______大学　高等数学 A-1　试题卷

五校联考试卷（三）评分细则

2020--2021 学年第　一　学期　使用班级 ______

一、选择题：DBAAD

二、填空题

1、$e^{\frac{a}{2}}$　　2、$x=0$　　3、$1-\pi$　　4、$\dfrac{\pi}{1010}$　　5、$y=x+2$

三、1、解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{x^4}{2}}$【2 分】

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$【3 分】$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$【2 分】

2、解 在方程两边同时对 x 求导，有

$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0$，【3 分】所以 $y'=\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.【4 分】

3、解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t$【1 分】，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^{1+3\ln t}}{1+3\ln t}\dfrac{3}{t}=\dfrac{3et^2}{1+3\ln t}$【2 分】.当 $x=9$ 时 $t=2(t>1)$【1 分】.所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\frac{3et^2}{1+3\ln t}}{4t}=\dfrac{3et}{4(1+3\ln t)}$. 故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=9}=\dfrac{3e}{2(1+3\ln 2)}$.【3 分】

4、解：原式=$\int\ln(x-1)\mathrm{d}\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}\ln(x-1)-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x$【2 分】

$=\dfrac{x^2}{2}\ln(x-1)-\dfrac{1}{2}\int(x+1+\dfrac{1}{x-1})\mathrm{d}x$【2 分】

$=\dfrac{x^2}{2}\ln(x-1)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\ln(x-1)+C$.【3 分】

四、1、解 令 $x=a\sin t$，则 $\int_0^a\dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$【3 分】

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\ln|\sin t+\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$ 【4 分】

2、证明：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f(0)=0$．【1 分】由条件 $f(x)$ 具有二阶导数，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，由 Rolle 中值定理 $\exists\xi_1\in(0,1)$，　使 $f'(\xi_1)=0$【3 分】.又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，【1 分】，因此有 $f'(0)=f'(\xi_1)=0$，对 $f'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上应用 Rolle 中值定理，$\exists\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$【2 分】，得证.

3、解 设 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续. 由 $f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0$ 得 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的唯一驻点为 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$．【2 分】 由于当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加，因此 x_0 是 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的唯一最小值点，最小值为 $y_0=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$，【2 分】故在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$ 的取值范围为 $[y_0,0)$．故

1) 当 $k\notin[y_0,0)$，即 $k<y_0$ 或 $k\ge 0$ 时，原方程在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内没有根；【1 分】

2) 当 $k=y_0$ 时，原方程在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有唯一根；【1 分】

3) 当 $k\in(y_0,0)$ 时，原方程在 $(0,x_0)$ 与 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 内各恰有一根，即原方程在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内恰有两个不同的根.【1 分】

五、1、解 （1）设切点 A 的坐标为 (a,a^2)，则过 A 点的切线方程的斜率为 $y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$．故切线与 x 轴的交点为 $(\frac{a}{2},0)$．由曲线、x 轴以及切线所围成的图形的面积为 $S=\int_0^a x^2dx-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}$.

由题设知 $S=\frac{1}{12}$，因此 $a=1$．故切点 A 的坐标为 $(1,1)$．【3 分】

（2）过切点 A 的切线方程为 $y=2x-1$．【1 分】

（3）由上述所围平面图形绕轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(x^2)^2\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^1-\frac{\pi}{6}(2x-1)^3\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{30}.$$【3 分】

2、解 （1） 因为$|\cos x|\geqslant 0$, 且$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\leqslant f(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

又因为$|\cos x|$是以π为周期的函数，在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2n,\quad \int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1),$$

因此当$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$时，有$2n\leqslant f(x)<2(n+1)$.【4 分】

（2）由（1）知，当$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$时，有$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$. 令$x\to+\infty$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.【3 分】

六、证明：设$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1), x\in[0,1]$.【2 分】则$F(x)$在$[0,1]$上可导，并且$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)]$.

由于$x\in[0,1]$时，$f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$，因此$F'(x)\le 0$,

即$F(x)$在 $[0,1]$上单调递减.【3 分】

注意到

$$\begin{aligned}F(1)&=\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(1)g(1)\\&=\int_0^1[g(t)f(t)]'\mathrm{d}t-f(1)g(1)=g(t)f(t)\Big|_0^1-f(1)g(1)=0.\end{aligned}$$【2 分】

因此当$x\in[0,1]$时，$F(x)\ge F(1)=0$， 即对任何$a\in[0,1]$有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ge f(a)g(1).$$