浙 江 工 业 大 学
32 学 时 线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2020 ～ 2021 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：___________________选课班中编号：_____

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数是_______.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^*|=$_______.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\in R^3$，且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 0 & 4 \\ y & z & 6 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$____________，

$|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=$____.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=$______________.

5. 由向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间的维数为______.

6. 写出与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交的所有向量：________.

7. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}\in R^3$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解集为____________.

8. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ 1 & 1 & x\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 的 3 个特征值为 λ, 2, 2，则 λ=____， x=____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BC}=2\boldsymbol{E}$，则 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\right)^2\boldsymbol{B}=$ (　　).

(A) $\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{C}$　　(C) $2\boldsymbol{A}$　　(D) $2\boldsymbol{C}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EAF}$　　(B) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{FAE}$　　(C) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EFA}$　　(D) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AFE}$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，但 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$　　(B) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，但 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

(C) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$　　(D) $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\neq 0$

4. 设 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况为 (　　)

(A) 必有无穷多解　　(B) 必有唯一解

(C) 不一定有解　　(D) 以上都不对

5. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{U}$，则以下命题错误的是 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 等价　　(B) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的行列式相同

(C) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{0}$ 同解　　(D) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的秩相同

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{AX} = 2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,计算矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\\9\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-7\\18\\2\\-8\end{pmatrix}$，选取其中若干向量构成空间$V=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$的一组基，并求其余向量在这组基下的坐标.

4. 试问当a取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 3ax_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a \\ (4a-1)x_1+3ax_2+2ax_3=1 \\ (2a-1)x_1+(2a+1)x_2+(a+1)x_3=a+1 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在其有无穷多解时求出所有解.

5. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 3 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. （6 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：当实数 $k\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也为对称阵.