# 第三章 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中最重要的变换之一，在求逆矩阵、矩阵的秩及解线性方程组等方面起着非常重要的作用. 本章主要介绍初等变换、初等矩阵、矩阵的秩等重要概念以及它们在线性方程组中的重要应用。

## 第一节 初等变换

### 一、初等变换

在引进矩阵的初等变换之前，我们先来分析用消元法求解线性方程组的例子.

**例 1** 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -2 & ③ \end{cases} \tag{3.1}$$

**解** 方程组 $(3.1) \xrightarrow[③\times\frac{1}{2}]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 & ③ \end{cases}$

$$\xrightarrow[③-2\times①]{②-2\times①} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & ① \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 = -5 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[②\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{③-\frac{5}{3}\times②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & ① \\ x_2 - x_3 = 1 & ② \\ 0 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①-②} \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 & ① \\ x_2 - x_3 = 1 & ② \\ 0 = 0 & ③ \end{cases}$$

将最后一个方程组变形为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$$

$x_3$ 可取任意值，称之为自由未知量，对于 $x_3$ 的每一取定的值，可唯一确定 $x_1, x_2$ 的值，从而得到原方程组的一个解，因此原方程组有无穷多解.

令 $x_3 = t$，得到方程组（3.1）的全部解，即通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

从这个例子中，我们可以发现在上面线性方程组的求解中，运用的是对方程组施行以下变换：

（1） 交换两个方程的位置;

（2） 用一个非零常数乘某个方程;

（3） 将一个方程乘某一个常数加到另一个方程上.

这种变换不改变线性方程组的解，而解方程的过程就是不断利用三种变换得到简化的同解方程组，最终得到方程组的解.

进一步，可以发现在对方程组施行上面三种同解变换时，参与变化的只是增广矩阵中的元素，即对方程组作同解变换，实际上是对增广矩阵作相应的行变换.

为了清楚起见，可以将上述过程进行比较：

方程组　　　　　　　　　　　　　　增广矩阵

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=1 & ①\\ x_1+x_2-2x_3=2 & ②\\ 4x_1-6x_2+2x_3=-2 & ③\end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ 4 & -6 & 2 & -2\end{array}\right) \quad (B)$$

$$\xrightarrow[③\times\frac{1}{2}]{①\leftrightarrow②}\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=2 & ①\\ 2x_1-x_2-x_3=1 & ②\\ 2x_1-3x_2+x_3=-1 & ③\end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1 & -1\end{array}\right) \quad (B_1)$$

$$\xrightarrow[③-2\times①]{②-2\times①}\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=2 & ①\\ -3x_2+3x_3=-3 & ②\\ -5x_2+5x_3=-5 & ③\end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & -5 & 5 & -5\end{array}\right) \quad (B_2)$$

$$\xrightarrow[②\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{③-\frac{5}{3}\times②}\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=2 & ①\\ x_2-x_3=1 & ②\\ 0=0 & ③\end{cases} \qquad \xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_3+\left(-\frac{5}{3}\right)\times r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad (B_3)$$

$$\xrightarrow{①-②}\begin{cases}x_1-x_3=1 & ①\\ x_2-x_3=1 & ②\\ 0=0 & ③\end{cases} \qquad \xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad (B_4)$$

线性方程组的三种同解变换对应到矩阵上，我们有下面定义.

**定义 1**　下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

（1）　交换两行位置;

（2）　以数 $k\neq 0$ 乘某一行中的所有元素;

（3）　把某一行所有元素的 $k$ 倍加到另一行的对应元素上.

为简便起见，通常用 $r_i$ 表示矩阵第 $i$ 行，用 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的第 $i$ 行和第 $j$ 行，用 $kr_i$ 表示数 $k$ 乘矩阵的第 $i$ 行，用 $r_j+kr_i$ 表示数 $k$ 乘矩阵的第 $i$ 行加到第 $j$ 行上; 将上述定义中的“行”换成“列”，$r$ 换成 $c$，即得到矩阵的**初等列变换**的定义; 矩阵的初等行变换和列变换统称为矩阵的**初等变换**. 若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c}\boldsymbol{B}$. 其它类同。

**定义 2**　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$.

矩阵的等价具有以下性质：

（1）　反身性：$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{A}$;

（2）　对称性：如果 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\leftrightarrow\boldsymbol{A}$;

（3）　传递性：如果 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\leftrightarrow\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{C}$.

由前面的例 1 可知，消元法一般由两个步骤构成，第一个步骤是消元过程，在例 1 中得到矩阵 $\boldsymbol{B}_3$，称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的**行阶梯形**，其特点是：(1) 若有零行，则零行全部位于非零行的下方；(2) 每个非零行的首个非零元素（从左到右的第一个不为零的元素）前面零元素的个数随着行标的增加而严格增加. 如下列矩阵

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&5\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{3.2}
$$

都是行阶梯形矩阵. 第二个步骤是代入过程，在例 1 中得到矩阵 $\boldsymbol{B}_4$，称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**行最简形**，其特点是：(1) 是特殊的行阶梯形；(2) 每个非零行左边首个非零元素为 1; (3) 每个非零行首个非零元素所在列的其他元素都为 0. 如例 1 中的矩阵 $\boldsymbol{B}_4$ 和（3.2）中的 $\boldsymbol{A}_3$ 都是行最简形矩阵.

**例 2** 利用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&-1\\1&1&-2&1\\4&-6&2&-6\\3&6&-9&7\end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

**解**

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&-1\\1&1&-2&1\\4&-6&2&-6\\3&6&-9&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&-1&-1&-1\\4&-6&2&-6\\3&6&-9&7\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&-3\\0&-10&10&-10\\0&3&-3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-\frac{10}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-\frac{10}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1
$$

最后一个矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 即为行阶梯形矩阵，进一步可将 $\boldsymbol{A}_1$ 化为行最简形矩阵：

$$
\boldsymbol{A}_1\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

总结例 2 中用行初等变换将矩阵化为行阶梯形和行最简形的方法，可以得到:

**定理 1　任何一个矩阵都可经有限次初等行变换变成行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.**

**证明**　见附录三.

利用矩阵的初等行变换可以把矩阵化为行最简形，再利用矩阵的初等列变换可以把矩阵化为标准形，如对行最简矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&1&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，再利用初等列变换，有

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix}E_3&0\\0&0\end{pmatrix}$$

**定义 3** 形如$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$的矩阵称为**标准形矩阵**，其中$E_r$是$r$阶单位矩阵.

由以上讨论可知:

（1）任意矩阵经过有限次初等变换可以变成标准形矩阵，且两个等价矩阵的标准形矩阵是相同的；

（2）$n$阶可逆矩阵的标准形矩阵是$n$阶单位阵$E_n$。

如果一个矩阵$A$经过初等变换变为$B$，那么$A$与$B$之间有什么样的关系？为了解决这个问题，我们引入初等矩阵.

## 二．初等矩阵

**定义 4** 由单位矩阵$E$经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，简称**初等阵**. 三种初等变换对应三种初等矩阵：

1．**交换初等阵$E(i,j)$：**由单位矩阵$E$交换第$i$行（列）与第$j$行（列）得到的矩阵.

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

容易证明：（1）$|E(i,j)|=-1$，且$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$；

（2）若$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$E(i,j)A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \end{array}$，

因此$\boldsymbol{E}_m(i,j)$左乘矩阵$\boldsymbol{A}$其结果相当于交换矩阵$\boldsymbol{A}$中的第$i$行和第$j$行，同理可得$\boldsymbol{E}_n(i,j)$右乘矩阵$\boldsymbol{A}$其结果相当于交换矩阵$\boldsymbol{A}$中的第$i$列和第$j$列.

2. **倍乘初等阵$\boldsymbol{E}(i(k))$**：由单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$i$行（列）乘不为 0 的数$k$得到的矩阵.

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

和前面一样，容易证明：

（1）$|\boldsymbol{E}(i(k))|=k,\quad \boldsymbol{E}^{-1}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

（2）$\boldsymbol{E}_m(i(k))$左乘矩阵$\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数$k$乘$\boldsymbol{A}$中的第$i$行，$\boldsymbol{E}_n(i(k))$右乘矩阵$\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数$k$乘$\boldsymbol{A}$中第$i$列.

3. **倍加初等阵$\boldsymbol{E}(i,j(k))$**：由单位矩阵的第$j$行乘以数$k$加到第$i$行上而得到的矩阵.

$$\boldsymbol{E}_m(i,j(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&k&&&\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

同样，可以证明：

（1）$\left|\boldsymbol{E}(i,j(k))\right|=1,\quad \boldsymbol{E}^{-1}(i,j(k))=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$;

（2）$\boldsymbol{E}_m(i,j(k))$左乘矩阵$\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数$k$乘$\boldsymbol{A}$中的第$j$行加到第$i$行，$\boldsymbol{E}_n(i,j(k))$右乘矩阵$\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数$k$乘$\boldsymbol{A}$中的第$i$列加到第$j$列.

总结以上的讨论，有：(1) 初等矩阵都可逆，且逆矩阵为同类的初等矩阵；(2) 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，对$\boldsymbol{A}$作一次初等行变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的左边乘了一个相应的$m$阶初等矩阵；对$\boldsymbol{A}$作一次初等列变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的右边乘了一个相应的$n$阶初等矩阵.

**定理 2　$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$可表示成有限个初等矩阵的乘积.**

**证明**　必要性：　若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}$的标准形为$\boldsymbol{E}$，由$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{E}$，得$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{E}$可经过有限次初等变换变成$\boldsymbol{A}$，不妨设$\boldsymbol{E}$经过$t$次行变换和$s-t$次列变换成$\boldsymbol{E}$，即存在初等矩阵$\boldsymbol{P}_i(i=1,2,...,s)$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_{t+1}\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s$.

充分性：　若$\boldsymbol{A}$可表示成有限个初等矩阵的乘积，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s$，其中$\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s$为初等阵，因为$\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s$可逆，所以$\boldsymbol{A}$可逆.

**定理 3　设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵，则**

（1）$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$

（2）$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$

（3）$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

**证明** 只证（3)，（1）（2）同理可证.

（3）必要性：由 $\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 经过 $t$ 次行变换和 $s-t$ 次列变换变成 $\boldsymbol{B}$，则存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,...,s)$ 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{t+1}\cdots\boldsymbol{P}_s,$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_t,\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_{t+1}\cdots\boldsymbol{P}_s$，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}.$

充分性：由矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆可得矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积，设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_t,\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_{t+1}\cdots\boldsymbol{P}_s$，其中 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,...,s)$ 为初等矩阵，则 $\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{t+1}\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{B}.$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 经过有限个初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}.$

**推论** $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{E}$

**证明** $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{E}.$

## 三. 求逆矩阵的初等行变换法

下面我们给出求逆矩阵的另一种方法.

若 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}.$ 那么该如何求出 $\boldsymbol{P}$ 呢？

注意到 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{PE}=\boldsymbol{A}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}\right)=\left(\boldsymbol{PA}\vdots\boldsymbol{PE}\right)=\left(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}\right)\tag{3.3}$$

也就是说对 $\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}\right)$ 作初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 也就变成了 $\boldsymbol{A}^{-1}$，具体步骤如下：

(1) 写出 $n\times 2n$ 矩阵 $\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}\right)$；

(2) 对 $\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}\right)$ 作初等行变换化为最简形 $\boldsymbol{C}$；

(3) 写出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即行最简形 $\boldsymbol{C}$ 中的后 $n$ 列元素对应的矩阵.

**例 3** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&3\\2&1&6\end{pmatrix}$，利用初等行变换证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$

**解** 
$$\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\1&0&3&0&1&0\\2&1&6&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&-3&4&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-1\\0&-2&0&0&4&-2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{3}{2}&\frac{11}{2}&-3\\0&1&0&0&-2&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right),$$

因为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

**注：** 这种方法也可应用于解矩阵方程和解一类线性方程组：

1. 对于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，在（3.3）中将 $\boldsymbol{E}$ 换成 $\boldsymbol{B}$ 可得，即

$$\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right). \tag{3.4}$$

2. 对于系数矩阵为方阵的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，同样有

$$\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right), \tag{3.5}$$

这里 $\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}\right)$ 就是矩阵的增广矩阵，因此只需把增广矩阵化为行最简形，最后一列即为方程组的解.

**例 4** 利用初等行变换求解第二章例 14.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

**解** 由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$ 得，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，又

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_2\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

因此

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**例 5** 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=1 \end{cases}$.

**解** 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则方程组可写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$.

$$\widetilde{A}=(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&2&1&0\\3&4&3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-5&-2\\0&-2&-6&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-5&-2\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+3r_3]{r_2-5r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+3r_3]{r_2-5r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2\times(-\frac{1}{2})\\ r_3\times(-1)}]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right),$$

故得到方程组的解为 $$X=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

## 思考题一

1．试问一个矩阵的行阶梯形唯一吗？行最简形唯一吗？标准形唯一吗？

2．若矩阵 $A$ 的标准形为 $F=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$，试问所有标准形同为 $F$ 的矩阵是否都与 $A$ 等价？

3. 若 $A$ 为 $n$ 阶方阵，对 $A$ 实行一次初等变换变为 $B$，试讨论下 $|A|$ 与 $|B|$ 之间的关系，进一步证明 $|A|$ 与 $|B|$ 同为零或同为非零

4．说明初等变换不改变矩阵的可逆性，并进一步说明可逆矩阵的标准形是 $E$

5．如何通过初等行变换判断矩阵是否可逆？

6．能否用初等列变换求可逆矩阵的逆矩阵？若能，该如何求？

7．对于矩阵方程 $XA=B$，其中 $A,B$ 是已知矩阵且 $A$ 可逆，该如何用矩阵的初等变换求未知矩阵 $X=BA^{-1}$ 呢？

# 第二节 矩阵的秩

矩阵的秩是描述矩阵特性的一个重要概念，是讨论向量组的线性相关性、线性方程组的解等问题的重要工具. 本节先用行列式来定义矩阵的秩，再给出利用初等变换求矩阵的秩的方法.

### 一、矩阵的秩

**定义 5** 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵，在 $A$ 中任取 $k$ 行 $k$ 列（$1\le k\le \min\{m,n\}$），位于这些行、列交叉处的 $k^2$ 个元素，不改变它们在 $A$ 中原有位置而构成的 $k$ 阶行列式，称为 $A$ 的 $k$ **阶子式**。

例如，设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&2\\4&2&0&1\\5&3&2&1\end{pmatrix}$，$|2|$ 是 $A$ 的一个一阶子式，$\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}$ 是 $A$ 的一个二阶子式，

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$是$\boldsymbol{A}$的一个三阶子式，$\boldsymbol{A}$没有四阶和四阶以上的子式.

如果某个子式是零，就称为**零子式**，否则称为**非零子式**. 如上例中的$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$就是零子式，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=12$是非零子式.

**定义 6** 若矩阵$\boldsymbol{A}$中存在一个$r$阶非零子式$D_r$，且所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）全为零子式，则称$r$阶非零子式$D_r$为矩阵$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式，数$r$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**秩**，记为$R(\boldsymbol{A})$.

由于零矩阵$\boldsymbol{O}$不存在非零子式，我们规定零矩阵的秩等于 0.

例如，前面例子中$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$是最大非零子式，因此$R(\boldsymbol{A})=3$.

**注** 1. 由行列式的性质可知，在$\boldsymbol{A}$中若所有的$r+1$阶子式全等于 0，则所有高于$r+1$阶的子式也全等于 0，从而$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})$即为矩阵$\boldsymbol{A}$的非零子式的最高阶数.

**注** 2. $n$阶矩阵，其$n$阶子式为$|\boldsymbol{A}|$，则$R(\boldsymbol{A})=n$当且仅当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，此时称$\boldsymbol{A}$为**满秩矩阵**；而$R(\boldsymbol{A})<n$当且仅当$|\boldsymbol{A}|=0$，此时称$\boldsymbol{A}$为**降秩矩阵.** 因此，可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为满秩矩阵，不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为降秩矩阵.

**例 6** 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

**解** $\boldsymbol{A}$的三阶子式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6\neq 0$，显然$\boldsymbol{A}$的四阶子式全为 0，则$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$为$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式，所以$R(\boldsymbol{A})=3$.

由前面例子可知，当矩阵的行数与列数较大时，用定义计算矩阵的秩很繁琐、计算量大，而观察例 6 中的矩阵$\boldsymbol{A}$，我们可以发现$\boldsymbol{A}$是行阶梯形矩阵，而$\boldsymbol{A}$的秩就等于行阶梯形中非零行的个数，由矩阵秩的定义容易证明，行阶梯形的秩就等于其非零行的行数.

## 二．秩的计算

行阶梯形矩阵的秩容易计算，就为其非零行的行数，任意矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形，因此问题归结为初等变换对秩有什么影响？我们有以下定理：

**定理 4 初等变换不改变矩阵的秩.**

**证明** 见附录三.

由此可知：

1. 若$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，则$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$. 即等价的矩阵等秩，反之不一定成立.

2.求矩阵的秩的另一种方法：把矩阵$\boldsymbol{A}$通过初等行变换变为行阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$**,** 则行阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$的非零行数即为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

**例 7** 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\-2&4&-2&3&-2\\2&-4&8&0&3\\3&-6&0&-6&3\end{pmatrix}$ 的秩.

**解** 因为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\-2&4&-2&3&-2\\2&-4&8&0&3\\3&-6&0&-6&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&4&2&1\\0&0&-6&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}，所以 R(A)=3.$$

**例 8** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&\lambda&-1&3\\4&3&\mu&6\end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2,$ 求 $\lambda$ 与 $\mu$ 的值.

**解**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&\lambda&-1&3\\4&3&\mu&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&\lambda-2&-3&-1\\0&-1&\mu-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(\lambda-2)r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-1&\mu-4&-2\\0&0&(\lambda-2)(\mu-4)-3&-2\lambda+3\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=2,$ 故 $(\lambda-2)(\mu-4)-3=0,\quad -2\lambda+3=0.$ 即 $\lambda=\dfrac{3}{2},\quad \mu=-2.$

## 三．秩的性质

根据矩阵秩的定义和定理 4，容易得到矩阵的秩具有下列性质：

（1） 若 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le R(A)\le \min\{\mathrm{m,n}\}.$

（2） 若矩阵 $A$ 中有某个 $s$ 阶子式不为零，则 $R(A)\ge s.$

（3） 矩阵 $A$ 中所有 $t$ 阶子式全为零，则 $R(A)\le t-1.$

（4） $R(A)=R\left(A^{\mathrm{T}}\right).$

（5）$R(\lambda A)=\begin{cases}0, & \lambda=0\\ R(A), & \lambda\ne 0\end{cases}$，其中 $\lambda$ 是常数.

**例 9** 设 $A$ 为 $n(n\ge 2)$ 阶矩阵，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，若 $R(A)<n-1$，证明 $R(A^*)=0$.

**证明** 若 $R(A)<n-1$，则 $A$ 中所有 $n-1$ 阶子式都为零，由 $A^*$ 定义可知 $A^*$ 中所有元素都为零，因此，则 $R(A^*)=0$.

# 思考题二

1． 若 $R(A)=r$，试问 $A$ 是否存在有 $r-1$ 阶、$r$ 阶、$r+1$ 阶零子式呢？$A$ 是否存在 $r-1$ 阶、$r$ 阶、$r+1$ 阶非零子式呢？（假设存在有 $r-1$ 阶、$r$ 阶、$r+1$ 阶子式）

2. $m \times n$ 矩阵共有几个 $k$ 阶子式？矩阵的最高价非零子式是否唯一？
3. 试举例说明，若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ 不一定成立，进一步考虑在怎样的条件下结论成立？
4. 在矩阵秩的计算中能否用初等列变换呢？
5. 试列举矩阵可逆的等价条件，并给出判断矩阵可逆的几种方法。
6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，若 $R\left(\boldsymbol{A}\right)=r$，能否得到 $R(\boldsymbol{A}^2)=r$？若不能，两者之间有什么关系？
7. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩的关系如何？

## 第三节 线性方程组的解

考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{3.6}$$

记矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

方程组（3.6）可以表示为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{b}_{m\times 1} \tag{3.7}$$

如果 $\boldsymbol{b}\neq 0$，则（3.6）称为非齐次线性方程组；如果 $\boldsymbol{b}=0$，则（3.6）称为齐次线性方程组，其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1} \tag{3.8}$$

在第二节中我们给出了若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵且可逆时线性方程组（3.6）的求解方法，而当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆或不为方阵时又该如何求解呢？

在第一节我们知道对线性方程组（3.6）进行高斯消元法求解的过程实际上就是对增广矩阵 $\left(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}\right)$ 作初等行变换的过程，我们只需要把增广矩阵化成行最简形，其对应的方程组就是和（3.6）同解的最简方程组，从最简方程组就可求解出方程组的解.

下面我们来看两个特例.

如线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ -x_1+2x_2-4x_3=2 \\ 2x_1+5x_2-x_3=3 \end{cases}$，对其增广矩阵做初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

由行阶梯形可知 $R(\boldsymbol{A})=2, R(\overline{\boldsymbol{A}})=3,$ 而由于 $0\neq -2$，矛盾，所以方程组无解.

又如线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ -x_1+2x_2-4x_3=2 \\ 2x_1+5x_2-x_3=5 \end{cases}$，对其增广矩阵做初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\-1&2&-4&2\\2&5&-1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&3&-3&3\\0&3&-3&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由行阶梯形可得 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2,$ 进一步化为行最简形：

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由行最简形，得对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_3=0\\x_2-x_3=1\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2=1+x_3\end{cases},$$

其中 $x_3$ 为自由变量. 令 $x_3=t$ ，可得方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-2t,\\x_2=1+t,\ \text{其中}\ t\ \text{为任意常数.}\\x_3=t.\end{cases}$$

由此可见此方程组有无穷多解.

对一般的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{b}_{m\times 1}$ ，有以下解的重要判定定理：

**定理 5　对于非齐次线性方程组（3.7），其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ ，其增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$ ，则**

**（1）　非齐次线性方程组（3.7）无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\overline{\boldsymbol{A}})$；**

**（2）　非齐次线性方程组（3.7）有唯一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ ；**

**（3）　非齐次线性方程组（3.7）有无穷多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ .**

**证明**　首先证明三个条件的充分性。

设 $R(\boldsymbol{A})=r,$ 不妨令增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行最简形为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}&d_1\\0&1&\cdots&0&b_{21}&\cdots&b_{2,n-r}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}&d_r\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&d_{r+1}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

（1）若 $R(\boldsymbol{A})<R(\overline{\boldsymbol{A}})$ ，则最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的 $d_{r+1}=1$ ，所以 $\boldsymbol{B}$ 的第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$ ，此时方程组（3.7）无解；

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r=n$ ，则最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的 $d_{r+1}=0$（或 $d_{r+1}$ 不出现），此时 $b_{ij}$ 也都不会出现，这时最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

此时方程组（3.7）有唯一解；

（3）若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = r < n$，则最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的 $d_{r+1} = 0$（或 $d_{r+1}$ 不出现），这时最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

这是含 $n-r$ 个自由未知量的线性方程组，令 $x_{r+1} = c_1, \cdots, x_n = c_{n-r}$，则有

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r, \\ x_{r+1} = c_1, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad c_{n-r}. \end{cases}$$

把上式整理成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \cdots + \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} c_{n-r} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

这里参数 $c_1, \cdots, c_{n-r} \in R$ 可任意取值，所以此时方程组（3.7）有无穷多解。

其次，关于三个条件的必要性，根据与逆否命题的逻辑关系自然成立。证毕

**推论**　当 $m = n$ 时，非齐次线性方程组（3.7）有唯一解的充分必要条件是其系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

由于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{0}_{m\times 1}$ 中至少有一个零解，因此可得下面定理：

**定理 6**　对于齐次线性方程组（3.8），其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

（1）　齐次线性方程组（3.8）只有零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = n$;

（2）　齐次线性方程组（3.8）有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.

**推论 1**　当 $m < n$ 时，齐次线性方程组（3.8）必有非零解.

**推论 2**　当 $m = n$ 时，齐次线性方程组（3.8）有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$；齐次线性方程组（3.8）只有零解的充分必要条件是其系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

定理 5、6 给出了只通过矩阵的秩判断方程组解的充分必要条件。

**例 10** 判断方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$解的情况。

**解** 对该方程组的增广矩阵作行初等变换：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由此可知，$r=2<\tilde{r}=3$，故此方程组无解。

定理 5 的充分性证明过程也给出了求解线性方程组的步骤。

**例 11** 设$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ -x_1+2x_2-4x_3=2 \\ 2x_1+5x_2-2x_3=5 \end{cases}$,先判断该方程组的解，再求解。

**解** 对增广矩阵做行初等变换：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

由行阶梯形可知$R(A)=R(\overline{A})=3,$故知该方程组有唯一解。

进一步将行阶梯形化为行最简形矩阵：

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{\substack{r_1+r_3 \\ r_2-r_3}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

由行最简形，可得方程组有唯一解$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \end{cases}.$

**例 12** 讨论$\lambda$取何值时，下列方程组有解？有解时求出所有解。

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

**解法一** 这个方程组系数对应一个三阶行列式，用克莱默法则较方便：

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

可见当$\lambda\neq1,\lambda\neq-2$时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解。计算出$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$、

$D_2=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$、$D_3=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$，由克莱默法则得：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda+2}\begin{pmatrix} -(\lambda+1) \\ 1 \\ (\lambda+1)^2 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda = 1$ 时，考察增广矩阵：$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，还原为最简方程为：

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$，移项、补齐，便得：

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 \ (t_i \in R, i = 1,2),$$

当 $\lambda = -2$ 时，增广矩阵变为

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

此时 $r = 2 < \tilde{r} = 3$，方程组无解。

**解法二**　直接对增广矩阵做初等行变换，此时应小心防止出现增根或失根：

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda \neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+\lambda & \lambda(1+\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda \neq -2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -(1+\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+\lambda)^2}{(2+\lambda)} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-(1+\lambda)}{(2+\lambda)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(2+\lambda)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+\lambda)^2}{(2+\lambda)} \end{array}\right),$$

于是当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，方程组有唯一解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+\lambda}\begin{pmatrix} -(1+\lambda) \\ 1 \\ (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$；而当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$，方程组分别有无穷多解和无解，同解法一。

## 思考题三

1．非齐次线性方程组无解的条件是什么？

2．为什么说齐次线性方程组总有解？

3．对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{0}_{m\times 1}$，下面结论是否正确？

（1）当 $m = n$ 时，方程组只有零解;

（2）当 $m > n$ 时，方程组有非零解.

4．对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$，下面结论是否正确？请举例说明.

（1）当 $m < n$ 时，方程组有无穷多解;

（2）当 $m = n$ 时，方程组只有唯一解;

（3）当 $m > n$ 时，方程组无解.

# 习 题 三

## （A）

1. 分别写出下列矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. 利用矩阵的初等行变换判断下列矩阵是否可逆，若可逆求其逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 利用矩阵的初等变换解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 求下列矩阵的秩.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.（4）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，求 $k$ 的值.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & a & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，问 $a$ 为何值时，$R(\boldsymbol{A})<3$？

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$，问 $k$ 为何值时，使得分别有：

（1）$R(\boldsymbol{A})=1$;　　（2）$R(\boldsymbol{A})=2$;　　（3）$R(\boldsymbol{A})=3$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $5\times 3$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求秩 $R(\boldsymbol{AB})$.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

10. 求解下列线性方程组.

（1）$\begin{cases}3x_1-3x_2+4x_3=0\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0\\ -x_2+x_3=0\end{cases}$.　　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$.

（3）$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\ 3x_1-x_2+2x_3=10\\ 11x_1+3x_2=8\end{cases}$.　　（4）$\begin{cases}-3x_1+2x_2-x_3=-3\\ 4x_1+3x_2+4x_3=2\\ 5x_1+3x_2+5x_3=2\end{cases}$.

（5）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=-2\\ x_1-x_2+x_3-3x_4=4\\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-5\end{cases}$.　　（6）$\begin{cases}2x+y-z+\omega=1\\ 3x-2y+z-3\omega=4\\ x+4y-3z+5\omega=-2\end{cases}$.

11. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$，求当 $\lambda$ 取何值时有解，并求出它的解.

12. 设 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$，求当 $\lambda$ 取何值时此方程组有唯一解、无解、无穷多解，并在无穷多解时求出它的通解.

## （B）

1. 下列矩阵中，不是初等矩阵的是（　　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则必有（　　）

（A）$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$． （B）$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$． （C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$． （D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．

3. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第二行加到第一行得$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第一列的$-1$倍加到第二列得$\boldsymbol{C}$，令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则（　　）

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$． （B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$． （C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$． （D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$．

4. 设$n$阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$等价，则（　　）

(A)$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$． (B)$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$． (C)若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则必有$|\boldsymbol{B}|\neq 0$． (D)$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$．

5. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵，$\boldsymbol{A}$且$\boldsymbol{B}$与等价，则下列命题中不正确的是（　　）

（A）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

（B）若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{E}$.

（C）若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$等价，则$\boldsymbol{B}$可逆.

（D）若$|\boldsymbol{A}|>0$，则$|\boldsymbol{B}|>0$.

6. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶可逆矩阵，则（　　）

（A）若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$． （B）$\boldsymbol{A}$总可以经过初等行变换化成$\boldsymbol{E}$．

（C）对矩阵$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})$施行若干次初等变换，当$\boldsymbol{A}$变为$\boldsymbol{E}$时，相应地$\boldsymbol{E}$变为$\boldsymbol{A}^{-1}$．

（D）以上都不对.

7. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{C}$是$n$阶满秩矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}, r(\boldsymbol{B})=r_1$，则 （　）

（A）$r>r_1$． （B）$r<r_1$． （C）$r=r_1$． （D）$r$与$r_1$的大小关系随$\boldsymbol{C}$而定.

8. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵，则 （　　）

（A）当$m>n$时，必有$|\boldsymbol{AB}|\neq 0$． （B）当$m>n$时，必有$|\boldsymbol{AB}|=0$.

（C）当$n>m$时，必有$|\boldsymbol{AB}|\neq 0$． （D）当$n>m$时，必有$|\boldsymbol{AB}|=0$.

9. 设$n(n\geq 3)$阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a & 1 & a & \cdots & a\\ a & a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$，若$r(\boldsymbol{A})=n-1$，则$a$必为 （　　）

（A）$1$.　　（B）$\dfrac{1}{1-n}$.　　（C）$-1$.　　（D）$\dfrac{1}{n-1}$.

10. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为非零$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的秩 （　）

（A）必有一个为零.（B）一个小于$n$，一个等于$n$.（C）都等于$n$.（D）都小于$n$.

11. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$m<n$，则必有（　　）

（A）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|\neq 0$.　　（B）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|=0$.　　（C）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|>0$.　　（D）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|<0$.

12. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$，其中$a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为　（　　）

（A）$n$.　　（B）$n-1$.　　（C）$1$.　　（D）$0$.

13. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & \lambda & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$为3阶矩阵，且$R(\boldsymbol{B})=2,R(\boldsymbol{AB})=1$，则$\lambda$为（　）

（A）$1$.　　（B）$-1$.　　（C）$3$.　　（D）$-3$.

14. $\boldsymbol{A}$为$n\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$为$n\times 1$矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=0$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$　（　　）

（A）有无穷多解.（B）有唯一解.（C）或者无解或者有无穷多解.（D）无解.

15. 设非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$对应齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,下面结论错误的是（　）

（A）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解.

（B）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有零解.

（C）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解.

（D）若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有零解，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解.

16. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$m<n$，非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$对应齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，下面结论正确的是（　）

（A）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解.　　（B）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解.

（C）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.　　　　　　　　（D）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

17. 若 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明 $R\left(\boldsymbol{A}\right)+R\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)=n$.

18. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\begin{cases} n, & 若R(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & 若R(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & 若R(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$$

20. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,，问 $a,b$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}^*$ 的秩等于 1？

# 附录三

**附 1：**　定理 1 的证明

**定理 1　任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可经有限次初等行变换变成行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.**

**证明**　首先先证明 $\boldsymbol{A}$ 可经有限次初等行变换变成行阶梯形矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵，则已是行阶梯形矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，设为 $m\times n$ 矩阵，则从第一列起依次寻查下去，直至找到非零列为止，不妨设是第 $j$ 列，若 $a_{1j}\neq 0$，则对下面每一行作第三种初等行变换 $r_i-\dfrac{a_{ij}}{a_{1j}}r_1(i=2,...,m)$，将第 $j$ 列中除 $a_{1j}$ 以外的元素都化为 0，此时 $a_{1j}$ 为第一行首个非零元素，且所在列下方元素为 0，若 $a_{1j}=0$，则在第 $j$ 列中向下寻找，直到找到第一个非零元素为止，不妨设为 $a_{ij}$，这时作第一种初等行变换，把 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行换成第一行，再对矩阵作刚才的变换，把第 $j$ 列第一行以下元素化为 0，可以得到一个变换后矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$，若 $\boldsymbol{A}_1$ 中除第一行外其余各行的元素都是 0，则已是行阶梯形矩阵，否则对 $\boldsymbol{A}_1$ 的后 $m-1$ 行重复以上变换得到 $\boldsymbol{A}_2$，如此反复进行这样的变换最多 $m$ 次，即可将 $\boldsymbol{A}$ 化成了行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$.

在 $\boldsymbol{B}$ 中从最后一行开始往上查找，直到找到非零行为止，不妨设为第 $i_2$ 行，设第 $i_2$ 行的第一个非零元素为 $a_{i_2 j_1}$，先对第 $i_2$ 行作第二种初等行变换 $r_{i_2}\times\dfrac{1}{a_{i_2 j_1}}$，再对前面 $i_2$ 行作第三种初等行变换 $r_i-a_{ij_1}r_{i_2}\,(i=1,...,i_2-1)$，这样变换后矩阵为 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_1$ 中第 $i_2$ 行首个非零元素为 1，且所在列其他元素为 0，如此反复进行这样的变换 $i_2$ 次，即可将 $\boldsymbol{A}$ 化成了行最简形矩阵.

**附 2：**　定理 4 的证明.

**定理 4　初等变换不改变矩阵的秩（秩是初等变换下的不变量）.**

**证明**　由于对矩阵作初等列变换就是对其转置矩阵作初等行变换，因此，只需证明矩阵

经过一次初等行变换不改变矩阵的秩即可．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经一次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，$R(\boldsymbol{A})=r$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r$ 阶子式 $D_r\neq 0$.

下面就三种初等行变换加以证明.

（1）$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$．则在 $\boldsymbol{B}$ 中总能找到与 $\boldsymbol{A}$ 中的子式 $D_r$ 相对应的子式 $\bar{D}_r$，由行列式的性质可知 $\bar{D}_r=D_r$ 或 $\bar{D}_r=-D_r$．因此，$D_r$ 与 $\bar{D}_r$ 有相同的非零形，因此 $\bar{D}_r\neq 0$，从而 $R(\boldsymbol{B})\geq r$．

（2）$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$．则在 $\boldsymbol{B}$ 中总能找到与 $\boldsymbol{A}$ 中的子式 $D_r$ 相对应的子式 $\bar{D}_r$，由行列式的性质可知 $\bar{D}_r=D_r$ 或 $\bar{D}_r=kD_r$．因此，$D_r$ 与 $\bar{D}_r$ 有相同的非零形，因此 $\bar{D}_r\neq 0$，从而 $R(\boldsymbol{B})\geq r$．

（3）$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$．因为对于作变换 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$ 时结论成立，所以只需考虑 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1+kr_2}\boldsymbol{B}$ 这一特殊情况，分三种情况讨论：

① 若 $D_r$ 不包含第 1 行，则 $D_r$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的 $r$ 阶子式，因此 $R(\boldsymbol{B})\geq r$．

② 若 $D_r$ 包含第 1 行不包含第 2 行，这时把 $\boldsymbol{B}$ 中对应 $D_r$ 的子式记为 $\bar{D}_r$. 则有

$$\bar{D}_r=\begin{vmatrix} r_1+kr_2 \\ \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_1 \\ \vdots \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} r_2 \\ \vdots \end{vmatrix}=D_r+k\tilde{D}_r.$$

则 $\tilde{D}_r$ 也为 $\boldsymbol{B}$ 的 $r$ 阶子式，又由 $\bar{D}_r-k\tilde{D}_r=D_r\neq 0$，可知 $\bar{D}_r$ 与 $\tilde{D}_r$ 不同时为零，至少有一个不为零，因此可得 $\boldsymbol{B}$ 至少存在一个非零 $r$ 阶子式，因此 $R(\boldsymbol{B})\geq r$．

③ 若 $D_r$ 同时包含第 1 行和第 2 行，这时把 $B$ 中对应 $D_r$ 的子式记为 $\bar{D}_r$. 则有

$$\bar{D}_r=\begin{vmatrix} r_1+kr_2 \\ \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_1 \\ \vdots \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} r_2 \\ \vdots \end{vmatrix}=D_r,\ \text{因此}\ R(\boldsymbol{B})\geq r.$$

综上可得若 $\boldsymbol{A}$ 经一次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{B})\geq R(\boldsymbol{A})$．由于 $\boldsymbol{B}$ 亦可经一次初等行变换变为 $\boldsymbol{A}$，故也有 $R(\boldsymbol{A})\geq R(\boldsymbol{B})$．因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$．

**附 3**：给出几个常用的矩阵秩的性质（假定其中运算都是可行的）：

性质 1：$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leq R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

特别的，若 $\boldsymbol{B}$ 只有 1 列，设为 $\boldsymbol{\beta}$，则 $R(\boldsymbol{A})\leq R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})\leq R(\boldsymbol{A})+1.$

性质 2：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$

性质 3：$R(\boldsymbol{AB})\leq\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}.$

性质 4：若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq n.$.

性质 5：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 $m$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{A}).$$