浙江工业大学 2020-2021 学年第二学期

《高等数学 II 》期末考试试卷

班级:________ 学号:________ 姓名:________ 任课教师:________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 选择题（共5小题，每小题3分，合计15分）

（1）C （2）B (3) C (4) B (5) D

二. 填空题（共5小题，每小题3分，合计15分）

(1) 70 (2) f_2' (3) $y = C_1 e^{-x}\cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-x}\sin\sqrt{2}x$; (4) $-\frac{4}{5}\pi$; (5) $\frac{3}{8}$.

三. 解答下列各题（18分）

(1) 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$的敛散性.

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$, 故存在$N$, 当$n \geq N$时，$n\sin\frac{1}{n} \geq \frac{3}{4}$. 于是有

4

$$\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad (n \geq N).$$

而级数$\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 收敛。

2

(2) 设$I(r) = \int_{C_r}\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, 其中曲线$C_r$为椭圆$3x^2+4y^2 = r^2$, 取正向。请计算极限$\lim\limits_{r\to+\infty} I(r)$.

解：作圆：$C_\epsilon : x^2+y^2 = \epsilon^2$,($\epsilon$足够小)，记$D$为圆$C_\epsilon$与椭圆$C_r$之间的区域为D. 则利用Green公式，可得

$$\int_{C_r^+\cup C_\epsilon^-}\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \iint_D 0dxdy = 0.$$

5

即有$I(r) = \int_{C_r^+}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \int_{C_\epsilon^+}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{C_\epsilon} ydx - xdy = -\frac{1}{\epsilon^2}2\pi\epsilon^2 = -2\pi$. 因此有

$$\lim_{r\to\infty} I_r = -2\pi.$$

1

(3) 已知$f_n(x)$ 满足$f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ $(n \in \mathbb{N})$, 且$f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和函数.

解：微分方程的通解为$f_n(x) = Ce^x + \frac{x^n}{n}e^x$。由于$f_n(1) = \frac{e}{n}$, 代入可得$C = 0$, 即$f_n(x) = \frac{x^n}{n}e^x$. 从而有

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}e^x = -e^x\ln(1-x), \; -1 \leq x < 1.$$

3

四. 解答下列各题(24分)

(1) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4-y^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^4-y^2}dy=\int_0^1 \frac{1}{4}\pi x^4 dx=\frac{\pi}{20}.$

4 2

(2) 计算$\int_C |y|ds$, 其中曲线C为半圆$x^2+y^2=1,\ x\geq 0$.

解：令$x=\cos\theta, y=\sin\theta, -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. 则

$$\int_C |y|ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta=2.$$

4 2

(3) 计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dxdy}{z}$ 其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$ 在平面$z=\frac{1}{2}$ 上方的部分，取下侧.

解：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dxdy}{z}=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr=-\pi.$

4 2

(4) 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$, 其中$\Omega$为由曲面$x^2+y^2=2z$ 和平面$z=2$ 所围成的区域.

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2dz=\frac{16}{3}\pi.$

4 2

五. (12分) 设点$P(x,y,z)$为曲面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，并设S在点P处的切平面总与xoy 平面垂直：（1）求点P的轨线C的方程；（2）求C 在xoy 平面上的投影线的方程；（3）说明C是一条平面曲线，并求此C在它所在的平面上围成的区域的面积.

解：（1）点P 的切平面的法向量为$\vec{n}=(2x,2y-z,2z-y)$. 2

由于$\vec{n}\cdot\vec{k}=0$, 得$2z-y=0$. 因此P点的轨线C为

$$\begin{cases} y=2z \\ x^2+y^2+z^2-yz=1 \end{cases} \quad \text{或者} \begin{cases} y=2z \\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \end{cases}$$

3

(2) C 在xoy 平面上的投影线的方程为$\begin{cases} z=0 \\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \end{cases}$. 4

(3) 由上述轨线方程可知C落在平面$2z-y=0$上.

C在xoy平面上的投影是椭圆，其所围成图形面积为$\sigma=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$.

而平面$2z-y=0$的法向量为$\vec{n}=(0,-1,2), \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 因此

C在平面$2z-y=0$上围成区域的面积为 3

$$\frac{\sigma}{\cos\gamma}=\sqrt{\frac{5}{3}}\pi.$$

六. (8分) 设平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

(1) 计算积分$\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$;

(2) 设$f(x,y)$ 在D 上连续，且$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明：

存在$(\xi,\eta)\in D$, 使得$|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D |xy-1|d\sigma\ge 1$.

解：(1) 将D 分为3 部分：$D_1=\{(x,y)|0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le 2\}$, $D_2=\{(x,y)|\frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le \frac{1}{x}\}$, $D_3=\{(x,y)|\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\}$, 则

$$\iint\limits_D |xy-1|d\sigma=(\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3})|xy-1|dxdy=\frac{3}{2}+2\ln 2.$$

4

(2) $1=|\iint_D(xy-1)f(x,y)dxdy|\le\iint_D|xy-1||f(x,y)|dxdy\le M\iint_D|xy-1|dxdy$,

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$. 由闭区域上连续函数的性质，得

存在$(\xi,\eta)\in D$，使得$f(\xi,\eta)=M$，也即有$|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D |xy-1|d\sigma\ge 1$.

2

七. (8分)设二元函数$u=\sqrt{x^2+2y^2}$.

(i) 据理说明上述函数在原点$(0,0)$处的偏导数是否存在？若存在，请求出.

(ii) 设$\vec{l}$为以点$(0,0)$为始点的平面单位向量，据理说明$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}$ 是否存在？若存在，请求出.

解：(i) $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$在$(0,0)$处均不存在。

这是因为$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 不存在；$\frac{\partial u}{\partial y}|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{2y^2}}{y}$ 不存在.

5

(ii) 设$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta),\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$. 则

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{\sqrt{(\rho\cos^{\alpha})^2+2(\rho\cos\beta)^2}-0}{\rho}=\sqrt{1+\cos^2\beta}.$$

3

因此方向导数存在.