习　题　一

1．利用对角线法则计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 1\times(-2) = 8.$

（2）$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+4-12-6-4+2 = -15.$

（4）$\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ b & a+b & a \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = (\mathrm{a}+b)^3 + a^3 + b^3 - ab(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - ab(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - ab(\mathrm{a}+\mathrm{b})$

$$= a^3 + b^3 + (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3ab(a+b)) = 2(a^3 + b^3)$$

2．按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

（1）2467315．　　　　　　（2）7426315

（3）$n(n-1)\ldots 21$．　　　　　　（4）246…（$2n$）…135…（$2n-1$）

解：

(1) $t = 0+0+0+0+3+5+2 = 10$　　　(2) $t = 0+1+2+1+3+5+2 = 14$

(3) $t = 0+1+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$　　　(4) $t = n+\cdots+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3．写出 5 阶行列式含有因子 $a_{13}a_{22}a_{41}$ 的项.

解：　$a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55}$ 和 $a_{13}a_{22}a_{41}a_{35}a_{54}$.

4．计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{0+1+2+3}\times 3\times 2\times(-2)\times 1 = -12$

（2） $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{0+1+\cdots+1} \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (-1)^{n-1} n!$.

（3） $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_2-10r_1 \\ r_2-4r_1}]{r_2 - 4r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 17 \times 45 - 9 \times 85 = 0$$

（4） $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$$= a(bcd + b + d) + (cd + 1) = abcd + ab + ad + cd - 1$$

5．求解下列方程：

（1） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$.

解：因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x^2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2)(-9+3x^2-3) = 3(1-x^2)(x^2-4)$$

所以原方程的解为

$$x = \pm 1 \;\; or \;\; x = \pm 2 .$$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$.

解：因为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(b-c)$$

所以原方程的解为

$$x = a \ \ or \ \ x = b \ \ or \ \ x = c.$$

6．证明：

（1）$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3$.

证明：

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2(x+y) + 2xy^2 + 2xy^2 - y^2(x+y) - 2x^2y - 2x^2y$$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$$

（2）$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

证明：

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ ay & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ ay & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ y & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}
$$

$$
=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}
$$

（3）$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)$.

证明：

$$
\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)
$$

（4）$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

证明：

$$
\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+a_nx & a_n \end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0+\cdots+a_nx^n & a_1+\cdots+a_nx^{n-1} & a_2+\cdots+a_nx^{n-2} & \cdots & a_{n-1}+a_nx & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(a_0+\cdots+a_nx^n)(-1)^{(n+1)+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+1+n}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)$$

$$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

7．计算下列行列式（$n>3$）：

（1） $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n = a\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & \\ & 0 & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots & a \\ 1 & 0 & & & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a^n+(-1)^{1+n+(n-1)+1}\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-2} = a^n-a^{n-2}$$

（2） $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\2&-1&0&\cdots&0\\2&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}2\begin{vmatrix}3&3&3&&3\\-1&0&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&n-3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}3&3&3&&3\\0&1&0&&\\0&0&2&&\\&&&\ddots&\\&&&&n-3\end{vmatrix}=6(n-3)!$$

（3） $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&-(n-1)\end{vmatrix}$.

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&-(n-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&1+\cdots+n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\&2&-2&\cdots&0&0\\0&&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&&n-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!=(-1)^{1+n}\frac{(n+1)!}{2}$$

（4） $D_{n+1}=\begin{vmatrix}a^n&(a-1)^n&\cdots&(a-n)^n\\a^{n-1}&(a-1)^{n-1}&\cdots&(a-n)^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a-1&\cdots&a-n\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$.

解：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le i<j\le n}(i-j)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^{n-1} & (a-n+1)^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=n!(n-1)!\cdots 2!1!$$

8．设

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

其中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij} ，分别求 $A_{31}+2A_{32}+A_{33}-3A_{34}$ 与 $M_{11}+2M_{21}-M_{31}+M_{41}$ 的值.

解：根据行列式展开定理得

$$A_{31}+2A_{32}+A_{33}-3A_{34}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -5 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -5 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & -7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}=35-81=-46$$

$$M_{11}+2M_{21}-M_{31}+M_{41}=A_{11}-2A_{21}-A_{31}-A_{41}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&0&3\\-2&2&2&-3\\-1&0&1&1\\-1&3&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&3\\0&0&2&-9\\0&-1&1&4\\0&2&-2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-9\\-1&1&4\\2&-2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-9\\-1&1&4\\0&0&13\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&2&-9\\-1&1&4\\0&0&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-9\\0&13\end{vmatrix}=26.$$

9．用克拉默法则解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\x_1-3x_2-6x_4=9,\\2x_2-x_3+2x_4=-5,\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0;\end{cases}$

解：因为

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

所以解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\ x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

（2）$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4,\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6,\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12,\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6.\end{cases}$

解：因为

$$D=\begin{vmatrix}2&2&-1&1\\4&3&-1&2\\8&5&-3&4\\3&3&-2&2\end{vmatrix}=2,\quad D_1=\begin{vmatrix}4&2&-1&1\\6&3&-1&2\\12&5&-3&4\\6&3&-2&2\end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&4&-1&1\\4&6&-1&2\\8&12&-3&4\\3&6&-2&2\end{vmatrix}=2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&2&4&1\\4&3&6&2\\8&5&12&4\\3&3&6&2\end{vmatrix}=-2,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&2&-1&4\\4&3&-1&6\\8&5&-3&12\\3&3&-2&6\end{vmatrix}=-2,$$

所以解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{2}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{2}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-2}{2}=-1,\ x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{-2}{2}=-1.$$

10．问 l ,m 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}l x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+mx_2+x_3=0,\\x_1+2mx_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

解：令

$$\begin{vmatrix}l&1&1\\1&m&1\\1&2m&1\end{vmatrix}=lm+2m+1-m-2lm-1=m(1-l)=0,$$

求解得

$$m=0\ \ or\ \ l=1.$$

11．问 l 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(5-l)x+2y+2z=0,\\2x+(6-l)y=0,\\2x+(4-l)z=0\end{cases}$$

有非零解？

解：令

$$\begin{vmatrix}5-l&2&2\\2&6-l&0\\2&0&4-l\end{vmatrix}=(5-l)(6-l)(4-l)-4(6-l)-4(4-l)$$

$$
\begin{aligned}
&= (5-l)(6-l)(4-l) - 8(5-l) \\
&= (5-l)(2-l)(8-l) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

求解得

$$l = 2 \ \ or \ \ l = 5 \ \ or \ \ l = 8 .$$

复 习 题 一

一．选择题：

1． 下列（ ABC ）是奇排列.

（A） 4123 （B） 1324 （C） 2341 （D） 4321

2． 若 $(-1)^t a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$ 是五阶行列式 D_5 的一项，则 k，l 及该项的符号是（ BC ）.

（A）$k=2$，$l=3$，符号为正 （B） $k=2$，$l=3$，符号为负

（C） $k=3$，$l=2$，符号为正 （D） $k=3$，$l=2$，符号为负

3． $\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是（ D ）.

（A）$k\neq 1$ （B） $k\neq -3$ （C） $k\neq 1$ 或 $k\neq -3$ （D） $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$

解：$\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)^2 - 2^2 = (k-1)(k+3) \neq 0$

4． 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$（ D ）.

（A） $2a$ （B） $-2a$ （C） $8a$ （D） $-8a$

解：$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -2^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -8a$

5． 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11}-4a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21}-4a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$（ B ）.

（A） 6 （B） -8 （C） 12 （D） -12

解：$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11}-4a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21}-4a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_{11} & -4a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & -4a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & -4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=0-8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -8D = -8$$

6. 下列 $n(n>2)$阶行列式中，值必为零的有（ BD ）.

（A） 行列式主对角线上的元素全为零

（B）上（或下）三角形行列式主对角线上有一个元素为零

（C） 行列式零元素个数多于 n 个

（D） 行列式非零元素个数小于 n 个

7. 四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（ D ）.

（A）$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$ （B）$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

（C）$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$ （D）$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

解：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-\frac{b_1b_4}{a_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-\frac{b_2b_3}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-\frac{b_1b_4}{a_1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\left(a_3-\frac{b_2b_3}{a_2}\right)\left(a_4-\frac{b_1b_4}{a_1}\right) = \left(a_2a_3-b_2b_3\right)\left(a_1a_4-b_1b_4\right)$$

8. 若 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,

则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为（ B ）.

（A） 1 （B） 2 （C） 3 （D） 4

解： $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & 1 \end{vmatrix} = -x(2x-9)$$

9．如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1$，则方程组$\begin{cases} a_{11}x_1-a_{12}x_2+b_1=0, \\ a_{21}x_1-a_{22}x_2+b_2=0 \end{cases}$的解是（ B ）.

（A） $x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ （B） $x_1=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

（C） $x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ （D） $x_1=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

二．填空题:

1．$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=\underline{(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a)}$.

解：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b+c+a & c+a+b & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a).$$

2．$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=\underline{x^3(x+a_1+a_2+a_3+a_4)}$.

解：

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4+x & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^3(x+a_1+a_2+a_3+a_4).$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$ __-2______.

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\times 2\times 3\times 4 = -2.$$

4. 若 $\begin{vmatrix} l-3 & 1 & -1 \\ 1 & l-5 & 1 \\ -1 & 1 & l-3 \end{vmatrix}$=0，则 $l =$ __2,3,6________.

解：因为

$$\begin{vmatrix} l-3 & 1 & -1 \\ 1 & l-5 & 1 \\ -1 & 1 & l-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l-3 & 1 & -1 \\ l-3 & l-5 & 1 \\ l-3 & 1 & l-3 \end{vmatrix} = (l-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & l-5 & 1 \\ 1 & 1 & l-3 \end{vmatrix}$$

$$= (l-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & l-6 & 2 \\ 0 & 0 & l-2 \end{vmatrix} = (l-3)(l-6)(l-2),$$

所以 $l = 2, 3, 6$.

5. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} =$ __0___.

解：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&-1\\-2&-1&0&-3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-5\\0&3&6&5\\0&-1&-2&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&5\\0&0&0&-10\\0&0&0&2\end{vmatrix}=0$$

6．多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x+a_{11}&x+a_{12}&x+a_{13}\\x+a_{21}&x+a_{22}&x+a_{23}\\x+a_{31}&x+a_{32}&x+a_{33}\end{vmatrix}$ 的次数最多是__1____次.

解：

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+a_{11}&x+a_{12}&x+a_{13}\\x+a_{21}&x+a_{22}&x+a_{23}\\x+a_{31}&x+a_{32}&x+a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&x&a_{13}\\x&x&a_{23}\\x&x&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&a_{12}&x\\x&a_{22}&x\\x&a_{32}&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&a_{12}&a_{13}\\x&a_{22}&a_{23}\\x&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11}&x&x\\a_{21}&x&x\\a_{31}&x&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&x&a_{13}\\a_{21}&x&a_{23}\\a_{31}&x&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&x\\a_{21}&a_{22}&x\\a_{31}&a_{32}&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x&a_{12}&a_{13}\\x&a_{22}&a_{23}\\x&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&x&a_{13}\\a_{21}&x&a_{23}\\a_{31}&x&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&x\\a_{21}&a_{22}&x\\a_{31}&a_{32}&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=x\left(\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&1&a_{13}\\a_{21}&1&a_{23}\\a_{31}&1&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&1\\a_{21}&a_{22}&1\\a_{31}&a_{32}&1\end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

7．若方程组 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$__-2____.

解：因为方程组有无穷多个解，所以

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)(a-1)^2=0$$

求解得 $a=-2\ \ or\ \ a=1$．又因为当 $a=1$ 时方程组无解，所以 $a=-2$．