序数为 1；

3 的左边比 3 大的数有两个（5、4），故逆序数为 2；

1 的左边比 1 大的数有三个（5、4、3），故逆序数为 3；

2 的左边比 2 大的数有三个（5、4、3），故逆序数为 3，于是这个排列的逆序数为

$$t = 0+1+2+3+3= 9.$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**. 显而易见，例 2 中的排列是奇排列.

在排列中，任意两个元素交换位置，其余的元素不动，得到一个新的排列，这个动作叫做**对换**. 若对换的是相邻两个元素，则称为**相邻对换**.

定理 1*　**一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.**

证明见附录 1.

推论　**奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的次数为偶数.**

证明　由定理 1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，又标准排列是逆序数为 0 的偶排列，因此推论成立.

2、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 由三阶行列式的定义式

（1.8），可以看出：

（i）（1.8）式右边的每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积，因此，（1.8）式右边的任意一项除去正负号外可以记为$a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}$，这里元素的第一个下标（行标）对应的是标准排列，第二个下标（列标）对应的排列是 $q_1\,q_2\,q_3$，它是 1，2，3 这三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，对应（1.8）式右边的 6 项.

（ii） 带正号的三项的列标排列分别是 123，231，312，均是偶排列；带负号的三项的列标排列分别是 132，213，321，均是奇排列. 因此每项所带的符号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 表示列标排列的逆序数.

于是，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}\ ,$$

其中，Σ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $q_1\,q_2\,q_3$ 求和. t 表示排列 $q_1\,q_2\,q_3$ 的逆序数，

类似，可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 3 设有 n^2 个数 a_{ij}（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1.10}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}\ , \tag{1.11}$$

其中，Σ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数的所有排列 $q_1\,q_2\cdots q_n$ 求和，即共有 $n!$ 项求和，t 表示排列 $q_1\,q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 称（1.11）式是数表（1.10）确定的 ***n* 阶行列式**，记做 $D_n = \det(a_{ij})$.

按此定义的二阶、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二阶、三阶行列式完全一致. 特别注意的是，当 $n = 1$ 时，一阶行列式 $|a| = a$ ，与绝对值的记号不同.

例 3 用定义 3 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&3&0\end{vmatrix}.$$

解 由定义 3，得

$$D=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}\ ,$$

共 4！= 24 项求和，其中不等于零的项 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}$ 只有 1 项，其元素的取法是：$a_{1q_1}=a_{12}=1$，$a_{2q_2}=a_{21}=2$，$a_{3q_3}=a_{34}=-1$，$a_{4q_4}=a_{43}=3$，又这一项列标的排列是 2143，逆序数是 2，所以

$$D=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=(-1)^2\times1\times2\times(-1)\times3=-6.$$

利用例 3 的思路，可以得出下面几种特殊行列式的值：

对角行列式（除主对角元外，其他元素都是 0）

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{1.12}$$

上三角行列式（主对角线以下的元素都为 0）

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.13}$$

下三角行列式（主对角线以上的元素都为 0）

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.14}$$

例 4 证明

$$\begin{vmatrix}&&&\lambda_1\\&&\lambda_2&\\&\iddots&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{1.15}$$

证明 在（1.15）式左边，元素 λ_i 的行标与列标分别是 i 和 $n-i+1$，所以由定义，得

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 是排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，即

$$t = 0+1+2+\cdots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以（1.15）式成立.

下面利用排列对换的性质，给出行列式定义的其他表示方法.

定理 2* n 阶行列式也可以定义为

$$D = \sum (-1)^r a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \tag{1.16}$$

其中 r 表示排列 $p_1 p_2 \ldots p_n$ 的逆序数.

证明见附录 1.

推论 n 阶行列式一般可以定义为

$$D = \sum (-1)^{r+t} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}, \tag{1.17}$$

其中 r 表示排列 $p_1 p_2 \ldots p_n$ 的逆序数，t 表示排列 $q_1 q_2 \ldots q_n$ 的逆序数.

这个推论的证明思路与定理 2*的证明类似，留给读者. 当排列 $p_1\ p_2 \cdots p_n$ 或 $q_1\ q_2 \cdots q_n$ 是标准排列时，$r = 0$ 或 $t = 0$，便得到前面的定义 3 和定理 2*.

思考题一

1．四阶和四阶以上的行列式，对角线法则适用吗？为什么？

2．利用定义计算下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$； 2. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3．证明行列式的等价定义式（1.17）.

第二节　行列式性质与展开定理

一、行列式的性质

为了能更方便的计算行列式，下面讨论行列式的性质.

设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称它对应的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为 D 的**转置行列式**，即把行列式 D 的行与列相应位置的元素互换得到它的转置行列式 D^{T}.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明见附录 1.

由此性质可知，行列式中行与列具有同等的地位，对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

性质 2　行列式两行（列）互换，行列式变号.

证明见附录 1.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_j 表示行列式的第 j 列. 交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论　若行列式有两行（列）元素完全相同，则此行列式等于零.

证明　把 D 中相同的两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　行列式某一行（列）的所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 去乘此行列式.

推论 1　行列式某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式的符号外面.

第 i 行（列）乘以 k，记作 kr_i（kc_i），第 i 行（列）提出公因子，记作 r_i/k（c_i/k）. 由推论 1 可得下面的推论 2.

推论 2　行列式某一行（列）的所有元素全为零，则其值等于零.

利用性质 2 与推论 1 可得：

推论 3 若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则其值等于零.

性质 4 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变.

例如以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上（记作 r_i+kr_j）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i+kr_j}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

（以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，记作 c_i+kc_j）

以上几个性质的证明留给读者自证.

如何利用行列式的性质来计算行列式呢？性质 2，3，5 介绍了行列式关于行和列的三种运算，分别是互换运算，数乘运算和倍加运算，即 $r_i \leftrightarrow r_j$，kr_i，r_i+kr_j 和 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，c_i+kc_j，利用这些运算可以简化行列式的计算，尤其是利用倍加运算 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）可以把行列式中许多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利用行列式的运算，把行列式化为利于计算形式的行列式，如上三角形行列式或下三角形行列式，从而算出行列式的值.

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\6&0&7&2\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_4}-\begin{vmatrix}1&1&4&2\\1&-1&2&3\\2&2&3&1\\2&0&7&6\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-2&1\\0&0&-5&-3\\0&-2&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_2}-\begin{vmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-2&1\\0&0&-5&-3\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&-5&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+5r_3}\begin{vmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-4.$$

上述解法中，第一步做的是互换运算 $c_1\leftrightarrow c_4$，目的是把 a_{11} 换成 1，从而利用倍加运算 $r_i-a_{i1}r_1$ 将元素 a_{i1}（i=2,3,4） 化为零. 如果不做互换运算，因为原式中 a_{11} 是 2，所以欲要把元素 a_{i1}（i=2,3,4） 化为零，需要用到的倍加运算是 $r_i-\dfrac{a_{i1}}{2}r_1$，这样计算时就比较麻烦. 第二步做的是三次倍加运算，把前两次运算的结果省略不写了.

例 6　计算

$$D=\begin{vmatrix}x&y&y&y\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是每行（列）的元素之和都是 x+3y，因此，将第 2，3，4 行都加到第 1 行，再提出公因子，然后各行减去第一行:

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}x+3y&x+3y&x+3y&x+3y\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{vmatrix}=(x+3y)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-yr_1\\r_4-yr_1}]{r_2-yr_1}(x+3y)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-y&0&0\\0&0&x-y&0\\0&0&0&x-y\end{vmatrix}=(x+3y)(x-y)^3.$$

上述几个例题都是利用行列式的运算把行列式化为上三角形行列式,用数学归纳法可以

证明任何 n 阶行列式总能利用行列式的行运算或列运算化为上三角形行列式或下三角形行列式.

例 7 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix},\ D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证明 对 D_1 做行运算，把 D_1 化成下三角形行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{mm},$$

对 D_2 做列运算，把 D_2 化成下三角形行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 m 行做与 D_1 相同的行变换，再对后 n 列做与 D_2 相同的列变换，可将 D 化成下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

所以 $D=p_{11}\cdots p_{mm}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

例 8 解方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -6 \\ 0 & -6 & x^2+5 \end{vmatrix}=0.$$

解 当 $x-1=2$，即 $x=3$ 时，行列式的第 1，2 行的元素对应成比例；

当 $x^2+5=9$，即 $x=\pm 2$ 时，行列式的第 2，3 列的元素对应成比例.

根据性质 3 的推论 3，知 $x=3$ 与 $x=\pm 2$ 满足原方程，又因为此方程是一元三次方程，所以原方程的三个根是 $x=3$ 与 $x=\pm 2$.

二、行列式按行（列）展开定理

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简单，所以，如何利用低阶行列式来表示高阶行列式是值得探讨的一个问题. 为此，先介绍余子式和代数余子式的概念.

1、 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所处的第 i 行和第 j 列的元素划掉后，剩余的元素按照原来的位置组成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记做 M_{ij} ；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{23}=-6$ 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=2.$$

2、行列式按行（列）展开定理

引理 若 n 阶行列式 D 的第 i 行元素除 a_{ij} 外其余元素都为零，则此行列式等于 a_{ij} 与其代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 先证特殊情形，n 阶行列式 D 的第一行除元素 a_{11} 外，其余元素都是零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这是例 7 中 $m=1$ 时的特殊情形，由例 7 的结论，有

$$D=a_{11}M_{11},$$

又
$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},$$

所以
$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果，将 D 中第 i 行元素先依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…第 1 行对调，再将第 j 列元素依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…第 1 列对调，共经过了 $i+j-2$ 次互换变换，将元素 a_{ij} 换到了第 1 行第 1 列的位置，所得的行列式

$$D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D,$$

又 D_1 中第 1 行第 1 列元素 a_{ij} 的余子式就是 D 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij}，所以

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 3　n 阶行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证明　下面证行的情形，利用行列式的性质 4，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由引理，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

类似地，可以证明列的情形

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为**行列式按行（列）展开定理**. 利用这个定理计算行列式，一般是先利用行列式的性质将行列式的某行（列）的元素尽可能多的化为零，再利用展开定理，这样可以简化计算. 这种方法称为**降阶法**. 下面利用降阶法计算例 5.

$$D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\6&0&7&2\end{vmatrix}.$$

保留 a_{12}，把第 2 列的其余元素化为零，再按照第 2 列展开.

$$D\,\underline{\underline{\begin{matrix}r_2+r_1\\r_3-2r_1\end{matrix}}}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\-3&0&-5&0\\6&0&7&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&6&2\\-3&-5&0\\6&7&2\end{vmatrix}\underline{\underline{r_1-r_3}}-\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-3&-5&0\\6&7&2\end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1&-1\\-3&-5\end{vmatrix}=-4.$$

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开，得

$$D_n=2\cdot\begin{vmatrix}2&1&\cdots&0&0\\1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&1\\0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{n-1}-\begin{vmatrix}1&1&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&1\\0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$$

$$=2D_{n-1}-\begin{vmatrix}2&1&\cdots&0&0\\1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&1\\0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{n-2}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

将所得到的递推式 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$ 变形，得

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2},$$

利用此公式递推，有

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1.$$

又 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，$D_1 = 2$，所以 $D_n - D_{n-1} = 1$，

即

$$D_n = D_{n-1} + 1.$$

继续利用上式递推，得

$$D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + n - 1 = n + 1.$$

这种计算行列式的方法称为**递推法**.

例 10 证明范德蒙德（Vandermonde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i), \tag{1.18}$$

其中记号"$\prod$"表示全体同类因子的乘积.

证明 用数学归纳法证明. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i),$$

所以当 $n = 2$ 时, 式（1.18）成立. 假设（1.18）式对于 $n-1$ 阶的范德蒙德行列式成立，则需证明（1.18）式对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

为此，需将 D_n 降阶，先利用行列式的性质把第 1 列的后 $n-1$ 个元素化为零. 从第 n 行开始，后行减去前一行的 x_1 倍，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

按第 1 列展开后，再每列提出公因子 $(x_i - x_1)$，有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是$n-1$阶范德蒙德行列式，利用归纳假设，有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\qquad i\ne j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\qquad i\ne j.$$

证明 把行列式$D=\det(a_{ij})$按第j行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

在上式中把a_{jk}换成a_{ik}（$k=1,2\cdots,n$），可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第}i\text{行}\\ \\ \leftarrow\text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array},$$

当$i\ne j$时，上式右端的行列式有两行元素对应相同，所以行列式的值是 0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\qquad i\ne j.$$

上述证法如按列进行，可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\qquad i\ne j.$$

例 11 设

$$
D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix},
$$

其中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求

$$
A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \text{ 与 } M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}.
$$

解　仿照上面的证明思路，可得

$$
A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{r_1-r_4}{=\!=}\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{c_3+c_2}{=\!=}2\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=10.
$$

$$
M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}
$$

$$
\underset{c_4+c_3}{\overset{c_1+2c_3}{=\!=}}\begin{vmatrix}3 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\overset{r_3+2r_2}{=\!=}\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 5 & 0\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=14.
$$

思考题二

1．证明行列式的性质 4 和性质 5.

2．判断下列计算过程是否正确，并请说明原因.

（1）$k\begin{vmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ u & v & w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka & kb & kc\\ kx & ky & kz\\ ku & kv & kw\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}a+x & b+y\\ c+z & d+w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y\\ z & w\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\underset{r_2-r_1}{\overset{r_1+r_2}{=\!=}}\begin{vmatrix}a+c & b+d\\ c-a & d-b\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ u & v & w\end{vmatrix}\overset{kr_1+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}ka+u & kb+v & kc+w\\ x & y & z\\ u & v & w\end{vmatrix}$.

3．计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

第三节 克拉默（Cramer）法则

在第一节介绍行列式的定义时，我们知道二元和三元的线性方程组（方程的个数和未知数的个数相同）如果有唯一解，其解可以由行列式来表示，这可推广到对应的 n 元线性方程组，即是下面我们所要介绍的克拉默法则.

一、克拉默法则

考察 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.19}$$

定理 4*（克拉默法则） 如果线性方程组（1.19）的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则线性方程组（1.19）有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}, \tag{1.20}$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明见附录 1.

例 12 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \underset{r_4+2r_2}{\overset{r_3+5r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142；$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142; \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-284;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426; \quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142;$$

由克拉默法则，得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2，\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3，\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

不考虑求解公式（1.20），克拉默法则可叙述为下面的定理:

定理 5　如果线性方程组（1. 19）的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组（1. 19）一定有解，且解是惟一的.

定理 5 的逆否命题为:

定理 6　如果线性方程组（1. 19）无解或解不惟一，则它的系数行列式必为零.

二、 齐次线性方程组

线性方程组（1.19）右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，线性方程组（1.19）叫做**非齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，线性方程组（1.19）叫做**齐次线性方程组**.

对于齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\
\qquad\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,
\end{cases}
\tag{1.21}
$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，这个解叫做齐次线性方程组（1.21）的**零解**. 如果一组不全为零的数是（1.21）的解，则它叫做齐次线性方程组（1.21）的**非零解**.

把定理 5 和定理 6 应用于齐次线性方程组（1.21），可得

定理 7　**如果齐次线性方程组（1. 21）的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组（1. 21）只有零解.**

定理 8　**如果齐次线性方程组（1. 21）有非零解，则它的系数行列式必为零.**

例 13　问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\
2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\
x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0
\end{cases}
$$

有非零解？

解　若方程组有非零解，由定理 8，知其系数行列式 D=0. 因为

$$
D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1-\lambda & -2 & 4\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_3-(1-\lambda)r_1]{r_2-2r_1}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 0 & -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1\\ -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_2+c_1}-\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda\\ \lambda-3 & 3\lambda-\lambda^2\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3),
$$

所以由 D=0 知，当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时，原方程组有非零解.

思考题三

1．克拉默法则的适用范围是什么？

2．克拉默法则求解线性方程组的局限性为何？

3．齐次线性方程组有无解的情况吗？

习 题 一

（A）

1．利用对角线法则计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$．　　（2）$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$．

（3）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$．　　（4）$\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$．

2．按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

（1）2467315．　　（2） 7426315．

（3） n（n－1）…21．　　（4） 246…（2n）135…（2n－1）．

3．写出 5 阶行列式含有因子$a_{13}a_{22}a_{41}$的项.

4．计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$．　　（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$．

（3）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$．　　（4）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$．

5．求解下列方程：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$．　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$．

6．证明：

（1）$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3$．

（2） $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

（3） $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)$.

（4） $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

7．计算下列行列式（n>3）：

（1） $D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.　　（2） $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

（3） $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$.

（4） $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

8．设

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

其中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，分别求 $A_{31}+2A_{32}+A_{33}-3A_{34}$ 与 $M_{11}+2M_{21}-M_{31}+M_{41}$ 的值.

9．用克拉默法则解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$

10．问λ，μ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

11．问λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x+2y+2z=0, \\ 2x+(6-\lambda)y=0, \\ 2x+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

有非零解？

（B）

一．选择题：

1．　下列（　　）是奇排列.

（A）　4123　　（B） 1324　　（C）　2341　　（D） 4321

2．　若$(-1)^t a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$是五阶行列式$D_5$的一项，则$k$，$l$及该项的符号是（　　）.

（A）$k=2$，$l=3$，符号为正　　（B）　$k=2$，$l=3$，符号为负

（C）　$k=3$，$l=2$，符号为正　　（D）　$k=3$，$l=2$，符号为负

3．　$\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix} \neq 0$的充分必要条件是（　　）.

（A）$k\neq 1$　　（B）　$k\neq -3$　　（C）　$k\neq 1$或$k\neq -3$　　（D）　$k\neq 1$且$k\neq -3$

4．　如果$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix}$，则$D_1=$（　　）.

（A）　$2a$　　（B）　－$2a$　　（C）　$8a$　　（D）　－$8a$

5．　如果$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11}-4a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21}-4a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则$D_1=$（　　）.

（A）　6　　（B）　－8　　（C）　12　　（D）　－12

6． 下列 n（n>2）阶行列式中，值必为零的有（　　）.

（A） 行列式主对角线上的元素全为零

（B）上（或下）三角形行列式主对角线上有一个元素为零

（C） 行列式零元素个数多于 n 个

（D） 行列式非零元素个数小于 n 个

7． 四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（　　）.

（A） $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　（B）$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

（C） $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　（D） $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

8． 若 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　）.

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

9． 如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases}$的解是（　）.

（A） $x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$　　（B） $x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

（C） $x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$　　（D） $x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

二．填空题:

1． $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ =_______.

2． $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$ = _______.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$ ______.

4. 若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$______.

5. 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______.

6. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & x+a_{13} \\ x+a_{21} & x+a_{22} & x+a_{23} \\ x+a_{31} & x+a_{32} & x+a_{33} \end{vmatrix}$ 的次数最多是______次.

7. 若方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$______.

附录一

附 1. 定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 先证明相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_s\,a\,b\,b_1\cdots b_t$，对换 a 与 b，得到排列 $a_1\cdots a_s\,b\,a\,b_1\cdots b_t$. 显然，对换前和对换后的两个排列中，只有元素 a 和 b 的逆序数发生改变. 当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变，b 的逆序数减 1；当 $a<b$ 时，对换后 a 的逆序数加 1，b 的逆序不变. 所以排列 $a_1\cdots a_s\,a\,b\,b_1\cdots b_t$ 与 $a_1\cdots a_s\,b\,a\,b_1\cdots b_t$ 的逆序数的奇偶性不同.

再证明一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_s\,a\,b_1\cdots b_t\,b\,c_1\cdots c_l$，对换 a 与 b，得到排列 $a_1\cdots a_s\,b\,b_1\cdots b_t\,a\,c_1\cdots c_l$，这种一般对换可以经过若干次相邻对换完成. 具体过程如下，首先经过 t 次相邻对换（元素 a 依次与右边的元素对换），得到排列

$$a_1\cdots a_s\,b_1\cdots b_t\,a\,b\,c_1\cdots c_l,$$

再经过 t+1 次相邻对换（元素 b 依次与左边的元素对换），就得到排列 $a_1\cdots a_s\,b\,b_1\cdots b_t\,a\,c_1\cdots c_l$.

所以排列 $a_1\cdots a_s\,a\,b_1\cdots b_t\,b\,c_1\cdots c_l$ 经过 $2t$+1 次相邻对换变成排列 $a_1\cdots a_s\,b\,b_1\cdots b_t\,a\,c_1\cdots c_l$，即排列的奇偶性改

变了 $2t+1$ 次，显然这两个排列的奇偶性不同.

附 2. 定理 2 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^r a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}\ , \qquad (1.16)$$

其中 r 表示排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 的逆序数.

证明 在定义 3 中，行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}\ ,$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是标准排列，t 为排列 $q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n$ 的逆序数，对换元素 a_{iq_i} 与 a_{jq_j}，排列变成

$$(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iqi}\cdots a_{nq_n}\ ,$$

不考虑符号，对换前和对换后这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时做了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 的逆序数是 s，则 s 是奇数；设新的列标排列 $q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n$ 的逆序数是 t_1，则

$$(-1)^{t_1}=-(-1)^t\ ,$$

故

$$(-1)^t=(-1)^{t_1+s}\ ,$$

于是

$$(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}=(-1)^{t_1+s}a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iqi}\cdots a_{nq_n}\ .$$

这说明，对换乘积中任意两元素的位置，虽然行标排列和列标排列同时做了相应的对换，但是行标排列和列标排列逆序数和的奇偶性不发生改变. 于是，经过若干次对换，将列标排列 $q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n$ 变为标准排列，此时行标排列则相应的从标准排列变为某个新的排列，设为 $p_1 p_2\cdots p_n$，其逆序数为 r，则有

$$(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=(-1)^r a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}\ .$$

又，若 $q_i=j$，则 $p_j=i$，即（$a_{iq_i}=a_{ij}=a_{p_j j}$），可见对（1.11）式中任一项，在（1.16）式中有且仅有一项与之对应且相等，因此（1.16）式成立.

附 3. 性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}$（$i, j=1, 2, \cdots, n$）．根据定义 3，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

由定理 2，有

$$D=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

所以 $D^{\mathrm{T}}=D$.

附 4. 性质 2 行列式两行（列）互换，行列式变号.

证明 记行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 互换 i，j 两行得到的，即当 $k\neq i, j$ 时，$b_{kq}=a_{kq}$；当 $k=i, j$ 时，$b_{iq}=a_{jq}$，$b_{jq}=a_{iq}$（$q=1, 2, \cdots, n$）.

于是由定义 3 得

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1q_1}\cdots b_{iq_i}\cdots b_{jq_j}\cdots b_{nq_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{nq_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1q_1}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{nq_n}, \end{aligned}$$

其中 t 是排列 $q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n$ 的逆序数的逆序数．设排列 $q_1\cdots q_j\cdots q_i\cdots q_n$ 的逆序数是 t_1，则有 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，因此

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1q_1}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{nq_n}=-D.$$

故性质 2 成立.

附 5. 定理 4* （克拉默法则） 如果线性方程组（1.18）的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则线性方程组（1.18）有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}, \tag{1.19}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的 n

阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 先证 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots n)$ 是方程组的解.

将 D_j 按第 j 列展开得 $D_j=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$，然后将 $x_j=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}}{D}(j=1,2,\cdots,n)$ 代入方程组中第 i 个方程的左边，得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ij}\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}b_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}b_k\delta_{ik}D=\frac{1}{D}b_i\cdot D=b_i,$$

由 i 的任意性，得 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots n)$ 是方程组的解.

再证唯一性，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程组的任一组解，取 x_1 乘系数行列式 D，由行列式的性质，有

$$x_1D=\begin{vmatrix} x_1a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_1a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\overline{\overline{c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n}}\begin{vmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12}+\cdots+x_na_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_1a_{21}+x_2a_{22}+\cdots+x_na_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1a_{n1}+x_2a_{n2}+\cdots+x_na_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1$$

同理可证 $x_jD=D_j$，由 $D\neq 0$，得 $x_j=\dfrac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n)$.