

习题1

1. 化简下列复数, 并求出它的实部、虚部、共轭复数、模和辐角.

$$(1) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; \quad (2) \left(\frac{3-4i}{1+2i}\right)^2; \quad (3) i^8 - 4i^{21} + i.$$

2. 求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部、虚部和模.

3. 对于任意复数 z , $|z|^2 = z^2$ 是否成立? 如果是, 给出证明; 如果不是, 那么 z 满足什么条件时才成立.

4. 证明下列各题:

$$(1) \text{ 若 } |a| < 1, |b| < 1, \text{ 试证: } \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1;$$

$$(2) |a| = 1 \text{ 或者 } |b| = 1 \text{ 有一个成立时, 则 } \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1.$$

5. 判断下列命题的真假:

$$(1) \text{ 若 } c \text{ 为实常数, 则 } c = \bar{c};$$

$$(2) \text{ 对于任意 } z, \text{ 有 } \arg \bar{z} = -\arg z;$$

$$(3) \text{ 仅存在一个数 } z, \text{ 使得 } \frac{1}{z} = -z;$$

$$(4) |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|;$$

$$(5) \frac{1}{i} \bar{z} = \overline{iz}.$$

6. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式.

$$(1) i;$$

$$(2) -1;$$

$$(3) 1 + i\sqrt{3};$$

$$(4) \frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^3}{(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)^2}; \quad (5) 1 - \cos \varphi + i \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

7. 求下列各式的值.

$$(1) (\sqrt{3} - i)^5;$$

$$(2) (1 + i)^8;$$

$$(3) \sqrt[4]{-1};$$

$$(4) (-1 - i)^{\frac{1}{2}}.$$

8. 指出下列各式所确定的区域或闭区域, 并指明它是有界的还是无界的, 是单连通域还是多连通域.

(1) $\operatorname{Im}(z) < 1$;

(2) $|z - 1| > 4$;

(3) $1 < \arg z < \pi - 1$;

(4) $|z - 1| < 4|z + 1|$;

(5) $1 < |z| \leq 3$

(6) $1 \leq |z - i| \leq 4$;

(7) $|z - 2| - |z + 2| > 1$;

(8) $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$;

(9) $0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$;

(10) $0 < \operatorname{Im}(iz) < 2$.

9. 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

证明: $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$, 并说明其几何意义.

10. 试证: 复数 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圆周上或同一直线上的条件是

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = 0.$$

11. 证明: z 平面上的直线方程可以写成

$$a\bar{z} + \bar{a}z = c. \quad (a \text{ 是非零复常数}, c \text{ 是实常数})$$

12. 证明: z 平面上的圆的方程可以写成

$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + c = 0. \quad (a \text{ 是复常数}, c \text{ 是实常数})$$

13. 求下列极限:

(1) $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{\bar{z}}{z}$;

(2) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z\bar{z} + z^3 - \bar{z} + 2}{z^2 - 1}.$

14. 试证 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$ 不存在.

15. 设

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

求证 $f(z)$ 在原点处不连续.

16. 设

$$f(z) = \begin{cases} \frac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

求证 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点连续.

第一章 复数与复变函数

17. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处连续, 证明 $\overline{f(z)}$, $|f(z)|$ 在 z_0 处连续.