

16/17 浙江工业大学高等数学 AII 考试试卷

学院：_____ 班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

任课教师（请务必填上）：

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 3 分）

1、动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等，则动点 $M(x, y, z)$ 的轨迹方程是_____。 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4z - 4$

2、设向量 $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (n, 2, m)$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 n, m 应满足条件 $n + m = 0$

3、已知 $z = \sqrt{xy} + \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^2}$

4、曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程是_____。 $x + 2y - 4 = 0$

5、交换积分次序 $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy =$ _____。 $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$

6、设 L 为 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, 则 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____。 $2\pi a^3$

7、将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，则该幂级数收敛区间是_____。 $(0, 6)$

8、若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则下列结论错误的是_____C_____。

A、 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续； B、 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在；

C、 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续；

D、曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处有切平面。

9、设 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧，则下列等式正确的是_____C_____。

A、 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} R^2 dv = \frac{4\pi}{3} R^5$;

B、 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dxdy = \iint_{\Sigma} R^2 dxdy = \pi R^4$;

C、 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} R^2 dS = 4\pi R^4$; D、 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = 0$ 。

10、下列级数中绝对收敛的级数是_____D_____。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$; B、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$; C、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; D、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 。

二、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 6 分）：

- 1、已知 $z = x^y$, ($x > 0, x \neq 1$), 求: dz

$$dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy \quad 6 \text{ 分}$$

- 2、设 $z = f(xy, e^{xy})$, 其中 $f(u, v)$ 一阶偏导数连续, 求: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + ye^{xy}f'_2 \quad 3 \text{ 分} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + xe^{xy}f'_2 \quad 6 \text{ 分}$$

- 3、证明螺旋线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ 是等距螺线（即曲线上任一点的切线与 z 轴夹角是常数）。

$$\text{曲线任一点处的切向量 } T = (-\sin t, \cos t, 1) \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{该向量与 } z \text{ 轴夹角余弦 } \cos \theta = \frac{T \cdot k}{|T|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 从而得夹角是常数}$$

$$\text{即螺旋线是等距螺线} \quad 6 \text{ 分}$$

- 4、求一过点 $M(2, 1, \frac{1}{3})$ 的平面, 使该平面在第一卦限与三个坐标面围成的体积最小。

$$\text{设平面方程为 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{则体积 } V = \frac{1}{6}abc \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{由平面过点 } M(2, 1, \frac{1}{3}) \text{ 得条件 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} = 1$$

$$L(a, b, c) = \frac{1}{6}abc + \lambda(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1) \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a = 6, b = 3, c = 1 \quad \text{平面方程为 } \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1 \quad 6 \text{ 分}$$

三、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 6 分）：

- 1、设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 求 $\iint_D (x^3 y + x^2 + y^2) dx dy$

$$\iint_D (x^3 y + x^2 + y^2) dx dy = \iint_D x^3 y dx dy + \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \quad 6 \text{ 分}$$

2、求 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ ， Ω ：由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 所围成。

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_{\rho}^2 z dz \quad 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{64}{15}\pi \quad 6 \text{ 分}$$

3、求 $\int_L (x^2-y)dx - (x+\sin^2 y)dy$ ，其中 L 沿 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{积分与路径无关} \quad 2 \text{ 分}$$

$$\int_L (x^2-y)dx - (x+\sin^2 y)dy = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1+\sin^2 y)dy \quad 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2 - \frac{7}{6} \quad 6 \text{ 分}$$

4、求 $\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz$ ，期中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $0 \leq z \leq 1$ 之间部分的下侧。

补上平面 $\Sigma_1: z=1$ ，由高斯公式有

$$\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz = \iiint_{\Omega} dxdydz - \iint_{\Sigma_1} (z^2+x)dydz \quad 3 \text{ 分}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = \frac{\pi}{2} \quad 6 \text{ 分}$$

四、(8分) 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

过点 $(2,1,3)$ 且与所给直线 L 垂直相交的平面方程是 $3x+2y-z=5$ 3分

该平面与直线 L 的交点 $(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$ 6分

所求直线方程是 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ 8分

五、（9分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域（含端点）及和函数。

收敛半径 $R=1$ 端点 $x=\pm 1$ 级数不收敛，故收敛域为 $(-1, 1)$ 3分

记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 则 $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ 6分

从而 $S(x) = \int_0^x S'(x)dx + S(0) = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ 9分

六、（5分）讨论偏导数存在与方向导数存在之间的关系（证明或举例）。

方向导数存在未必偏导数存在，讨论见 P104

偏导数存在只能得到沿坐标轴方向的方向导数存在，而沿其它方向的方向导数不一

定存在，如 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处。

此题可综合考虑酌情给分。