浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2019 ～ 2020 第 二 学 期 ）

任课教师：______________学院班级：___________________班中编号：_________

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 排列 2, 4, 6, 7, 3, 1, 5 的逆序数是 __10__.

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=$ __3__.

3. 行列式 $\begin{vmatrix}2&-1&0&3\\1&2&2&-3\\-1&0&1&1\\-3&3&-2&2\end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则

   $A_{31}+2A_{32}+A_{33}-3A_{34}=$ __-46__.

4. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\beta=(a,1,1)^T$，已知 $\boldsymbol{A}\beta$ 与 β 线性相关，则 $a=$ __-1__.

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ __$\begin{pmatrix}0.1&0&0\\0.2&0.2&0\\0.3&0.4&0.5\end{pmatrix}$__

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}B=O$，则 $t=$ ___-3___.

7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，则 $\|\alpha\|=$ $\underline{\sqrt{3}}$。若向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1 & k & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的夹角是 45 度，则 $k=$ ___2___。

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & a\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$，则 $a=$ ___3___，$b=$ ___4___.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3,\quad D_1=\begin{vmatrix}2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23}\end{vmatrix}$$，那么 $D_1=$(D).

(A) 6 (B) −6 (C) 24 (D) －24

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 (C).

(A) $\boldsymbol{A}A^T=E$ (B) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$ (C) $\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T=\left[(A^T)^{-1}\right]^{-1}$

(D) $\left[(A^T)^T\right]^{-1}=\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T$

3. 下列命题正确的是(D).

(A)若 A 是 n 阶方阵，且 $A\neq O$，则 A 可逆。

(B) 若 A、B 都是 n 阶可逆方阵，则 $A+B$ 也可逆。

(C) 若 $AB=O$，且 $A\neq O$，则必有 $B=O$。

(D) 若 A 是 n 阶可逆方阵，则 A^T 可逆。

4. $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则关于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解的命题正确的是 (A).

(A) 若 $R(\boldsymbol{A})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解 (B) 若 $R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

(C) 若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解 (D) 若 $R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 r_1， $B=AC$ 的秩为 r_2，则 (C).

(A) $r_2 > r_1$　　(B) $r_2 < r_1$　　(C) $r_2 = r_1$　　(D) r_2与r_1的关系不确定

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$ 的值。

解：$D=-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\3&-1&2&1\\2&1&4&1\\5&0&6&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\0&-7&-7&-5\\0&-3&-2&-3\\0&-10&-9&-8\end{vmatrix}$-------------------------4 分

$=\begin{vmatrix}3&2&3\\7&7&5\\10&9&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&7&5\\0&7&5\end{vmatrix}$

-------------------------8 分

$=0$

-------------------------10 分

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+B=\boldsymbol{X}$， 求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

解：由 $\boldsymbol{AX}+B=\boldsymbol{X}$ 得 $(E-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=B$

从而得 $\boldsymbol{X}=(E-\boldsymbol{A})^{-1}B$

-------------------------4 分

$(E-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

-------------------------7 分

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

-------------------------10 分

3. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 的秩以及它的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\1&4&4&1\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-4&-3\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

-------------------------4 分

所以 $R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4)=2$

-------------------------6 分

极大无关组：$\alpha_1,\ \alpha_2$

-------------------------8 分

$$\begin{cases}\alpha_3=-4\alpha_1+2\alpha_2\\ \alpha_4=-3\alpha_1+\alpha_2\end{cases}$$

-------------------------10 分

4. 线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

在 λ 取何值时无解、有唯一解、有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解。

解：$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda\text{-}1)(5\lambda+4)$

则 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{4}{5}$

-------------------------4 分

（1） 当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -\frac{4}{5}$时有唯一解。

-------------------------6 分

（2） 当$\lambda=-\frac{4}{5}$时， $R(A)=2<3=R(A|b)$， 无解。

-------------------------8 分

（3） 当λ=1时，有无穷多解。

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ \qquad x_1=1 \end{cases}$$

通解：$x=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \in R$

-------------------------10 分

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2） $\boldsymbol{A}$ 能不能对角化？请说明理由。

解：（1） $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|A\text{-}\lambda E|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

-------------------------4 分

对于 $\lambda_1=-1$, $(A+E)x=\theta$

$$\boldsymbol{A}+E=\begin{pmatrix}-1&0&-4\\1&3&1\\1&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$， $k_1p_1(k_1\neq 0)$ 是 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量。

--------------------6 分

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，$(A-2E)x=\theta$

$$\boldsymbol{A}-2E=\begin{pmatrix}-4&0&-4\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$， $p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， $k_2p_2+k_3p_3(k_2,k_3$不全为零$)$ 是 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量。

------------------------8 分

（2） $\boldsymbol{A}$ 能对角化，因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量 p_1,p_2,p_3。

------------------------10 分

四、证明题（共 10 分）

1	2	本题总得分

1. (6 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\alpha_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\alpha_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。

证明：令 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\theta$

------------------------2 分

则$\left(k_1+k_3\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k_1+k_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\left(k_2+k_3\right)\boldsymbol{\alpha}_3=\theta$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，

所以$k_1+k_3=k_1+k_2=k_2+k_3=0$

得$k_1=k_2=k_3=0$

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\alpha_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\alpha_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关。

--------------------------6 分

2. （4 分）设向量$\boldsymbol{\alpha}$与向量β都是n维非零列向量，矩阵$A=\alpha\beta^T$。证明 $R(A)=1$

证明：因为$\boldsymbol{\alpha}$是非零列向量，由$A=\alpha\beta^T$得$R(A)=R(\alpha\beta^T)\le R(\alpha)=1$

又$\boldsymbol{\alpha}$与β都是非零列向量，所以$A\neq O$，则$R(A)\ge 1$

从而有$R(A)=1$

-------------------------4 分