浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2020 ～ 2021 第 二 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：___________________选课班中编号：_____

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

1. 已知$\left|A_{2\times 2}\right| = -2$，则$\left|-3A^{-1}\right| =$______.

2. 若对任意的 3 维列向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$则 $A =$____________.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，$\mathrm{R}(A^*) =$______，$A^* =$____________.

4. 将 2 阶矩阵 A 的第一列乘以 3，再将第二列的 −2 倍加到第一列得矩阵 B，

   则满足 $B = AP$ 的矩阵 P 为____________.

5. 如果向量组$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$线性无关，则参数 k 满足______.

6. 向 量 空 间 $\{(x, y, z) \mid x = 2y = 3z\}$ 的 维 数 是 ________， 一 组 基

   为______________________________.

7. 实 向 量 空 间 R^2 中 的 向 量 $\beta=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ 在 基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 下 的 坐 标

为__________________.

8. 若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，其中 $P=(\alpha,\beta)$，令 $Q=(\alpha+\beta,\beta)$，则

$Q^{-1}AQ=$_____________.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则以下一定正确的是 (　　).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$(　　).

(A) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$　(B) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$　(C) $2|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$　(D) $2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S\ (s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意向量非零

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意两个向量线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意 s-1 个向量线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_S$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示

4. 若 $|A_{n\times n}|=0$，但 $A^*\neq 0$，则 $AX=0$ 的解空间维数为(　　).

(A) n　(B) 1　(C) n-1　(D) 0

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则下列矩阵中(　　)是可逆矩阵.

(A) $2\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2$　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$

三. 计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求$|A|$.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,矩阵 X 满足 $XA-B=2X$, 求 X .

3. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\\lambda\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$的秩为 2.

(1) 求参数λ；

(2) 求该向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

4. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2-x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 问：

（1）当参数k满足什么条件时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？

（2）有无穷多解时，求方程组的通解.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

四、证明题（共 10 分）

1	2	本题总得分

1. （6 分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

2. （4 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：
   存在 $\boldsymbol{A}$ 的如下分解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.