12-1

方法一：利用本原多项式的定义，要满足三个条件：

（1）第一个条件： $f(x)$ 是既约的，即不能再因式分解；

若 $f(x)$ 能因式分解，则其因子必然是最高幂指数小于 3 的多项式，一共有以下几种：

$x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x+1$（【注】不包含 x^2+x，因为 x^2+x 自己都还可以因式分解）。

但这几种都不能整除 $f(x)=x^3+x^2+1$，所以 $f(x)$ 是既约的；

（2）第二个条件： $f(x)$ 能够整除 x^7+1；

$\dfrac{x^7+1}{x^3+x^2+1}=x^4+x^3+x^2+1$，能整除，满足条件；

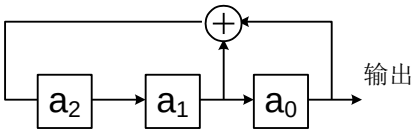
（3）第三个条件： $f(x)$ 不能够整除 $x^3+1, x^4+1, x^5+1, x^6+1$；

经验证， $f(x)$ 确实不能整除 $x^3+1, x^4+1, x^5+1, x^6+1$；

综上， $f(x)$ 是本原多项式。

方法二：利用本原多项式与 m 序列的关系，一个线性反馈移存器能产生 m 序列的充要条件是：反馈移存器的特征多项式为本原多项式。

我们只要按照 $f(x)=x^3+x^2+1$ 的形式得到一个反馈移存器，若产生的序列周期为 $2^n-1=2^3-1=7$，则 $f(x)=x^3+x^2+1$ 即为本原多项式，否则，则不是本原多项式。此反馈移存器如下：



假设初始状态为：001，则此反馈移存器的数值变换规律如下：

a_2	a_1	a_0
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1
0	1	1
0	0	1
⋮	⋮	⋮

此多项式 $f(x)$ 产生的序列周期是 7，即为 m 序列，所以 $f(x)$ 是本原多项式。

12-3

方法一：按照本原多项式的定义

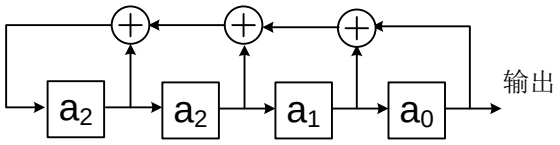
$$(x^{15}+1)=(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x+1)$$

$$(x^5+1)=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)$$

虽然 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 是 $x^{15}+1$ 的一个因子，但也是 x^5+1 的一个因子，不复合本原多项式的定义，所以，不是本原多项式。

方法二：利用本原多项式与 m 序列的关系，一个线性反馈移存器能产生 m 序列的充要条件是：反馈移存器的特征多项式为本原多项式。

我们只要按照 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 的形式得到一个反馈移存器，若产生的序列周期为 $2^4-1=2^4-1=15$，则 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 即为本原多项式，否则，则不是本原多项式。此反馈移存器如下：



假设初始状态为：0001，则此反馈移存器的数值变换规律如下：

a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	1
1	0	0	0
1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1
0	0	0	1
1	0	0	0
1	1	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮

此多项式 $f(x)$ 产生的序列周期是 5，不是 m 序列，所以不 $f(x)$ 是本原多项式。