2019年11月9日 12:53

Fourier Analysis of Signals

$$FS:\begin{cases} x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c[m]e^{jmw_0t},\ w_0=\frac{2\pi}{T_0} \\ c[m]=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jmw_0t}dt \end{cases}$$

$$FT:\begin{cases} X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt \\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw \end{cases}$$

满足条件可FT $\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty & \text{平方可积} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty & \text{绝对可积} \end{cases}$

$$DTFS:\begin{cases} x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_0 n} \\ X_p[k]=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \end{cases}$$

$$DTFT:\begin{cases} X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \\ x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \end{cases}$$

$x(t)$: real $\Rightarrow x(t)=x^*(t)$ (共轭)

$\tilde{c}[k]=c[k] \Longrightarrow c[k]=c^*[-k]$

$c[-k]=c^*[k]$

$c[m], X[k] \Rightarrow$ optimal coefficient (最优系数)

odd → if $f(-t)=-f(t)$ 奇对称

even → if $f(-t)=f(t)$ 偶对称

DTFS: 例 $X_p[m]=\boxed{\frac{1}{2}}[e^{-jm\Omega_0\boxed{2}}+e^{-jm\Omega_0(11-2)}]+[-e^{-jm\Omega_0 3}+e^{-jm\Omega_0(11-3)}]$

$N_0=11$ $\frac{1}{N}$ k 则 $X[n]$标 $\frac{1}{2} \Rightarrow X[n]$下 $\frac{11}{2}$

则 $X[2]=X[9]=\frac{11}{2}$, $X[8]=11, X[3]=-11$

$$s(t)\longrightarrow\bigotimes_{\downarrow \cos w_0t}\longrightarrow w(t)\cdots\longrightarrow\bigotimes_{\downarrow \cos w_0t}\longrightarrow y(t)$$

$$X(jw)=\frac{1}{(jw+2)^2(jw+3)}=\frac{A}{(jw+2)^2}+\frac{B}{jw+2}+\frac{C}{jw+3}$$

$C=X(jw)(jw+3)\big|_{jw=-3}$

$A=X(jw)(jw+2)^2\big|_{jw=-2}$

$B=\ldots\ldots$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_0)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jkw_0t}$$

$g(t)\Longrightarrow G(jw)$

$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t-mT_0)$ 周期延拓 $c[m]$ 于 $G(jw)$

FS

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c[m]e^{\boxed{jmw_0}t},\ w_0=\frac{2\pi}{T_0}\xrightarrow{FT}X(jw)=2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c[m]\delta(w-mw_0)$$

$e^{jw_0t}\Longleftrightarrow 2\pi\delta(w-w_0)$

FT

$$X(jw)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}G(jw)e^{-\boxed{jmT_0}w}\quad T_0=\frac{2\pi}{w_0}$$

$$=G(jw)\frac{2\pi}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(w-kw_0)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}G(jkw_0)\delta(w-kw_0)$$

$$p(w)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}d[m]e^{jm\frac{2\pi}{w_0}w}$$

$$d[m]=\frac{1}{w_0}\int_{w_0}p(w)e^{-jm\frac{2\pi}{w_0}w}dw$$

$$=\frac{1}{w_0}$$

$$\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-kw_0)=\frac{1}{w_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{jm\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_0}}w}\quad e^{jmT_0w}$$

$$c[m]=\frac{G(jw)}{T_0}\Big|_{w=mw_0}=\frac{1}{T_0}G(jmw_0)$$