习　题　六

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$；　（5）$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$；　（6）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \end{pmatrix}$；

解：（1）矩阵的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix} 1-l & 2 \\ 5 & 4-l \end{vmatrix}=(l+1)(l-6),$$

所以特征值为 $l_1=-1,\ l_2=6$.

对特征值 $l_1=-1$，解齐次方程组$(A+E)X=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_1]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1\ (k_1\neq 0)$是对应于 $l_1=-1$的全部特征向量.

对特征值 $l_2=6$，解齐次方程组$(A-6E)X=0$，由

$$A-6E=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

所以$k_2p_2\ (k_2\neq 0)$是对应于 $l_2=6$ 的全部特征向量.

（2）矩阵的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l & 2 & 3\\ 0 & 1-l & 2\\ 0 & 0 & 1-l\end{vmatrix}=(1-l)^3,$$

所以特征值为 $l_1=l_2=l_3=1$.

对特征值 $l_1=l_2=l_3=1$，解齐次方程组$(A-E)X=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_2]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1\ (k_1\neq 0)$是对应于 $l_1=l_2=l_3=1$的全部特征向量.

（3）矩阵的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l & 2 & 3\\ 2 & 1-l & 3\\ 3 & 3 & 6-l\end{vmatrix}=-l(l+1)(l-9),$$

所以特征值为 $l_1=-1,\ l_2=0,\ l_3=9$.

对特征值 $l_1=-1$，解齐次方程组$(A+E)X=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&0\\0&0&5/2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_2]{\frac{2}{5}r_3}\begin{pmatrix}2&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1\ (k_1\neq 0)$是对应于 $l_1=-1$的全部特征向量.

对特征值 $l_2=0$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+3r_2\\r_1-2r_2}]{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_2p_2\left(k_2\neq 0\right)$是对应于$l_2=0$的全部特征向量.

对特征值$l_3=9$，解齐次方程组$\left(A-9E\right)X=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[8r_3]{3r_1,\ 12r_2}\begin{pmatrix}-24&6&9\\24&-96&36\\24&24&-24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-24&6&9\\0&-90&45\\0&30&-15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+15r_2]{-\frac{1}{45}r_2}\begin{pmatrix}-24&6&9\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}-24&0&12\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{12}r_1}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

所以$k_3p_3\left(k_3\neq 0\right)$是对应于$l_3=9$的全部特征向量.

（4）矩阵的特征多项式

$$f\left(l\right)=\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}2-l&5&-1\\-1&-3-l&0\\2&3&-2-l\end{vmatrix}=-\left(l+1\right)^3,$$

所以特征值为$l_1=l_2=l_3=-1$.

对特征值$l_1=l_2=l_3=-1$，解齐次方程组$\left(A+E\right)X=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}3&5&-1\\-1&-2&0\\2&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\-r_2}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1\left(k_1\neq 0\right)$是对应于 $l_1=l_2=l_3=-1$的全部特征向量.

（5）矩阵的特征多项式

$$f\left(l\right)=\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}1-l & -3 & 3\\ 3 & -5-l & 3\\ 6 & -6 & 4-l\end{vmatrix}=-\left(l-4\right)\left(l+2\right)^2,$$

所以特征值为 $l_1=l_2=-2,\ l_3=4$.

对特征值 $l_1=l_2=-2$，解齐次方程组$\left(A+2E\right)X=0$，由

$$A+2E=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1+k_2p_2$ (k_1,k_2 不同时为 0)是对应于 $l_1=l_2=-2$的全部特征向量.

对特征值 $l_3=4$，解齐次方程组$\left(A-4E\right)X=0$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 0 & -12 & 6\\ 0 & -12 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2,\ -\frac{1}{6}r_1,]{-\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{2r_1}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

所以$k_3p_3\left(k_3\neq 0\right)$是对应于 $l_3=4$的全部特征向量.

（6）矩阵的特征多项式

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(n-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=(n-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -\lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(n-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -\lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda\end{vmatrix},$$

所以特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=n$.

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \cdots,\ p_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

所以 $k_1p_1,k_2p_2,\cdots,k_{n-1}p_{n-1}\ (k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 的全部特征向量.

对特征值 $\lambda_n=n$，解齐次方程组 $(A-nE)X=0$，由

$$A-nE=\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{pmatrix}\xrightarrow[i=n-1,\cdots,1]{r_{i+1}-r_i}\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ n & -n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -n\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{\frac{1}{n}r_i}\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i+r_{i-1}}\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{\frac{1}{n}r_i}\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_1-r_i}\begin{pmatrix}-n & 0 & \cdots & n\\ 1 & 0 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{n}r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & -1\\ 1 & 0 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_n=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_n p_n\ (k_n\neq 0)$是对应于 $\lambda_n=n$的全部特征向量.

2. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & a\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2, \lambda_3=4$，求$a,b$的值.

解：依题意知

$$\begin{cases}\operatorname{tr}(A)=1-5+b=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ |A|=-12a+4b+36=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=16,\end{cases}$$

求解得$a=3, b=4$.

3. 已知 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$1,-1,2$，求以下各矩阵的所有特征值.

（1）$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　　　　　　　（2）$\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

解：（1）因为A的特征值分别为$1,-1,2$，所以$|A|=-2$．又因为

$$\lambda\left(|A|A^{\mathrm{T}}\right)=\lambda\left(-2A\right)=-2\lambda\left(A\right)$$

所以$|A|A^{\mathrm{T}}$的特征值分别为$-2,2,-4$.

（2）因为

$$l\left(A^3+2A^2-3A+E\right)=l^3(A)+2l^2(A)-3l(A)+1,$$

所以 A^3+2A^2-3A+E 的特征值分别为 $1,5,11$

4. 设 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 2 或 3.

证明：设 l 是矩阵 A 的特征值，则 l^2-5l+6 是 $A^2-5A+6E=0$ 的特征值，又因为零矩阵只有特征值 0，所以 $l^2-5l+6=0$，即 $l=2$ 或 $l=3$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶正交阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，试证 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

证明：因为 A 为正交阵，所以 $AA^T=E$，因此

$$|E-A|=\left|AA^T-A\right|=\left|A\left(A^T-E\right)\right|=|A|\left|A^T-E\right|=|A-E|=(-1)^3|E-A|=-|E-A|,$$

所以 $|E-A|=0$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&a&-2\\-4&-2&2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，求 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 的值.

解：因为矩阵 A 和 B 相似，所以 $|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$，即

$$\begin{cases}2a-4=-2b,\\a+3=b-1,\end{cases}$$

求解得 $\boldsymbol{a}=-1,\boldsymbol{b}=3$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，求参数 $\boldsymbol{x}$ 的值.

解：A 的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l&0&1\\3&1-l&x\\4&0&5-l\end{vmatrix}=-(l-1)^2(l-6),$$

所以特征值为 $l_1=l_2=1,\ l_3=6$. 根据矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件知

$R(A-E)=3-2=1$，$R(A-6E)=3-1=2$.

对特征值 $l_1 = l_2 = 1$，解齐次方程组 $(A-E)X=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

且 $R(A-E)=1$ 知 $x-3=0$，所以 $x=3$.

8. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $l_1=0, l_2=-1, l_3=9$，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

求该矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解：方法一：因为矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，所以 A 可以对角化，即 A 与 $\mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3)$. 令 $P=[p_1, p_2, p_3]$，则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3)$，即

$$A=P\mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-1&9\\0&1&9\\0&0&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$$

方法二：$A=\dfrac{l_1}{\|p_1\|^2}p_1p_1^T+\dfrac{l_2}{\|p_2\|^2}p_2p_2^T+\dfrac{l_3}{\|p_3\|^2}p_3p_3^T=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}^T+\dfrac{9}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}^T$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}.$$

9. 题 1 的六个方阵中，哪些可以对角化？其相似标准形和相似变换阵各是什么？

解：（1）因为矩阵 A 有两个线性无关的特征向量，所以可以相似对角化，其相似标准形为 $L=\begin{pmatrix}-1&\\&6\end{pmatrix}$，相似变换阵 $P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&5\end{pmatrix}$.

（2）因为矩阵 A 只有一个线性无关的特征向量，所以不可以相似对角化.

（3）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，所以可以相似对角化，其相似标准形为 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$，相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

（4）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量，所以不可以相似对角化.

（5）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，所以可以相似对角化，其相似标准形为 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 4\end{pmatrix}$，相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

（6）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以可以相似对角化，其相似标准形为 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \mathbf{O} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & n\end{pmatrix}$，相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & \mathbf{L} & -1 & 1\\ 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 1 & 1\end{pmatrix}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明：因为 $AB=ABE=ABAA^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{-1}(BA)\left(A^{-1}\right)$，所以 AB 与 BA 相似.

11. 已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

（1）求参数 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的值以及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值；

（2）问 $\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化？并说明理由.

解：（1）依题意，设 l 是特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值，那么 $Ap=l\,p$，即

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2-1-2=l,\\ 5+a-3=l,\\ -1+b+2=-l,\end{cases}$$

求解得 $a=-3, b=0,\ l=-1$.

（2）矩阵 A 的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l & -1 & 2\\ 5 & -3-l & 3\\ -1 & 0 & -2-l\end{vmatrix}=-(l+1)^3,$$

所以特征值为 $l_1=l_2=l_3=-1$.

对特征值 $l_1=l_2=l_3=-1$，解齐次方程组 $(A+E)X=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+5r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+2r_1]{-r_1,\ -r_3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

知 $R(A+E)=2\neq 3-3=0$，所以矩阵 A 不可以对角化.

12. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 求 A^{1000}.

解：矩阵 A 的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l & 2 & -3\\ 0 & -1-l & 1\\ 0 & 0 & -l\end{vmatrix}=(1+l)\,l\,(1-l),$$

所以特征值为 $l_1=-1,\ l_2=0,\ l_3=1$.

对特征值 $l_1=-1$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

所以 $k_1p_1\ (k_1\neq 0)$ 是对应于 $l_1=-1$ 的全部特征向量.

对特征值 $l_2=0$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_2p_2\left(k_2\neq 0\right)$是对应于 $l_2=0$ 的全部特征向量.

对特征值 $l_3=1$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\0&-2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&2&-3\\0&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\r_1+3r_2}]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

所以$k_3p_3\left(k_3\neq 0\right)$是对应于 $l_3=1$的全部特征向量.

令 $P=\left(p_1, p_2, p_3\right)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$L=\mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$P^{-1}AP=L$，即 $A=PLP^{-1}$，所以

$$A^{1000}=\left(PLP^{-1}\right)^{1000}=PL^{1000}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{1000}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{1000}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

13. 以下哪些是正交阵？说明理由.

（1）$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

解：（1）因为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以是正交矩阵.

（2）因为

$$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} \cos^2 q + \sin^2 q & \cos q \sin q - \sin q \cos q \\ \sin q \cos q - \cos q \sin q & \sin^2 q + \cos^2 q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以是正交矩阵.

（3）因为

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$$

$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以是正交矩阵.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的值.

解：因为

$$AA^T=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & a & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9} & 0 \\ \frac{2}{3}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9} & a^2+b^2+\frac{8}{9} & \frac{2}{3}a-\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3}a-\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9}=0 \\ a^2+b^2+\frac{8}{9}=1 \\ \frac{2}{3}a-\frac{1}{\sqrt{2}}b-\frac{2}{9}=0 \end{cases}$$

求解得 $a=\frac{1}{3}, b=0$.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量，证明 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是对称的正交阵.

证明：因为

$$H^T=\left(E-2aa^T\right)^T=E^T-2\left(a^T\right)^T a^T=E-2aa^T=H,$$

并且

$$H^TH=\left(E-2aa^T\right)\left(E-2aa^T\right)=E-4aa^T+4aa^Taa^T=E,$$

所以 $\boldsymbol{H}=E-2aa^T$ 为对称的正交矩阵.

16. 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$;（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$.

解：（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(l)=\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}2-l&-2&0\\-2&1-l&-2\\0&-2&-l\end{vmatrix}=(l+2)(l-1)(l-4),$$

所以特征值为 $l_1=-2,\ l_2=1,\ l_3=4$.

对特征值 $l_1=-2$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},$$

所以 $k_1p_1\ (k_1\neq 0)$ 是对应于 $l_1=-2$ 的全部特征向量.

对特征值 $l_2=1$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

所以 $k_2p_2\ (k_2\neq 0)$ 是对应于 $l_2=1$ 的全部特征向量.

对特征值 $l_3=4$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-2&-2&0\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_1,\ -r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_3p_3\left(k_3\neq 0\right)$是对应于$l_3=4$的全部特征向量.

令$P=\left(\dfrac{p_1}{\|p_1\|},\dfrac{p_2}{\|p_2\|},\dfrac{p_3}{\|p_3\|}\right)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，则

$$PP^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&8\\-4&1&-8\\-4&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

（2）矩阵A的特征多项式

$$f\left(l\right)=\left|A-lE\right|=\begin{vmatrix}1-l&0&2\\0&1-l&2\\2&2&-1-l\end{vmatrix}=\left(l-3\right)\left(l-1\right)\left(l+3\right),$$

所以特征值为$l_1=-3,\ l_2=1,\ l_3=3$.

对特征值$l_1=-3$，解齐次方程组$AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

所以$k_1p_1\left(k_1\neq 0\right)$是对应于 $l_1=-3$的全部特征向量.

对特征值 $l_2=1$，解齐次方程组$AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{\frac{1}{2}r_1,\ \frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以$k_2p_2\left(k_2\neq 0\right)$是对应于 $l_2=1$的全部特征向量.

对特征值 $l_3=3$，解齐次方程组$AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_3p_3\left(k_3\neq 0\right)$是对应于 $l_3=3$的全部特征向量.

令 $$P=\left(\frac{p_1}{\|p_1\|},\frac{p_2}{\|p_2\|},\frac{p_3}{\|p_3\|}\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-2&0&\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

则

$$PP^T=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-2&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-2&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-2&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&\sqrt{3}&3\sqrt{2}\\-3&\sqrt{3}&3\sqrt{2}\\6&0&3\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-18&0&0\\0&6&0\\0&0&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

17. 设 3 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $l_1=1, l_2=-1, l_3=0$，对应 l_1, l_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解： $$A=\frac{l_1}{\|p_1\|^2}p_1p_1^T+\frac{l_2}{\|p_2\|^2}p_2p_2^T+\frac{l_3}{\|p_3\|^2}p_3p_3^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}^T-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&0&6\\0&3&6\\6&6&0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

复　习　题　六

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$, 则以下向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是（ A ）·

（A）$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;　（B）$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$;　（C）$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;　（D）$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$.

解：$\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1g\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. l 是 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}$ 为对应的一个特征向量，则以下结论正确的是（ A ）

（A）$\boldsymbol{p}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 l^{-1} 的特征向量；

（B）$\boldsymbol{p}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的属于特征值 l 的特征向量；

（C）$(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

（D）$(\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都可表示为 $k\boldsymbol{p}$.

解：因为 $Ap=l\,p$，所以 $p=A^{-1}Ap=l\,A^{-1}p$，即 $A^{-1}p=l^{-1}p$，因此 A 正确.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ x & y & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为 1,2,3, 则必有（ B ）

（A）$x=2, y=4, z=8$;　　（B）$x=-1, y=4, z\in R$;

（C）$x=-2, y=2, z\in R$;　　（D）$x=-1, y=4, z=3$.

解：因为 $\begin{cases}1+y+1=1+2+3=6,\\ y-2x=6,\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=-1,\\ y=4\end{cases}$

4. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一行的所有元素之和都等于 a，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值（ A ）

（A）a;（B）$-a$;（C）0;（D）a^{-1} .

解：因为

$$Ae=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{L} & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{M} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ \mathrm{M} \\ a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{M} \\ 1 \end{pmatrix}=ae,$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 必是一个特征值，$\boldsymbol{e}$ 是其对应的特征向量.

5. 若 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是零，则以下结论不正确的是（ C ）

（A）$|\boldsymbol{A}|=0$；（B）$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$；（C）$R(\boldsymbol{A})=0$；（D）$|l\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=l^n$.

解：（A）$|A|=l_1 l_2 \mathbf{L}\, l_n=0$，（B）$\mathrm{tr}(A)=l_1+l_2+\mathbf{L}+l_n=0$

（C）令 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $|A-lE|=\begin{pmatrix} 1-l & -1 \\ 1 & -1-l \end{pmatrix}=l^2$，即 A 的特征值全为零，但是 $R(A)=1$.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同，且 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为（ C ）

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

解：因为 A 为奇异矩阵，所以 $|A|=0$. 又因为 $|A|=l_1 l_2 l_3=0$，且 A 的特征值互不相同，所以仅有一个特征值为 0，因此 $R(A)=R(A-0E)=3-1=2$.

7. 设 4 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{A})$=3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于（ D ）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解：设 l 是矩阵 A 的特征值，则 l^2+l 是 A^2+A 的特征值. 因为 $A^2+A=0$，所以其特征值只有零，即 $l^2+l=0$，因此 $l=0$ 或者 $l=-1$. 因为 $l=0$ 时，$R(A-lE)=R(A)=3$，所以特征值 $l=0$ 的重数为 $n-R(A)=1$. 又因为矩阵 A 只

有两个特征值，所以特征值 $l=-1$ 的重数为 3.

8. $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是（ B ）

（A）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$；　　　　（B）$\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量；

（C）$\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个不同的特征向量；　　（D）$\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个不同的特征值.

9. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，相似变换阵为 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 l 的特征向量，则以下是 $\boldsymbol{B}$ 的属于 l 的特征向量的是（ C ）

（A）$\boldsymbol{\alpha}$；　（B）$\boldsymbol{P\alpha}$；　（C）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；　（D）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

解：因为 $P^{-1}AP=B$，所以 $P^{-1}A=BP^{-1}$， 因此

$$B(P^{-1}a)=BP^{-1}a=P^{-1}Aa=P^{-1}l\,a=l\,(P^{-1}a).$$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶实对称阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是 A 的对应特征值 l 的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆阵，则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 对应于特征值 l 的特征向量是（ A ）

（A）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$；　（B）$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$；　（C）$\boldsymbol{P\xi}$；　（D）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$.

解：因为 $\left(P^{-1}AP\right)^{\mathrm{T}}\left(P^{T}x\right)=P^{T}A^{T}P^{-T}P^{T}x=P^{T}Ax=l\left(P^{T}x\right)$

11. 设 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是实对称阵又是正交阵，则（ CD ）

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；　（B）$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{E}$；　（C）$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$；　（D）$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.

解：因为 $A=A^T$，$AA^T=E$，所以 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T=A$. （C）因为 A 可逆，所以 A 等价于 E. （D）$A^2=AA=AA^T=E$.

12. 证明：若 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则其特征值只能是 0 或 1.

证明：设 l 是 A 的特征值，则 l^2-l 是 A^2-A 特征值. 因为 A^2-A 的特征值只有零，所以 $l^2-l=0$，即 $l=0$ 或 $l=1$.

13. 证明：若 $\boldsymbol{n}$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都相等，则 $\boldsymbol{A}$ 只能是对角阵.

证明：因为 A 为 n 阶实对称矩阵，l 是 A 的 n 重特征值，所以 $R(A-l\,E)=0$，即 $A-l\,E=0$，所以 $A=l\,E$ 只能是对角阵.

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},a_1\neq 0,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，

（1）证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值并判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化.

（1）证明：因为 $A^T=\left(\alpha\alpha^T\right)^T=\alpha\alpha^T=A$，所以 A 为实对称矩阵，因此 A 与对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 又因为 $R(\Lambda)=R(A)=1$，所以 Λ 只有一个非零对角元，因此 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值.

（2）因为 $\alpha\neq 0$，且 $A\alpha=\alpha\alpha^T\alpha=(\alpha^T\alpha)\alpha$，所以 $\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ 是非零特征值，且其对应的特征向量为 $k\alpha,k\neq 0$.

对于特征值 $\lambda=0$，解齐次方程组 $AX=0$，由

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_i-a_ir_1\\ i=2,\cdots,n}]{\frac{1}{a_1}r_1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ p_n=\begin{pmatrix} -a_n/a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此特征值 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

综上所述，矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，因此可以对角化，且其相似对角化矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \alpha^T\alpha & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 5 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值，求 $\boldsymbol{a}$ 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 能否对角

化.

解：矩阵 A 的特征多项式

$$f(l)=|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l & 2 & -3\\ -1 & 4-l & -3\\ 1 & a & 5-l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-l & 2 & -3\\ -2+l & 2-l & 0\\ 1 & a & 5-l\end{vmatrix}$$

$$=(l-2)\begin{vmatrix}1-l & 2 & -3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & a & 5-l\end{vmatrix}=(l-2)\begin{vmatrix}0 & 3-l & -3\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & a+1 & 5-l\end{vmatrix}=-(l-2)\begin{vmatrix}3-l & -3\\ a+1 & 5-l\end{vmatrix}$$

$$=-(l-2)\left(l^2-8l+18+3a\right).$$

因为矩阵 A 有一个二重特征值，所以

$$l^2-8l+18+3a=(l-4)^2 \text{ 或者 } l^2-8l+18+3a=(l-2)(l-6),$$

即 $a=-\dfrac{2}{3}$ 或者 $a=-2$.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，矩阵 A 的特征值为 $l_1=2,\ l_2=l_3=4$. 对特征值 $l_2=l_3=4$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -2/3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2/3 & -2\\ 1 & -2/3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2/3 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

知特征值 $l_2=l_3=4$ 只有 1 个线性无关的特征向量，因此不能相似对角化.

当 $a=-2$ 时，矩阵 A 的特征值为 $l_1=l_2=2,\ l_3=6$. 对特征值 $l_1=l_2=2$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

知特征值 $l_1=l_2=2$ 有 2 个线性无关的特征向量，因此可以相似对角化.

$(A-2E)x=0$ 的通解方程为 $x_1=2x_2-3x_3$，所以其基础解系为

$$p_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

对特征值 $l_3=6$，由

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5&2&-3\\-1&-2&-3\\1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1+5r_3}\begin{pmatrix}0&-8&-8\\0&-4&-4\\1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\r_3+2r_2}]{-\frac{1}{8}r_1,\ -\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

知$\left(A-6E\right)x=0$的通解方程为$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，所以其基础解系为

$$p_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

16. 证明：正交矩阵的特征值只能是 1 或-1.

证明：设 l 是正交矩阵A的特征值，则 l 和 l^{-1}分别是A^T和A^{-1}的特征值，又因为 $A^T=A^{-1}$，所以 $l=l^{-1}$，即 $l=1$或 $l=-1$.

17. 已知$\boldsymbol{A}$为 3 阶实对称阵，特征值为 $l_1=2,\ l_2=l_3=1$，且$\boldsymbol{p}_1=\left(1\quad 1\quad 0\right)^{\mathrm{T}}$是属于特征值 $l_1=2$的一个特征向量，求$\boldsymbol{A}$.

解：因为矩阵A为实对称矩阵，所以存在相互正交的特征向量p_1,p_2,p_3．令

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

则p_1,p_2,p_3相互正交，所以

$$A=\frac{l_1}{\left\|p_1\right\|^2}p_1p_1^T+\frac{l_2}{\left\|p_2\right\|^2}p_2p_2^T+\frac{l_3}{\left\|p_3\right\|^2}p_3p_3^T=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}^T+\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^T+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$