浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2016 ～ 2017 第 二 学 期 ）

任课教师：____________学院班级：________________班中编号：________

学号：________________ 姓名：______________ 得分：__________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&b\\c&7\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，即

$\boldsymbol{AB}$=$\boldsymbol{BA}$，则 $b=$________，$c=$_________。

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$______________。

3. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&2\\-2&-1&0&-3\\3&1&2&-5\end{vmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=$ ________。

4. 设三元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，则该方程组的解集 $\boldsymbol{X}_A$ 的秩 $R(\boldsymbol{X}_A)=$_________。

5. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^T$，向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,3,3)^T$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模长 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=$_____，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=$_______。

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 的三个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$________，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$__________。

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零方阵，且 $\boldsymbol{AB}=O$，则 $t=$_________。

本题得分	

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 下列命题正确的是（　　）。

(A) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 也可逆。

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 B 都是 n 阶可逆方阵，则 $\boldsymbol{A}+B$ 也可逆。

(C) 若 $AB=O$，且 $\boldsymbol{A}\neq O$，则必有 $B=O$。

(D)若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\neq O$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{21}&a_{32}+a_{22}&a_{33}+a_{23}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则必有(　　)。

(A) $\boldsymbol{A}P_1P_2=B$　　(B) $P_1P_2\boldsymbol{A}=B$

(C) $\boldsymbol{A}P_2P_1=B$　　(D) $P_2P_1\boldsymbol{A}=B$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 $B=AC$，$R(A)=r_1$，$R(B)=r$，则（　　）。

(A) $r>r_1$　(B) $r<r_1$　(C) $r=r_1$　(D) r 与 r_1 的关系依 C 而定

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1\ \ 1\ \ 1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1\ \ 2\ \ 3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1\ \ 3\ \ t)^T$ 线性相关，则（　　）。

(A) $t>5$　(B) $t<5$　(C) $t=5$　(D) $t\neq 5$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n $(n\geq 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，则必有 $(3\boldsymbol{A})^*=$（　　）。

(A) $3\boldsymbol{A}^*$　(B) $3^{-1}\boldsymbol{A}^*$　(C) $3^n\boldsymbol{A}^*$　(D) $3^{n-1}\boldsymbol{A}^*$

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$的值

2. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$的秩和一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$， $A\boldsymbol{X}=A+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

4. 当 λ 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+\lambda x_2+2x_3=1 \\ x_1-x_2+\lambda x_3=2 \\ -5x_1+5x_2+4x_3=-1 \end{cases}$$

（1）有唯一的解？（2）没有解？（3）有无穷多解？并在有无穷多解时给出该方程组的通解。

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量。（2） $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能对角化，求出相应的相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$ 为对角矩阵。

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. （6 分）已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-16E=\boldsymbol{O}$，

证明$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$可逆，并求$(\boldsymbol{A}-3E)^{-1}$。

2. (4 分) 设n维向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t$可由$n$维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，即$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s\right)K$，其中$K$是由表示系数构成的$s\times t$矩阵。若向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_t$线性无关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$也线性无关，证明：矩阵$K$的秩$R(K)=t$。