

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

## 大学 高等数学 A 试题卷（闭）

2020 --2021 学年第 一 学期 使用班级 \_\_\_\_\_

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分	
评阅人	

1、当  $x \rightarrow 0$  时，若  $x - x^3 - \sin x$  与  $cx^k$  为等价无穷小，则 ( ) .

(A)  $c = 1, k = 1$

(B)  $c = 3, k = 3$

(C)  $c = \frac{5}{6}, k = 3$

(D)  $c = -\frac{5}{6}, k = 3$

2、设  $f(x)$  有二阶连续导数，且  $f'(0) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则 ( ) .

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值

(C)  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值， $(0, f(0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

3、设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数，且  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ ， $\Delta x$  为自变量  $x$  在  $x_0$  处的增量， $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分，若  $\Delta x > 0$ ，则 ( ) .

(A)  $0 < \Delta y < dy$

(B)  $\Delta y < dy < 0$

(C)  $0 < dy < \Delta y$

(D)  $dy < \Delta y < 0$

4、设  $\frac{\sin x}{x}$  为函数  $f(x)$  的一个原函数， $a$  为常数且  $a \neq 0$ ，则  $\int \frac{f(ax)}{a} dx$  等于 ( ) .

(A)  $\frac{\sin ax}{a^3 x} + C$

(B)  $\frac{\sin ax}{a^2 x} + C$

(C)  $\frac{\sin ax}{ax} + C$

(D)  $\frac{\sin ax}{x} + C$

5、设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$ ，其中  $g(x)$  是  $(-\infty, 0]$  上的有界函数，则  $f(x)$  在  $x = 0$  处

( ) .

(A) 不连续，但可导

(B) 不连续且不可导

(C) 连续，但不可导

(D) 连续且可导

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分	
评阅人	

1、设  $a \neq 0$ ，则极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - 1}{ax} \right)^{\frac{1}{x}} =$ \_\_\_\_\_.

2、函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^x - e)}$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的第一类间断点是\_\_\_\_\_.

3、设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续，且  $\int_0^x f(t) dt = x(1 + 2 \cos x)$ ，则  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

4、定积分  $\int_{-2}^2 \left( x^{2021} \cos \frac{x}{2021} + \frac{1}{2020} \right) \sqrt{4 - x^2} dx =$ \_\_\_\_\_.

5、曲线  $y = x(1 + \arcsin \frac{2}{x})$  的斜渐近线为\_\_\_\_\_.

三、解答下列各题（本大题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

得分	
评阅人	

1、计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos(x^2)}$ .

2、设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$  确定，求  $\frac{dy}{dx}$ .

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

---

3、设函数  $y = y(x)$  由参数方程 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+3\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} \quad (t > 1)$$
 所确定，求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=9}$  .

4、计算不定积分  $\int x \ln(x-1) dx$  .

四、解答下列各题（本大题共 3 小题，每题 7 分，共 21 分）

1、计算定积分  $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$ ，其中  $a > 0$  .

得分	
评阅人	

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

---

2、设函数  $f(x)$  在区间  $(-2, 2)$  内具有二阶导数，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ， $f(1) = 0$ ，证明在区间  $(0, 1)$

内至少存在一点  $\xi$ ，使得  $f''(\xi) = 0$ 。

3、设  $k$  为常数，确定方程  $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$  在开区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内根的个数。

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

五、综合题（本题共 2 小题，每题 7 分，共 14 分）

得分	
评阅人	

1、在曲线  $y = x^2$  ( $x \geq 0$ ) 上某点  $A$  处作一切线，使之与曲线以及  $x$  轴所围

成的平面区域的面积为  $\frac{1}{12}$ ，试求：

- (1) 切点  $A$  的坐标；
- (2) 过切点  $A$  的切线方程；
- (3) 由上述所围平面图形绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积.

2、设函数  $f(x) = \int_0^x |\cos t| dt$ ，

(1) 当  $n$  为正整数，且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时，证明  $2n \leq f(x) < 2(n+1)$ ；

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

---

六、证明题（本题 7 分）

设函数  $f(x)$ ， $g(x)$  在  $[0,1]$  上具有连续的导数，且  $f(0) = 0$ ， $f'(x) \geq 0$ ，

得分	
评阅人	

$g'(x) \geq 0$ . 证明：对任意  $a \in [0,1]$ ，有  $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$ .