浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
答 案 及 评 分 标 准
（ 2018 ～ 2019 第 一 学 期 ）

任课教师 ________ 学院班级：________ 选课班中编号：________

学号：________ 姓名：________ 得分：________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$，则行列式

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+2a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+2a_{23} \end{vmatrix} =$ ___$m-2n$___。

2. 设向量组 $\alpha=(1,0,a)^T, \beta=(2,4,3)^T, \gamma=(1,3,2)^T$ 线性相关，则 $a=$ ___$\frac{1}{2}$___。

3. 设矩阵 A 的秩为 2，且 $\eta_1=(1,2,3)^T, \eta_2=(2,1,4)^T$ 是三元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个特解，则方程组 $AX=2\beta$ 的通解为 ___$(3,3,7)^T+c(1,-1,1)^T\ (c\in R)$___。

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩 R(A)<3，则 $a=$ ___2___。

5. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=$ ___$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$___。

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 10 & 6\\ 1 & -3 & -3\\ -2 & 10 & 8\end{bmatrix}$，已知 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ 是它的一个特征向量，则 α 所对应的特征值为 $\underline{\quad 1 \quad}$。

7. 设向量 α,β 的长度依次为 2 和 3，则向量 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的内积 $<\alpha+\beta,\alpha-\beta>=$ $\underline{\quad -5 \quad}$。

8. 设矩阵 A 为三阶方阵，且 $A-E, A-2E, 2A+E$ 均为不可逆矩阵，则 $|A|=$ $\underline{\quad -1 \quad}$。

9. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是三维向量空间 R^3 的两组基，若 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_3, \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \beta_3=\alpha_1+\alpha_2$，则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underline{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}}$。

10. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为正交矩阵，则 $2\alpha_1^T\alpha_3+3\alpha_2^T\alpha_2=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1． 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & a_{23}+a_{13}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则必有（　D　）

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $AP_2P_1=B$　　(C) $P_1P_2A=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

2．设 $AX=\beta$ 为非齐次线性方程组，则下列命题正确的有（　B　）

(A) 若 $AX=O$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解

(B) 若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=O$ 必有非零解

(C) 若 $AX=O$ 只有唯一零解，则 $AX=\beta$ 必有非零解

(D) 若 $AX=\beta$ 无解，则 $AX=O$ 也无解

3．设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系，则下列向量组中也是 $AX=O$ 的基础解系的是（ B ）

(A) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ (B) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

(C) $\xi_1-\xi_2+\xi_3,\xi_1+4\xi_2-\xi_3,2\xi_1+3\xi_2$

(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1$

4．设 λ 是 n 阶可逆方阵 A 的特征值，p 为对应的一个特征向量，则以下结论正确的是（ A ）

(A) p 也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 λ^{-1} 的特征向量

(B) p 也是矩阵 A^T 的属于特征值 λ 的特征向量

(C) $(A-\lambda E)X=O$ 的所有解都是 A 的特征向量

(D) $(A-\lambda E)X=O$ 的所有解都可表示为 kp

5．矩阵 $\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件是（ B ）

(A) a=0，b=2 (B) a=0，b 为任意常数
(C) a=2，b=0 (D) a=2，b 为任意常数

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix},$$

-----------------------5 分

因此 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,$ ------------------------8 分

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且 $\alpha_4=4\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3.$ ----------------------10 分

2. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$\xi_1=\left(0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\right)^T,\ \xi_2=\left(3,\quad 2,\quad 1,\quad 0\right)^T。$$

考虑如下线性方程组：

$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases},$$ -------------------------5 分

解得其基础解系为 $\eta_1=(1,-2,1,0)^T,\eta_2=(2,-3,0,1)^T.$ ------------------------8 分

取 $A=(\eta_1,\eta_2)^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix},$ 则所求的齐次线性方程组为 $AY=0$，即

$$\begin{cases} y_1-2y_2+y_3=0 \\ 2y_1-3y_2+y_4=0 \end{cases}.$$ -------------------------10 分

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+ax_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

（1） 问 a、b 满足何种关系时，方程组无解？

（2） 问 a、b 满足何种关系时，方程组有无穷多解？并在此时求出方程组的通解。

增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+2 & 0 & 1+b\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}.$ -----------4 分

（1） 当 $a=-2$ 且 $b\neq -1$ 时方程组无解； ----------------------6 分

（2）（i）当 $a=-2$ 且 $b=-1$ 时方程组有无穷多解，此时通解为

$$X=(-1,1,0,0)^T+k(1,-2,1,0)^T\,(k\in R).$$ -----------------------8 分

（ii）当 $a=1$ 时方程组有无穷多解，此时通解为

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}b-2\\1-2b\\b+1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}(k\in R).$$ ------------------------10 分

4. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ ，试确定常数 a 的值，并求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3$=-2. ----------------3 分

由于 A 相似于对角矩阵，所以 $R(A-6E)=1$ ，由此可解出 $a=0$. ---------------5 分

因此 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$,

由此可解得属于 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量为：

$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$. -----------------7 分

属于 $\lambda=-2$ 的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,0)^T$. -----------------9 分

因此可逆矩阵 P 可取成 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&-2\\0&1&0\end{bmatrix}$. -----------------10 分

5. 若 $A^3=O$ ，问 $A+E$ 是否可逆？若可逆，求 $(A+E)^{-1}$ 。

由 $A^3=O$ 可得 $(A+E)(A^2-A+E)=E$. -----------------8 分

$A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=A^2-A+E$ 。 -----------------10 分

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1	2	本题总得分

1. 设向量组 A 的秩与向量组 B 的秩相等，且向量组 A 可由向量组 B 线性表示，证明向量组 A 与向量组 B 等价。

证明：因为且向量组 A 可由向量组 B 线性表示，所以 $R(B)=R(B\,|\,A)$.

----------------2 分

又由 $R(A)=R(B)$ 以及 $R(A\,|\,B)=R(B\,|\,A)$ 可知

$R(A)=R(A\,|\,B)$。 -------------------4 分

因此向量组 B 可由向量组 A 线性表示，即向量组 A 与向量组 B 等价。

----------------------5 分

2. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵。若 $(1,0,0,1)^T$ 是方程组 $AX=O$ 的一个基础解系。证明： $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*X=O$ 的一个基础解系.

证明：由 $(1,0,0,1)^T$ 是方程组 $AX=O$ 的一个基础解系可知

$\alpha_1+\alpha_4=0$ 且 $R(A)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$. …….(1) -----------------2 分

因此 $R(A^*)=1$, 所以 $A^*X=O$ 的基础解系含有 3 个线性无关的解向量。

又由 $A^*A=|A|E=O$ 可知 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，即 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是 $A^*X=O$ 的解。 -------------------4 分

又由（1）可知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，因此 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*X=O$ 的一个基础解系。 ------------------5 分