浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2019 ～ 2020 第 二 学 期 ）

任课教师：______________学院班级：___________________班中编号：_________

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

本题得分	

1. 排列 2, 4, 6, 7, 3, 1, 5 的逆序数是_______.

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=$________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -3 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则

   $A_{31}+2A_{32}+A_{33}-3A_{34}=$________.

4. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\beta=(a,1,1)^T$，已知 $\boldsymbol{A}\beta$ 与 β 线性相关，则 $a=$_______.

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$

   ____

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}B=O$，则 $t=$________.

7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，则 $\|\alpha\|=$________。若向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1 & k & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的夹角是 45 度，则 $k=$________。

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & a\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$，则 $a=$____，$b=$_____.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3,\quad D_1=\begin{vmatrix}2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33}\\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23}\end{vmatrix}，那么\ D_1=(\qquad).$$

(A) 6　　(B) −6　　(C) 24　　(D) －24

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}A^T=E$　　(B) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$　　(C) $\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T=\left[(A^T)^{-1}\right]^{-1}$

(D) $\left[(A^T)^T\right]^{-1}=\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T$

3. 下列命题正确的是(　　).

(A)若 A 是 n 阶方阵，且 $A\neq O$，则 A 可逆。

(B) 若 A、B 都是 n 阶可逆方阵，则 $A+B$ 也可逆。

(C) 若 $AB=O$，且 $A\neq O$，则必有 $B=O$。

(D) 若 A 是 n 阶可逆方阵，则 A^T 可逆。

4. $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则关于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解的命题正确的是 (　　).

(A) 若 $R(\boldsymbol{A})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解 (B) 若 $R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

(C) 若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解　(D) 若 $R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 r_1，$B=AC$ 的秩为 r_2，则 (　　).

(A) $r_2 > r_1$　　(B) $r_2 < r_1$　　(C) $r_2 = r_1$　　(D) r_2与r_1的关系不确定

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$的值。

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+B=\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

3. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$的秩以及它的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。

4. 线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

在λ取何值时无解、有唯一解、有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解。

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2） $\boldsymbol{A}$ 能不能对角化？请说明理由。

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. (6 分) 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\alpha_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\alpha_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关。

2. （4 分）设向量$\boldsymbol{\alpha}$与向量β都是n维非零列向量，矩阵$A=\alpha\beta^T$。证明 $R(A)=1$