习 题 三

1. 分别写出下列矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\2&-2&-1&2&4\\1&-1&1&1&5\end{pmatrix}$.

解：（1）行阶梯形：$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$,

行最简形：$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，也是标准形

（2）行阶梯形：$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-7r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$,

行最简形：$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{LL}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,

标准形：$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{LL}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-2c_2]{c_3+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（3）行阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\2&-2&-1&2&4\\1&-1&1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\0&0&1&2&-2\\0&0&2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&-3&6\end{pmatrix},$$

行最简形：

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\2&-2&-1&2&4\\1&-1&1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{LL}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1\text{-}2r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&5\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

标准形：

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&3\\2&-2&-1&2&4\\1&-1&1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbf{L}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&5\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_5-2c_3\\c_5+2c_4}]{\substack{c_2+c_1\\c_5-5c_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_4]{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 利用矩阵的初等行变换判断下列矩阵是否可逆, 若可逆求其逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&-2&3\\4&-1&5\end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix}-3&1&4&-1\\1&1&1&0\\-2&0&1&-1\\1&1&-2&0\end{pmatrix}$.

解：（1）对矩阵$(A\,|\,E)$做初等行变换, 即

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&4&-2&0&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&-14&6&-5&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-7r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&-2&0&13&-6&1\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&0&-13/2&3&-1/2\\0&0&1&-16&7&-1\end{array}\right),$$

所以, 矩阵可逆, 且

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-13/2&3&-1/2\\-16&7&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2&0\\-13&6&-1\\-32&14&-2\end{pmatrix}.$$

（2）对矩阵$(A\,|\,E)$做初等行变换, 即

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&-1&1&0&0\\1&-2&3&0&1&0\\4&-1&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&3&0&1&0\\2&3&-1&1&0&0\\4&-1&5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&3&0&1&0\\0&7&-7&1&-2&0\\0&7&-7&0&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2/7&3/7&0\\0&7&-7&1&-2&0\\0&0&0&-1&-2&1\end{array}\right)$$

所以,矩阵不可逆.

（3）对矩阵$\left(A\,\middle|\,E\right)$做初等行变换,即

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-3&1&4&-1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\-2&0&1&-1&0&0&1&0\\1&1&-2&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&0&1&0&0\\-3&1&4&-1&1&0&0&0\\-2&0&1&-1&0&0&1&0\\1&1&-2&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+3r_1\\r_3+2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&0&1&0&0\\0&4&7&-1&1&3&0&0\\0&2&3&-1&0&2&1&0\\0&0&-3&0&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[2r_3]{4r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}4&4&4&0&0&4&0&0\\0&4&7&-1&1&3&0&0\\0&4&6&-2&0&4&2&0\\0&0&-3&0&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}4&0&-3&1&-1&1&0&0\\0&4&7&-1&1&3&0&0\\0&0&-1&-1&-1&1&2&0\\0&0&-3&0&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}4&0&-3&1&-1&1&0&0\\0&4&7&-1&1&3&0&0\\0&0&1&1&1&-1&-2&0\\0&0&-3&0&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_3]{\substack{r_1+3r_3\\r_2-7r_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}4&0&0&4&2&-2&-6&0\\0&4&0&-8&-6&10&14&0\\0&0&1&1&1&-1&-2&0\\0&0&0&3&3&-4&-6&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3r_3]{\substack{3r_1\\3r_2}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}12&0&0&12&6&-6&-18&0\\0&12&0&-24&-18&30&42&0\\0&0&3&3&3&-3&-6&0\\0&0&0&3&3&-4&-6&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1-4r_4\\ r_2+8r_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}12 & 0 & 0 & 0 & -6 & 10 & 6 & -4\\ 0 & 12 & 0 & 0 & 6 & -2 & -6 & 8\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & -6 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3,\ \frac{1}{3}r_4]{\frac{1}{12}r_1,\ \frac{1}{12}r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 5/6 & 1/2 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 & -1/2 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -2 & 1/3\end{array}\right)$$

所以, 矩阵可逆, 且

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 5/6 & 1/2 & -1/3\\ 1/2 & -1/6 & -1/2 & 2/3\\ 0 & 1/3 & 0 & -1/3\\ 1 & -4/3 & -2 & 1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3 & -2\\ 3 & -1 & -3 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 6 & -8 & -12 & 2\end{pmatrix}.$$

3. 利用矩阵的初等变换解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$

解：对矩阵 $(A\,|\,B)$ 做初等行变换, 即

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 0 & 3 & 6\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 4 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 0 & 3 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 4 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 0 & -3 & -8 & 1 & -4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 2 & -1 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -2 & 7 & -13\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -16\\ 0 & 0 & -2 & 7 & -13\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -16\\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 13/2\end{array}\right)$$

所以

$$X=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -16 \\ -7/2 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

（2）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

解：方法一：对矩阵$\left(A^T \mid B^T\right)$做初等行变换, 即

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -15 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & -13 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+13r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & -3 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{\frac{1}{6}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 13/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

所以,

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 13/6 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 13/6 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 13 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

方法二：（特殊方法）因为$|BA^{-1}|=|B||A^{-1}|=\dfrac{|B|}{|A^{-1}|}=\dfrac{-6}{-6}=1$, 所以$BA^{-1}$为可逆矩阵.

又因为$BA^{-1}\left(A \mid E\right)=\left(B \mid BA^{-1}\right)=\left(B \mid X\right)$, 所以对矩阵$\left(A \mid E\right)$做一系列初等行变换将$A$变为$B$, 则$E$变为$X=BA^{-1}$, 即原问题的解.

$$\left(A \mid E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+\frac{5}{2}r]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{2}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&-3&0&-1/2&1&0\\0&0&1&13/6&2/3&1\end{array}\right)=\left(B\mid X\right).$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\13/6&2/3&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\-3&6&0\\13&4&6\end{pmatrix}.$$

4. 求下列矩阵的秩.

（1）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\1&2&3&-1\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\5&-3&2&3\\1&-3&-5&0\\7&-5&1&4\end{pmatrix}$.　　（4）$\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}$.

解：（1）对矩阵做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以$R(A)=3$.

（2）对矩阵做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\1&2&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&-5\end{pmatrix},$$

所以$R(A)=3$.

（3）对矩阵做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\5&-3&2&3\\1&-3&-5&0\\7&-5&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\5&-3&2&3\\3&-1&3&2\\7&-5&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-7r_1]{\substack{r_2-5r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&12&27&3\\0&8&18&2\\0&16&36&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}r_4]{\frac{1}{3}r_2,\ \frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&4&9&1\\0&4&9&1\\0&4&9&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&4&9&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A)=2$.

（4）对矩阵做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&2&4&-2\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&6&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-6r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=3$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$, 且 $R(\boldsymbol{A})=3$, 求 k 的值.

解：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&k\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\k&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-kr_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&1-k&1-k&1-k^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&0&1-k&2-k-k^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&0&0&3-2k-k^2\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, 所以 $k-1\neq 0$, $3-2k-k^2=0$, 求解得 $k=-3$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\4 & a & 3 & 12\\3 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}$, 问 a 为何值时, $R(\boldsymbol{A})<3$？

解：对矩阵 A 做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\4 & a & 3 & 12\\3 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\0 & a-8 & 11 & 0\\0 & -7 & 7 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\0 & -7 & 7 & 0\\0 & a-8 & 11 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & a-8 & 11 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-(a-8)r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & a+3 & 0\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)<3$, 所以 $a+3=0$， 求解得 $a=-3$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\-1 & 2k & -3\\k & -2 & 3\end{pmatrix}$, 问 k 为何值时, 使得分别有：

（1） $R(\boldsymbol{A})=1$;　　（2） $R(\boldsymbol{A})=2$;　　（3） $R(\boldsymbol{A})=3$.

解：对矩阵 A 做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\-1 & 2k & -3\\k & -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2k-2 & 3k-3\\0 & 2k-2 & 3-3k^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2k-2 & 3k-3\\0 & 0 & 6-3k-3k^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\0 & 0 & k^2+k-2\end{pmatrix},$$

（1） 当 $R(A)=1$ 时, $k-1=0,\ k^2+k-2=0$, 求解得 $k=1$,

（2） 当 $R(A)=2$ 时, $k-1\neq 0,\ k^2+k-2=0$, 求解得 $k=-2$,

（3） 当 $R(A)=3$ 时, $k-1\neq 0,\ k^2+k-2\neq 0$, 求解得 $k\neq 1,\ k\neq -2$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5×3 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\-1 & 0 & 3\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, 求秩 $R(\boldsymbol{AB})$.

解：对矩阵 B 做初等行变换, 化为行阶梯形得

$$B=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&0&3\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&5\\0&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&5\\0&0&13/2\end{pmatrix},$$

所以 B 为可逆矩阵, 因此 $R(AB)=R(A)=2$.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证明：因为 $A\leftrightarrow B$， 存在可逆矩阵 $P,\ Q$ 使得 $PAQ=B,$ 所以

$$R(B)=R(PAQ)=R(A).$$

另一方面, 假设 $R(A)=R(B)=r,$ 那么存在可逆矩阵 $P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2$ 使得

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n},\quad P_2BQ_2=\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n},$$

进而有

$$A=P_1^{-1}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}Q_1^{-1}=P_1^{-1}P_2BQ_2Q_1^{-1},$$

因为 $P_1^{-1}P_2$ 和 $Q_2Q_1^{-1}$ 都可逆, 所以 $A\leftrightarrow B.$

10. 求解下列线性方程组.

（1）$\begin{cases}3x_1-3x_2+4x_3=0\\2x_1-3x_2+4x_3=0.\\-x_2+x_3=0\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}.$

（3）$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\3x_1-x_2+2x_3=10.\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$ （4）$\begin{cases}-3x_1+2x_2-x_3=-3\\4x_1+3x_2+4x_3=2\\5x_1+3x_2+5x_3=2\end{cases}.$

（5）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=-2\\x_1-x_2+x_3-3x_4=4\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-5\end{cases}.$ （6）$\begin{cases}2x+y-z+w=1\\3x-2y+z-3w=4\\x+4y-3z+5w=-2\end{cases}.$

解：（1）解法一：因为系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以, 由 Cramer 法则得方程组的解 $x=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$.

解法二： 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -3 & 4 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[3r_2]{2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & -6 & 8 & 0\\ 6 & -9 & 12 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & -6 & 8 & 0\\ 0 & -3 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & -6 & 8 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 4 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-6r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

因为 $R(\bar{A})=R(A)=3$, 所以方程组的解为 $x=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$.

（2）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 6 & -1 & -3 & 0\\ 5 & 10 & 1 & -5 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{-\frac{1}{4}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

因为 $R(\bar{A})=R(A)=2<4$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R.$$

（3）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 10\\ 11 & 3 & 0 & 8\end{array}\right)\xrightarrow[4r_3]{4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & -1 & 2\\ 12 & -4 & 8 & 40\\ 44 & 12 & 0 & 32\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -10 & 11 & 34\\ 0 & -10 & 11 & 10\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -10 & 11 & 34\\ 0 & 0 & 0 & -24\end{array}\right),$$

因为 $R(A)=2<R(\bar{A})=3$, 所以方程组无解.

（4）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 2 & -1 & -3\\ 4 & 3 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 5 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 2 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 3 & -1\\ -3 & 2 & -1 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -3/2\\ 0 & 5 & 2 & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-5r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & -3 & 13/2\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & 1 & -13/6\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\text{-}r_3]{r_1\text{-}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 13/6\\ 0 & 1 & 0 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & -13/6\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=R(\bar{A})=3$, 所以方程组的唯一解为

$$x=\begin{pmatrix}13/6\\ 2/3\\ -13/6\end{pmatrix}.$$

（5）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & -2 & 3 & -5\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ r_1+r_2}]{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=R(\bar{A})=2<4$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=t_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R.$$

（6）对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&-3&5&-2\\1&-3&2&-4&3\\2&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&-3&5&-2\\0&-7&5&-9&5\\0&-7&5&-9&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+\frac{4}{7}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1/7&-1/7&6/7\\0&-7&5&-9&5\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1/7&-1/7&6/7\\0&1&-5/7&9/7&-5/7\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=R(\overline{A})=2<4$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=t_1\begin{pmatrix}1/7\\5/7\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1/7\\-9/7\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6/7\\-5/7\\0\\0\end{pmatrix},\ t_1,t_2\in R.$$

11. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=l\\ x_1+x_2-2x_3=l^2\end{cases}$ ，求当 l 取何值时有解, 并求出它的解.

解：对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&-2\\1&-2&1&l\\1&1&-2&l^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&l^2\\1&-2&1&l\\-2&1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&l^2\\0&-3&3&l(1-l)\\0&3&-3&2(l^2-1)\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&l^2\\0&-3&3&l(1-l)\\0&0&0&(l-1)(l+2)\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=2$, 所以当方程组有解时, 必有 $(l-1)(l+2)=0$, 即 $l=1$ 或 $l=-2$.

当 $l=-2$ 时, 增广矩阵退化为

$$\bar{A}=\left(A\,|\,b\right)\xrightarrow{\mathrm{LL}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=R(\bar{A})=2<3$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\ t\in R.$$

当 $l=1$ 时, 增广矩阵退化为

$$\bar{A}=\left(A\,|\,b\right)\xrightarrow{\mathrm{LL}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

因为 $R(A)=R(\bar{A})=2<3$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$x=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ t\in R.$$

12. 设 $\begin{cases}(2-l)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-l)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-l)x_3=l-1\end{cases}$, 求当 l 取何值时此方程组有唯一解、无解、无穷多解, 并在无穷多解时求出它的通解.

解：方法一：（行列式法）因为

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix}2-l&2&-2\\2&5-l&-4\\-2&-4&5-l\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&-4&5-l\\2&5-l&-4\\2-l&2&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&-4&5-l\\0&1-l&1-l\\2-l&2&-2\end{vmatrix}\\&=2\begin{vmatrix}1-l&1-l\\2&-2\end{vmatrix}-(2-l)\begin{vmatrix}-4&5-l\\1-l&1-l\end{vmatrix}=-8(1-l)-(2-l)(1-l)(l-9)\\&=-(l-1)^2(l-10),\end{aligned}$$

所以, 当 $|A|=-(l-1)^2(l-10)\neq 0$, 即 $l\neq 1$ 且 $l\neq 10$ 时, 方程组有唯一解.

当 $l=1$ 时, 增广矩阵退化为

$$\bar{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=1<R(\bar{A})=2$, 故方程组无解.

当 $l=10$ 时, 增广矩阵退化为

$$\bar{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&9\end{array}\right)\xrightarrow[4r_3]{4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\8&-20&-16&8\\-8&-16&-20&36\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\0&-18&-18&9\\0&-18&-18&35\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&-2&1\\0&-18&-18&9\\0&0&0&26\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=2<R(\bar{A})=3$, 故方程组无解.

方法二：（初等变换法）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2-l&2&-2&1\\2&5-l&-4&2\\-2&-4&5-l&l-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-4&5-l&l-1\\2&5-l&-4&2\\2-l&2&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r_3]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-4&5-l&l-1\\0&1-l&1-l&l+1\\2(2-l)&4&-4&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(2-l)r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-4&5-l&l-1\\0&1-l&1-l&l+1\\0&4(l-1)&(l-6)(l-1)&-l(l-3)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-4&5-l&l-1\\0&1-l&1-l&l+1\\0&0&(l-1)(l-10)&-l^2+7l+4\end{array}\right)$$

当 $1-l\neq 0$ 且 $(l-1)(l-10)\neq 0$, 即 $l\neq 1$ 且 $l\neq 10$ 时, $R(A)=R(\bar{A})=3$, 方程组有唯一解.

当 $l=1$ 时, 增广矩阵退化为

$$\overline{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)\xrightarrow{\cdots}\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

因为 $R(A)=1<R(\overline{A})=2$, 故方程组无解.

当 $l=10$ 时, 增广矩阵退化为

$$\overline{A}=\left(A\,\middle|\,b\right)\xrightarrow{\cdots}\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -4 & -5 & 9\\ 0 & -9 & -9 & 11\\ 0 & 0 & 0 & -26\end{array}\right),$$

因为 $R(A)=2<R(\overline{A})=3$, 故方程组无解.

复 习 题 三

1. 下列矩阵中, 不是初等矩阵的是（ C ）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解：只能做一次初等变换

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则必有（ C ）

（A）$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.（B）$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

解：$P_1P_2A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}=B$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列得 $\boldsymbol{C}$, 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则（ B ）

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.（B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.（C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.（D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价, 则（ C ）

（A）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.　　（B）$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$.

（C）若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则必有 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.　　（D）$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则下列命题中不正确的是（ D ）

（A）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

（B）若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{E}$.

（C）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 等价, 则 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

（D）若 $|\boldsymbol{A}|>0$, 则 $|\boldsymbol{B}|>0$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, 则（ B ）

（A）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

（B） $\boldsymbol{A}$ 总可以经过初等行变换化成 $\boldsymbol{E}$.

（C）对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})$ 施行若干次初等变换, 当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{E}$ 时, 相应地 $\boldsymbol{E}$ 变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（D）以上都不对.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $R(\boldsymbol{A})=r$, $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶满秩矩阵, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC},r(\boldsymbol{B})=r_1$, 则 （ C ）

（A） $r>r_1$. （B） $r<r_1$. （C） $r=r_1$. （D） r 与 r_1 的大小关系随 $\boldsymbol{C}$ 而定.

解： $r_1=R(B)=R(AC)=R(A)=r$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 （ B ）

（A）当 $m>n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$. （B）当 $m>n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

（C）当 $n>m$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$. （D）当 $n>m$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

9. 设 $n(n\geq 3)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 若 $r(\boldsymbol{A})=n-1$, 则 a 必为 （ B ）

（A）1. （B） $\dfrac{1}{1-n}$. （C）–1. （D） $\dfrac{1}{n-1}$.

解：对 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{i+1}-r_i} \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=n-1,\cdots,1]{c_j+c_{j+1}}\begin{pmatrix} 1+(n-1)a & (n-1)a & (n-2)a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix},$$

因为 $r(A)=n-1$，所以 $1+(n-1)a=0$, 即 $a=\dfrac{1}{1-n}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为非零 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩 （ D ）

（A）必有一个为零.（B）一个小于 n, 一个等于 n.（C）都等于 n.（D）都小于 n.

证明：因为 A,B 均为非零 n 阶矩阵, 所以 $R(A)\le n, R(B)\le n$. 假设 $R(A)=n$, 那么 A 为可逆矩阵, 进而由 $AB=O$ 得 $B=O$, 与已知条件矛盾. 因此, 必有 $R(A)<n$. 同理可证, $R(B)<n$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $m<n$, 则必有（ B ）

（A）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|\neq 0$.　（B）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|=0$.　（C）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|>0$.　（D）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|<0$.

证明：因为 A^TA 为 n 阶方阵, 且 $R(A^TA)\le R(A)\le \min\{m,n\}=m<n$, 所以 A^TA 为奇异矩阵, 即 $|A^TA|=0$.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0, b_i\neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 （ C ）

（A）n.　　（B）$n-1$.　　（C）1.　　（D）0.

证明：方法一：因为

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=ab^T,$$

所以 $R(A)\le \min\{R(a),R(b)\}=1$. 另一方面, 矩阵 A 的所有元素（一阶子式）都不

为零, 因此 $R(A)\ge 1$. 综上所述, $R(A)=1$.

方法二：对矩阵 A 做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a_i}r_i} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i-r_1} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $b_i\ne 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 所以 $R(A)=1$.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & l & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵, 且 $R(\boldsymbol{B})=2, R(\boldsymbol{AB})=1$, 则 l 为 （A）

（A）1.　　（B）-1.　　（C）3.　　（D）-3.

解：对矩阵 A 做初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & l & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & l & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-l\,r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-l \end{pmatrix}.$$

假设 $1-l\ne 0$, 则 A 为可逆矩阵, 进而 $R(AB)=R(B)=2$, 矛盾. 所以必有 $1-l=0$, 即 $l=1$.

14. $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 $n\times 1$ 矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ （C）

（A）有无穷多解. （B）有唯一解. （C）或者无解或者有无穷多解. （D）无解.

15. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$, 下面结论错误的是 （C, D）

（A）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

（B）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（C）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

（D）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.

解：（A） $AX=b$ 有无穷多解，$R(A)=R(\bar{A})<n$，$AX=0$ 有非零解.

（B） $AX=b$ 有唯一解，$R(A)=R(\bar{A})=n$，$AX=0$ 只有零解.

（C） $AX=0$ 有非零解，$R(A)<n$，但有可能 $R(\bar{A})>R(A)$，所以 $AX=b$ 也可能无解.

（D）若 $AX=0$ 只有零解，$R(A)=n$，但有可能 $R(\bar{A})>R(A)$，所以 $AX=b$ 也可能无解.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，下面结论正确的是（ B ）

（A） $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.　　（B） $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

（C） $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.　　（D） $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

17. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n$.

证明：因为 $A^2+A=O$，即 $A(A+E)=O$，所以 $R(A)+R(A+E)\le n$. 另一方面，$R(A)+R(A+E)=R(-A)+R(A+E)\ge R(E)=n$. 综上，$R(A)+R(A+E)=n$.

18. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$

证明：因为 $A^2=E$，即 $(A+E)(A-E)=O$，所以 $R(A+E)+R(A-E)\le n$. 另一方面，$R(A+E)+R(A-E)=R(A+E)+R(E-A)\ge R(2E)=R(E)=n$. 所以 $R(A+E)+R(A-E)=n$.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\ge 2)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\begin{cases} n, & 若R(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & 若R(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & 若R(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$$

证明：当 $R(A)=n$ 时，A 为可逆矩阵，从而 A^{-1} 也为可逆矩阵，进而由 $A^*=|A|A^{-1}$ 得 A^* 也为可逆矩阵，所以 $R(A^*)=n.$

当 $R(A)=n-1$ 时, $|A|=0$, 由行列式展开定理得 $AA^*=|A|E=O$, 所以 $R(A)+R(A^*)\le n$, 即 $R(A^*)\le n-R(A)=1$. 另一方面, 由 $R(A)=n-1$ 知存在一个非零的 $n-1$ 阶子式, 即 A^* 有非零元素（一阶子式）, 所以 $R(A^*)\ge 1$. 综上所证, $R(A^*)=1$.

当 $R(A)<n-1$ 时, A 的所有 $n-1$ 阶子式都为零, 因此 A^* 的所有元素都为零, 即 $A^*=0$, 所以 $R(A^*)=0$.

20. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 问 a,b 满足什么条件时, $\boldsymbol{A}^*$ 的秩等于 1?

解：当 $R(A^*)=1$ 时, $R(A)=n-1=2$. 对矩阵 A 进行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2+c_1]{c_3+c_2} \begin{pmatrix} a+2b & 2b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A)=2$, 所以 $a+2b=0, a-b\ne 0$, 即 $a+2b=0, a\ne b$.