# 浙 江 工 业 大 学

# 线 性 代 数 期 末 试 卷

# 参 考 答 案

# （ 2020 ～ 2021 第 二 学 期 ）

任课教师 ____________学院班级：________________选课班中编号：_____

学号：__________________ 姓名：_______________ 得分：_________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | |

**一．填空题(每空 3 分，共 30 分)**

1. 已知$|A_{2\times2}|=-2$，则$|-3A^{-1}|=$ $\underline{\quad -9/2 \quad}$.

2. 若对任意的 3 维列向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$Ax=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}$ 则 $A=\underline{\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{R}(A^*)=\underline{\quad 1 \quad}$，$A^*=\underline{\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}}$.

4. 将 2 阶矩阵 $A$ 的第一列乘以 3，再将第二列的 $-2$ 倍加到第一列得矩阵 $B$，

   则满足 $B=AP$ 的矩阵 $P$ 为$\underline{\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}}$.

5. 如果向量组$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\k\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}$线性无关，则参数 $k$ 满足$\underline{k\neq0}$.

6. 向量空间$\{(x,y,z)\mid x=2y=3z\}$的维数是 $\underline{\ 1\ }$，一组基为$\underline{(6,\quad 3,\quad 2)^{\mathrm{T}}}$.

7. 实 向 量 空 间 $\mathrm{R}^2$ 中 的 向 量 $\beta=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ 在 基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 下 的 坐 标 为

$\underline{\left(-17/2,\quad 9/2\right)}$.

8. 若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，其中 $P=(\alpha,\beta)$，令 $Q=(\alpha+\beta,\beta)$，则 $Q^{-1}AQ=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}}$.

**二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)**

1. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则以下一定正确的是 ( D ).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵， $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$( A ).

(A) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$ (B) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$ (C) $2|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$ (D) $2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S\ (s\ge 2)$ 线性无关的充分必要条件是( D ).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意向量非零

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意两个向量线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意 $s$-1 个向量线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示

4. 若 $|A_{n\times n}|=0$，但 $A^*\ne 0$，则 $AX=0$ 的解空间维数为( B ).

(A) $n$ (B) 1 (C) $n$-1 (D) 0

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则下列矩阵中( C )是可逆矩阵.

(A) $2\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2$ (D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$

## 三. 计算题（每题 10 分,共 50 分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 本题总得分 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{pmatrix}$，求 $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-\frac{1}{12}\times2\times3\times4=-2$$

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$,矩阵 $X$ 满足 $XA-B=2X$, 求 $X$ .

解：由条件得 $X(A-2E)=B$，又 $(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 可逆,

所以 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$

3. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\\lambda\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$的秩为 2.

(1) 求参数$\lambda$;

(2) 求该向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

解：(1) 因为向量组的秩为 2，则$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=20-4\lambda=0$，所以$\lambda=5$.

(2) $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1/2&3/2\\0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以$\alpha_1,\alpha_2$为该向量组的一个极大无关组，

且$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2$，　$\alpha_4=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2$

4. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2-x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 问：

（1）当参数$k$满足什么条件时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？

（2）有无穷多解时，求方程组的通解.

解：该方程组的系数矩阵$A$的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=k(3-k),$$ 则

(i) 当$k\neq0$，$k\neq3$时，方程组有唯一解.

(ii) 当 $k$=3 时，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，故无解.

(iii) 当 $k$=0 时，对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 则方程组无穷多解

则得 $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意数.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解：(1) $A$ 的特征多项式为 $\left|\boldsymbol{A}\text{-}\lambda E\right|=-(\lambda-3)\lambda^2$

所以 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=0$

解特征方程 $\left(A\text{-}\lambda_1 E\right)x=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,则 $\lambda_1=3$ 所对应的特征向量为 $k_1\xi_1$，$k_1 \neq 0$.

解特征方程 $\left(A\text{-}\lambda_2 E\right)x=0$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则 $\lambda_2=0$ 所对应的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$，$k_2,k_3$ 为不全为 0 的数.

(2) 将 $\xi_1$ 单位化得 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$，将 $\xi_2$，$\xi_3$ 标准正交化得

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/3\\ \sqrt{6}/6\\ \sqrt{6}/6\end{pmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix},\ 令 Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3),\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $Q^{-1}\boldsymbol{A}Q=\boldsymbol{\Lambda}$.

## 四、证明题（共 10 分）

| 1 | 2 | 本题总得分 |
|---|---|---|
| | | |

1. （6 分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明: 因为 $A$ 可逆，则 $BA=A^{-1}(AB)A$ ，

所以 $AB$ 与 $BA$ 相似.

2. （4 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，证明：
存在 $\boldsymbol{A}$ 的如下分解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

证明：存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 使得

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{n\times n}\boldsymbol{D}$，其中 $r$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,

则令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{n\times n}\boldsymbol{C}^{-1}$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{CD}$ 即可.