浙 江 工 业 大 学
32 学 时 线 性 代 数 期 末 试 卷
答 案 及 评 分 标 准
（ 2021 ～ 2022 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：____________________选课班中编号：______

学号：____________________ 姓名：________________ 得分：__________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})_{2\times2}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})_{2\times2}$，已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=1$ 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ __6__.

2. 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=$ __$(x_1+2x_2，\ 2x_1+3x_2)$__.

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&1\\4&5&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}， $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$

 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=$ __-4__， $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ __$\begin{pmatrix}-1/12&0&-1/6\\-1/6&-1/4&-1/12\\-1/3&-5/12&1/12\end{pmatrix}$__.

4. 将 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行互换得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 3 行加到第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{C}$，满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=$ __$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$__.

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}k\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $k=$ __-1__.

6. 向量空间$\{(x,y,z)\,|\,x-2z=0\}$的维数是 2 ，一组基为 (2, 0, 1), (0, 1, 0).

7. 实向量空间$\mathbf{R}^2$中的向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$在基$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$下的坐标为 $(-1, 2)^{\mathrm{T}}$.

8. 若$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$, 其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，令$\boldsymbol{Q}=(2\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{\beta})$, 则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}0&-1/2\\0&2\end{pmatrix}$.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则以下命题中正确的是 (C).

   (A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$

   (C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$　(D) 若$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$

2. 如果排列$x_1x_2\cdots x_n$的逆序数为 k，则排列$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的逆序数为(C).

   (A) k　(B) $n-k$　(C) $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$　(D) $k-\dfrac{n(n-1)}{2}$

3. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则(D).

   (A) 必有某个向量为零向量

   (B) 必有 2 个向量成比例

   (C) 任意向量可由其余向量线性表示

   (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$一定线性相关

4. 设非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$有解，则以下不可能的是(D).

   (A) R($\boldsymbol{A}$)=n　(B) R($\boldsymbol{A}$)<n　(C) R($\boldsymbol{A}$)=m　(D) R($\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}$)>$m$

5. 设λ_1,λ_2是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值λ_1,λ_2的特征向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是 (D).

   (A) $\lambda_1=0$　(B) $\lambda_1\neq 0$　(C) $\lambda_2=0$　(D) $\lambda_2\neq 0$

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a & b & c\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

解：$|\boldsymbol{A}|=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=-(b-a)(c-a)(c-b)$

（5 分）　　（10 分）

其他做法酌情给分。

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解：$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$为可逆矩阵，（2 分）

计算得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$（5 分）

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

（7 分）　　（10 分）

3. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$的秩、极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

解：$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\xrightarrow{\text{初等行}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ （6 分）

所以该向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

（8 分） （10 分）

4. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+2x_2+kx_3=3\\kx_1+x_2+2x_3=2\end{cases}$ 问：

(1). 当参数 k 满足什么条件时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？
(2). 有无穷多解时，求方程组的通解.

解：(1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{初等行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1-k&k+2&-k+2\\0&0&k+2&1\end{pmatrix}$ （2 分）

当$k\neq1$且$k\neq-2$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 有唯一解； （4 分）

当$k=-2$时，$R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 无解； （6 分）

当$k=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$, 有无穷多解； （8 分）

(2) 当$k=1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{初等行}}\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{4}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

通解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4/3\\0\\1/3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, k为任意数. （10 分）

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$；(2) 求 $\left|(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{100}\right|$.

解：(1) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，

由条件得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (2 分)

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$ （4 分）

$$=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1/2&0\\-1&1&-1\\1&-1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$ （7 分）

(2) 由(1)得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，1，-1，

所以 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3，3，1，

所以 $\left|(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{100}\right|=\left|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|^{100}=(3\times3\times1)^{100}=3^{200}$ （10 分）

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. （6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，皆满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证：令 $\boldsymbol{E_n}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE_n}=(\boldsymbol{Ae}_1,\cdots,\boldsymbol{Ae}_n)=(\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$.

（2 分）　　（4 分）　　（6 分）

其他做法酌情给分。

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{AB}$ 的特征值为 1 或 0.

证：因为 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$，所以 $(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{ABA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，　　（2 分）

所以 $\varphi(x)=x^2-x=x(x-1)$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的一个化零多项式,

所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值为 1 或 0.　　（4 分）