浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷 A
答 案 及 评 分 标 准
（ 2016 ～ 2017 第 一 学 期 ）

任课教师：__________学院班级：______________班中编号：______

学号：______________ 姓名：____________ 得分：________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的常数项 $=$ __0__.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}=$ __-16__.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{10}=\underline{\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}$.

4. 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\underline{\begin{pmatrix} 1/6 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}}$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,p,q,r 均不为零，则齐次线性方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中所含解向量的个数为<u> 2 </u>.

7. 已知向量$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}3 & 2 & k\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$能被向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$线性表示，则

$k=$<u> -1 </u>，与$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$都正交的所有向量为<u> $k\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ </u>.

8. 矩阵$\boldsymbol{A}$相似于$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则$R(\boldsymbol{B})=$<u> 2 </u>，$|\boldsymbol{B}|=$<u> 0 </u>.

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 已知行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=-2$，则行列式

$\begin{vmatrix}a_1 & b_1+2c_1\\ a_2 & b_2+2c_2\end{vmatrix}=$ (B).

(A) −1 (B) −3 (C) 1 (D) 3

2. 设n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 (D).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$ (B) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ (C) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AC}$ (D) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$

3. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性表示，则(A).

(A) 若$s>k$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关 (B) 若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性无关，则$s>k$

(C) 若$s>k$，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k$线性相关 (D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s>k$

4. $\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则关于$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的解的命题正确的是 (A).

(A) 若$R(\boldsymbol{A})=m$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解 (B) 若$R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=m$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解

(C) 若$R(\boldsymbol{A})=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解 (D) 若$R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有解

5. 已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是同阶正交阵，则以下不一定是正交阵的是 (C).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (B) $\boldsymbol{B}^{-1}$ (C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{AB}$

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a-b-c-d & 2a & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c-d & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b-d & 2c \\ 2d & 2d & 2d & d-a-b-c \end{vmatrix}$.

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ 2b & b-a-c-d & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b-d & 2c \\ 2d & 2d & 2d & d-a-b-c \end{vmatrix}$$ -----3 分

$$=\!=\!=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c-d & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b-d & 2c \\ 2d & 2d & 2d & d-a-b-c \end{vmatrix}$$ ------5 分

$$\xlongequal[r_4-2d\cdot r_1]{\substack{r_2-2b\cdot r_1\\ r_3-2c\cdot r_1}}(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-a-c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d-a-b-c \end{vmatrix}$$ ------8 分

$$=-(a+b+c+d)^4$$ ------10 分

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

$|\boldsymbol{A}|=4, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}$ -----2 分

上式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $4\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，

移项得 $4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{A}^2$，即 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^2$ -----4 分

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$ -----8 分

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ -----10 分

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\5\\a\\3\end{pmatrix}$ 的秩为 3，求 a 的值，以及

向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\2&-1&-1&5\\4&-6&2&a\\3&6&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-3\\0&-10&10&a-16\\0&3&9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&0&a-6\\0&0&12&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a-6\end{pmatrix}$$

向量组秩为 3，故 $a=6$.　　　　-----4 分

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ -----8 分

极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.　　　　-----10 分

4. 求线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3\lambda x_3=2\\-x_1+2\lambda x_2-3x_3=-2\lambda\\\lambda x_1-2x_2+3x_3=2\lambda^2\end{cases}$$

在 λ 取何值时无解、有唯一解、有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\lambda&2\\-1&2\lambda&-3&-2\lambda\\\lambda&-2&3&2\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\lambda&2\\0&2\lambda-2&3\lambda-3&2-2\lambda\\0&2\lambda-2&3-3\lambda^2&2\lambda^2-2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3\lambda&2\\0&2(\lambda-1)&3(\lambda-1)&-2(\lambda-1)\\0&0&-3(\lambda-1)(\lambda+2)&2(\lambda-1)(\lambda+1)\end{pmatrix}$$ -----4 分

当 $\lambda=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，无解；

当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，有唯一解；　　　　-----6 分

当 $\lambda=1$ 时，

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -----10 分

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，

（1）证明：$a = 3,\ b = 2$；

（2）求出相似变换矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

（1）由相似的性质知，矩阵 A 的特征值为 $-1, 2, b$，

再由 $\begin{cases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+2+a = -1+2+b \\ 2(-2a+4) = -2b \end{cases}$

即得 $a = 3,\ b = 2$. -----3 分

（2）对于 $\lambda_1 = -1$，

$$A + E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，特征向量 p_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-----5 分

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$，

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，特征向量 p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ -----9 分

故相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -----10 分

1	2	本题总得分

四、证明题（共 10 分）

1. (5 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证明：用反证法，假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，

又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故

$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2, \end{cases}$$ -----3 分

推出 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (l_1 - k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_2$, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关矛盾，

因此假设不成立，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. -----5 分

2. （5 分）已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 相似，证明 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$.

证明：由已知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$， -----2 分

$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$. -----5 分