第四章　向量组的线性关系

本章主要介绍向量组线性相(无)关、极大线性无关组和向量组的秩等重要概念，同时给出判断向量组线性相（无）关的基本方法以及相关性质.

第一节 向量及其线性表示

一、n 维向量

定义 1　由 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为一个 n **维向量**，n 称为向量的**维数**. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数，则称该向量为**实向量**.

称 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**行向量，**称 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 为**列向量**，在本书中，如果没有特别说明，向量一般指的是列向量. 向量通常用 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \cdots$ 等黑体字母表示.

若向量的各个分量全为 0，则称之为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 两个向量**相等**当且仅当二者的所有分量对应相等.

全体 n 维实向量的集合记作

$$\boldsymbol{R}^n = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, \cdots, n \right\}. \tag{4.1}$$

例如三维空间 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \mid x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ 即是我们通常所说的 3D 世界.

二、向量的线性运算

定义 2　设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 为 n 维向量，k 为一个数，定义向量的**加法、减法**和**数乘**分别为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}、\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\\\vdots\\x_n-y_n\end{pmatrix}、k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\\vdots\\kx_n\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

向量的加法和数乘统称为向量的**线性运算**.

例 1 设 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=(2,1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$.

解 因为 $2(3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta})-3(2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta})=2(2,1,1,2)^{\mathrm{T}}-3(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}=(7,-4,7,1)^{\mathrm{T}}$，

即 $-\boldsymbol{\beta}=(7,-4,-7,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\beta}=(-7,4,7,-1)^{\mathrm{T}}$，从而可得到 $\boldsymbol{\alpha}=(10,-5,-9,2)^{\mathrm{T}}$.

定义 3 设向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为一组 n 维向量，对任意一组实数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，称 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个**线性组合**，$c_1,c_2,\cdots,c_m$ 称为组合系数. 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为某一组实数，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表示**.

对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n.\end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix},(i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

则系数矩阵表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 此时线性方程组有下面向量表示式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta} \tag{4.3}$$

由上述定义及第三章第三节线性方程组解的理论可得下面等价命题：

定理 1 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow$ 方程组系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=R(\bar{\boldsymbol{A}})$（增广矩阵的秩）.

例 2 证明任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 均可由以下 n 维向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

线性表示.

证明 显然有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$，证毕.

这组单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 构成了研究 $\boldsymbol{R}^n$ 的重要向量组.

例 3 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}11\\7\\5\\9\end{pmatrix}$，问 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能，试求 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表达式.

解 令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，看为三元线性方程组，其系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}3&1&2&\vdots&11\\2&1&0&\vdots&7\\1&1&0&\vdots&5\\2&1&2&\vdots&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&2\\0&1&0&\vdots&3\\0&0&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

从行最简形可得 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故该方程组有解，其解为 $x_1=2,x_2=3,x_3=1$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，其表示式为 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

思 考 题 一

1．向量组与矩阵之间有何联系与区别？

2．n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，这个问题与线性方程组的求解是如何关联的？

3．若向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，则表示式是否一定唯一？什么情况下表示式唯一？

第二节　向量组的线性相关性

本节主要介绍向量组线性相（无）关的定义以及如何判定向量组线性相关还是线性无关.

一、向量组的线性相关

定义 4　若向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m (m\ge 2)$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示，则称向量组$\boldsymbol{A}$**线性相关**，否则称向量组$\boldsymbol{A}$**线性无关**.

例如向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$中不存在一个向量能由其余一个向量线性表示，所以这个向量组线性无关. 而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，由于$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

定理 2　向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{R}^n$线性相关的充要条件是存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}, \tag{4.3}$$

证明　若$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为零，不妨就设$k_1\ne 0$，则由$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，我们有$\boldsymbol{\alpha}_1=(-\frac{k_2}{k_1})\boldsymbol{\alpha}_2+(-\frac{k_3}{k_1})\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(-\frac{k_m}{k_1})\boldsymbol{\alpha}_m$，即$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，从而由定义知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{R}^n$线性相关，按定义 4，不妨就假设向量$\boldsymbol{\alpha}_1$可由其余向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}_1=j_2\boldsymbol{\alpha}_2+j_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+j_m\boldsymbol{\alpha}_m$，其中$j_2,j_3,\cdots,j_m$为实数. 则有$\boldsymbol{\alpha}_1-j_2\boldsymbol{\alpha}_2-j_3\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-j_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，即有不全为零的一组数$k_1=1,k_2=-j_2,\cdots,k_m=-j_m$使得（4.3）成立. 证毕.

从定理2知,若只有当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时(4.3)式才成立,则此时向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

上述定理 2 是用来判断一个向量组是否线性相关或无关的最常用最重要的方法. 如果把$k_1,k_2,\cdots,k_m$看成是未知元，则（4.3）实际上是一个齐次线性方程组. 若该方程组有非零解（即$R(\boldsymbol{A})<m$）,则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关. 反之,若方程组只有零解(即$R(\boldsymbol{A})=m$),则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

注:（1）对于只包含一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$时是线性相关的，当$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$时是线性无关的;（2）对于包含两个向量的向量组，该向量组线性相关的充分必要条件是两向量的对应分量成比例，几何意义即两向量共线.

例 4　设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$，问当$t$等于什么值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关？什么时候线性无关？

解　令$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由 Cramer 法则知，要使该线性方程组有非零解，则系数行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$必须等于零，即$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5=0$，得$t=5$. 所以当$t=5$时向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关. 而$t\neq5$时，方程组只有零解，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

例 5　证明n维向量组$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$线性无关.

证明　令$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$，系数行列式$|\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n|=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1$，由 Cramer 法则知，$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，即$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性无关. 证毕.

例 6　已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$线性无关，而

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，试判定$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的线性相关性.

解　令$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，得$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则

$$\begin{cases}x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3=0,\\ x_1+x_2 \phantom{{}+x_3} =0,\\ \phantom{x_1+{}} x_2+x_3=0,\end{cases}$$

因为方程组的系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以方程组只有零解，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

从上述例子可以知道，要判定一个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是否线性相关，关键是看齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$是否有非零解. 具体说，一是当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$包含的向量的个数与向量维数相等时，由于此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可构成行列式$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right|$，根据 Cramer 法则，向量组构成的行列式$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right|=0$，则向量组线性相关，行列式不等于零（即向量组构成的方阵可逆）则向量组线性无关. 如上述例 4 和例 5. 二是当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$包含的向量的个数与向量维数不相等时，可考察向量组构成的矩阵，即齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$的系数矩阵. 根据齐次线性方程组的理论，当系数矩阵的秩小于未知量的个数m时，有非零解；当系数矩阵的秩等于未知量的个数m时，只有零解. 所以若$R(\boldsymbol{A})<m$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，若$R(\boldsymbol{A})=m$，则向量组线性无关. 即有下面命题：

命题 1　n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$\Leftrightarrow$线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$有非零解$\Leftrightarrow$方程组系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{A})<m$.

命题 2 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 方程组系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=m$.

二、向量组线性相关的性质

性质 1 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式唯一.

证明 只需证明方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解即可. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以 $m=R(\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})\le m$，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta})=m$，由线性方程组解的理论知方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.

推论 若 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则表示式唯一当且仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

性质 2 当向量组所含向量个数大于向量的维数时，则该组向量必线性相关.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 m 个 n 维向量，且 $m>n$. 则矩阵的秩

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\le n<m,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

推论 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

如果向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则它的部分组也一定线性无关. 如果 $\boldsymbol{A}$ 线性相关，则它的部分组可能线性相关也可能线性无关. 例如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，它的任意一个部分组如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍线性无关. 而对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，它线性相关，它的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而另一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 却线性相关.

反之，把一个线性无关的向量组扩展（至少添加一个向量以上）后得到的新向量组可能线性相关也可能仍线性无关. 而把一个线性相关的向量组扩展后得到的新向量组一定仍是线

性相关. 例如由上述向量构成的向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，对该向量组加入另外的向量进行扩展. 如果加入$\boldsymbol{\alpha}_1$，得到的扩展向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$仍线性无关，而如果加入的是$\boldsymbol{\alpha}_4$，得到的扩展向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$就变成线性相关了. 从上也可知，含零向量的向量组一定是线性相关的.

把向量组的各个向量以同样的方式增加若干个分量得到的向量组叫**接长向量组**. 把向量组的各个向量以同样的方式删除若干个分量得到的向量组叫**截短向量组**. 例如，向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$在每个向量在同一个位置添加一个分量后得到的向量组$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\5\end{pmatrix}$即是向量组$\boldsymbol{A}$的一个接长向量组，而向量组$\boldsymbol{A}$可视为向量组$\boldsymbol{B}$的一个截短向量组. 请读者证明：一个线性相关的向量组截短后仍相关，而一个线性无关的向量组接长后仍无关.

思考题二

1. 请总结梳理向量组线性表示、线性相关(无关)与线性方程组解的理论之间的关系，理顺这个关系对掌握本章内容很重要.

2. 下列命题是真命题的有（　　　　）

（1）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$属于$\boldsymbol{R}^4$，$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

（2）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$属于$\boldsymbol{R}^4$，且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

（3）若$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$属于$\boldsymbol{R}^4$，$\boldsymbol{\alpha}_1$不是$\boldsymbol{\alpha}_2$的倍数，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.

（4）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$属于$\boldsymbol{R}^4$，而$\boldsymbol{\alpha}_3$不是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

（5）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$属于$\boldsymbol{R}^4$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$也线性相关.

（6）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{R}^4$中线性无关向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关.

3．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是一组$n$维向量，下列命题正确的有（　　　）.

（1）若存在$k_1,k_2,\cdots,k_s$全为零，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

（2）仅当$k_1,k_2,\cdots,k_s$全为零，才能使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

（3）若存在$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

（4）若对任意的$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零，使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

4.下列各项中，（　　　）是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的必要条件.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$都不是零向量.

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意两个向量都不成比例.

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意部分组线性无关.

5．下列各项中，（　　　）是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关的充分必要条件.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$至少有一个是零向量.

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有两个的分量成比例.

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个部分组线性相关.

6．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(4,a,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,b,4,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,c,4,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,d,0,4)^{\mathrm{T}}$，在$a,b,c,d$可任意选取时，下列结论正确的是（　　），并说明理由.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$必线性相关.

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$必线性无关.

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4$必线性无关.

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\alpha_4$必线性相关.

第三节　向量组的秩

一、向量组的极大无关组

定义 5　给定n维向量组（I）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和（II）：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，如果（II）中的每一个向量都可以由（I）中的向量线性表示，称（II）可以由（I）**线性表示**．如果（II）可以由（I）线性表示，同时（I）也可以由（II）线性表示，则称（I）和（II）**等价**.

若向量组(Ⅰ)可以由(Ⅱ)线性表示，则有表示式

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=l_{11}\boldsymbol{\beta}_1+l_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{t1}\boldsymbol{\beta}_t\\ \boldsymbol{\alpha}_2=l_{12}\boldsymbol{\beta}_1+l_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{t2}\boldsymbol{\beta}_t\\ \cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s=l_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+l_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{ts}\boldsymbol{\beta}_t\end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_j=l_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+l_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{tj}\boldsymbol{\beta}_t=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}l_{1j}\\ l_{2j}\\ \vdots\\ l_{tj}\end{pmatrix}$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&\cdots&l_{1s}\\ l_{21}&l_{22}&\cdots&l_{2s}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ l_{t1}&l_{t2}&\cdots&l_{ts}\end{pmatrix},$$

简记为

$$\boldsymbol{A}_{n\times s}=\boldsymbol{B}_{n\times t}\boldsymbol{L}_{t\times s},\tag{4.4}$$

其中$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别是由向量组（I）和（II）作为列向量组所组成的矩阵，$\boldsymbol{L}$是由表示系数所组成的$t\times s$矩阵．同理，若向量组(Ⅱ)也可以由（Ⅰ)线性表示，则有表示式$\boldsymbol{B}_{n\times t}=\boldsymbol{A}_{n\times s}\boldsymbol{K}_{s\times t}$

成立，其中 $\boldsymbol{K}$ 是由表示系数所组成的 $s\times t$ 矩阵.

定义 6 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个部分组，如果满足：

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）向量组 $\boldsymbol{A}$ 中的任意 $r+1$ 个向量线性相关（如果 $\boldsymbol{A}$ 存在 $r+1$ 个向量的话），

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个**极大线性无关向量组**（**极大无关组**）.

例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为该向量组的一个极大无关组. 我们可发现 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也分别是该向量组的极大无关组. 所以一般情况下，向量组的极大无关组不是唯一的. 但同一个向量组的不同极大无关组包含的向量的个数却是一样的. 本例中不同极大无关组包含的向量个数都是 2.

二、向量组的秩

定理 3 **设 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则必有 $s\ge t$.**

证明 记矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的表示系数矩阵，则有 $\boldsymbol{B}_{n\times t}=\boldsymbol{A}_{n\times s}\boldsymbol{K}_{s\times t}$.

因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，所以 $R(\boldsymbol{B})=t$. 由矩阵秩的性质我们有

$t=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{AK})\le R(\boldsymbol{A}_{n\times s})\le s$，即有 $s\ge t$.

推论 **等价的线性无关向量组所含的向量个数必相同.**

由定义 6 知，向量组与其极大无关组是等价的，由等价的传递性知向量组的不同极大无关组之间也是等价的. 由上述推论即可得向量组的极大无关组所含向量的个数是唯一的，因此我们有

定义 7 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的**秩**，记作 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

定理 4 **矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.**

证明 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，分别按列、按行分块，记作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\text{ 和 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\omega}_m\end{pmatrix},$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r$，记不等于零的 r 阶子式为 D_r，则知 D_r 所在的 r 列线性无关，而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 阶子式全为零，则知 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量所构成的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})=r<r+1$，由上节命题 1 知，这 $r+1$ 个列向量线性相关，因此 D_r 所在的 r 列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于 r． 类似可证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为 $R(\boldsymbol{A})=r$.

我们把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**，定理 4 说明同一矩阵的行秩与列秩一定相等，等于该矩阵的秩.

定理 5 若向量组 A 可以由向量组 B 线性表示，则 $R(\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{B})$.

证明 分别取向量组 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的一个极大无关组 $\hat{\boldsymbol{A}}$、$\hat{\boldsymbol{B}}$，则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价、$\hat{\boldsymbol{B}}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，从而 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 可由 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 表示，根据定理 3，可知 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 所含的向量个数不会超过 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 包含的向量个数，而 $\hat{\boldsymbol{A}}$、$\hat{\boldsymbol{B}}$ 所含的向量个数分别就是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的秩，因此 $R(\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{B})$.

推论 若向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

由前述性质和定理以及本章附录中阐述的求极大无关组的数学原理，可总结求向量组极大无关组的步骤：（1）把向量组作为一矩阵的列向量组，利用初等行变换把该矩阵化为行阶梯型，阶梯型矩阵非零行个数即该向量组的秩；（2）再继续利用初等行变换把行阶梯型化为行最简型，行最简型中所有非零行的左边第一个非零元 1 所在的那些列对应到原向量组中的那些列即构成一个极大无关组，行最简型其它列上的元素即为用该极大无关组表示其它对应向量的系数.

例 7 给定向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,5,5,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,1,2,2)^{\mathrm{T}},$$

求向量组的秩和它的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示．

解 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\-1&0&-1&5&1\\0&1&2&5&2\\1&0&1&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&-5&-1\\0&0&0&10&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

从行阶梯形可以得到$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，每行首个非零元素所在的列$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为其极大无关组．为获得其余向量用该极大无关组线性表示的表示式，再进一步用初等行变换把行阶梯形化为行最简形，

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&-5&-1\\0&0&0&10&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0.5\\0&1&2&0&0.5\\0&0&0&1&0.3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从行最简形可得$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_5=0.5\boldsymbol{\alpha}_1+0.5\boldsymbol{\alpha}_2+0.3\boldsymbol{\alpha}_4$.

思考题三

1. 给定向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，如何证明这两个向量组等价？

提示：这两个向量组等价的充要条件是$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$

2. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r(r>0)$，则（　　　）.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量线性无关；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至多有$r$个向量线性无关；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中必有$r$个线性无关的向量；

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r$个向量均线性无关；

（5）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个含$r$个向量的部分组与全组等价.

3. 思考：两个向量组的等价和两个矩阵的等价有什么异同点？

4. 下述结论不正确的是（　　　）.

（1）秩为4的4×5矩阵的行向量组必线性无关；

（2）可逆矩阵的行向量组和列向量组均线性无关；

（3）秩为$r(r<n)$的$m\times n$矩阵的列向量组必线性相关；

（4）凡行向量组线性无关的矩阵必为可逆矩阵.

习 题 四

（A）

1．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(6,8,1)^{\mathrm{T}}$，求$3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

2．设$\boldsymbol{\alpha}=(6,1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,2,-1,3)^{\mathrm{T}}$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$，使得$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$.

3．将向量$\boldsymbol{\alpha}$表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合.

（1）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4．判别下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}ax\\bx\\cx\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}ay\\by\\cy\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}az\\bz\\cz\end{pmatrix}$，其中$a,b,c,x,y,z$全不为零；

5．设有向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，以及向量$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$，问$a,b$为何值时：

（1）向量$\boldsymbol{\gamma}$不能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示；

（2）向量$\boldsymbol{\gamma}$能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，且表示式唯一；

（3）向量$\boldsymbol{\gamma}$能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示，且表示式不唯一，并求其表示式.

6．证明：若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$也线性无关.

7．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

8．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$为$n$维非零向量，$\boldsymbol{A}$为$n$阶方阵，若

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

9．如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，但其中任意 3 个向量都线性无关，证明必存在一组全不为零的数k_1,k_2,k_3,k_4，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

10．问a取什么值时下列向量组线性相关？

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

11. 设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵，其中$n<m$. $\boldsymbol{E}$是n阶单位矩阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关.

12．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in\boldsymbol{R}^n$，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关当且仅当任一$n$维实向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

13．若向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示为$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \end{cases}$，证明向

量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$等价.

14．求下列各向量组的秩及其一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$

15．设$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为两个同维向量组，秩分别为$r_1$和$r_2$；向量组$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$的秩为$r_3$. 证明：$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$.

16．设向量组$\boldsymbol{A}$线性无关，向量组$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$能由向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{K}$，其中$\boldsymbol{K}$是$s\times r$矩阵. 证明向量组$\boldsymbol{B}$线性无关的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{K}$的秩$R(\boldsymbol{K})=r$.

（B）

1．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，而$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？理由是什么？

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？理由是什么？

2．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$，请分析向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的线性相关性.

3．设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且存在正整数k，使方程组$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$，且已知

$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，试证明：$\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

4. 设 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1= & \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+ & \boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\end{cases}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

5．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个 n 维向量组，且 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 等于 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 都等于 r，则（　　　　）.

（A）两个向量组等价；

（B）当 $s=t$ 时，两个向量组等价；

（C）$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$；

（D）当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 也可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

6. 设向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩与向量组 $\boldsymbol{B}$ 相同，且向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，证明向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价.

7．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

附录四

附 1. 向量组和线性相关无关以及下一章要介绍的向量空间和坐标变换在航天飞行和计算机图形学中均有重要的应用.

航天飞机的控制系统对飞行控制是至关重要的. 航天飞机在大气层飞行时需要不间断地用计算机监控，飞行控制系统不断地向空气动力控制表面和推进器喷口发送命令. 从数学的角度看，一个工程学系统输入和输出信号都是函数，涉及到向量运算，所有可能的输入函数的集合构成一个向量空间，因此，对飞行系统的控制最终转化为对向量空间的运算.

在计算机图形学中，如图 1，在三维坐标系（世界坐标系）$oxyz$ 下的圆柱体物体要在计算机屏幕上绘制出来，必须要进行从三维到二维的透视投影过程. 若从观察点（视点）发出的视线与圆柱体相交于 A 点，则视线与投影面的交点 A' 即为 A 在投影面上的像，然后像 A' 才能在二维计算机屏幕上相应位置绘制. 对圆柱体上的每一点都像 A 点一样如此过程绘制在计算机屏幕上，最后获得整个圆柱体在计算机屏幕上的绘制. 在此过程中，为使透视投影变换（从点 A 变换到像 A'）矩阵简单以及能方便地获得 A' 的二维坐标，需要在投影面上建立一个三维观察坐标系 $\bar{o}uvn$，一般使 n 轴通过视点，且 n 是投影面法向，$u\bar{o}v$ 构成投影面上的二维坐标系.

则我们利用本章中介绍的坐标变换的方法先把圆柱体的坐标从世界坐标系 $oxyz$ 变换到观察坐标系 $\bar{o}uvn$，在这个新的观察坐标系下处理，透视投影变换（矩阵）就变得相当简单，并且还可直接获得投影像点的二维坐标 (u,v).

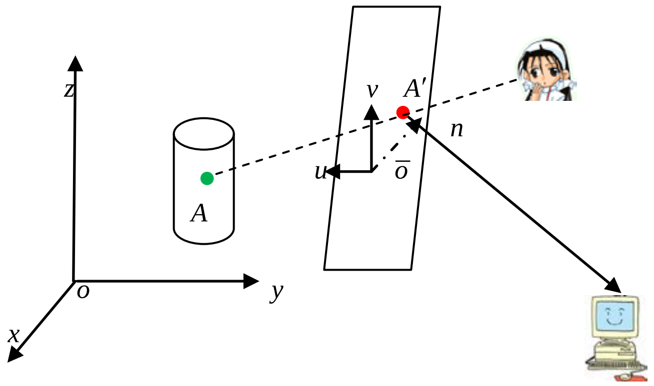

图 1.　 计算机图形成像示意

附 2. 本章求列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 秩和其一个极大无关组方法的数学原理

（1）由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的秩，因此可用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化成行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，从而有 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$ 中非零行的行数.

（2）由于行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换得到，根据初等变换与初等矩阵理论，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是有限次初等行变换相对应的有限个初等矩阵的乘积. 从而有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，即 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{P\alpha}_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$. 由 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{P\alpha}_i$ 易证：对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 任意一个部分组（含取全部向量这一情形）$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中与之对应的部分组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_k}$，齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_k\boldsymbol{\alpha}_{i_k}=\boldsymbol{0}$ 和 $x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_k\boldsymbol{\beta}_{i_k}=\boldsymbol{0}$ 必定同解，即 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 具有相同的线性相关无关性. 从而若行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的一个极大无关组，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中与之对应的 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 也必然是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组. 选取行阶梯形 $\boldsymbol{B}$ 中每个非零行首个非零元所在的那些列，不妨设这些列为 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_k}$，很明显 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 构成了向量组

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的一个极大无关组，则由前述讨论知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中与这些列对应的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 也构成了向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

特别地，当 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 是行最简形时，此时 $\boldsymbol{B}$ 是一个特殊的行阶梯形，$\boldsymbol{B}$ 的每一个非零行首个非零元均为 1，且该元素 1 所在列的其余元素均为零. 设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_t = (l_1, l_2, \cdots l_k, 0, \cdots 0)$，其中 $t \in \{1, 2, \cdots m\}$ 且 $t \neq i_1, i_2, \cdots, i_k$，则 $\boldsymbol{\beta}_t$ 和按前述方法在行最简形 $\boldsymbol{B}$ 中得到的极大无关组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 有如下线性表示关系：$\boldsymbol{\beta}_t = l_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + l_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + l_k\boldsymbol{\beta}_{i_k}$，由 $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$，我们有 $\boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}_t = l_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}_{i_1} + l_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + l_k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_t = l_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + l_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + l_k\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$，也即行最简形 $\boldsymbol{B}$ 中列向量 $\boldsymbol{\beta}_t$ 的各个分量 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 用其极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 线性表示的表示系数.