

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

大学 高等数学 A-1 试题卷（闭）

2019 --2020 学年第一学期 使用班级 _____

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(1) - f(1-x)} = -3$ ，则 $f'(1) =$ () .

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 6 (D) $-\frac{1}{6}$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^3) dt$ 与 $g(x) = x^3 + x^4$ 相比是 () .

- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 同阶无穷小，但不是等价无穷小

3. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导且 $g'(x) \neq 0$ ，在使用洛必达法则求未定式极限时，

下列结论不正确的是 () .

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 必存在

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 必不存在

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (有限数)，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

4. 曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^{-x}}$ () .

- (A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线

5. 下列反常积分收敛的是 () .

- (A) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ (C) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分	
评阅人	

1. 设曲线 $y = y(x)$ 是由方程 $\sin y + xe^y = 0$ 所确定，则该曲线在 $(0,0)$ 处的切线方程是 _____.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-ax}-1}{x}, & x < 0 \\ -2, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1+bx}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, 则 $f^{(2020)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [(e^x + e^{-x}) \sin x + \tan^2 x] dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\frac{1}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的原函数是 _____.

三、解答下列各题（本大题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

得分	
评阅人	

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}) \cos x}{5^x - 3^x}$.

2. 设 $\begin{cases} x = \int_2^{t^2} \frac{\cos u}{u} du \\ y = \int_{t^3}^2 \frac{\sin u}{u} du \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 求不定积分 $\int \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

4. 求定积分 $\int_0^{2\pi} x \sqrt{1+\cos x} dx$.

四、解答下列各题（本大题共 3 小题，每题 7 分，共 21 分）

得分	
评阅人	

1. 设 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加，且 $f(0) = 0$ ，证明： $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 也单调增加.

诚信考试，公平竞争；以实力争取过硬成绩，以诚信展现良好学风。

以下三种行为是严重作弊行为，学校将从严处理：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 组织作弊。

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \int_{-\infty}^a te^{2t} dt$ ，求常数 a 。

3. 求曲线 $y = 2x - x^2$ 及直线 $y = x$ 和 x 轴所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

五、综合题（本大题共 2 小题，第 1 题 8 分，第 2 题 6 分，共 14 分）

1. 求 A 的取值范围，使方程 $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + A = 0$ 恰有四个相异的实根。

得分	
评阅人	

2. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \cos nx dx, n \in \mathbb{N}_+$ 。

六、证明题（本题 7 分）

（1）（4 分）证明费马引理：设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取到极值，

则 $f'(x_0) = 0$ ；

得分	
评阅人	

（2）（3 分）请利用费马引理证明推广的罗尔中值定理：设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ，则至少存在一点 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。