浙 江 工 业 大 学

线 性 代 数 期 末 试 卷

（ 2019 ～ 2020 第 一 学 期 ）

任课教师 ______________学院班级：___________________选课班中编号：_____

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\left(a^2-b^2\right)^2}$.

2. 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in R^3$，方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})$, $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\right)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=2$，则

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\underline{\quad 12 \quad}$.

3. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\underline{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,$|\boldsymbol{BA}|=\underline{\quad 4 \quad}$.

5. 向量组 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=\underline{\quad 1 \quad}$, $b=\underline{\quad 3 \quad}$.

6. 向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标为 $\underline{\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)}$.

7. $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则当 $k=$ <u> −1 </u>时

$\boldsymbol{\eta}=k\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 6，则 $a=$ <u> 5 </u>.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵，则以下一定正确的是 (D   ).

   (A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ (B) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ (C) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ (D) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，k 为非零常数，则 $(k\boldsymbol{A})^*=$(C   ).

   (A) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$ (B) $k\boldsymbol{A}^*$ (C) $k^3\boldsymbol{A}^*$ (D) $k^4\boldsymbol{A}^*$

3. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都为 4 维向量，则以下命题正确的是(D   ).

   (A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的倍数，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

   (B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

   (C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则每个向量都可表示为其余向量的线性组合

   (D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则每个向量都不能表示为其余向量的线性组合

4. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，则以下也可作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是(A   ).

   (A) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ (B) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$

   (C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$ (D) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{\alpha}$

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 0，则以下结论错误的是 (B   ).

   (A) $|\boldsymbol{A}|=0$ (B) $\boldsymbol{A}$ 与零矩阵相似

   (C) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$ (D) $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值也全是 0

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}$.

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_4+c_1\\c_4+c_2\\c_4+c_3}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-4&-1\\1&-4&1&-1\\-4&1&1&-1\end{vmatrix}$$ ----------- 4 分

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}$$ ----------- 8 分

$=125$ ----------- 10 分

其它做法酌情给分。

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&4\\4&0\\0&-4\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

$|\boldsymbol{A}|=4$，等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，即

$4\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，化简得 $(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$， ----------- 4 分

$$(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$ ----------- 8 分

$$\boldsymbol{X}=(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$ ----------- 10 分

3. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$的秩、极大无关组，

并用该极大无关组表示其余向量.

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{pmatrix}$$ ----------- 3 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ----------- 6 分

秩为 3，极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$， ----------- 8 分

$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,
$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$. ----------- 10 分

4. 试问当k取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=k\\4x_1+kx_2+2x_3=k+2\\(k+5)x_1+x_2+4x_3=k^2+4\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在其有无穷多解时给出通解.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&k\\4&k&2&k+2\\k+5&1&4&k^2+4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&k\\0&k&-2&-3k+2\\0&1&-1-k&4-5k\end{pmatrix}$$ ----------- 2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&k\\0&1&-1-k&4-5k\\0&k&-2&-3k+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&k\\0&1&-1-k&4-5k\\0&0&(k+2)(k-1)&(5k-2)(k-1)\end{pmatrix}$$ ----------- 4 分

$k\neq-2$且$k\neq1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，有唯一解； ----------- 6 分

$k=-2$时，$r(\boldsymbol{A})=2<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，无解； ----------- 8 分

$k=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，有无穷多解，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得其通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ----------- 10 分

5. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

1）$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)$，

特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=-2, \lambda_3=2$. ----------- 3 分

当 $\lambda_1=0$ 时，$\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量可取 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

----------- 5 分

当 $\lambda_2 = -2$ 时，$\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量可取 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

----------- 7 分

当 $\lambda_3 = 2$ 时，$\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量可取 $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

----------- 9 分

2）可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，可使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. ----------- 10 分

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. (6 分) 已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，ξ_1,ξ_2 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解.

证明：由已知， $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{0}$，

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\xi_1)=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\xi_2)=\boldsymbol{b}$， 即 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. ----------- 2 分

下证 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2$ 线性无关，

首先， ξ_1,ξ_2 线性无关， $\boldsymbol{\eta}$ 不能表示为 ξ_1,ξ_2 的线性组合，故 $\xi_1,\xi_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关。

（ξ_1,ξ_2 线性无关，若 $\xi_1,\xi_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\eta}$ 能表示为 ξ_1,ξ_2 的线性组合，矛盾）

----------- 4 分

又 $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2)=(\xi_1,\xi_2,\boldsymbol{\eta})\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$， 且 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，故

$R(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2)=R(\xi_1,\xi_2,\boldsymbol{\eta})=3$，即 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2$ 线性无关. ----------- 6 分

2. （4 分）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$， 证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$.

证明：

由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BC}$， ----------- 2 分

故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$， 得 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$. ----------- 4 分

若由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{ABC}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|=1$， 得 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$， $\boldsymbol{B}$ 可逆， 可得 2 分.