浙江工业大学
32 学时线性代数期末试卷
(2021 ～ 2022 学年第二学期)

院系____________班级____________任课教师_________考试时间____________

学号____________________姓名____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. | 得分 | | 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-1$, 则$D_1=\begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & b_3 \\ -2c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix}=$_______.

2. 设n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 4, 则向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$ 的秩为 _______.

3. 设A 为三阶方阵, A^* 为A 的伴随矩阵, 且$|A|=\frac{1}{2}$, 则$|-3A^*|=$_______.

4. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B, 则 $R(A-2E)+R(A-E)=$ _______.

5. 设 $A=(1,2,3),B=(1,1,1)$, 则 $(A^TB)^2=$_______.

6. 向量 $\beta=(1,-1,3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1=(1,0,2)$, $\alpha_2=(0,1,2)$, $\alpha_3=(1,2,0)$ 下的坐标为 _______.

7. 与向量 $(1,2,2),(-1,0,2)\in\mathbb{R}^3$ 都垂直的单位向量为 _______.

8. 若矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 的特征多项式相同, 则 $x=$_______.

9. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1, 2, 3, 则 $x+y=$_______.

10. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2x_1x_2+2x_2x_3$ 是正定的, 则 k 的取值范围是 _______.

二. | 得分 | | 单项选择题 (每小题 2 分, 共 10分)

1. 设 A 是 2×3 矩阵, B 是 3×2 矩阵, 则下列正确的是(　　　　)

(A) $|AB| = 0.$　　(B) AB 与 BA 的秩相等
(C) $|AB| = |BA|$　　(D) $|BA| = 0$

2. 非齐次线性方程组$AX = b$ 中未知数个数为n, 方程个数为m, 系数矩阵A 的秩为r, 则(　　　　).

(A) $r = m$ 时, 方程组 $AX = b$ 有解　　(B) $r = n$ 时, 方程组 $AX = b$ 有唯一解
(C) $m = n$ 时, 方程组 $AX = b$ 有唯一解　　(D) $r < n$ 时, 方程组 $AX = b$ 有无穷多解

3. n 阶方阵A 与对角矩阵相似的充要条件是(　　　　)

(A) 方阵 A 有 n 个特征值　　(B) 方阵 A 的特征方程没有重根
(C) 方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量　　(D) $A \neq 0.$

4. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的秩为 s, 则 (　　　　).

(A) $r = s$　　(B) $r \leq s$
(C) $s \leq r$　　(D) $s < r$

5. 设A, B 为 n 阶方阵, 则下列说法正确的是(　　　　).

(A) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$　　(B) $AB = 0$, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$
(C) $(AB)^T = A^T B^T$　　(D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

三. | 得分 | | 计算题(每小题10 分, 共50 分)

1. 设3阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 16\alpha_3)$, 已知$|A| = 1$, 求$|B|$.

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程: $AX = X + C$.

3. 求一个非齐次线性方程组，使得其通解为

$$X = (1, -1, 3)^T + k_1(-1, 3, 2)^T + k_2(2, 1, 1)^T,$$

其中k_1, k_2为任意常数.

4. 用正交线性变换将 $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+x_2^2+7x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$化为标准形.

5. λ 取何值时, 非齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

(1) 有唯一解; (2)无解; (3) 有无穷多解.

四. (10 分)

得分	

证明题(每小题5 分, 共10 分)

1. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为r, 在其中任取m 个向量$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$, 证明: $R(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}) \geq r + m - s$.

2. 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 若 $|A| = 1, |B| = -1$, 证明: $|A + B| = 0$.