浙 江 工 业 大 学
32 学 时 线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2020 ～ 2021 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：____________________选课班中编号：_____

学号：____________________ 姓名：________________ 得分：__________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数是 $\underline{\quad -3 \quad}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{*}\right|=\underline{\quad -8/3 \quad}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\in R^3$, 且 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 0 & 4 \\ y & z & 6 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\underline{\quad 9 \quad}$ ， $\left|\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\right|=\underline{\ 0\ }$.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. 由向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间的维数为 $\underline{\quad 2 \quad}$.

6. 写出与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交的所有向量：$\underline{k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

7. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}\in R^3$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， 矩阵

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解集为 $\underline{k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

8. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&-4\\1&1&x\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 的 3 个特征值为 λ, 2, 2，则 λ= __1__， x= __−2__.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BC}=2\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})^2\boldsymbol{B}=$ (A).

(A) $\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{C}$ (C) $2\boldsymbol{A}$ (D) $2\boldsymbol{C}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&4\\3&2&4\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(B).

(A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EAF}$ (B) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{FAE}$ (C) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EFA}$ (D) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AFE}$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，则(D) .

(A) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，但 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$ (B) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，但 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

(C) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$ (D) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

4. 设 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况为 (C)

(A) 必有无穷多解 (B) 必有唯一解

(C) 不一定有解 (D) 以上都不对

5. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{U}$，则以下命题错误的是 (B).

(A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 等价 (B) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的行列式相同

(C) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{0}$ 同解 (D) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的秩相同

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&5\\3&4&5&5&5\\4&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\end{vmatrix}$.

$$D_5\xlongequal[r_3-r_5,\ r_4-r_5]{r_1-r_5,\ r_2-r_5}\begin{vmatrix}-4&-3&-2&-1&0\\-3&-2&-1&0&0\\-2&-1&0&0&0\\-1&0&0&0&0\\5&5&5&5&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第5列展开}}5\times(-1)^4=5$$

2. 设 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-1\\-4&-3&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$,计算矩阵 $\boldsymbol{X}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{B}$$

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&-1\\-4&-3&0\end{vmatrix}=2\neq0$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&-3&-2\\4&4&2\\-2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}2\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&-3&-2\\4&4&2\\-2&-4&-2\end{pmatrix}2\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\-1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-9&-10\\10&10&12\\-8&-6&-10\end{pmatrix}$$

3. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\\9\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-7\\18\\2\\-8\end{pmatrix}$，选取其中若干向量构成空间$V=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$的一组基，并求其余向量在这组基下的坐标.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&4&0&-7\\0&1&-1&4&11\\0&11&-11&2&37\\0&4&-4&-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&4&0&-7\\0&1&-1&4&11\\0&0&0&-42&-84\\0&0&0&-19&-38\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&4&0&-7\\0&1&-1&4&11\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$是所求的一个极大无关组，

且有$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_4$

4. 试问当a取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}3ax_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a\\(4a-1)x_1+3ax_2+2ax_3=1\\(2a-1)x_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a+1\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在其有无穷多解时求出所有解.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3a&2a+1&a+1\\4a-1&3a&2a\\2a-1&2a+1&a+1\end{vmatrix}=-a(a+1)(a-1),$$

当$a\neq0$, $a\neq\pm1$时，原方程组有唯一解.

当$a=0,\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

原方程组有无穷多组解， $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $a=1,\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\3&3&2&1\\1&3&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1/2\\0&1&2/3&5/6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

原方程组有无穷多组解， $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/2\\5/6\\0\end{pmatrix}$

当 $a=-1,\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-3&-1&0&-1\\-5&-3&-2&1\\-3&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&0&1\\-5&-3&-2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$R(\boldsymbol{A})=2,R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$

原方程组无解.

5.　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)=0$, 得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$

当 $\lambda_1=1$ 时 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};(k_1\neq0)$

当 $\lambda_2=2$ 时 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};(k_2\neq0)$

当 $\lambda_3=4$ 时 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=k_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};(k_3\neq0)$

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. （6 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：当实数 $k\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明：由已知，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&k\\k&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&&k\\k&1&\\&k&1\end{vmatrix}=1+k^3\neq 0,$$

故 $rank(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=rank(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也为对称阵.

证明：由已知，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}+\boldsymbol{E}$，

故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\left((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\left((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right)^{-1}+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}$.