

三值逻辑与多值逻辑综述

林宇航

浙江工业大学信息工程学院, 浙江杭州 310014

摘要: 多值逻辑是现代数字电子学研究的一个分支领域。它具有许多优越性, 能较容易地解决用二值逻辑难以解决的问题, 所以本文详细讲述了近年来国内外关于多值逻辑研究的进展, 并讨论了研究三值与多值逻辑的意义, 从三值与多值逻辑设计应用方面讲述了这个领域的发展状况和趋势, 方便后来者快速了解多值逻辑。

关键词: 三值; 多值; 综述; 历史

中图分类号: **文献标识码:** **文章编号:**

Summary of Three-valued Logic and Multi-valued Logic

YuHang Lin

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: Multi-valued logic is a branch of modern digital electronics research. It has many advantages and can easily solve problems that are difficult to solve with binary logic. Therefore, this article describes in detail the progress of multi-valued logic research at home and abroad in recent years, and discusses the significance of studying three-valued and multi-valued logic. It describes the development status and trend of this field from the application of three-valued and multi-valued logic, which is convenient for latecomers to quickly understand the development of multi-valued logic.

Keywords: Three-value; multi-value; summary; history

在 20 世纪 80 年代, 多值逻辑的研究处于高潮, 国内外发表了许多研究论文, 并将多值逻辑应用于计算机系统之中。由于多值逻辑电路的结构一般较复杂, 实现起来较困难, 使多值逻辑的发展受到一定影响, 但对多值逻辑的研究却一直未曾停止过。

一. 多值逻辑的产生

经典的二值逻辑是采用自然语言建立概念、断言和推理的系统, 希腊的哲学家亚里士多德提出了两个不可证明的公理: 矛盾律和排中律。矛盾律简言之就是“ A 不可能既是 B 又不是 B 。”或“同一件事不能同时既属于又不属于某个对象和用同一种方式”。排中律是更严格的定律: “ A 肯定要么是 B , 要么就不是 B 。”或“任何命题要么是肯定, 要么是否定”。这两个定律看起来很相像, 但实际上是有差别的。矛盾律不允许同时既为真又为假, 对立面不能重叠。排中律只允许是真或者是假。在 20 世纪 20 年代初, 卢卡西维茨在其 1920 年发表的《论三值逻辑》一文中, 建立了一个三值逻辑系统, 自此多值逻辑基本建立^[1]。

二. 研究多值逻辑的意义

(1) 多值逻辑可以更好的描述一些多状态的问题。例如在编写程序的时候,运用多值或三值逻辑可以建立三支及多路转移,这就可以省去特别多的二分支的选择语句的嵌套,使代码更加简化。

(2) 在相同的位数情况下,多值数字系统相比二值逻辑可以包含更多的信息。比如二进制的 3-8 译码器,若用三进制,就成了 3-27 译码器,选通通道足足多了三倍。

(3) 如果 CPU 用多值逻辑来实现,那么其面积将大大缩小,而且近年来 CPU 的发展已经达到 3nm,快要接近物理上限 1nm,人们很难再从这方面下手,转变思想,从 CPU 的逻辑上出发,改用三值或多值逻辑,或许是一个可行的改进之路。

三. 多值逻辑与二值逻辑的关系

人们在社会生活中,不仅需要计算,也需要推理,需要在许多情况下根据自己已有的知识对许多事情做出判断和推理,这就产生了逻辑。19 世纪英国数学家布尔(G.Boole),为了使逻辑中的推理能像数学计算一样地进行,他系统研究了逻辑思维的一般规律,将代数符号引入逻辑系统,成功将形式逻辑归结为一种代数演算,即二值逻辑代数(也称布尔代数)。

布尔代数实现了从一组逻辑公理出发,依靠代数演算来推导逻辑定律或定理。在此基础上,经过了许多人的努力,进一步发展形成了一门数学和逻辑相结合的新学科——数理逻辑。在 20 世纪 30 年代末期,数理逻辑开始用于电路开关设计,40 年代后期它与布尔代数逐渐发展成为计算机科学的基础理论。

在理论上可以证明,取 $e(e=2.71828)$ 值的数字系统成本最低,但是用二值逻辑却是最容易由物理器件来实现的,二值逻辑可以简单地用开关的“开”和“关”,或者用电平的“高”与“低”两种状态来表示。由于二值逻辑被成功地应用到数字电子计算机上,加上它的简单明了性,在任何命题判断中都可以得到明确的结论,真和假都是绝对的,没有一点含糊,使得它在整个科学发展过程中显示出了强大的生命力。

但是,在某些情况下,二值逻辑会产生悖论,例如著名的古希腊的“垛堆悖论”,为了解决这一问题,波兰的逻辑学家和哲学家 J.卢卡斯维兹(JanLukasewicz)于 1920 年在二值逻辑的基础上,扩展了一个值,从而成为三值逻辑。他用 1 表示真,用 0 表示假,另外用 $1/2$ 表示可能性。虽然,这仅仅是插入一值,但是在逻辑领域中却是一个突破,它导致了某事物的反面与其本身等效的“悖论”。

经典逻辑这样表达命题:“明天将下雪是真”。

其反面则是:“明天将不会下雪是真”。

卢卡斯维兹加上另一种表述:“明天将下雪是可能的”,这种表述的逻辑值是 $1/2$;其反面则是:“明天将不会下雪是可能的”,这种表述的逻辑值也是 $1/2$,当然“ $1/2=1/2$ ”,这种逻辑并不影响经典二值逻辑的判断,只是扩展了二值逻辑。

但进一步的研究发现,三值逻辑也会产生悖论,为此必须引进四值逻辑。结果,为了解决 R 值逻辑的悖论,不得不引入 $(R+1)$ 值逻辑。

四. 多值逻辑历史发展

第一个对任意基数都保持功能完备的多值逻辑代数是 E.L.Post 于 1921 年在题为“基本命题的一般理论导引”的论文中提出的。迄今,较受各方注目的多值逻辑代数系统,有 Post 代数、Vranesic-Lee-Smith 代数、Allen-Givone 代数、模代数、T 门算子代数等。这些代数亦较有影响,但又有局限性,需研究出一种既表示简洁、化简方便,又易于工程实现的多值代数系统。

近代的多值逻辑研究一直是与计算机科学技术的发展直接关联的。在 20 世纪 50 年代初电子计算机发展的初期,当时电子计算机采用何种进位制尚未定论,不少学者发表了研究多值开关电路的论文。例如 1952 年, Grosch 曾为旋风 II 型电子计算机提出过三值逻辑部件的完整设计。A.D.Booth 和 J.Ringrose 在电子工程杂志上发表了《三态触发器》的研究论文。

1958 年莫斯科大学成功地研制出了世界上第一台三值计算机。这种三值计算机的概况为:字长 18trit(三进制位),定点;主频 200kHz;指令系统共设置 27 条指令,加减法指令执行时间为 $180\mu s$,乘法指令执行时间为 $360\mu s$,无除法指令;每个字中可存放两条单地址指令;存储器由 81 个字的磁芯存储器及 1944 个字的磁鼓存储器组成;在磁芯存储器中每一个三进制位用两个耦合磁芯的三个稳态来实现;磁鼓存储器中则用两个二进制位编码实现一个三进制位,将多值逻辑应用于计算机的努力,并没有获得预期的效果。

在 1960 年代, Zadeh(1965)开始用推广的集合论方法形式化模糊概念^[2],人们试图通过多值逻辑的方法为其模糊集寻找理论基础,导致人们对多值逻辑进一步深入研究。捷克人 J. Pavelka 在 1979 年对模糊逻辑进行了研究,构建了模糊命题逻辑,对逻辑系统提出了新的完全性概念^[3]。1987 年 V. Novk 对 Pavelka 逻辑给出了一阶谓词系统。

70 年代初期,多值逻辑的研究开始引起国际计算机学术界的重视。随着对多值逻辑研究的兴起,IEEE 于 1971 年在美国发起并举办了首届国际多值逻辑学术讨论会,并决定每年举行一次,使多值逻辑的研究日益兴旺。IEEE 还于 1980 年成立了隶属其计算机学会的“多

值逻辑技术委员会”。

1973 年，美国纽约州立大学在二值主机上用微程序仿真实现一台三值计算机。作为可行性实验，它在速度与成本两方面都达到了与二值计算机同一数量级的水平。

1976 年，Signetics 公司推出了四值 PL 器件；1981 年，Intel 公司在 Intel-8087 协处理器及 Iapx-432 计算机的 43203 输入输出接口中采用了四值 ROM 器件。多值逻辑器件第一次应用于大批量生产的计算机系统中，标志着多值逻辑技术开始进入实用化阶段。

1980 年代以后，多值逻辑的研究方向趋向分支化和多元化，除了对多值逻辑在模糊集合论中的应用有了较深入的研究，多值逻辑与相关代数系统，多值逻辑中计算复杂性问题也得到详细的探讨和考察。多值逻辑的各个分支不断与边缘科学结合，出现了新的研究领域。如：多值逻辑函数与密码学结合，多值逻辑应用于软计算，多值逻辑在量子领域的应用等等，都是热门的研究方向。

2000 年 Muthukrishnan 和 Stroud^[4]设计并实现了在线性离子阱中构建一位和两位多值逻辑量子基本门（quantum primitive gate）的方案，有力论述并证明了多值逻辑量子门物理实现的可行性。

2003 年 Daboul 等人^[5]提出量子混合门（quantum hybridgate）的概念，即所涉及的各量子位分别在不同的逻辑空间中的量子门，TS 门是已经物理实现的混合二值、三值逻辑量子置换门。

2009 年 Lanyon 等人^[6]利用线性光子系统实现了三值逻辑 Toffoli 门，这是量子电路物理实现上的一项重大突破，因为 Toffoli 门和 Hadamard 门可构成量子计算的一个通用门集。酉性限制是对量子门的惟一限制，每个酉矩阵都可定义一个有效的量子门^[7]。酉矩阵是量子门的数学模型，可清晰的反映出量子门的数学性质，并可检验量子门物理实现的正确性，因此研究量子门的酉矩阵具有一定的意义。于多值逻辑量子置换门实现的置换功能，王东和陈汉武提出了一种多值逻辑量子置换门的酉矩阵构造方法，利用此方法可以简便的构造出多值逻辑量子置换门的酉矩阵。在此基础之上，又给出了混合多值逻辑量子置换门的酉矩阵构造框架，利用此框架可以构造任何混合逻辑量子置换门的酉矩阵。量子门酉矩阵构造方法的给出有助于分析量子态的演化过程，验证量子门及量子电路的正确性和可靠性^[8]

五. 多值逻辑电路

目前的数字电路大多为二值逻辑电路，但多值逻辑电路也得到了巨大的发展。多值逻辑

电路按逻辑值表示方式来区分，可以分为电流型、电压型及电荷型三类。

1. 电流型多值逻辑电路

这类多值逻辑电路技术主要有 ECL 及 I²L。其基数不受限制。为了易于与二值数字系统配合，较多为四值电路。实际上也能很容易地构成三值电路或高于四值的电路。

2. 电压型多值逻辑电路

其主要电路技术有 TTL, CMOS 及 NMOS。这类电路以三值逻辑电路为主，目前也有向四值、五值发展的趋势。

3. 电荷型多值逻辑电路

这类电路技术主要为 CCD，其特点是电路基数可以不受限制。

近年来有二种新器件可用于多值电路技术，值得注意。第一种是注入肖特基逻辑 ISL。这种电路是 I²L 电路的改进。由于采用了隔离非饱和高增益晶体管，可以得到高速、高密度和低功耗的优点。第二种是砷化镓金属半导体场效应晶体管 GaAs MOSFET。这种电路的优点是速度高，基数不限于 3。目前已试制成基数为 5 的多值电路。

近年来多值电路的发展非常迅速，实验室试制成功的及正式投放市场的多值电路不胜枚举。例如 I²L 及四值全加器、乘法器及计数器，COMS 三值逻辑电路族，MOS 四值 ROM, CCD 四值 RAM, 16 值动态 RAM 等。多值电路研究中的一个重要课题是提高速度、降低功耗。有一种适合 VLSI 实现的低功耗三值逻辑电路 DECMOS，其特点是采用耗尽型及增强型的 CMOS，从而得到低功耗、高速的优点。

六. 多值逻辑系统的逻辑设计

1. 代数法

先确定所采用的代数系统，然后用电路实现该代数系统中的所有基本算子，亦即实现一组基本的门电路，最后将所要实现的函数的表达式化简，从而确定了该函数用基本门连接而成的数字系统。表达式的化简可采用类似于二值逻辑设计的卡诺图。在多值逻辑中称之为摄盖法。也可以用代数法化简，这尤其适合于用计算机化简。这种设计方法的缺点是所实现的数字系统效率不高。选择一种合适的代数系统也十分重要。目前较普遍的是 Allen-Givone 代数或 Vranesic-Lee-Smith 代数。三值代数则以门代数、扩展布尔型算子代数及对称三值代数较为常用。

2. 电路法

与代数法正好相反，这种方法是先有实际的电路，然后从中抽出一些基本算子，形成

一套设计方法。这种方法在四值电路的设计中得到了成功的应用，依此设计出的多值数字系统效率很高。

3. BITLON 法

BINLON 是二值实现的三值逻辑网路的缩写，其框图示于图 1。对于各种电路技术，只要设计出相应的译码电路，三值数字系统的逻辑设计问题就变成二值数字系统的逻辑设计问题了。



图 1

七. 总结

多值逻辑因其携带数字能力优越、容错性较大等优点，被广泛应用于多门学科的研究和实践中。在此综述中，从多值逻辑的历史演变过程、多值逻辑与经典二值逻辑的关系、多值逻辑的历史发展、多值逻辑电路与设计共四个方面详细且系统地介绍了有关多值逻辑的相关内容。多值逻辑的研究在近几年正迅速发展，并取得了一系列相当不错的成果，但“革命”尚未成功，同志仍需努力。

参考文献(References):

- [1] J.卢卡西维茨, 陈银科. 论三值逻辑[J]. 哲学译丛, 1983(06):47.
- [2] Zadeh L A . Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3):338-353.
- [3] J.Pavelka: 在模糊逻辑 I, II, III, Zeitschrf T Fur Math.Logik und Grunlan der Math25,1999,45-52,119-134,47-464.
- [4] Muthukrishnan A, Stroud C. R. Multivalued logic gates for quantum computation. Physical Review A , 2000, 62(5): 1-8.
- [5] Daboul J, Wang X, Sanders B C. Quamtum gates on hybrid qudits. Journal of Physics A: Mathemtical and General, 2003: 535-537.
- [6] Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M Petal. Quantum computing using shortcuts through higher dimesions. arXiv Quantum Physics, 2008, 0272: 1-7.
- [7] Nidlsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambride University Press, 2008: 178-183.
- [8] 李志强, 李文骞, 陈汉武. 量子可逆逻辑综合的关键技术及其算法[J]. 软件学报, 2009(9): 332-343.