

浙江工业大学

32 学时线性代数期末试卷

(2021 ~ 2022 第一学期)

任课教师 _____ 学院班级: _____ 选课班中编号: _____

学号: _____ 姓名: _____ 得分: _____

题号	一	二	三	四
得分				

一. 填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分	
------	--

1. 设 $A = (\alpha_1, \beta)_{2 \times 2}$, $B = (\alpha_2, \beta)_{2 \times 2}$, 已知 $|A| = 2$, $|B| = 1$ 则 $|A + B| =$ _____.

2. 设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, 则 $x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$ _____.

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, A 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} , A 的伴随矩阵为 A^* ,

则 $A_{11} + A_{12} + A_{13} =$ _____, $(A^*)^{-1} =$ _____.

4. 将 3 阶矩阵 A 的第 1 行与第 2 行互换得矩阵 B , 再将 B 的第 3 行加到第 2

行得矩阵 C , 满足 $PA = C$ 的可逆矩阵 $P =$ _____.

5. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $k =$ _____.

6. 向量空间 $\{(x, y, z) | x - 2z = 0\}$ 的维数是 _____, 一组基为 _____.

7. 实向量空间 \mathbf{R}^2 中的向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标为_____.

8. 若 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 $P = (\alpha, \beta)$, 令 $Q = (2\alpha, -\beta)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ _____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	
------	--

- 已知 A, B 均为 n 阶矩阵, 则以下命题中正确的是 ().
 (A) 若 $AB=O$, 则 $A=O$ 或 $B=O$ (B) 若 $A^2=B^2$, 则 $A=B$ 或 $A=-B$
 (C) 若 $AB=O$, 则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$ (D) 若 $(A+B)(A-B)=O$, 则 $A^2=B^2$
- 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k , 则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为().
 (A) k (B) $n-k$ (C) $\frac{n(n-1)}{2}-k$ (D) $k-\frac{n(n-1)}{2}$
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则().
 (A) 必有某个向量为零向量
 (B) 必有 2 个向量成比例
 (C) 任意向量可由其余向量线性表示
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 一定线性相关
- 设非齐次线性方程组 $A_{m \times n}X = \beta$ 有解, 则以下不可能的是().
 (A) $R(A)=n$ (B) $R(A)<n$ (C) $R(A)=m$ (D) $R(A, \beta)>m$
- 设 λ_1, λ_2 是 A 的 2 个不同特征值, α_1, α_2 是 A 对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 ().
 (A) $\lambda_1 = 0$ (B) $\lambda_1 \neq 0$ (C) $\lambda_2 = 0$ (D) $\lambda_2 \neq 0$

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, 求 $|\mathbf{A}|$.

2. 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 \mathbf{X} 满足 $\mathbf{XA} = \mathbf{A} + 2\mathbf{X}$, 求 \mathbf{X} .

3. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的秩、极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

4. 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 3 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$
 问：

- (1). 当参数 k 满足什么条件时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？
- (2). 有无穷多解时，求方程组的通解.

5. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 方阵 A 满足 $A\alpha_1 = \alpha_1$, $A\alpha_2 = \alpha_2$,

$$A\alpha_3 = -\alpha_3.$$

(1) 求矩阵 A ; (2) 求 $|(2E + A)^{100}|$.

四、证明题（共 10 分）

1	2	本题总得分

1. （6 分）设 A 是 n 阶方阵，若对任意 n 维列向量 α ，皆满足 $A\alpha = 0$ ，证明： $A = O$ 。

2. （4 分）设 n 阶方阵 A, B 满足 $ABA=A$ ，证明： AB 的特征值为 1 或 0。