

浙江工业大学

线性代数期末试卷

(2018~2019 第二学期)

任课教师: _____ 学院班级: _____ 选课班中编号: _____

学号: _____ 姓名: _____ 得分: _____

题号	一	二	三	四
得分				

一. 填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分

1. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, 则其第一行元素的余子式之和 $M_{11} + M_{12} +$

$M_{13} + M_{14} = \underline{0}$.

2. 设 $\alpha = (1, -1, 2)^T$, $\beta = (-2, 1, 1)^T$, 则 $(\alpha\beta^T)^{2019} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $|(A^*)^{-1}| = \underline{1/4}$.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_3 = 2\alpha_3 - \alpha_1$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性 相 关.

5. 已知 4×3 矩阵 A 的秩为 2, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系所包含向量个数为 1, 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有 3 个解向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 其中 $\xi_1 +$

$\xi_2 = (2, 4, 6)^T$, $\xi_2 + \xi_3 = (1, 3, 5)^T$, $Ax = b$ 的通解为 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

其中, $t \in \mathbb{R}$.

6. 设向量 $\alpha = (1, 1, 1, -4)^T$ 和 $\beta = (-2, 1, 3, 2)^T$, 则 $\langle \alpha, \beta \rangle = \underline{-6}$.
7. 设 3 阶方阵 A 与 B 相似, 并且 $A - E, A + 2E, A - 3E$ 均不可逆, 则 $|A| = \underline{-6}$, $|B - 2E| = \underline{4}$.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	
------	--

1. 已知矩阵 $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 均为 4 维列向量, 且 $|A| = 4$, $|B| = -2$, 则 $|A + B| = (\text{D})$.
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16
2. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $AB = O$, 且 $B \neq O$, 则必有(A).
- (A) $|A^*| = 0$ (B) $|B| \neq 0$
- (C) $|A| \neq 0$ (D) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
3. n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分条件是(D).
- (A) A^2 与 B^2 相似 (B) A 与 B 有相同的特征值
- (B) A 与 B 有相同的特征向量 (D) A 与 B 和同一个对角阵相似
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 则 $a = (\text{B})$.
- (A) 1 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) -1
5. 设 A 为 3 阶矩阵, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
- 则 $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\text{B})$.
- (A) $\alpha_1 + \alpha_2$ (B) $\alpha_2 + 2\alpha_3$ (C) $\alpha_2 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2$

三、计算题（每题 10 分，共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解. 法一: $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{40} \end{vmatrix} = 121$

3 分 6 分 9 分 10 分

法二: $D = 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$= 160 - 39 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$= 121 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

2. 已知 3 阶方阵 A 和 B 满足 $AB = -3B + 2A$, 且 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B .

解. 因为 $AB = -3B + 2A$,

所以 $B = 2(A + 3E)^{-1}A. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

法一: 由计算可得 $(A + 3E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots 8 \text{ 分}$

因此 $B = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

法二: $(A + 3E | 2A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$

$\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

因此 $B = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

3. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, 求

$\text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的维数和一组基, 并求剩余向量在这组基下的坐标.

解. 因为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 7 分

所以 $\text{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的维数为 3, 它的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 9 分

α_4 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(-2, 3, 0)$ 10 分

4. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$,

问 λ 取什么值时, 上述方程组 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多

解? 并在有无穷多解时, 求出该方程组的通解.

解. 因为 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ 3 分

所以 (1) 当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 方程组有唯一解. 4 分

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$,

方程组无解. 6 分

(3) 当 $\lambda = -2$ 时, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$,

..... 8 分

方程组有无穷多解 $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$ 10 分

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明 $a = 3$.

(2) 求出矩阵 A 的特征值和特征向量, 并讨论矩阵 A 是否可以相似对角化.

若可以, 求出相似变换矩阵 P , 以及相似对角阵 $\Lambda = P^{-1}AP$; 若不可以, 说明理由.

解. (1) 设 $Ap = \lambda p$, 由条件可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } \begin{cases} 4 - a = \lambda \\ 1 - 2 = -\lambda \end{cases}$$

解得 $\lambda = 1, a = 3$. 得证.2 分

$$(2) f(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$4 分

$$\text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 时, } A - E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } (A - E)X = 0 \text{ 的一个基础解系为 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $k_1 p_1 + k_2 p_2$, 其中 k_1, k_2 不同时为零.

.....6 分

$$\text{当 } \lambda_3 = 5 \text{ 时, } A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } (A - 5E)X = 0 \text{ 的一个基础解系为 } p_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $k_3 p_3$, 其中 k_3 不为零 7 分

$$\text{可对角化, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{10 分}$$

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1	2	本题总得分

1. 已知 n 阶方阵 A 满足 $2A^2 + A - E = O$ ，证明 $A + 2E$ 可逆，并求其逆矩阵.

证明. 由条件可得 $2A^2 + A - E = (A + 2E)(2A - 3E) + 5E = O$,

$$\text{即 } (A + 2E) \frac{(2A - 3E)}{-5} = E.$$

因此 $A + 2E$ 可逆, 且 $(A + 2E)^{-1} = \frac{(2A - 3E)}{-5}$5 分

2. 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ ，证明： A 的秩 $R(A) = 2$

证明. 因为 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 与由 3 个特征值构成的对角矩阵 Λ 相似，且至多只有一个零特征值，则有 $R(A) = R(\Lambda) \geq 2$.

又因为 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ ，所以 3 阶矩阵 A 关于列向量线性相关，所以 $R(A) < 3$.

因此 $R(A) = 2$5 分