2021-2022（二）浙江工业大学高等数学 A 期末试卷 A

参考答案

一、填空题（本题满分 33 分，每小题 3 分）

1. $y=\dfrac{1}{x}$ ； 2. $e^{2x}-e^{-x}$； 3. $\lambda=3$； 4. $-\dfrac{1}{2}$ ； 5. $(f_1'+yf_2')dx+(f_1'+xf_2')dy$；

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ； 7. $\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$ ； 8. $12a$； 9. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$； 10. $\dfrac{\pi}{2}$ ； 11. $\dfrac{\pi}{4}$.

二、 选择题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1-4：DABD

三、试解下列各题（本题满分 12 分，每小题 6 分）

1. 解：设 $P=y\sin 2x-yf(x)\tan x,\ Q=f(x)$，则由曲线积分与路径无关的充要条件可得：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\text{即}f'(x)=\sin 2x-f(x)\tan x\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x+c\cos x$$

又由 $f(0)=\text{-}2\Rightarrow c=0$，$\therefore f(x)=-2\cos^2 x.$

2. 解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 在 M_0 的法向量为 $\vec{n}_1=(4x_0,y_0,-1)$.

又平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,1,1)$. 于是 $\vec{n}_1//\vec{n}_2$，由此得

$x_0=\dfrac{1}{2},y_0=-1$，所以 $z_0=2x_0^2+\dfrac{1}{2}y_0^2=1$，即曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right)$ 处的切平面平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$，

且所求的切平面方程为 $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-(y+1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$.

曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

四 、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1. 解：记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\right\}, D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\right\}$,

则

$$\begin{aligned}\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma&=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr+\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. 解：令 $P=x^2-2y$， $Q=-(x+\sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$

选择 $BA: y=1$ 由 $B(2,1)$ 到 $A(0,1)$，则由格林公式得

$$\text{原式}=\oint_{L+BA}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\iint_D dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=\iint_D dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}-4.$$

五 、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 8 分）

1． 解：将直线 l 的方程改写成一般式：$\begin{cases}x-y-1=0,\\y+z-1=0.\end{cases}$ 过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,\text{即}x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

由向量$(1,\lambda-1,\lambda)$与（1，-1,2）垂直得 $\lambda=-2$. 从而所求投影直线的方程为

$$l_0:\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\x-y+2z-1=0\end{cases},\text{ 即}\begin{cases}x=2y\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$$

由旋转曲面的特点可知，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为：

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2，\text{即 }4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

2. 解：补上 $\Sigma_1: z=0\ \ (x^2+y^2\le 4)$ 下侧, Ω为Σ与Σ_1所围闭区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2dzdx + zdxdy = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y^2dzdx + zdxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} y^2dzdx + zdxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (2y+1)dxdydz - 0$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 2ydV + \iiint\limits_{\Omega} dV$$

$$= 0 + \frac{16\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

3.解： $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5$， 收敛区间为(-5,5).

又当 $x = 5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5}$ 发散；当 $x = -5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5}$ 发散;

所以收敛域为 $(-5,5)$；

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^{n-1} = (\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{n}{5^n}t^{n-1}dt)' = [\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n]' = (\frac{x}{5-x})' = \frac{5}{(5-x)^2}$$

于是 $s(1) = \frac{5}{16}$.

六 、证明题（本题满分 5 分）

证明：

$$\because |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)(x_n - x_{n-1})| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$$

$$< \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|.$$

其中 ξ 介于 x_n，x_{n-1} 之间.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.