______________大学　高等数学 A-1　试题卷

五 校 联 考 试 卷 （ 二 ） 评 分 细 则

2019 --2020 学年第一学期　使用班级 ________________

一、　选择题：DCABD

二、　填空题

1. $\dfrac{1}{4}$　2. $a=-\dfrac{4}{3}$　3. -2^{2020}　4. $\dfrac{3}{8}(\sqrt[3]{81}-1)$　5. $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

三、1. 解 $f'(x)=2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)$【2 分】

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)-0}{x-a}$$【 3 分 】

$$=\lim_{x\to a}[2\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]=\lim_{x\to a}2\varphi(x)=2\varphi(a).$$【2 分】

2. 解 $\dfrac{dy}{dx}=-2t$【3 分】，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{f''(2t)}$【4 分】

3. 解 $\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$【3 分】

$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$【3 分】

$\therefore\int\cos(\ln x)dx=\dfrac{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)}{2}+C$.【1 分】

4. 解 令 $u=\sqrt{1-e^{-2x}}$，则 $x=-\dfrac{1}{2}ln(1-u^2)$，$dx=\dfrac{u}{1-u^2}du$

原式= $\int_0^{\sqrt{3}/2}u\dfrac{u}{1-u^2}du$【3 分】= $\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2}(\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1+u})du-\int_0^{\sqrt{3}/2}du$

= $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\sqrt{3}/2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$【3 分】$=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.【1 分】

四、1. 方程两边求导：$e^{y^2}\cdot y'=(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$，$W=\{0,1\}$.　【3 分】

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—		—		+
y	$\searrow$	非极值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$

由上表，$x=1$ 极小值点.【4 分】

2. 解 由题设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow f(1)=3$ 【1 分】， $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$ 【2 分】

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1-\frac{4}{n})}{f(1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}{f(1)}\right)^{\frac{f(1)}{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}\cdot\frac{f(1-\frac{4}{n})-f(1)}{\frac{f(1)}{n}}}=e^{-\frac{4f'(1)}{f(1)}}=e^{-\frac{8}{3}}$ 【4 分】

3. 解（1）切点 (x_0,y_0) 应满足 $\begin{cases} a\sqrt{x_0}=ln\sqrt{x_0} \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0} \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} x_0=e^2, y_0=1 \\ a=\dfrac{1}{e} \end{cases}$.【2 分】

（2）$V=\int_0^{e^2}\pi(\frac{1}{e}\sqrt{x})^2dx-\int_1^{e^2}\pi(\frac{1}{2}\ln x)^2dx$ 【2 分】 $=\frac{\pi}{e^2}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{e^2}-\frac{\pi}{4}(x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln xdx)$

$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{4}[4e^2-2(x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx)]=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{4}[4e^2-4e^2+2e^2-2]=\frac{\pi}{2}$ 【3 分】.

五、1. $y=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt=\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{1}(t-x)f(t)dt$

$=x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}tf(t)dt+\int_{x}^{1}tf(t)dt-x\int_{x}^{1}f(t)dt$ ，【2 分】

则 $y'=\int_{-1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{1}f(t)dt+xf(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{1}f(t)dt$ ，【3 分】， $y''=f(x)+f(x)=2f(x)>0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上凹函数.【2 分】

2. 解 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ ，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)d(-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$.【3 分】

因为 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ ，

所以 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.因此 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$.【4 分】

六、证明：设 $|f(x_0)|=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ ，

（i）如果 $x_0\in(0,1)$ ，由 $|f(x_0)|=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi_1)x_0|\le|f(\xi_1)x_0|\le|f(x_0)|x_0$ ，知 $|f(x_0)|=0$ ，因此 $f(x)=0$ ， $x\in[0,1)$.【4 分】

（ii）若 $x_0=1$ ，则由 $|f(1)|=|f(1)-f(0)|=|f'(\xi_2)|\le|f(\xi_2)|\le|f(1)|, 0<\xi_2<1$ ，可得 $|f(1)|=|f(\xi_2)|$ ，可见 $|f(\xi_2)|$ 也是最大值，由（1）得证明【3 分】.