# 第六章 矩阵的相似变换

本章主要讨论方阵的特征值和特征向量、方阵的相似变换和对角化等问题.

## 第一节 方阵的特征值和特征向量

### 一、特征值与特征向量

**定义 1** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，如果存在数 $\lambda$ 和 $n$ 维非零向量 $\boldsymbol{X}$ 使关系式

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{6.1}$$

成立，则称数 $\lambda$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**；非零列向量 $\boldsymbol{X}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda$ 的**特征向量.**

将式（6.1）改写成

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}, \tag{6.2}$$

将（6.2）看成关于 $\boldsymbol{X}$ 的齐次线性方程组，它有非零解当且仅当其系数行列式满足

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=0, \tag{6.3}$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{6.4}$$

这是以 $\lambda$ 为未知数的一元 $n$ 次方程，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**，其左端 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|$ 是 $\lambda$ 的 $n$ 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，特征方程的根就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 根据代数基本定理，在复数范围内，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个特征值（重根按重数计算），记作 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

求出特征值 $\lambda_i$ 后，将 $\lambda_i$ 代入齐次线性方程组（6.2）中，求解方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{6.5}$$

的所有非零解向量，就是属于 $\lambda_i$ 的特征向量。对不同的特征值逐个计算，可求得属于各特征值的全部特征向量.

若非零向量 $\boldsymbol{X}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则由（6.1）式可知，对任意实数 $k\neq 0$，有

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=\lambda(k\boldsymbol{X}), \tag{6.6}$$

这表明 $k\boldsymbol{X}$ 也是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，因此属于同一特征值的特征向量有无穷多个；反之，不同特征值对应的特征向量必不相同，即一个特征向量只能属于一个特征值（证明留给读者作为练习）.

由齐次线性方程组解的性质容易证得如下定理.

**定理 1** 设 $\lambda$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_s$ 是属于 $\lambda$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_s$ 的任意非零线性组合仍是属于 $\lambda$ 的特征向量.

**例 1** 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

**解** $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=2$，解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

所以$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，解齐次方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

所以$k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量.

**例 2** 求$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

**解** $\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0 & -4\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-1$， $\lambda_2=\lambda_3=2$.

对于$\lambda_1=-1$，解齐次方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -4\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

所以$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$是对应于$\lambda_1=-1$的全部特征向量.

对于$\lambda_2=\lambda_3=2$，解齐次方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -4\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$（$k_2$，$k_3$不同时为 0）是对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量.

**二、特征值和特征向量的性质**

**定理 2*** 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的$n$个特征值，则有

（1）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$；（2）$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

其中$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$是$\boldsymbol{A}$的主对角元之和，称为方阵$\boldsymbol{A}$的**迹**，记作$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

**证明** 见附录六

**例 3** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&y\\-4&-4&x\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=12$，求$x,y$的值.

**解** 由定理 2 可得
$$\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=7+7+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=18\\ |\boldsymbol{A}|=33x+12y-12=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=108\end{cases}$$
解之得$x=4,y=-1$.

**定理 3** 设$\lambda$是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda$的任一特征向量，则有：

（1）$\forall k\in R$，$k\lambda$是$k\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$k\boldsymbol{A}$的属于$k\lambda$的特征向量；

（2）对任意非负整数$k$，$\lambda^k$是$\boldsymbol{A}^k$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{A}^k$的属于$\lambda^k$的特征向量；

（3）若$\varphi(\boldsymbol{A})$是$\boldsymbol{A}$的$m$（$m$为任意非负整数）次多项式，即
$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$
则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\varphi(\boldsymbol{A})$的属于$\varphi(\lambda)$的特征向量；

（4）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\lambda\neq 0$，且$\dfrac{1}{\lambda}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的属于$\dfrac{1}{\lambda}$的特征向量；

（5）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$是$\boldsymbol{A}^*$的特征值，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{A}^*$的属于$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$的特征向量；

（6）$\lambda$也是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值.

**证明** （1）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，有$k\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=k\lambda\boldsymbol{p}$成立。

（2）由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，有
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\lambda(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda^2\boldsymbol{p},$$
$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p})=\boldsymbol{A}(\lambda^2\boldsymbol{p})=\lambda^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})=\lambda^2(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda^3\boldsymbol{p},$$
由数学归纳法易知，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p}=\lambda^k\boldsymbol{p}$，得证.

（3）由
$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}&=(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{p}\\&=a_0(\boldsymbol{E}\boldsymbol{p})+a_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})+\cdots+a_m(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p})\\&=a_0\boldsymbol{p}+a_1\lambda\boldsymbol{p}+\cdots+a_m\lambda^m\boldsymbol{p}=\varphi(\lambda)\boldsymbol{p},\end{aligned}$$

得证.

（4）由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值都不为 0，进而在 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$ 左右两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$，两端同乘 $\dfrac{1}{\lambda}$ 即可获证.

（5）于 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，结合（1）和（4）立得.

（6）由 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征多项式，因而有相同的特征值.

**例 4**　设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, 3，求伴随阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值.

**解**　$|\boldsymbol{A}|=1\times2\times3=6$，将 $\lambda=1,2,3$ 分别代入 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，得 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值为 6, 3, 2.

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\varphi(\boldsymbol{A})$，则 $\varphi(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$，将 $\lambda=1,2,3$ 分别代入 $\varphi(\lambda)$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 4, 15, 40.

**定理 4**　不同的特征值对应的特征向量线性无关.

**证明**　设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_s$ 依次是与之对应的特征向量，下面用数学归纳法证明它们线性无关.

当 $s=1$ 时，因特征向量 $\boldsymbol{p}_1$ 是非零向量，显然线性无关.

假设 $s=m-1$ 时结论成立，即假若 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_{m-1}$ 线性无关，要证 $s=m$ 时结论仍成立，即 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关. 为此，考察下面构成的齐次线性方程组

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}, \tag{6.7}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两边，得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_m\lambda_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}, \tag{6.8}$$

（6.8）式减去（6.7）式的 $\lambda_m$ 倍，得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_m)\boldsymbol{p}_1+k_2(\lambda_2-\lambda_m)\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\boldsymbol{p}_{m-1}=\boldsymbol{0}, \tag{6.9}$$

由归纳法假设，$\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_{m-1}$ 线性无关，因此 $k_i(\lambda_i-\lambda_m)=0(i=1,\cdots,m-1)$，又 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互异，故 $k_i=0(i=1,\cdots,m-1)$，代入式（6.7）得，$k_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{p}_m$ 是非零向量，因此 $k_m=0$，故 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

## 思考题一

1. $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式一定是 $n$ 次多项式吗？类似的，下式又是 $\lambda$ 的几次多项式？

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}-\lambda & \cdots & a_{1n}-\lambda \\ a_{21}-\lambda & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}-\lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-\lambda & a_{n2}-\lambda & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

2. 为什么一个特征向量只能属于一个特征值？

3. 如果 $\lambda$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\mu$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，问 $\lambda+\mu$ 是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值吗？

4. 设 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$，问 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 会是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量吗？

5. $\lambda$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值， $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda$ 的任一特征向量，则 $\lambda$ 也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值，问 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量吗？

# 第二节 相似矩阵

## 一、相似矩阵的概念与性质

**定义 2** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $n$ 阶方阵，如果存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}, \tag{6.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**，或 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**相似矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ **相似变换**为 $\boldsymbol{B}$ 的**相似变换矩阵**.

由定义可知，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 表示对 $\boldsymbol{A}$ 作了一系列的初等行变换和初等列变换，而且这一系列初等行变换和初等列变换对应的矩阵互逆，因此矩阵的相似关系是矩阵等价关系的特殊情形.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵，则有

（1）反身性　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

（2）对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

（3）传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ， $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$ ，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$ .

**定理 5　设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ，变换阵为 $\boldsymbol{P}$ ，则**

**（1） $\forall k\in R$ ， $k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$ ，变换阵仍为 $\boldsymbol{P}$ ；**

**（2）任意正整数 $k$ ， $\boldsymbol{A}^k\sim\boldsymbol{B}^k$ ，变换阵仍为 $\boldsymbol{P}$ ；**

**（3） $\varphi(\boldsymbol{A})\sim\varphi(\boldsymbol{B})$ （ $\varphi(\cdot)$ 为任意矩阵多项式），变换阵仍为 $\boldsymbol{P}$ ；**

**（4） $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ ，变换阵为 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$ ；**

**（5）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$ ， $\boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$ ，变换阵均为 $\boldsymbol{P}$ .**

**证明　（读者作为练习）**

彼此相似的矩阵具有一些共性，也称为**相似不变性**，这就是下述定理.

**定理 6 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ ,则**

**（1） $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ ;**

**(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值；**

**（3） $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$， $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.**

**证明**　（1） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；

（2）由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})|\cdot|\boldsymbol{P}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})|,\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，因此特征值相同.

（3）由（2）的结论结合定理 2 即可得证.

**推论　若 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值.**

由定理 5 第（3）条可知，若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ，对任意多项式

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\varphi(\boldsymbol{\Lambda})$ ，进而 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$.

## 二、矩阵的对角化

在矩阵运算中，对角矩阵的运算很简便，这样很自然地提出一个问题：是否每个方阵都能相似于某个对角矩阵？如果相似，如何求出相应的相似变换阵？下面我们就来讨论这个问题.

**定义 3**　若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立，则称

$\boldsymbol{A}$ 可对角化，称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相似标准形**.

并非所有的矩阵都可对角化，具体地，有如下定理.

**定理 7　$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.**

**证明**　充分性：设 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n$，它们对应的特征值依次为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i, i=1,\cdots,n$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，显然 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P\Lambda},$$

得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

必要性：设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，即存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 成立，即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$. 对 $\boldsymbol{P}$ 按列分块，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，则显然 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关，且

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i, i=1,\cdots,n$，这表明 $\boldsymbol{p}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_i$ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**推论　若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化.**

由定理 4 知，不同特征值对应的特征向量线性无关，当 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值时，必有 $n$ 个线性无关的特征向量，因此可对角化. 另一方面，当 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时，不一定有 $n$ 个线性无关的特征向量（如例 1)，因此不一定可对角化. 也就是说上述推论是方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分非必要条件.

当 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件见如下定理.

**定理 8*　设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应重数依次为 $n_1,\cdots,n_s$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-n_i, i=1,\cdots,s$，即对应于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.**

结合定理 7 的证明和定理 8 可知，将方阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的方法是：求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$（对应重数依次为 $n_1,\cdots,n_s$），以及每个特征值 $\lambda_i$ 对应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}(i=1,\cdots,s)$，构造相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_{11},\cdots,\boldsymbol{p}_{1n_1},\boldsymbol{p}_{21},\cdots,\boldsymbol{p}_{2n_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{s1},\cdots,\boldsymbol{p}_{sn_s}),$$

即可将 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

**例 5**　问矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 能否对角化？

**解**　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 5 & -2\\ -2 & -2-\lambda & 1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ -2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量，因此不能对角化.

此例中，3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 仅有一个 3 重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，要让 $\boldsymbol{A}$ 可对角化则要求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有三个解向量，根据齐次线性方程组理论，需要 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 才行. 一般地, 对于具有 $n$ 重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=k$ 的 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 而言（这样的方阵有很多），除了 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}$ 可对角化（它本身就是对角阵）外，其余的都不能对角化.

**例 6** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&-4\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$，

（1）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵；

（2）求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

**解** （1）本题中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 即例 2 中矩阵，其特征值 $\lambda_1=-1$，$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda_1$ 的某一特征向量，特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的两个线性无关的特征向量，因此取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-4&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$.

注意 $\boldsymbol{P}$ 的第 $j$ 列的特征向量所属的特征值应位于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的第 $j$ 个对角元处.

（2）由（1）得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}$，经计算 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&3&-1\\1&0&4\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-4&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{10}&&\\&2^{10}&\\&&2^{10}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&3&-1\\1&0&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-340&0&-1364\\341&1024&341\\341&0&1365\end{pmatrix}$$

本例就是一个利用方阵对角化来简化计算的典型应用.

## 思考题二

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，问 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定相似吗？结合下例说明.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

2. 例 6 中取的 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 为什么一定是线性无关的？请证明.

3. 相似矩阵定义中的相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是唯一的吗？

4. 可以对角化的矩阵一定具有 $n$ 个不同的特征值吗？

# 第三节 实对称矩阵的对角化

上一节给出了矩阵可对角化的判别条件，但需要计算矩阵的特征值和特征向量才能判别.实用中有一类很重要的矩阵——实对称矩阵，它一定可以对角化，本节就来讨论该问题.

## 一、实对称矩阵特征值与特征向量的性质

**定理 9** 实对称矩阵的特征值全是实数，也必有实特征向量.

**证明** 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，$\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，有 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$，两边同时取共轭得 $\overline{\boldsymbol{Ap}}=\overline{\lambda\boldsymbol{p}}$，又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{p}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{p}}$；两边取转置，得 $\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}$，两边右乘 $\boldsymbol{p}$，得 $\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ap}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$，再由 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$ 得

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=0, \qquad (6.11)$$

因为 $\boldsymbol{p}$ 是非零向量，所以 $\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\neq 0$，故 $\lambda=\overline{\lambda}$，即 $\lambda$ 是实数，从而 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 是实系数线性方程组，必有实的基础解系，所以 $\boldsymbol{A}$ 必有实特征向量.

**定理 10** 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量一定正交.

**证明** 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性有

$$\lambda_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Ap}_1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \qquad (6.12)$$

上式右乘 $\boldsymbol{p}_2$ 得

$$\lambda_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_1\boldsymbol{p}_2)=\lambda_2\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2, \qquad (6.13)$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0. \qquad (6.14)$$

但 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$，即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

**定理 11** **设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_i$ 重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-n_i$，从而特征值 $\lambda_i$ 恰有 $n_i$ 个线性无关的特征向量.**

（本定理的证明请见参考文献[8]p.207.）

## 二、正交矩阵

**定义 4** 若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

**定理 12** **正交阵 $\boldsymbol{A}$ 具有以下性质：**

**（1）$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵；**

**（2）$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$；**

**（3）若 $\boldsymbol{B}$ 也是正交阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵；**

**（4）$\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组构成 $R^n$ 的一个标准正交基.**

**证明** （1）由逆矩阵定义立得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，再由 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵.

（2）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{E}|=1$，故 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

（3）由已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，获证.

（4）对 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 可得

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2 & \cdots & \langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle & \cdots & \|\boldsymbol{\alpha}_n\|^2\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两正交，且都是单位向量，故构成 $R^n$ 的一个标准正交基. 对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组类似可证，留给读者练习.

**定义 5** 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，则相似变换 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为**正交变换**.

## 三、实对称矩阵的对角化

**定理 13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称阵，则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值为对角元的对角阵. 即实对称矩阵必可经过正交变换对角化.**

**证明** 设 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应重数依次为 $n_1,\cdots,n_s$，由定理 9 和定理 11 知，特征值 $\lambda_i$ 恰有 $n_i$ 个线性无关的实特征向量，将它们正交化并单位化，得 $n_i$ 个标准正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{in_i}$，由 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$ 知，一共可得到 $n$ 个这样的特征向量，令

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1n_1},\boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22},\cdots,\boldsymbol{p}_{2n_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{s1},\boldsymbol{p}_{s2},\cdots,\boldsymbol{p}_{sn_s}\right),$$

则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 $n$ 个对角元素依次为 $n_1$ 个 $\lambda_1$，$n_2$ 个 $\lambda_2$，$\cdots$ ，$n_s$ 个 $\lambda_s$，并且由定理 10，对应于不同特征值的特征向量正交，故 $\boldsymbol{P}$ 的 $n$ 个列向量构成标准正交向量组，即 $\boldsymbol{P}$ 为正交变换阵. 定理获证.

该定理的证明过程同时也给出了将实对称矩阵利用正交变换对角化的方法.

**例 7** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

**解** $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\\2-\lambda&2&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&5-\lambda&-4\\0&1-\lambda&1-\lambda\\0&\dfrac{(1-\lambda)(\lambda-6)}{2}&2(1-\lambda)\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}2&5-\lambda&-4\\0&1&1\\0&0&\dfrac{10-\lambda}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2(10-\lambda)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

将它们正交化单位化可得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=10$，解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系
$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},$$

将其单位化可得 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$. 于是得正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 使得
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,10)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}.$$

**例 8** 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-4&&\\&5&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 $x,y$.

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

**解** 由已知，$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为-4，5，$y$，由定理 2 可得
$$\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1+x+1=-4+5+y\\|\boldsymbol{A}|=-15x-40=-4\times5\times y\end{cases}$$

解得 $x=4,y=5$.

对于特征值 $\lambda_1=-4$，解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由
$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

将其单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=5$，解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

将它们正交化单位化可得 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$.

于是得正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-4&&\\&5&\\&&5\end{pmatrix}.$$

## 思考题三

1. 如果实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，问 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定相似吗？

2. 可以对角化的矩阵一定是实对称阵吗？

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶正交阵，则 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交阵吗？$k\boldsymbol{A}(k\neq 0)$ 也是正交阵吗？ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正交阵吗？

# 习 题 六

## （A）

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$；（5）$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$；（6）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$；

2. 已知矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & a \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$，求$a,b$的值.

3. 已知 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$1,-1,2$，求以下各矩阵的所有特征值.

（1）$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；（2）$\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$.

4. 设$\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} + 6\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 2 或 3.

5. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶正交阵，$|\boldsymbol{A}| = 1$，试证$|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$.

6. 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似，求$a$、$b$的值.

7. 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$可相似对角化，求参数$x$的值.

8. 设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求该矩阵$\boldsymbol{A}$.

9. 题 1 的六个方阵中，哪些可以对角化？其相似标准形和相似变换阵各是什么？

10. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶方阵，且$\boldsymbol{A}$可逆，证明$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$相似.

11. 已知$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，

（1）求参数$a,b$的值以及特征向量$\boldsymbol{p}$所对应的特征值；

（2）问$\boldsymbol{A}$能不能相似对角化？并说明理由.

12. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{1000}$.

13. 以下哪些是正交阵？说明理由.

（1）$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，求 $a,b$ 的值.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量，证明 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是对称的正交阵.

16. 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

17. 设 3 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

## （B）

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$，则以下向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是（　）·

（A）$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. $\lambda$ 是 $n$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}$ 为对应的一个特征向量，则以下结论正确的是（　）

（A）$\boldsymbol{p}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 $\lambda^{-1}$ 的特征向量；

（B）$\boldsymbol{p}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量；

（C）$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

（D）$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都可表示为 $k\boldsymbol{p}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1,2,3，则必有（　）

（A）$x=2, y=4, z=8$；　　（B）$x=-1, y=4, z\in R$；

（C）$x=-2, y=2, z\in R$；　　（D）$x=-1, y=4, z=3$.

4. 如果$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的任意一行的所有元素之和都等于$a$，则$\boldsymbol{A}$必有一个特征值（　）

（A）$a$；（B）$-a$；（C）0；（D）$a^{-1}$ .

5. 若$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值全是零，则以下结论不正确的是（　）

（A）$|\boldsymbol{A}|=0$；（B）$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$；（C）$R(\boldsymbol{A})=0$；（D）$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n$ .

6. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值互不相同，且$\boldsymbol{A}$为奇异矩阵，则$\boldsymbol{A}$的秩为（　）

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

7. 设4阶实对称阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，且$R(\boldsymbol{A})$=3，则$\boldsymbol{A}$相似于（　）

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

8. $n$阶方阵$\boldsymbol{A}$可对角化的充分必要条件是（　）

（A）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$；　　（B）$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量；

（C）$\boldsymbol{A}$有$n$个不同的特征向量；　（D）$\boldsymbol{A}$有$n$个不同的特征值.

9. 设方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，相似变换阵为$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的特征向量，则以下是$\boldsymbol{B}$的属于$\lambda$的特征向量的是（　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}$；　（B）$\boldsymbol{P\alpha}$；　（C）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；　（D）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

10. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶实对称阵，$\boldsymbol{\xi}$是$A$的对应特征值$\lambda$的特征向量，$\boldsymbol{P}$为$n$阶可逆阵，则矩阵$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$对应于特征值$\lambda$的特征向量是（　）

（A）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$；　（B）$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$；　（C）$\boldsymbol{P\xi}$；　（D）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$.

11. 设$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$既是实对称阵又是正交阵，则（　）

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；　（B）$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{E}$；　（C）$\boldsymbol{A}$等价于$\boldsymbol{E}$；　（D）$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.

12. 证明：若$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则其特征值只能是0或1.

13. 证明：若$n$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值都相等，则$\boldsymbol{A}$只能是对角阵.

14. 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, a_1\neq 0, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，

（1）证明$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值；

（2）求$\boldsymbol{A}$的非零特征值并判断$\boldsymbol{A}$能否对角化.

15. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$有一个二重特征值，求$a$的值，并讨论$\boldsymbol{A}$能否对角化.

16. 证明：正交矩阵的特征值只能是1或−1.

17. 已知$\boldsymbol{A}$为3阶实对称阵，特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$，且$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$是属于特征值$\lambda_1=2$的一个特征向量，求$\boldsymbol{A}$.

# 附录六

**附 1.定理 2***　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 $n$ 个特征值，则有

（1）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$；　　　（2）$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

**证明**　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

的完全展开式中，除了主对角线元素的连乘积 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ 之外的其余各项，至多包含 $n-2$ 个主对角线元素，产生的 $\lambda$ 的次数最高为 $n-2$. 因此 $f(\lambda)$ 中 $\lambda^n$ 项的系数为 $(-1)^n$，$\lambda^{n-1}$ 项的系数为 $(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$. 再由 $f(0)=|\boldsymbol{A}|$ 知 $f(\lambda)$ 的常数项为 $|\boldsymbol{A}|$. 因此如果只写出特征多项式的前两项与常数项，就有

$$\begin{aligned} f(\lambda)&=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+|\boldsymbol{A}| \\ &=(-1)^n\left[\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\right]. \end{aligned} \qquad (6.15)$$

另一方面，因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以特征多项式有如下因式分解

$$\begin{aligned} f(\lambda)&=(-1)^n\left[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\right] \\ &=(-1)^n\left[\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)\right], \end{aligned} \qquad (6.16)$$

对比以上两式，定理即可得证.

**附 2. 引理 1**　设 $\lambda_i$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_i$ 重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\geq n-n_i$，即属于 $\lambda_i$ 的特征向量中，极大线性无关组所含向量的个数不大于 $n_i$.

（本引理证明略，有兴趣的读者可见参考文献[8]，p. 193.

**附 3. 定理 8***　设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应重数依次为 $n_1,\cdots,n_s$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-n_i, i=1,\cdots,s$，即对应于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.

**证明**　由引理 1，可知对任意特征值 $\lambda_i$，所属的线性无关的特征向量个数 $\leq n_i$，故 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量个数 $\leq n_1+\cdots+n_s=n$，当且仅当任意特征值 $\lambda_i$ 所属的线性无关的特征向量个数等于 $n_i$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量个数为 $n$，$\boldsymbol{A}$ 可对角化.