习 题 二

1. 下列矩阵中，哪些是对角矩阵、三角矩阵、数量矩阵、单位矩阵?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

解：$\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 是三角矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是数量矩阵.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2y-x&3\\4&2&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2z&2x-y&4\end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x, y, z.

解：因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，所以

$$\begin{cases}2y-x=2,\\4=2z,\\2=2x-y,\end{cases}$$

求解得 $x=2,\ y=2,\ z=2$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$

（1） 计算 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$;

（2）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{X}$;

（3）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}, 2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$.

解：（1）$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&7\\7&3&8\end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&1\\-4&-1&4\end{pmatrix};$$

（2）$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{O}$

$$\boldsymbol{X}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{2}{3}\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}\right]=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1&4&4\\5&2&4\end{pmatrix}.$$

（3） $\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}, 2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$

$$X=\frac{1}{3}(2B-A)=\frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&2&-1\\4&1&-4\end{pmatrix},$$

$$Y=\frac{1}{3}(2A-B)=\frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&2&5\\1&1&8\end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积矩阵：

（1） $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\times1+2\times2+3\times3=14;$

（2） $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix};$

（3） $\begin{pmatrix}1&-1&4&5\\2&1&3&-2\\3&-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\4&-1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&10\\17&-5\\8&-5\end{pmatrix};$

（4） $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&2\\1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&-2\end{pmatrix};$

原式 $=\begin{pmatrix}-6&8\\1&2\\-12&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14&12&-22\\-1&8&-3\\-26&18&-40\end{pmatrix};$

（5） $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$

（6） $(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};$

原式 $=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3;$$

（7）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$;

（8）$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-2a_{12}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}-2a_{22}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}-2a_{32}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

5. 设有 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1,\ |\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}|$.

解：

$$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}|=\left|\begin{pmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}a_1+3b_1&4c_1&4d_1\\a_2+3b_2&4c_2&4d_2\\a_3+3b_3&4c_3&4d_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&4c_1&4d_1\\a_2&4c_2&4d_2\\a_3&4c_3&4d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b_1&4c_1&4d_1\\3b_2&4c_2&4d_2\\3b_3&4c_3&4d_3\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{vmatrix}+48\begin{vmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}$$

$$=16+48\times2=112.$$

6. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$; （2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$; （3）比较（1）和（2）的结果，可以得出什么结论？

解：

（1）

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&3\\3&4&3\\3&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&4&3\\3&0&10\end{pmatrix};$$

（2）

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\left[\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&4&2\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0&6\\-6&0&0\\-6&0&9\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&3\\6&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&6\\-3&0&0\\-6&0&0\end{pmatrix};$$

（3）因为 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2.$$

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解：设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{12}&x_{22}\end{pmatrix}$是与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵，那么

$$AX=XA$$

又因为

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\3x_{11}+2x_{21}&3x_{12}+2x_{22}\end{pmatrix}$$

$$XA=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+3x_{12}&2x_{12}\\x_{21}+3x_{22}&2x_{22}\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\3x_{11}+2x_{21}&3x_{12}+2x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+3x_{12}&2x_{12}\\x_{21}+3x_{22}&2x_{22}\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}x_{11}=x_{11}+3x_{12}\\x_{12}=2x_{12}\\3x_{11}+2x_{21}=x_{21}+3x_{22}\\3x_{12}+2x_{22}=2x_{22}\end{cases},\quad \text{求解得}\quad \begin{cases}x_{11}=x_{11}\\x_{12}=0\\x_{21}=3x_{22}-3x_{11}\\x_{22}=x_{22}\end{cases}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 3x_{22}-3x_{11} & x_{22} \end{pmatrix},\ x_{11},x_{22}\in R.$$

8. 求下列矩阵的 k 次幂，其中 k 为正整数

（1）$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$;

解：因为

$$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2q & -\sin 2q \\ \sin 2q & \cos 2q \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} \cos 2q & -\sin 2q \\ \sin 2q & \cos 2q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 3q & -\sin 3q \\ \sin 3q & \cos 3q \end{pmatrix};$$

猜想

$$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos kq & -\sin kq \\ \sin kq & \cos kq \end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明。当 $k=2$ 时，结论成立。假设 $k=n$ 时结论成立，那么当 $k=n+1$ 时，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^{n+1}&=\begin{pmatrix} \cos nq & -\sin nq \\ \sin nq & \cos nq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} \cos(n+1)q & -\sin(n+1)q \\ \sin(n+1)q & \cos(n+1)q \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos kq & -\sin kq \\ \sin kq & \cos kq \end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

解：方法 1：因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2\times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

猜想

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明。当$k=2$时，结论成立。假设$k=n$时结论成立，那么当$k=n+1$时，

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2(n+1)\\0 & 1\end{pmatrix};$$

所以

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

方法 2：令

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=B+E\text{，且}B^i=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ i\ge 2,$$

另一方，根据 Newton 二项公式知

$$(B+E)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iB^i=E+kB,$$

所以

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^k=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\right)^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

解：方法 1：因为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3(3-1)/2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4(4-1)/2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

猜想

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k&k(k-1)/2\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明。当$k=2$时，结论成立。假设$k=n$时结论成立，那么当$k=n+1$时，

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1&(n+1)(n+1-1)/2\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

方法 2：令

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B+E,$$

且

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B^i=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ i\geq 3$$

另一方，根据 Newton 二项公式知

$$(B+E)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iB^i=E+kB+\frac{k(k-1)}{2}B^2,$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&k&k(k-1)/2\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$， 其中 $\boldsymbol{k}$ 为正整数.

解：因为

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(1,2,3)\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/3\end{pmatrix}=3,\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 1/2\quad 1/3)=\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^k=a^Tba^Tb\cdots a^Tba^Tb=(ba^T)^{k-1}a^Tb=3^{k-1}A=3^{k-1}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{pmatrix}.$$

10. 证明任何一个方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为任一方阵. 令

$$B=\frac{A+A^T}{2},\qquad C=\frac{A-A^T}{2},$$

显然, $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为反对称矩阵, 并且 $A=B+C$. 得证.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

证明：因为 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵，所以

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA,$$

反之，若 $AB=BA$, 那么

$$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB,$$

因此 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵。

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

证明：因为

$$(B^T AB)^T = B^T A^T (B^{\mathrm{T}})^T = B^T AB\,,$$

所以 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$

证明：因为

$$\left|A+E\right| = \left|A+AA^T\right| = \left|A(E+A^T)\right| = \left|A\right|\left|E+A^T\right| = -\left|E+A\right| = -\left|A+E\right|$$

所以 $\left|A+E\right|=0$ 。

14. 求下列矩阵的逆矩阵

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

解：$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

（2）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

解：$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

（3）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

解：因为

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix} = -27,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} = -3,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -6,\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&2\\-2&1\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&-2\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&2\\1&-2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&-2\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix};$$

（4）$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

解：方法 1：因为

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-5.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&0\\0&5\end{vmatrix}=15,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\0&5\end{vmatrix}=-10,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\0&5\end{vmatrix}=-10,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1,$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15&-10&0\\-10&5&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}$$

方法 2：令

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{pmatrix},\text{ 其中 }A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},A_{22}=5.$$

因为

$$A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix},\qquad A_{22}=\frac{1}{5},$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

解：因为 $AA^*=|A|E$，且 $|A|=18$，所以

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

证明：因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，所以

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})(A(A+B)^{-1}B)&=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B\\&=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B\\&=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}B=E.\end{aligned}$$

即 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

17. 解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&4\end{pmatrix}$.

解：因为 $\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&-2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$, 所以

$$X=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3&5\\-5&5&-6\end{pmatrix}.$$

（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解：因为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，所以

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

解：因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 30 & -42 \\ -22 & 32 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 & -21 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}.$$

18. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，已知$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求$\boldsymbol{B}$.

解：因为$AB=A+2B=A+2EB$，所以

$$B=(A-2E)^{-1}A$$

又因为

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$B=(A-2E)^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&1\\2&0&3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&0&0\\2&4&-2\\-8&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&-1\\-4&0&3\end{pmatrix}.$$

19. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解：因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-2$，$A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$，所以

$$A^*BA-2BA=-2(A^{-1}+E)BA=-4E$$

因此，

$$\begin{aligned}B&=2(A^{-1}+E)^{-1}A^{-1}=2(AA^{-1}+AE)^{-1}=2(E+A)^{-1}\\&=2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

20. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=0$，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$

证明：因为 $A^3+A^2-A+2E=A^2(A+E)-(A+E)+3E=0$，所以

$$-\frac{1}{3}(A^2-E)(A+E)=E$$

因此，$A+E$ 可逆，且

$$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A^2-E).$$

21. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且对某个正整数 m 有 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，并求其逆

证明：方法 1. 因为

$$\begin{aligned}E&=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}+A^m+\cdots)\\&=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})\end{aligned}$$

所以

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}.$$

方法 2. 根据泰勒展开

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\mathbf{L}+x^m+\mathbf{L}$$

知

$$\begin{aligned}(E-A)^{-1}&=E+A+A^2+\mathbf{L}+A^{m-1}+A^m+\mathbf{L}\\&=E+A+A^2+\mathbf{L}+A^{m-1}\end{aligned}$$

22．若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，试证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是不可逆矩阵

证明：因为

$$A(A+B)B=A^2B+AB^2=B+A=A+B,$$

所以

$$|A+B|=|A(A+B)B|=|A||A+B||B|=|A||B||A+B| \qquad (22.1)$$

又因为

$$A^2=E\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$$
$$B^2=E\Rightarrow|B|^2=1\Rightarrow|B|=\pm1$$
$$|A|+|B|=0$$

所以 $|A|=1,|B|=-1$，或者 $|A|=-1,|B|=1$，即

$$|A||B|=-1$$

所以由（22.1）式得

$$|A+B|=-|A+B|$$

即

$$|A+B|=0,$$

所以 $A+B$ 不可逆。

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，求（1）$|2\boldsymbol{A}^{-1}|$ （2）$|\boldsymbol{A}^*|$ （3）$|(\boldsymbol{A}^*)^*|$ （4）$|3\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

解：（1）因为 $AA^{-1}=E$，所以 $|A||A^{-1}|=1$，即 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$。所以

$$|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=2^3\frac{1}{|A|}=4$$

（2）因为 $AA^*=|A|E$，所以 $|A||A^*|=|A|^3$，因此

$$|A^*|=\frac{|A|^3}{|A|}=|A|^2=4$$

（3）由（2）知

$$|(A^*)^*|=\left|A^*\right|^2=16$$

（4）

$$|3A^{-1}-2A^*|=\left|\frac{3}{|A|}A^*-2A^*\right|=\left|-\frac{1}{2}A^*\right|=\left(-\frac{1}{2}\right)^3|A^*|=-\frac{1}{2}$$

24. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}|$（$k$ 为正整数）

解：

$$|B^{-1}A^kB|=|B^{-1}||A^k||B|=|B^{-1}||B||A^k|=|B^{-1}B||A^k|=|A^k|=|A|^k=2^k$$

25.（1）设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，证明 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}$.

证明：

$$B^k=(P^{-1}AP)^k=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^kP.$$

（2）设 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，且 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{2014}$.

解：因为 $AP=PB$，所以

$$\begin{aligned}A=PBP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$A^{2014}=(PBP^{-1})^{2014}=PB^{2014}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}^{2014}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

26. 利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&1\\0&0&-3&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,

解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\O&A_{22}\end{pmatrix},\text{ 其中 }A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&1\\0&0&-3&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&B_{12}\\O&B_{22}\end{pmatrix},\text{ 其中 }B_{12}=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix},B_{22}=\begin{pmatrix}-3&2\\0&2\end{pmatrix},$$

那么

$$A_{11}B_{12}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-6&3\end{pmatrix},\quad A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&6\\0&2\end{pmatrix},$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\O&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_{12}\\O&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{11}B_{12}+B_{22}\\O&A_{22}B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-4&4\\0&3&-6&5\\0&0&-6&6\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix}a&0&1&0\\0&a&0&1\\1&0&b&0\\0&1&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&c\\c&0\\0&d\\d&0\end{pmatrix}$.

解：令

$$A=\begin{pmatrix}a&0&1&0\\0&a&0&1\\1&0&b&0\\0&1&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\E&A_{22}\end{pmatrix},\text{ 其中 }A_{11}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0&c\\c&0\\0&d\\d&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{12}\end{pmatrix}，\text{其中 } B_{11}=\begin{pmatrix}0&c\\c&0\end{pmatrix},B_{12}=\begin{pmatrix}0&d\\d&0\end{pmatrix},$$

那么

$$A_{11}B_{11}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&c\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&ac\\ac&0\end{pmatrix},\qquad A_{22}B_{12}=\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&d\\d&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&bd\\bd&0\end{pmatrix},$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&E\\E&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+B_{12}\\B_{11}+A_{22}B_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&ac+d\\ac+d&0\\0&c+bd\\c+bd&0\end{pmatrix}.$$

27. 利用分块矩阵求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$;

解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&4\end{pmatrix}，\text{其中 } A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-3\end{pmatrix}.$$

因为 $A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2\\2&1\end{pmatrix}$， 所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\2&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix}3&1&0&0\\4&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$,

解：令

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\4&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{pmatrix},\ \text{其中}\ A_{11}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

因为 $A_{11}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1\\-4&3\end{pmatrix}$， $A_{22}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$. 所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-4&3&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&3&-1\end{pmatrix}.$$

（3）$\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&3&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&2&4\end{pmatrix}$,

解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&3&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O&O\\O&5&O\\O&O&A_{22}\end{pmatrix},\ \text{其中}\ A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}.$$

因为 $A_{11}^{-1}=-\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$， $A_{22}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3/2\\-1&1\end{pmatrix}$. 所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O&O\\O&1/5&O\\O&O&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&0&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&0&1/5&0&0\\0&0&0&2&-3/2\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

28. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 利用分块矩阵计算 $\boldsymbol{A}^{2014}$.

解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{pmatrix}，其中 A_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}，\quad A_{22}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $A_{11}^{2014}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{2014}=\begin{pmatrix}1&2014\\0&1\end{pmatrix}$，$A_{22}^{2014}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}^{2014}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. 所以

$$A^{2014}=\begin{pmatrix}A_{11}^{2014}&O\\O&A_{22}^{2014}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2014&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\5&1&0&0\\0&0&4&2\\0&0&3&-1\end{pmatrix}$,利用分块矩阵计算$\left|\boldsymbol{A}^{2014}\right|$

解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\5&1&0&0\\0&0&4&2\\0&0&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{pmatrix}，其中 A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\5&1\end{pmatrix}，\quad A_{22}=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}.$$

因为

$$|A|=\begin{vmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|=\begin{vmatrix}1&2\\5&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&2\\3&-1\end{vmatrix}=(-9)\times(-10)=90.$$

所以

$$\left|A^{2014}\right|=|A|^{2014}=90^{2014}.$$

30.（1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，求$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的逆；

解：因为

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&E\\E&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1},$$

因此

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

（2） 利用（1），求 $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$ 的逆.

解：令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_{12} \\ a_n & O \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } A_{12} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

因为

$$A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & 1/a_n \\ A_{12}^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

31. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 可逆，证明 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}.$$

证明：方法 1：因为 A, C 可逆，故 $|A| \neq 0,\ |C| \neq 0$，所以

$$\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = |A||C| \neq 0,$$

因此$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$可逆。又因为

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ BA^{-1} - CC^{-1}BA^{-1} & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

方法 2：因为 A, C 可逆，故 $|A| \neq 0,\ |C| \neq 0$，所以

$$\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = |A||C| \neq 0,$$

因此$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$可逆。设其逆矩阵为$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$，那么

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} AX_{11} = E, \\ AX_{12} = O, \\ BX_{11} + CX_{21} = O, \\ BX_{12} + CX_{22} = E, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_{11} = A^{-1}, \\ X_{12} = O, \\ X_{21} = -C^{-1}BA^{-1}, \\ X_{22} = C^{-1}, \end{cases}$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

复 习 题 二

1．设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times m}(m\neq n)$，则下列结果不为 n 阶方阵的是（ B ）

（A）$\boldsymbol{BA}$　　（B）$\boldsymbol{AB}$　　（C）$(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$　　（D）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，则必有（ D ）

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　（B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　（C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　（D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

解：$ABC=E \Leftrightarrow (AB)=C^{-1} \Leftrightarrow A^{-1}=BC \Leftrightarrow CAB=E \Leftrightarrow BCA=E$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=$（ A ）

（A）$3\boldsymbol{E}$　　（B）$2\boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{E}$　　（D）$\boldsymbol{O}$

解：$AB=BC=CA=E \Rightarrow \begin{cases} ABC=C=A \\ BCA=A=B \end{cases} \Rightarrow A=B=C \Rightarrow A^2=B^2=C^2=E$

4. 下列结论中不正确的是（ C ）

（A）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}.$

（B）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times1$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}.$

（C）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2.$

（D）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则对任意正整数 k,m 有 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k.$

解：（C）因为 $BA\neq AB=0$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，则下列矩阵为对称矩阵的是（ C ）

（A）$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　（B）$\boldsymbol{CAC}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶方阵）　（C）$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$　（D）$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

解：（A）$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$ 反对称

（B）$(CAC^T)^T=CA^TC^T\neq CAC^T$

（C）$(AA^{\mathrm{T}})^T=AA^T$

（D）$(2A+A^{\mathrm{T}})^T=2A^T+A\neq 2A+A^{\mathrm{T}}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶对称矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则下列矩阵为对称矩阵的是 （ B ）

（A） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$ （B） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$ （C） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ （D） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

解:（A） $(A^{-1}B-BA^{-1})^T=BA^{-T}-A^{-T}B^T=BA^{-1}-A^{-1}B=-(A^{-1}B-BA^{-1})$

（B） $(A^{-1}B+BA^{-1})^T=B^TA^{-T}+A^{-T}B^T=BA^{-1}+A^{-1}B=A^{-1}B+BA^{-1}$

（C） $(A^{-1}BA)^T=A^TB^TA^{-T}=ABA^{-1}$

（D） $(ABA^{-1}B)^T=B^TA^{-T}B^TA^T=BA^{-1}BA$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有（ A ）

（A） $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$ （B） $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

（C） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ （D） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则必有（ C ）

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （B） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （C） $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$ （D） $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

9. 以下结论正确的是（ C ）.

(A) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（B）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵.

（D）对任意的同阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则下列结论中不正确的是（ D ）

（A） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ （B） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$

（C） $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ （D） $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，则必有（ C ）

（A） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ （B） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ (D) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则（ B ）

（A） $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆,必有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆; （B） $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆, 必有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 不可逆；

（C）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆;（D）$\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 均不可逆, 必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆。

解：（A）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$可逆，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆，$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆。

（B）A 或 B 不可逆，即 $|A|=0$ 或 $|B|=0$，则 $|AB|=|A||B|=0$，因此 AB 不可逆。

（C）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$可逆，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$可逆，$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆。

（D）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$不可逆，$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$可逆。

13. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 必能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为同阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 应满足条件（ B ）

（A）$\boldsymbol{A}\neq 0$　　（B）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$　　（C）$\boldsymbol{A}=0$　　（D）$|\boldsymbol{A}|=0$

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-2,|\boldsymbol{B}|=3,$ 则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{AB})^{*}\right|=$（ B ）

（A）$\frac{2^{2n-1}}{3}$　　（B）$-\frac{2^{2n-1}}{3}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{46}{3}$

解：$\left|\left(\frac{1}{2}AB\right)^{-1}-\frac{1}{3}(AB)^{*}\right|=\left|2B^{-1}A^{-1}-\frac{1}{3}|AB|(AB)^{-1}\right|=\left|2B^{-1}A^{-1}+2B^{-1}A^{-1}\right|$

$$=\left|2^2B^{-1}A^{-1}\right|=2^{2n}\left|B^{-1}\right|\left|A^{-1}\right|=\frac{2^{2n}}{|B||A|}=-\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 3)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则 $(k\boldsymbol{A})^{*}=$（ C ）

（A）$\boldsymbol{A}^{*}$　　（B）$k^{n}\boldsymbol{A}^{*}$　　（C）$k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}$　　（D）$k^{n}\boldsymbol{A}^{*}$

解：$(kA)^{*}=|kA|(kA)^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^{*}$

16. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$的伴随矩阵为（ C ）

（A）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_1^{*}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_2^{*}\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_2^{*}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_1^{*}\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^* \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_1^* \end{pmatrix}$

解：因为

$$A^* = |A|A^{-1} = |A_1||A|_2 \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = |A_1||A|_2 \begin{pmatrix} \dfrac{A_1^*}{|A_1|} & O \\ O & \dfrac{A_2^*}{|A_2|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_2|A_1^* & O \\ O & |A_1|A_2^* \end{pmatrix}.$$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，则必有 （ C ）

（A）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ （B）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ （C）$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 可逆 （D）$\boldsymbol{A}$ 可逆

解：因为 $E = (E + A)(E - A/2)$，所以 $A + E$ 可逆。

18. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异（$n \geq 2$），$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 （ C ）

（A）$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$ （B）$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

（C）$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$ （D）$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

解：

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$$

19. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{CA},$ 则 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ 为（ A ）

（A）$\boldsymbol{E}$ （B）$-\boldsymbol{E}$ （C）$\boldsymbol{A}$ （D）$-\boldsymbol{A}$

解：因为

$$B = E + AB \Rightarrow (E - A)B = E \Rightarrow B^{-1} = E - A$$

$$C = A + CA \Rightarrow C(E - A) = A \Rightarrow CB^{-1} = A \Rightarrow C = AB$$

所以 $B - C = B - AB = (E - A)B = B^{-1}B = E$.

20. 证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与一切同阶方阵均可交换，则 $\boldsymbol{A}$ 必是数量阵.

证明：令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad E_{ji}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, j\neq i,$$

那么

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=AE_{ji}=E_{ji}A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$a_{ij}=0,\ \ i\neq j\,,\ \ a_{ii}=a_{jj},\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,n$$

即 A 必是数量阵

21. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m}$ 次幂零阵，即 $\exists \boldsymbol{m}\in \mathbb{N}, \boldsymbol{A}^m=0$, 证明：满足矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 的只能是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$.

证明：因为 $AX=XB$，所以

$$\begin{aligned} &A^2X=AAX=AXB=XBB=XB^2,\\ &A^3X=AA^2X=AXB^2=XBB^2=XB^3,\\ &\qquad\vdots\\ &A^kX=AA^{k-1}X=AXB^{k-1}=XBB^{k-1}=XB^k \end{aligned}$$

因此，当 $k=m$ 时， $XB^m=A^mX=O$ 。又因为 B 可逆，所以

$$X=O(B^m)^{-1}=O\,.$$

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，已知 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$ 可逆，证明：满足矩阵方程 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可交换.

证明：因为

$$(E+A)(E-A)=E-A^2=(E-A)(E+A)$$

所以

$$(E+A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1}$$

即

$$(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$$

因此，$(E+A)^{-1}$和$(E-A)$可交换。

23. 证明: (1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的反对称矩阵， $\boldsymbol{A}^{-1}$ 则也是反对称矩阵.

(2) 不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.

证明：（1）因为

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是反对称矩阵.

（2）假设 A 是奇数阶的可逆反对称矩阵，那么

$$|A|=\left|A^T\right|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|,$$

即$|A|=0$。另一方面，因为 A 可逆，所以$|A|\neq 0$，矛盾。

因此，不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.