______________大学　高等数学 A-1　试题卷

五 校 联 考 试 卷 （ 一 ） 评 分 细 则

2020 --2021 学年第一学期　使用班级 ________________

一、　选择题：BABDC

二、　填空题

1. $y=-x$　　2. $a=6,b=2$　　3. $2020!\cdot\left(\frac{1}{2^{2021}}-\frac{1}{3^{2021}}\right)$　　4. $2-\frac{\pi}{2}$

5. $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$

三、1．解　原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})(5^x-3^x)}$（直接洛必达或者等价无穷小替换）

【2 分】

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+\cos x}{5^x\ln 5-3^x\ln 3}$$ 【3 分】$=\frac{1}{\ln 5-\ln 3}$．【2 分】

2. 解 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cos t^2}{t^2}=\frac{2\cos t^2}{t}$【3 分】，$\frac{dy}{dt}=-\frac{3t^2\sin t^3}{t^3}=-\frac{3\sin t^3}{t}$，【3 分】

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{3\sin t^3}{t}\times\frac{t}{2\cos t^2}=-\frac{3\sin t^3}{2\cos t^2}$【1 分】

3. 解 $\int\frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$（或直接三角代换 3 分）

$$=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C$.（前面积分【2 分】，后面积分【2 分】）

4. 解 原式=$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}x\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx$【2 分】（此题不加绝对值，原函数正确，给 4 分）

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\pi}x\cos\frac{x}{2}dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\cos\frac{x}{2}dx\right]$$ 【2 分】

$$=\sqrt{2}\left(2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-\sqrt{2}\left(2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$ 【2 分】$=4\sqrt{2}\pi$.【1 分】

四、1. 证明：$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$【3 分】$=\dfrac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}$

$$\overset{\substack{\text{由中值定理}\\ \exists\xi\in(0,x)}}{=}\dfrac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}\text{【3 分】}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x}\overset{f'\text{递增}}{\geq}0\text{【1 分】}$$

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

2. 解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$，【3 分】$\int_{-\infty}^{a}te^{2t}dt=\dfrac{1}{2}ae^{2a}-\dfrac{1}{4}e^{2a}$.【3 分】

所以 $e^{2a}=\dfrac{1}{2}ae^{2a}-\dfrac{1}{4}e^{2a}$，$a=\dfrac{5}{2}$.【1 分】

3. 解 $y=2x-x^2$ 与 $y=x$ 的交点为 $(0,0),(1,1)$.（只有图或交点，面积没有写出来 1 分）

面积 $A=\int_0^1(1+\sqrt{1-y}-y)dy=(y-\dfrac{2}{3}(1-y)^{3/2}-\dfrac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=\dfrac{7}{6}$.【3 分】

体积 $V=\pi\int_0^1[(1+\sqrt{1-y})^2-y^2]dy=\pi[2y-\dfrac{4}{3}(1-y)^{3/2}-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{3}y^3]\Big|_0^1=\dfrac{5}{2}\pi$.【3 分】

五、1. 解 令 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+A$，则

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$【2 分】

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1,x=1,x=2$.【1 分】

经讨论知 $f(-1)=A-19$ 为极小值【1 分】，$f(1)=A+13$ 为极大值【1 分】，$f(2)=A+8$ 为极小值【1 分】. 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，（无极限，其他全对，扣 2 分）

故要使方程恰有四个实根，则 $f(-1)=A-19<0$，$f(1)=A+13>0$　$f(2)=A+8<0$，即 $-13<A<-8$.【2 分】

2. 解 因为 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot\cos nxdx=\dfrac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xd\sin nx=-\dfrac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nxd\cos^n x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\sin x\cdot\sin nxdx$【4 分】，

所以 $2I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos(n-1)xdx=I_{n-1}$.

由此得到递推式$I_n=\frac{1}{2}I_{n-1}=\cdots=\frac{1}{2^{n-1}}I_1$【2 分】，

而$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{4}$【1 分】，所以$I_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}$【1 分】.

六、（1）证明：不妨设$f(x)$在x_0处取到极大值，则当$x\in U(x_0)$时，有$f(x)\le f(x_0)$.

由于$f(x)$在x_0处可导，因此有（此题导数定义写出来 2 分）

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,【1 分】$$

且$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.【1 分】$$

所以$f'(x_0)=0$.

（2）证明：如果$f(x)\equiv A$，命题显然成立.

若$f(x)$不恒等于A，则必存在x_0，使得$f(x_0)\ne A$，不妨设$f(x_0)<A$，所以有$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x_0)]=A-f(x_0)>0$，由函数极限的局部保号性，必存在$X>0$，当$|x|>X$时，有$f(x)>f(x_0)$，在$x_0$的两侧各取两点$a,b$，使得$a<-X,b>X$，因此有$f(a)>f(x_0)$且$f(b)>f(x_0)$. 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以必有最小值，该最小值一定在$(a,b)$内某点$\xi$处取到，故是极小值，又$f(x)$可导，所以由费马引理，知$f'(\xi)=0$，得证.【3 分】