浙江工业大学

线性代数期末试卷

（2015-2016 学年第二学期）

任课老师 ____________学院班级 ______________选课班中编号__________

学号_________________姓名 ____________________得分____________

题号	一	二	三	四

一、填空题（每题 3 分，共 27 分）

本题得分	

1\. 计算矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$的行列式值 $\underline{\quad 2310 \quad}$

2.设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则$A^{10}=$ $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}}$

3.当$c=\underline{\quad -6 \quad}$时，线性方程组$\begin{cases} x-y-3z=3 \\ 2x+z=0 \\ 2y+7z=c \end{cases}$有解

4.在四阶行列式$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$中，代数余子式$A_{34}=\underline{\quad 13 \quad}$

5.如$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{bmatrix}$且$A^2=O$,则$c=\underline{\quad -3 \quad}$,$d=\underline{\quad -1 \quad}$

6.计算行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\underline{\quad 0 \quad}$

7.计算$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=$ ___ $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ___

8. $Ax=0$ 的基础解系是 3 维向量 ξ_1,ξ_2，则其通解为 ___ $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ ___

9.已知向量$\left(2\quad 2\quad \alpha-2\right)^T$与$\left(2\quad \alpha-2\quad 2\right)^T$的夹角是$\dfrac{\pi}{3}$，则$\alpha=$ __2 或 10__

二、选择题（每题 3 分，共 27 分）

本题得分	

1. λ 是 n 阶方阵 A 的特征值，p 为对应的一个特征向量，则以下结论正确的是_A_

（A）p 也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 λ^{-1} 的特征向量；

（B）p 也是矩阵 A^T 的属于特征值 λ 的特征向量；

（C）$(A-\lambda E)x=0$ 的所有解都是 A 的特征向量；

（D）$(A-\lambda E)x=0$ 的所有解都可以表示为 kp；

2.设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，且 A 的行列式为 0，则 A 的秩为 __C__
（A）0　（B）1　（C） 2　（D） 3

3. n 阶方阵 A 非奇异，则__B__
（A） A 可能有零特征值；
（B） A 可以只通过初等行变换变成标准型；
（C） $Ax=b$ 不一定有解；
（D） A^* 没有 0 元素

4.有关齐次线性方程组 $Ax=0$ 的描述正确的是_D_
(A)当 $Ax=b$ 有唯一解时， $Ax=0$ 不一定只有唯一解；
（B）当 $Ax=b$ 无解时， $Ax=0$ 不可能有无穷多解；
（C）当 $Ax=0$ 有不止一个解时， $Ax=b$ 至少有一个解；
（D）当 $Ax=b$ 至少有两个不相同的解时， $Ax=0$ 必有非 0 解

5.设 n 阶非奇异方阵 A，则 __D__

（A）$(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　（B）$(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

（C）$(A^*)^*=|A|^{n+2}A$　　（D）$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

6.以下展开式错误的是（E 是单位阵，A、B 是方阵）__C__

（A）$(E+A)^2=E+2A+A^2$　　（B）$(A+A^*)^2=A^2+2AA^*+A^{*2}$

（C）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (D) $(A^k + A^l)^2 = A^{2k} + 2A^{k+l} + A^{2l}$

7.有关极大线性无关组的描述，错误的是___C___

（A）一个向量组中每一个向量都能被该向量组的一个部分向量组所唯一地表示，则该部分组必为极大线性无关组；

（B）一个向量组中的一个部分组之内的向量线性无关，且该部分组与母组等价，则该部分组必为极大线性无关组；

（C）一个向量组中只有唯一的一组极大线性无关组，则该极大线性无关组必为向量组本身；

（D）两组等价的向量组，如果互为线性表示的系数唯一，则它们分别是线性无关的，且所含的向量个数相同

8.设n阶方阵既是实对称阵又是正交阵，则_B__

（A）$A=E$ （B）$A^2=E$ （C）A相似于E （D）以上都不对

9.设方阵A与B相似，相似变换矩阵为P，α是A的属于特征值λ的特征向量，则以下B的属于λ的特征向量的是_C__

（A）α （B）$P\alpha$ （C）$P^{-1}\alpha$ （D）$P^T\alpha$

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

本题得分	

1. 求向量组$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\0\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$张成的子空间的基和维数，并求该向量组中剩余向量为基所线性表示的系数。

简答：

$$\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}(4\text{ 分})$$

ξ_1、ξ_2、ξ_4是一组基，维数 3；（2 分）

$\xi_3=-\xi_1+\xi_2$（2 分）

2. 计算$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的逆阵，其中$a_1a_2a_3a_4a_5 \neq 0$

简答：

$$E(2,1)E(3,2)E(4,3)E(5,4)\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_5 & & & & \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & a_3 & \\ & & & & a_4 \end{bmatrix}$$ （4 分）

得到

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$ （4 分）

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$,求（1） A 的特征多项式 $f(t)$；（2）并证明 $f(A)=0$ ；

（3）一般情况下，对任意方阵 A 是否成立 $f(A)=0$？

简答：

A 的特征多项式为 $f(t)=t^2-5t+3$（3 分）；

代入得到 $f(A)=0$（3 分）；

对于任意方阵 A 的特征多项式 $f(A)$，始终有 $f(A)=0$ 成立。（2 分）

4.设线性方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=-\lambda\end{cases}$问取什么值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并如有无穷多解时，请求出该方程组的通解。

简答：

$$\begin{bmatrix}1\text{-}\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1\text{-}\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\text{-}\lambda & \text{-}\lambda\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 3\\ 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda-3\\ 0 & 0 & \lambda(3-\lambda) & (\lambda+1)(3-\lambda)\end{bmatrix}$$（2 分）

$\lambda=3$有无穷多解；（1 分）

通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$(3 分)

$\lambda=0$无解（1 分）

$\lambda\neq 0,3$有唯一解。（1 分）

5.设矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$，求（1）矩阵$A$的特征值和特征向量；（2）矩阵$A$是否可以相似对角化？若可以，求出相似变换矩阵$P$以及相似对角阵$P^{-1}AP$；若不可以，说明理由。

简答：

$f(\lambda)=-(\lambda-2)^2(\lambda-1)$（2 分）

$\lambda=2$对应的特征向量$k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$(2 分)

$\lambda=1$对应的特征向量$k\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$（2 分）

不可以相似对角化，没有 3 个线性无关的特征向量（2 分）

四、证明题（每题 3 分，共 6 分）

本题得分	

1. 如方阵 A 满足 $A^k = O$，试证 $E + A$ 可逆（E 是单位矩阵），且

$(E + A)^{-1} = E - A + A^2 - ...... + (-1)^{k-1} A^{k-1}$.

简答：

$$
\begin{aligned}
&(E + A)\ (E - A + A^2 - ...... + (-1)^{k-1} A^{k-1}) \\
&= E - A + A^2 - ...... + (-1)^{k-1} A^{k-1} \\
&\quad + A - A^2 - ...... + (-1)^{k-2} A^{k-1} + (-1)^{k-1} A^k \\
&= E
\end{aligned}
$$

（3 分）

2. $H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$，证明 $\frac{1}{2}H$ 是正交阵。

简答

$\frac{1}{2}H \cdot \frac{1}{2}H^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix} = E$（3 分）