浙江工业大学 2018 - 2019 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

姓名：________________ 学号：________________ 班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	三.6	总 分
得分									

分位点数据

$$\Phi(1) = 0.8413,\quad \Phi(2) = 0.9772,\quad \Phi(1.65) = 0.95,\quad \Phi(1.96) = 0.975,$$
$$t_{0.025}(8) = 2.306,\quad t_{0.025}(9) = 2.262,\quad t_{0.05}(8) = 1.86,\quad t_{0.05}(9) = 1.833.$$

一. 填空题，共 28 分，每空 2 分。

1. $\underline{\ \frac{2}{5}\ }$
2. $\underline{\ \frac{2}{9}\ }$
3. $\underline{\ 1\ }$, $\underline{\ 1\ }$， $\underline{\ \frac{\pi}{4}\ }$
4. $\underline{\ 6\ }$
5. $\underline{\ 1\ }$， $\underline{\ 28\ }$； $\underline{\ \frac{2}{15}\ }$
6. $\underline{\ 2.4\ }$； $\underline{\ 1.3\ }$
7. $\underline{\ 2\ }$， $\underline{\ 1\ }$
8. $\underline{\ 0.9772\ }$

二. 选择题，共 12 分，每题 3 分。

1. C
2. C
3. B
4. D

三. 解答题，共 6 题，60 分。

1. (8 分)

解

1)

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{2}{C_8^3} = \frac{1}{28}, \\
P(X=2) &= \frac{(C_5^3-1)+(C_5^3-1)+(C_6^3-2)}{C_8^3} = \frac{18}{28}, \\
P(X=3) &= \frac{3\times 3\times 2}{C_8^3} = \frac{9}{28}.
\end{aligned}
$$

即

X	1	2	3
p	$\frac{1}{28}$	$\frac{18}{28}$	$\frac{9}{28}$

4 分

2)

$$
\begin{aligned}
EX &= \frac{1}{28}\times 1 + \frac{18}{28}\times 2 + \frac{9}{28}\times 3 = \frac{16}{7}, \\
EX^2 &= \frac{1}{28}\times 1 + \frac{18}{28}\times 4 + \frac{9}{28}\times 9 = \frac{11}{2}, \\
Var(X) &= \frac{11}{2} - (\frac{16}{7})^2 = \frac{27}{98}.
\end{aligned}
$$

4 分

2. (8 分)

解 记 A_i 为“第 i 道工序出错”，B 为“产品合格”。

1)

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
&= 0.1\times 0.9\times 0.8 + 0.1\times 0.9\times 0.8 + 0.2\times 0.9\times 0.9 \\
&= 0.2\times 0.9\times 1.7 = 0.306,
\end{aligned}
$$

4 分

2)

$$
P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.1\times 0.9\times 0.8}{0.2\times 0.9\times 1.7} = \frac{4}{17} \approx 0.2353.
$$

4 分

3. (12 分)

解

1) 由规范性，

$$
1 = \int_0^2 C(1+x^3)\,dx = C(2+4) = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{6}.
$$

4 分

2)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x C(1+t^3)\,dt = C[x + \frac{x^4}{4}] = \frac{x}{6} + \frac{x^4}{24}, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4 分

3) Y 取值于 $[0,1]$，对 $0 < y < 1$，

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P((X-1)^2 \le y) = P(1-\sqrt{y} \le X \le 1+\sqrt{y}) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{y} + \frac{1}{3}y\sqrt{y}, \end{aligned}$$

从而

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

4 分

4. (14 分)

解

1)

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 C(1+x+y)\,dxdy = C\int_0^1 \frac{3}{2} + y\,dy = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2},$$

4 分

2)

$$\begin{aligned} P(X+Y<1) &= \int_0^1 \int_0^{1-y} C(1+x+y)\,dxdy = C\int_0^1 1 - y + \frac{1}{2}(1-y)^2 + y(1-y)\,dy \\ &= C[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}] = \frac{5}{12}, \end{aligned}$$

4 分

3) 利用对称性，

$$\begin{aligned} EX = EY &= \int_0^1 \int_0^1 xC(1+x+y)\,dxdy = C\int_0^1 \frac{5}{6} + \frac{1}{2}y\,dy = \frac{13}{24}, \\ E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xyC(1+x+y)\,dxdy \\ &= C\int_0^1 \frac{5}{6}y + \frac{1}{2}y^2\,dy = \frac{7}{24}, \\ Cov(X,Y) &= \frac{7}{24} - (\frac{13}{24})^2 = -\frac{1}{576}. \end{aligned}$$

6 分

5. (10 分)

解

矩估计：

$$EX = \int_0^\infty x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,d(\frac{x^2}{2\sigma^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

从而 $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}EX$，矩估计 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{X}$. 5 分

极大似然估计：

$$L(\sigma) = \Pi_{i=1}^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}},$$
$$\frac{d\ln L}{d\sigma} = \sum_{i=1}^n(-\frac{1}{\sigma}) + \frac{x_i^2}{\sigma^3},$$

令 $\frac{d\ln L}{d\sigma} = 0$，解得极大似然估计 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}$。 5 分

6. (8 分)

解 $H_0: \mu = \mu_0 = 3.5$，$H_1: \mu \neq \mu_0$，

$$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = 2.25,$$

4 分

拒绝域为 $(-\infty, -t_{\alpha/2}(n-1)) \cup (t_{\alpha/2}(n-1), \infty)$，即 $(-\infty, -2.306) \cup (2.306, \infty)$，
不在拒绝域中，故可以认为该河流日平均水位的均值是正常值。 4 分