第五章　向量空间

本章介绍向量空间以及维数、基和坐标等概念，讨论齐次线性方程组的解空间和非齐次线性方程组解的结构。

第一节　向量空间

一、向量空间及有关概念

定义 1　设$\boldsymbol{V}$为$\boldsymbol{R}^n$的一个非空子集，如果$\boldsymbol{V}$满足：

（1）$\boldsymbol{V}$对加法运算封闭，即$\boldsymbol{V}$中任意两个向量的和向量仍在$\boldsymbol{V}$中；

（2）$\boldsymbol{V}$对数乘运算封闭，即$\boldsymbol{V}$中任意向量与任一实数的乘积仍在$\boldsymbol{V}$中；

则称$\boldsymbol{V}$关于向量的线性运算构成实数域上的一个**向量空间**.

如我们平常接触最多的$\boldsymbol{R}^1$、$\boldsymbol{R}^2$和$\boldsymbol{R}^3$都是向量空间。

例 1　设$\boldsymbol{V}_1=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\mid x+y+z=0,\ x,y,z\in\boldsymbol{R}\right\}$，$\boldsymbol{V}_2=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\mid x+y+z=1,\ x,y,z\in\boldsymbol{R}\right\}$，问$\boldsymbol{V}_1$和$\boldsymbol{V}_2$是向量空间吗？

解　由于$\boldsymbol{V}_1$同时满足向量空间定义中的加法运算封闭性和数乘运算封闭性，因此$\boldsymbol{V}_1$是

向

量空间。而$\boldsymbol{V}_2$不满足加法运算封闭性（数乘运算封闭性也没有满足），因此$\boldsymbol{V}_2$不是向量空间。

例 2　设齐次线性方程组的解集$\boldsymbol{V}_3=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\ x_1,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}\right\}$，非齐次线性方程组的解集$\boldsymbol{V}_4=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\ x_1,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}\right\}$，问$\boldsymbol{V}_3$和$\boldsymbol{V}_4$是向量空间吗？

解　对于$\boldsymbol{V}_3$，设$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$是任意两个属于$\boldsymbol{V}_3$的向量，k是任意一个实数，则由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$以及$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha}_1)=k\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$可知$\boldsymbol{V}_3$满足加法运算封闭性和数乘运算封闭性，因此$\boldsymbol{V}_3$是向量空间。对于$\boldsymbol{V}_4$，设$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$是任意两个属于$\boldsymbol{V}_4$的向量，则由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{A\beta}_1+\boldsymbol{A\beta}_2=2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}$可知$\boldsymbol{V}_4$不满足加法运算封闭性，因此$\boldsymbol{V}_4$不是向量空间。

定义 2　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in\boldsymbol{R}^n$，则可以验证由该向量组的所有线性组合得到的向量的集

合 $\boldsymbol{U}=\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\ k_1,k_2,\cdots k_s\in\boldsymbol{R}\right\}$ 是一个向量空间。称 $\boldsymbol{U}$ 是**由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 所生成的子空间**（或称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**生成子空间**），记作 $\boldsymbol{U}=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为 U 的**生成元**.

例如本节例子中的向量空间 $\boldsymbol{V}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解向量所构成的解集，它可以看成是由方程组的解集的极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 作为生成元所生成的，即 $\boldsymbol{V}_3=Span(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r)$。

定义 3　设 $\boldsymbol{V}$ 是向量空间 $\boldsymbol{U}$ 的一个子集, 如果 $\boldsymbol{V}$ 也是向量空间，则称 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的**子空间**. 如本节例子中的 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个子空间.

二、向量空间的基、维数和坐标

定义 4 设 $\boldsymbol{V}$ 是一个向量空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{V}$ 中的一组向量，如果满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{V}$ 中的任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一组**基**，数 r 称为 $\boldsymbol{V}$ 的**维数**，记作 $\dim(\boldsymbol{V})=r$，并称 $\boldsymbol{V}$ 是 r **维向量空间**.

例如 $(1,0)^{\mathrm{T}},(0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一组基，所以 $\boldsymbol{R}^2$ 是 2 维向量空间；$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，所以 $\boldsymbol{R}^3$ 是 3 维向量空间；又例如 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}},(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}_1=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \mid x+y+z=0,\ x,y,z\in\boldsymbol{R}\right\}$ 的一组基，因此 $\boldsymbol{V}_1$ 是二维向量空间，从几何的角度看，$\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中过坐标系原点的一个二维平面。

定义 5　设 $\boldsymbol{V}$ 是向量空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，任给 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，若有

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

则称 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的**坐标**.

例 3 在向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中， 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

（1）求$\boldsymbol{\alpha}$在由单位坐标向量$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$构成的基下的坐标；

（2）证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{R}^3$的一组基，并求出$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标。

解 （1） 由$\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$知，$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下的坐标是$(1,2,3)$。

（2）设$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(x_1,x_2,x_3)$，则$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}$，从本质来看，求坐标就是解此线性方程组。增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&2&3&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&2\\2&0&3&\vdots&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&2\\0&0&1&\vdots&9\end{pmatrix}$$

从行阶梯形可以看出$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{R}^3$的一组基。为求$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标，进一步把增广矩阵的行阶梯形化为行最简形。

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&2\\0&0&1&\vdots&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&-12\\0&1&0&\vdots&-7\\0&0&1&\vdots&9\end{pmatrix}$$

从行最简形即可得$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(-12,-7,9)$.

从该例子可以知道，一个向量的各个分量只有在单位坐标向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$这组基（笛卡尔坐标系）下才和它的坐标各个分量相等，而在通常情况下并不相等。

例 4 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\6\\2\\-3\end{pmatrix}$，求向量空间$\boldsymbol{U}=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的维数和一组基。

解 显然，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的任一个极大无关组都是向量空间

$\boldsymbol{U}=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$

的一组基，且$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$就是$\boldsymbol{U}$的维数。

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\3&-1&1&6\\1&-1&-1&2\\-1&4&7&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从行阶梯形可得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大无关组。因此向量空间$\boldsymbol{U}=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的维数为3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$即为$\boldsymbol{U}=Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组基。

三、基变换与坐标变换*

定义 6　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为向量空间$\boldsymbol{V}$的两组基，且有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)P_{r\times r}\,, \tag{5.2}$$

称r阶方阵$\boldsymbol{P}$是由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的**过渡矩阵**，(5.2)式称为**基变换公式**。

显然$\boldsymbol{P}$可逆。

例 5　已知$\boldsymbol{R}^3$的两个基为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$和$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

解　由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，得$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，下用初等行变换法求过渡矩阵$\boldsymbol{P}$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right).$$

得过渡矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

定理 1　设$\boldsymbol{V}$是向量空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为$\boldsymbol{V}$的两组基，且$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_r)$和$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_r)$分别是向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$

下的坐标，则有

$$X = YP^{\mathrm{T}} \text{和} Y = X\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{5.3}$$

其中 P 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过渡矩阵．式（5.3）称为**坐标变换公式**.

证明　因为 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)X^{\mathrm{T}}$， $\alpha = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)Y^{\mathrm{T}}$，

所以　$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)X^{\mathrm{T}} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)Y^{\mathrm{T}}$

又因为　$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P$，

所以　$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)X^{\mathrm{T}} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)PY^{\mathrm{T}}$，

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，得 $X^{\mathrm{T}} = PY^{\mathrm{T}}$，即 $X = YP^{\mathrm{T}}$ 或 $Y = X\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

例 6　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 分别是向量空间 V 的两个基，且 $\alpha_1 = 4\beta_1 - \beta_2$，$\alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$， $\alpha_3 = \beta_2 - 2\beta_3$.

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2）对 $\alpha = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$，求 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解　（1）由已知条件可得 $\beta_1 = 0.3\alpha_1 + 0.2\alpha_2 + 0.1\alpha_3$， $\beta_2 = 0.2\alpha_1 + 0.8\alpha_2 + 0.4\alpha_3$，

$\beta_3 = 0.1\alpha_1 + 0.4\alpha_2 - 0.3\alpha_3$。从而得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & -0.3 \end{pmatrix}$，即

由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & -0.3 \end{pmatrix}$.

（2）由 $\alpha = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$ 知向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标 $X = (3,4,1)$，则由坐标变换公式得 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

$$Y = X\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (3,\ 4,\ 1)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & -0.3 \end{pmatrix}^{-1} = (8,\ 2,\ 2).$$

思考题一

1．一个向量空间包含的向量个数总数可以是 1 个？2 个？3 个？或是无穷多个吗？

2. $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$是向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一组基， 设$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, 问：有何办法可同时求出向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标呢？

提示：考虑矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$

3．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in\boldsymbol{R}^n$，它们生成向量空间$\boldsymbol{V}$，则$\boldsymbol{V}$的维数（　　　　）.

（A）等于4　（B）等于n　（C）小于或等于4　（D）大于或等于4

4．想一想并去图书馆、新华书店、网上和同专业的学兄学姐及老师那里调研坐标变换在你的本专业领域里有哪些应用？如何应用？

第三节　向量内积与正交化

1. 向量的内积

定义 7　设有n维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

定义它们的**内积**为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^n a_ib_i\,. \tag{5.4}$$

由矩阵乘法，有$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

向量的内积运算满足以下运算律：

（1）交换律　$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$；

（2）对加法的分配律　$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$；

（3）对数乘的结合律　$\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$；

（4）非负性　$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\ge 0$，当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$时等号成立.

这四条运算律被称为**内积公理**，由定义可以直接证明，留给读者作为练习.

定义 8　对于n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，定义

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{5.5}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**范数**(即**长度**或**模**).

定理 2　向量的范数具有下述性质：

（1）非负性　$\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq 0$；

（2）齐次性　$\|k\boldsymbol{\alpha}\| = |k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$（$k$为任意实数)；

（3）柯西-施瓦兹（Cauchy-Schwartz）不等式　$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|$；

（4）三角不等式：$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$.

证明　（1）由内积公理第（4）条立得，且$\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

（2）$\|k\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\langle k\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha} \rangle} = \sqrt{k^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = |k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

（3）当$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$时显然成立，当$\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$时，对任意$k \in R$，有

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta} \rangle &= \langle \boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle - k \langle \boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - 2k \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle + k^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2. \end{aligned}$$

令$k = \dfrac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}$代入上式得$0 \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - \dfrac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}$，移项即获证. 等号成立当且仅当$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\beta}$，即向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关.

（4）由于

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 - (\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|)^2 &= \left(\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle\right) - \left(\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|\right) \\ &= 2\left(\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle - \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|\right) \leq 0, \end{aligned}$$

上式移项后开方即可得证. 等号成立当且仅当向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关.

三角不等式在几何上表示一个三角形任一边不大于另外两边之和.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 对任一非零向量$\boldsymbol{\alpha}$，向量$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$为单位向量，这一过程叫作把向量$\boldsymbol{\alpha}$**单位化**（也称**标准化**、**规范化**）.

由柯西-施瓦兹不等式，当$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$均为非零向量时，有

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|} \leq 1,$$

于是有向量夹角的定义.

定义 9　对 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，称

$$\varphi=\arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|} \tag{5.6}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**.

例 7　已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,4,-2,2)^{\mathrm{T}}$，求 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle,\|\boldsymbol{\alpha}\|,\|\boldsymbol{\beta}\|$ 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 φ.

解
$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=1\times1+1\times4+1\times(-2)+1\times2=5,$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=2,$$

$$\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{1^2+4^2+(-2)^2+2^2}=5,$$

$$\varphi=\arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

2. 向量的正交性

定义 10　当 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$ 时，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**（或**垂直**），记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

显然零向量和任何向量都正交，两个非零向量正交当且仅当它们的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

定理 3　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的充分必要条件是 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2$.

这就是几何上熟知的**勾股定理**, 证明略.

定义 11　当若干非零向量两两正交时，称它们构成的向量组为**正交向量组**；进一步地，若它们又都是单位向量，则称为**标准正交向量组**（或**正交规范向量组**）.

定理 4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是正交向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明　不妨设存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，用 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和上式两端作内积，得

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_i,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\rangle=\boldsymbol{0}, \tag{5.7}$$

结合正交性可得 $k_i\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2=0$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 不是零向量，所以 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2\neq0$，得 $k_i=0$. 由 $\boldsymbol{i}$ 的任意性知不存在不全为 0 的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得（5.7）式成立，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

3. 施密特正交化

下面介绍**施密特**（Schmidt）**正交化方法**。正交向量组必定线性无关，它是线性无关向量组的特殊情况. 一般的线性无关的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$未必正交，但可以将其正交化. 可由已知的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$构造正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$. 下面是把向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$正交化的过程。

首先取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 然后构造一个$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1$, 使$\boldsymbol{\beta}_2$与$\boldsymbol{\beta}_1$正交. 为此，令$\left\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle=0$，即$\left\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle+k\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle=0$，解得$k=-\dfrac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}$，得到

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_1, \tag{5.8}$$

这样$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$正交，且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$等价.

再作线性组合$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$，分别令$\left\langle\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle=0,\left\langle\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle=0$，解得

$$k_1=-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle},k_2=-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle},$$

于是得到

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_2, \tag{5.9}$$

这样$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两两正交，且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价.

同样的方式一直做下去，直到

$$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{\left\langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_{m-1}\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\beta}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_{m-1}\right\rangle}\boldsymbol{\beta}_{m-1}, \tag{5.10}$$

这样即得到与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价的正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$.

进一步，将上述正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$单位化，令

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\left\|\boldsymbol{\beta}_i\right\|},i=1,\cdots,m \tag{5.11}$$

得到与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价的正交规范向量组$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$, 整个过程称为**正交规范化**.

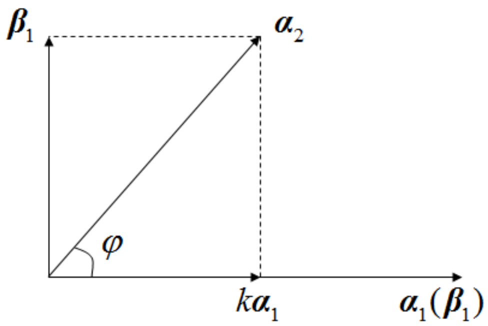
（5.8）式的几何解释是：已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关但不正交，显然二者不在同一直线上，

假定$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的夹角$\varphi$为锐角（如图 5.1，$\varphi$为钝角的情况类似）. 先取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，然后将$\boldsymbol{\alpha}_2$做一个正交分解（比如物理学中经常把力或速度等向量分解为两个相互垂直的向量），将其分解为跟$\boldsymbol{\alpha}_1$平行的向量$k\boldsymbol{\alpha}_1$和跟$\boldsymbol{\alpha}_1$垂直的向量$\boldsymbol{\beta}_2$，即

$$\boldsymbol{\alpha}_2=k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_2,$$

其中$k\boldsymbol{\alpha}_1$中的数因子k等于多少呢？注意到$k\boldsymbol{\alpha}_1$可以看作向量$\boldsymbol{\alpha}_2$在$\boldsymbol{\alpha}_1$上的投影，因此其长度为$\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\cdot\cos\varphi$，而$\boldsymbol{\alpha}_1$方向上的单位向量为$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}$，所以

$$k\boldsymbol{\alpha}_1=\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\cdot\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}\boldsymbol{\alpha}_1,$$



（图 5.1）

例 8 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，试将它们正交规范化.

解 取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，然后令

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

再令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2\\&=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{12}{27/2}\cdot\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

最后将它们单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

即为所求的正交规范组.

定义 12 若 R^n 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一个正交向量组，则称它们是 R^n 的一个**正交基**，进一步，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组，则称它们是 R^n 的一个**标准正交基**.

对给定的 n 维向量空间 R^n 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，可以利用上述施密特正交化方法得到 R^n 的一组正交基，再利用单位化得到 R^n 的一组标准正交基.

思考题二

1.线性无关的向量组一定正交吗？请举一个例子。

2.任何一个向量组都可以正交化吗？对向量组施密特正交化时，可以先单位化再正交化吗？与先正交化再单位化有何区别？

3.设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in R^n$，判断下列给出的是向量还是数量？那个无意义？

（1）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\boldsymbol{\gamma}$；　（2）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\,\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}\rangle$；　（3）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}$；

（4）$\|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\|$；　（5）$\dfrac{1}{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})$；　（6）$\langle\boldsymbol{\alpha},\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}\rangle\boldsymbol{\gamma}$；

（7）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle+\boldsymbol{\gamma}$；　（8）$\boldsymbol{\alpha}-\langle\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|},\boldsymbol{\beta}\rangle\dfrac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}$；　（9）$\langle\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$。

第三节　线性方程组的解空间

一、齐次线性方程组的基础解系

齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量集合记作

$$\boldsymbol{X}_A=\left\{\ \boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{X}\in R^n,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\ \right\}\qquad（5.12）$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{0})$，故恒有 $\tilde{r}=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=r$，也就是说，齐次方程组必定有解，因此解集 $\boldsymbol{X}_A$ 非空，对于解集 $\boldsymbol{X}_A$ 的秩，有如下的重要定理：

定理 5　对于 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵的秩和解集的秩满足

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{X}_A)=n\ 。\qquad（5.13）$$

证明 设 $r(\boldsymbol{A})=r$（$r\le n$），不失一般性假设齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 经同解变形得到如下最简形式（即系数矩阵的行最简形所对应的方程组）：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + d_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + d_{1n}x_n = 0 \\ \quad\ddots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + d_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

此方程组有 r 个方程独立，有 $n-r$ 个自由未知量可以转化为自由参数，移项并补齐得：

$$\begin{cases} x_1 = -d_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{1n}x_n \\ \vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -d_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{rn}x_n \\ x_{r+1} = \qquad x_{r+1} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad x_n \end{cases}$$

把上式写成向量形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \cdots + \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n ,$$

把自由变元记为自由参数, 就得到方程组的通解:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \cdots + \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} t_{n-r}, \qquad \begin{matrix} t_i \in R \\ (i=1,\cdots,n-r) \end{matrix}$$

可记作：

$$X = t_1\xi_1 + \cdots + t_{n-r}\xi_{n-r} , \quad t_i \in R, (i=1,\cdots,n-r) , \tag{5.14}$$

式中的向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 显然线性无关（这只要看它们的后 $n-r$ 个分量就清楚了）；同时，（5.14）式表明方程组所有的解都可以由 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，故这组向量就是解集 $\boldsymbol{X_A}$ 的一个极大无关组，因此 $r(\boldsymbol{X_A})=n-r=n-r(\boldsymbol{A})$，即（5. 13）成立。

定义 13 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解集 $\boldsymbol{X_A}$ 的一个极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，称为

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个**基础解系**。（5.14）为该方程组的一般通解形式。

$\boldsymbol{X_A}$ 也可以表示为基础解系的线性组合的形式：

$$\boldsymbol{X_A}=\left\{x=t_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} \mid t_i\in R, i=1,\cdots,n-r\right\}。\tag{5.15}$$

特别若 $r=n$，方程组只有唯一零解，从而 $\boldsymbol{X_A}=\{\boldsymbol{0}\}$。此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 没有基础解系，因此 $r(\boldsymbol{X_A})=0$，亦满足 $r(\boldsymbol{X_A})+r(\boldsymbol{A})=n$。

例 9 解齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5=0,\\ 2x_1+4x_2+3x_3+\ x_4+\ x_5=0,\\ -x_1-2x_2+\ x_3+3x_4-3x_5=0.\end{cases}$

解 对系数矩阵作行初等变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

由行阶梯形知 $r(\boldsymbol{A})=3$，而 $n=5$，故方程组有非零解，且其通解中应含有 $n-r=2$ 个自由参数，即基础解系应含 2 个非零解向量。再由行最简形，经还原、移项、补齐，可求出基础解系，过程为

$$\boldsymbol{A}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2\qquad +2x_5=0\\ \qquad x_3\qquad -x_5=0\\ \qquad\quad x_4\qquad =0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_5\\ x_2=\quad x_2\\ x_3=\qquad\quad x_5\\ x_4=0\\ x_5=\qquad\quad x_5\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}t_2\quad(t_1,t_2\in R).$$

这里 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为一基础解系。

二、齐次线性方程组的解空间

对 $m\times n$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，它的解集记作

$$\boldsymbol{X_A}=\left\{\ \boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{X}\in R^n,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\ \right\}\tag{5.16}$$

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，其解具有如下性质：

性质 1 若 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{0}$.

性质 2 若 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{0}(k\neq 0)$，则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}_1)=\boldsymbol{0}$.

由性质 1、2，根据向量空间的定义，易知 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 构成一个向量空间，称它为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的**解空间**。当 $r(\boldsymbol{A})=r$ 时，解空间 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的维数为 $n-r$，它的一组基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 即为解空间的一组基。

例 10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，问 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 能否也能作为 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基？

解 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也就是方程组的一组基础解系，由于 $\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，同理有 $\boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也属于 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$。又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基知 $r(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}})=3$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 X_A 的一组基，从而也可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系。

三、非齐次线性方程组的解集

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，将它的所有解向量构成的集合记作

$$\boldsymbol{X}_{\tilde{A}}=\left\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\right\} \tag{5.17}$$

称为这个非齐次方程组的**解集**。下面来讨论它的结构。

非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$（$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$）对应的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 常常被称为它的**导出方程组**（简称导出组）。

性质 1 若 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{0}$；

性质 2 若 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\beta}$.

定理 6 设 $m\times n$ 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，若导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$，而 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一特解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}+t_1\xi_1+\cdots+t_{n-r}\xi_{n-r}\quad(t_i\in\boldsymbol{R},i=1,\cdots,n-r) \tag{5.18}$$

证明 首先由(5.18)式，易知向量 $\boldsymbol{X}$ 满足方程组，即有：

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\sum_{i=1}^{n-r}t_i\xi_i)=\boldsymbol{A\eta}+\sum_{i=1}^{n-r}t_i(\boldsymbol{A}\xi_i)=\boldsymbol{\beta}+\sum t_i\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\beta}\text{；}$$

其次设 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解，则 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，故可由基础解系表示为

$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\eta}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，移项便得(5.5)式。特别地，若$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=n$，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有唯一零解，故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$也只有唯一解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\eta}$。

例 11 求解线性方程组$\begin{cases} x_1 -2x_2 +3x_3 -x_4 =1, \\ 3x_1 -x_2 +5x_3 -3x_4 =2, \\ 2x_1 +x_2 +2x_3 -2x_4 =1. \end{cases}$

解 方程组增广矩阵经初等行变换化为行最简型：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

因为$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<n=4$，所以该方程组有无穷多解。选定$x_3,x_4$为自由未知量并将其移到右边，则可将原方程组化为同解的方程组：

$$\begin{cases} x_1= \frac{3}{5} -\frac{7}{5}x_3 -x_4, \\ x_2= -\frac{1}{5} +\frac{4}{5}x_3 +0x_4,, \\ x_3= 0 +x_3 +0x_4, \\ x_4= 0 +0x_3 +x_4. \end{cases}$$

因此得到通解式：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}t_2$, 其中$t_1,t_2$为任意实数。

例 12 求解线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_1-x_3+x_4=2, \\ 3x_1-x_2+3x_4=5. \end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换，化为行阶梯形：

$$B=(A\,|\,\beta)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

则 $R(A)=R(B)=2<4$，方程组有无穷多解. 对增广矩阵施行初等行变换，化为行最简形：

$$B=(A\mid\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&\vdots&2\\0&1&-3&0&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

得对应方程组：$\begin{cases}x_1=2+\ \ x_3-x_4,\\x_2=1+3x_3,\end{cases}$ 其中选 x_3,x_4 为自由变量.

下面求方程组的通解.

方法一：令 $x_3=c_1,x_4=c_2$，得方程组的通解

$$X=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 $\xi_1=(1,3,1,0)^T$，$\xi_2=(-1,0,0,1)^T$ 为导出组的一个基础解系，$\eta^*=(2,1,0,0)^T$ 为方程组的特解，c_1,c_2 为任意常数.

方法二：先令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得原方程组的一个特解为 $\eta^*=(2,1,0,0)^T$；齐次由导出组的解为（只要令方程组的解中的常数项为零）

$$\begin{cases}x_1=\ \ x_3-x_4,\\x_2=3x_3,\end{cases}$$

其中 x_3,x_4 为自由变量. 分别令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得导出组的一个基础解系为

$$\xi_1=(1,3,1,0)^T，\ \xi_2=(-1,0,0,1)^T.$$

则方程组的通解为 $X=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 13 设线性方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_2-\ \ x_3-2x_4=0,\\2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=1,\\3x_1+\ \ x_2-2x_3-\ \ x_4=a.\end{cases}$ 试确定 a 的值，使方程组有解；并求其全部解.

解 对增广矩阵施行初等行变换，化为行阶梯形：

$$B=(A\mid\beta)=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&\vdots&0\\2&-1&-1&1&\vdots&1\\3&1&-2&-1&\vdots&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&\vdots&0\\0&-5&1&5&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&a-1\end{pmatrix},$$

要使方程组有解，则 $R(B)=R(A)=2$，因此当 a =1 时，方程组有无穷多解.

当 a =1 时，

$$B=(A\mid\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&\vdots&0\\0&-5&1&5&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-3&0&3&\vdots&1\\0&-5&1&5&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

对应方程组可化为 $\begin{cases}x_1=1+3x_2-3x_4,\\x_3=1+5x_2-5x_4,\end{cases}$，其中 x_2,x_4 为自由变量．令 $x_2=c_1,x_4=c_2$，得方程组的通解为

$$X=(1,0,1,0)^T+c_1(3,1,5,0)^T+c_2(-3,0,-5,1)^T，其中 c_1,c_2 为任意常数.$$

例 14 已知 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解，其中 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$、 $\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解。

解 由已知条件有 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{\beta}$， 记 $2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}$， 易见 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\xi}$ 线性无关。由于

$$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0},$$

知 ξ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，再由已知条件知，$n-r=3-2=1$，故 $\boldsymbol{\xi}$ 可作 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，于是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_1+t\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1+t(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

思考题三

1.齐次线性方程组的基础解系为什么不唯一？

2.齐次线性方程组有无穷多组解时的表示形式有哪些？

3.非齐次线性方程组有无穷多组解时的表示形式为什么不唯一？经常使用的形式为

何？

4.非齐次线性方程组的解集与对应导出组的解集有相同的秩吗？为什么？

5. 齐次线性方程组 $AX=0$ 解的全体 $\{X \mid AX=0\}$ 构成向量空间，那么非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 解的全体 $\{X \mid AX=\beta\}$ 是否构成向量空间？

6. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$，对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，下面结论是否正确？

（1）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，有非零解；

（2）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$ 有唯一解，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，只有零解；

（3）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，有非零解，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$ 有无穷多解；

（4）若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，只有零解，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=\boldsymbol{\beta}_{m\times 1}$ 有唯一解.

习 题 五

（A）

1. 证明 $\boldsymbol{V}=\left\{(x,y)^{\mathrm{T}} \mid x^2+y^2\le 1,\ x,y\in R\right\}$ 不是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个子空间.

2. 证明：等价的两个向量组生成同一个向量空间.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\12\\7\end{pmatrix}$，问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否属于向量空间 $Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$？如果是，求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\\12\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\\7\end{pmatrix}$，求由该向量组生成的子空间 $Span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的一组基和该子空间的维数。若向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在此组基下的坐标.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{R}^3$的一组基，并求向量$\boldsymbol{\beta}=(5,2,-2)^{\mathrm{T}}$在这组基下的坐标.

6*. 在$\boldsymbol{R}^3$中取两组基：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$，和

$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}}$.

（1）求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

（2）若向量$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为$(1,1,1)$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

7*.设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是向量空间$\boldsymbol{V}$的两组基，且

$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\beta}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

（2）对$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$，求$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标。

8. 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\beta}=(1,k,1,0)^{\mathrm{T}}$的夹角为$45^0$，求$k$.

9. 将下列向量组正交规范化：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

10. 已知$\boldsymbol{\alpha}=\left(1,2,-1,1\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left(2,3,1,-1\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=\left(-1,-1,-2,2\right)^{\mathrm{T}}$，求：

（1）内积$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$、$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$；

（2）向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$的范数；

（3）与$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$都正交的所有向量。

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，并设 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，试求 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$ 的维数及其一组正交基.

12. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试由它出发构造 $\boldsymbol{R}^4$ 的一组规范正交基。这样的基唯一吗？

13. 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解：

（1）$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=0, \\ \qquad x_2+\ \ x_3=0, \\ x_1+2x_2+2x_3=0. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2-\ \ x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+\qquad x_4=0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1\ -x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1\ -x_2\ -x_3\ +3x_4=0, \\ x_1-x_2\ -2x_3+4x_4=0. \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+2x_2\ +x_3\ -x_4=0 \\ 3x_1+6x_2\ -x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$.

14. 选择 p,q 的值使下列线性方程组有解，并求其解：

（1）$\begin{cases} px_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+px_2+x_3=p \\ x_1+x_2+px_3=p^2 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ \qquad x_2\ -x_3\ -x_4=1 \\ x_1\ \ +x_2\ -x_3+3x_4=p \\ x_1\ \ -x_2\ +x_3+5x_4=q \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} (2-p)x+2y-2z=1 \\ 2x+(5-p)y-4z=2 \\ -2x-4y+(5-p)z=-p-1 \end{cases}$；　　（4）$\begin{cases} px\quad +qy\qquad +2z=1 \\ \quad (q-1)y\qquad +z=0 \\ px\quad +qy+(1-q)z=3-2q \end{cases}$。

15. 设五元线性方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_2 & & & & =a_1 \\ & x_2-x_3 & & & =a_2 \\ & & x_3-x_4 & & =a_3 \\ & & & x_4-x_5 & =a_4 \\ -x_1 & & & +x_5 & =a_5 \end{cases},$$

证明：此方程组有解当且仅当 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$；在此条件下，求其通解.

16. 设三元非齐次线性方程组 $AX=\beta$，其中矩阵 A 的秩为 2，且

$$\eta_1=(1,2,2)^T,\ \eta_2=(3,2,1)^T$$

是方程组的两个特解，试求此方程组的全部解.

17. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(3.2.1.0)^{\mathrm{T}}.$$

18. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是其三个解，且有

$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解.

19. 已知ξ_1,ξ_2,ξ_3是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一组基础解系，记$\boldsymbol{\eta}_1=\xi_1-\xi_2$，

$\boldsymbol{\eta}_2=2\xi_2+\xi_3$，$\boldsymbol{\eta}_3=-\xi_3+3\xi_1$，问$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是否也可以作为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系？

20. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times s$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$s\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}$是n维列向量。证明：若齐次方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$同解，则有$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

（B）

1. 设 $\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\boldsymbol{R},\ x_1+x_2=x_3\right\}$；

$$\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\boldsymbol{R},\ x_1\times x_2=x_3\right\};$$

问V_1、V_2关于$\boldsymbol{R}^3$中的向量线性运算是否构成向量空间？

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\k-2\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，则$k$________ .

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in R^n$，由它们生成空间$V$，则$V$的维数是（　　　）.

（A）$=4$；　　（B）$=n$；　　（C）≤ 4；　　（D）≥ 4.

4. 设$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}^n$，则$\boldsymbol{\alpha}$与任意$n$维向量都正交的充要条件是$\|\boldsymbol{\alpha}\|=$（　　　）.

（A）1；　　（B）0；　　（C）－1；　　（D）∞.

5. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{R}^n$，则（　　　）是向量.

（A）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$；　（B）$\boldsymbol{\gamma}+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$；　（C）$\langle\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|},\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}\rangle$；　（D）$\langle\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$.

6. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{R}^n$，则$G(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle & \langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\\ \langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle & \langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\end{vmatrix}=0$是$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关的（　　）条件.

（A）必要；　　　（B）充分；　　（C）充要；　（D）既不充分也不必要。

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$，求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵全体所构成的子空间的维数和一组基。

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$。

（1）证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基。

（2）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵。

（3）若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)$，求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标。

9. 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 为非齐次线性方程组，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为其导出组。下列命题正确的有（　　）。

（1）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解。

（2）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解。

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有唯一零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 只有唯一解。

（4）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 只有唯一解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解。

（5）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 也无解。

10. 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\ (\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$ 为 $m\times n$ 方程组，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=r<n$，且已知 $\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个不同解，$\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则下列命题正确的有（　　　）。

（1）$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解；　（2）$\forall k\in\boldsymbol{R},\ k(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解；

（3）$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解；　（4）$\forall k\in\boldsymbol{R},\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+k\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

（5）$\forall k_1$、$k_2\in R$，$k_1(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+k_2\boldsymbol{\eta}$ 是 $AX=\theta$ 的解；

11. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当（　　　　　　　）。

（1）$\exists\ n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 成立；　（2）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

（3）$r(\boldsymbol{A})=n$；　（4）$\boldsymbol{A}$ 的列（行）秩为 n；

（5）$\boldsymbol{A}$ 的 n 列（行）线性无关；　（6）$\boldsymbol{A}$ 的最大非零子式为 $|\boldsymbol{A}|$；

（7）$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解（$r(\boldsymbol{X}_A)=0$）；　　（8）$\forall \boldsymbol{b}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 均有唯一解；

（9）$\forall$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{C}$ ，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ；

（10）$\boldsymbol{A}$ 可表为若干初等阵之积；　　（11）$\boldsymbol{A}$ 等价于同阶单位阵 $\boldsymbol{E}_n$ ；

12、设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，其中 $a_i, b_i\ (i=1,2,3)$ 全不为零。则三条直线 $l_i : a_i x + b_i y + c_i = 0\ \ (i=1,2,3)$ 交于一点的充要条件为 (　　).

（A）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关；　　（B）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关；

（C）$r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；　　（D）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。