# 浙江工业大学 2017 - 2018 学年第一学期
# 概率论与数理统计试卷

姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：__________ 得分：__________

**一. 填空题，共 28 分，每空 2 分。**

1. $\underline{\quad 0.7 \quad}$.
2. $\underline{\quad 0.5 \quad}$，$\underline{\quad \frac{13}{16} \quad}$.
3. $\underline{\quad 0.6 \quad}$.
4. $\underline{\quad 0.7 \quad}$，$\underline{\quad 3.31 \quad}$.
5. $\underline{\quad 1 \quad}$，$\underline{\quad 2 \quad}$.
6. $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$，$\underline{\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$.
7. $\underline{\quad 2 \quad}$，$\underline{\quad 13 \quad}$.
8. $\underline{\quad 4 \quad}$，$\underline{\quad 2\sqrt{5} \quad}$.

**二. 选择题，共 12 分，每题 3 分。**

1. C
2. D
3. D
4. A

三. 解答题，共 5 题，60 分。

1. ( 8 分 )

**解：** 用 $A_0, A_1$ 分别表示“发出信号为 0,1”，用 $B_0, B_1, B_x$ 分别表示“接收信号为 0,1,$x$”.

1 ) $P(B_x) = 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.1 = 0.16$； 4 分

2 ) $P(A_0|B_x) = \frac{0.6\times 0.2}{0.16} = 0.75.$ 8 分

2. ( 8 分 )

**解：**

1 ) 由 $P(X^2 = Y^2) = 1$，$P(X = 0, Y = \pm 1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$，故

| X \ Y | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |

4 分

2 ) $0 = P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{2}{9}$，故 $X, Y$ 不独立. 8 分

3. ( 10 分 )

**解：**

1 ) $1 = \int_0^1 \frac{C}{1+x^2} dx = C \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4} C \Rightarrow C = \frac{4}{\pi}$； 4 分

2 ) $\mathrm{E}Y = \int_0^1 (1 + x^2) \frac{C}{1+x^2}\, dx = C = \frac{4}{\pi}$； 6 分

$\mathrm{E}Y^2 = \int_0^1 (1 + x^2)^2 \frac{C}{1+x^2}\, dx = C[1 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3\pi}$； 8 分

$\mathrm{Var}(Y) = \frac{16}{3\pi} - (\frac{4}{\pi})^2 = \frac{16\pi-48}{3\pi^2}.$ 10 分

4. ( 12 分 )

**解：**

1 ) $1 = \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y)\, dxdy = k \int_0^1 \frac{1}{3} + y\, dy = \frac{5}{6} k \Rightarrow k = \frac{6}{5}$； 4 分

2 )

$$
\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_0^1 \int_0^y k(x^2 + y)\, dxdy = k \int_0^1 \frac{y^3}{3} + y^2\, dy \\
&= \frac{6}{5}[\frac{1}{12} + \frac{1}{3}] = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

8 分

3 ) $f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 k(x^2 + y)\, dy = \frac{6}{5}x^2 + \frac{3}{5}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 k(x^2 + y)\, dx = \frac{6}{5}y + \frac{2}{5}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

由 $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$，故 $X, Y$ 不相互独立.

5. ( 10 分 )

**解：**

$H_0: \mu = \mu_0 = 2500$，　$H_1: \mu \neq \mu_0$ 2 分

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.233,$$

6 分

拒绝域为 $(-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$， 8 分

不在拒绝域中，接收 $H_0$，可以认为这批产品的平均寿命为 2500 小时. 10 分

6. ( 12 分 )

**解：**

1 ) 矩估计：$\mathrm{E}X = \int_\theta^\infty x\, 2e^{-2(x-\theta)}\, dx = \int_0^\infty (x+\theta)\, 2e^{-2x}\, dx = \theta + \frac{1}{2}$，故 $\theta = \mathrm{E}X - \frac{1}{2}$，从而矩估计 $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{1}{2}$； 4 分

又 $\mathrm{E}\hat{\theta} = \mathrm{E}(\bar{X} - \frac{1}{2}) = \theta$，故 $\hat{\theta}$ 是无偏估计. 6 分

2 ) 极大似然估计：

$$L(\theta) = \begin{cases} \Pi_{i=1}^n 2e^{-2(x_i-\theta)}, & x_i \geq \theta, i = 1, 2, \cdots, n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2^n e^{2n\theta} e^{-2\sum_{i=1}^n x_i}, & \theta \leq \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

似然函数的最大值在边界 $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 达到，故极大似然估计量为

$$\tilde{\theta} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

12 分