浙 江 工 业 大 学

线 性 代 数 期 末 试 卷

（2017～ 2018 第二学期）

任课教师：________学院班级：________选课班中编号：______

学号：__________ 姓名：__________得分：________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分	

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩 $R(A)$ 为________.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求 $A^{2018}=$________.

3. 设向量 $\alpha=\left(-2,1,4,2\right)^T$，$\beta=\left(1,1,1,1\right)^T$，则向量 α 与 β 的夹角为____.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\3&5&0\end{pmatrix}$，则 $\left|A^{-1}\right|=$________，$(A^*)^{-1}=$________.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3×5 的矩阵，若矩阵 AB 的秩 $R(AB)=2$，则矩阵 B 的秩 $R(B)$ 为________.

6. 若向量组 $\alpha_1=(1,4,2)^T,\alpha_2=(2,7,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,a)^T$ 线性相关，则 $a=$________.

7. 设 η_1,η_2,η_3 是四元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解，且系数矩阵 A 的秩 $R(A)=3$，若 $\eta_1=(1,2,3,4)^T$，$2\eta_2-3\eta_3=(0,2,-1,-1)^T$，则方程组 $AX=\beta$ 的通解

为________________________.

8. 若 3 阶方阵 A 与 B 相似，且方阵 A 的特征值为 1，2，3，则行列式 $|A| =$ _____，$|2B-E| =$ __________.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=2$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11}+a_{12} & a_{12}-3a_{11} \\ 2a_{21}+a_{22} & a_{22}-3a_{21} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$ (　　　　).

   (A) -2　　(B) 10　　(C) 2　　(D) 8

2. 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，若矩阵 $AB=O$，且 $B\neq O$，则必有 (　　　).

   (A) $BA=O$　　(B) $|B|\neq 0$　　(C) $|A|=0$　　(D) $|A^*|\neq 0$

3. 设矩阵 A 为 3×5 的矩阵，若 $R(A)=3$，则以下命题正确的是 (　　　).

   (A) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解.

   (B) 齐次线性方程组 $A^TX=0$ 必有非零解.

   (C) 非齐次线性方程组 $AX=\beta_1$ 必有无穷多解.

   (D) 非齐次线性方程组 $A^TX=\beta_2$ 必有唯一解.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,6,a)^T$，$\alpha_2=(1,-1,2,b)^T$，$\alpha_3=(2,0,7,c)^T$，$\alpha_4=(0,0,0,d)^T$，其中 a, b, c, d 为任意实数，则 (　　　　).

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关.

   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性无关.

5. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是(　　　).

   (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

三、**计算题（每题 10 分，共 50 分）**

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 已知 3 阶方阵 A 和 B 满足 $AB=2B+A$，且 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 B .

3. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\-9\end{pmatrix}$，求$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数和一组基,并求剩余向量在这组基下的坐标.

4. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_3 = 1 \\ (1+\lambda)x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 2\lambda - 2 \end{cases}$，

问λ取何值时，线性方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？

并在有无穷多解时，求出该方程组的通解.

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & a\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 与对角矩阵 Λ 相似.

（1） 证明 $a=-3$；

（2） 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

1	2	本题总得分

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 已知n阶方阵A满足$A^2-5A-3E=O$，证明$A+E$可逆, 并求其逆矩阵.

2. 已知n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\beta_1=3\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=4\alpha_3-5\alpha_1$线性无关.