浙江工业大学

32 学时线性代数期末试卷

(2021 ～ 2022 学年第二学期)

院系__________班级__________任课教师________考试时间__________

学号________________姓名__________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. | 得分 | | **填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)**

1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -1$, 则$D_1 = \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & b_3 \\ -2c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} = \underline{4}$.

2. 设n 维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 4, 则向量组$\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3+\alpha_4$ 的秩为$\underline{3}$.

3. 设A 为三阶方阵, A^* 为A 的伴随矩阵, 且$|A| = \frac{1}{2}$, 则$|-3A^*| = \underline{-\frac{27}{4}}$.

4. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B, 则 $R(A-2E) + R(A-E) = \underline{4}$.

5. 设 $A = (1, 2, 3), B = (1, 1, 1)$, 则 $(A^T B)^2 = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}}$.

6. 向量 $\beta = (1, -1, 3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1 = (1, 0, 2)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$, $\alpha_3 = (1, 2, 0)$ 下的坐标为 $\underline{\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^T}$.

7. 与向量 $(1, 2, 2), (-1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ 都垂直的单位向量为 $\underline{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$.

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 的特征多项式相同, 则 $x = \underline{0}$.

9. 已知$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1, 2, 3, 则 $x + y = \underline{3}$.

10. 若二次型$f(x_1, x_2, x_3) = k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的, 则 k 的取值范围是 $\underline{k > \sqrt{2}}$.

二. | 得分 | | 单项选择题 (每小题 2 分, 共 10分)

1. 设 A 是 2×3 矩阵, B 是 3×2 矩阵, 则下列正确的是(D)

(A) $|AB|=0.$　　(B) AB 与 BA 的秩相等

(C) $|AB|=|BA|$　　(D) $|BA|=0$

2. 非齐次线性方程组$AX=b$ 中末知数个数为n, 方程个数为m, 系数矩阵A 的秩为r, 则(A).

(A) $r=m$ 时, 方程组 $AX=b$ 有解　　(B) $r=n$ 时, 方程组 $AX=b$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时, 方程组 $AX=b$ 有唯一解　　(D) $r<n$ 时, 方程组 $AX=b$ 有无穷多解

3. n 阶方阵A 与对角矩阵相似的充要条件是(C)

(A) 方阵 A 有 n 个特征值　　(B) 方阵 A 的特征方程没有重根

(C) 方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量　　(D) $A\neq 0.$

4. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为s, 则 (C).

(A) $r=s$　　(B) $r\leq s$

(C) $s\leq r$　　(D) $s<r$

5. 设A,B 为 n 阶方阵, 则下列说法正确的是(B).

(A) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　(B) $AB=0$, 则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

(C) $(AB)^T=A^TB^T$　　(D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

三. | 得分 | | 计算题(每小题10 分, 共50 分)

1. 设3阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+16\alpha_3)$, 已知 $|A|=1$, 求 $|B|$.

解：因为$B=A\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{pmatrix}$ −−−−−−−−−−−−(5 分)

所以$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(4-3)=2.$ −−−−−−−−−−(10 分)

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程: $AX=X+C$.

解：$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-------------------$(5 分)

由 $AX=X+C$ 得

$X=(A-E)^{-1}C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. $-------------$(10 分)

3. 求一个非齐次线性方程组，使得其通解为

$$X=(1,-1,3)^T+k_1(-1,3,2)^T+k_2(2,1,1)^T,$$

其中k_1,k_2为任意常数.

解：令 $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 解方程组 $BX=\theta$ 得基础解系 $\alpha=(1,5,-7)^T$. $--$(6 分)

令 $A=\alpha^T=(1,5,-7)$ 及 $b=A(1,-1,3)^T=-25$. 则非齐次线性方程组$AX=b$的通解为

$$X=(1,-1,3)^T+k_1(-1,3,2)^T+k_2(2,1,1)^T,$$

其中k_1,k_2为任意常数. $-------------------$(10 分)

4. 用正交线性替换将 $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+x_2^2+7x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$化为标准形.

解: 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&-4&-2\\-4&1&-4\\-2&-4&7\end{pmatrix}$, 其特征多项式

$|A-\lambda E|=-\lambda^3+15\lambda^2-27\lambda-243=-(\lambda+3)(\lambda-9)^2.$

可得A 的特征值为$\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=9.$ −−−−−−−−−−−−−−−−(2 分)

解线性方程组 $(A+3E)X=0$ 得属于特征值 -3 的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, 单位化

得$p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−(4 分)

解线性方程组 $(A-9E)X=0$ 得属于特征值9 的线性无关的特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=$

$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 正交化单位化得$p_2=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{30}}{30}\\-\frac{\sqrt{30}}{15}\\\frac{\sqrt{30}}{6}\end{pmatrix}$. −−(8 分)

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$, 则 P 是正交矩阵, 且正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{30}}{30}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{30}}{15}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&0&\frac{\sqrt{30}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

即为所求，将原二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=-3y_1^2+9y_2^2+9y_3^2$. −−−−−(10 分)

5. λ 取何值时, 非齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$

(1) 有唯一解; (2)无解; (3) 有无穷多解.

解:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−(4 分)

(1) 要使方程组有唯一解, 必须$R(A)=3$. 因此当$\lambda\neq 1$ 且$\lambda\neq -2$ 时方程组有唯一解.
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−(6 分)

(2) 要使方程组无解, 必须$R(A)<R(\bar{A})$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0, (1-\lambda)(\lambda+1)^2\neq 0.$$

因此$\lambda=-2$ 时, 方程组无解. −−−−−−−−−−−−−−−−−−−(8 分)

(3) 要使方程组有无穷多个解, 必须$R(A)=R(\bar{A})<3$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0, (1-\lambda)(\lambda+1)^2=0.$$

因此当$\lambda=1$ 时, 方程组有无穷多个解. −−−−−−−−−−−−−−−−−−−(10 分)

四. (10 分) | 得分 | | **证明题(每小题5 分, 共10 分)**

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为r, 在其中任取m 个向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$, 证明: $\mathrm{r}(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m})\geq r+m-s$.

证明: 因为向量组少一个向量，其秩至多减少一。又向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$是由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$去掉$s-m$个向量得到的，因此

$$r\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}\}\geq r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}-(s-m)=r+m-s.$$

. −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−(5 分)

2. 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 若 $|A| = 1, |B| = -1$, 证明: $|A + B| = 0$.

证明: 令 $P = A^{-1}B$, 则 P 是正交矩阵且 $|P| = -1$. 所以

$$|E + P| = |PP^T + P| = |P| \cdot |P^T + E| = -|(P + E)^T| = -|P + E|.$$

从而 $|E + P| = 0$. ------------------------------(3 分)

因此 $|A + B| = |A(E + A^{-1}B)| = |A| \cdot |E + P| = 0$. --------------(5 分)