浙江工业大学 2014 - 2015 学年第一学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题 (每空 2 分，共 22 分)

1. $\underline{\quad 0.4 \quad}$
2. $\underline{\frac{5}{9}\quad}$
3. $\underline{\quad 2 \quad}$
4. $\underline{\quad 3 \quad}$， $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$
5. $\underline{\frac{1}{3}\quad}$
6. $\underline{\ 0.8186\ }$
7. $\underline{\quad 2 \quad}$， $\underline{\quad \sqrt{2} \quad}$， $\underline{\quad 2 \quad}$
8. $\underline{\ \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ }$

二. 选择题 (每题 3 分，共 18 分)

1. B
2. D
3. B
4. A
5. C
6. B

三. 解答题（共 60 分）

1. （8 分）**解：** A 表示带菌，B 表示阳性，则

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.1\times 0.95}{0.1\times 0.95+0.9\times 0.01} \\ &= \frac{95}{104} \\ &\approx 0.9135 \end{aligned}$$

2. （8 分）**解：**

Y	0	6
0	0.6	0.4

$EY^2 = 6^2\times 0.4+0 = 14.4$。

3. （12 分，每小题 4 分）**解：**

1）

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^1 cxdx + \int_1^2 c(3-x)dx \\ &= \frac{c}{2}+\frac{3c}{2} = 2c \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2）

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_0^1 cx^2dx + \int_1^2 c(3-x)xdx \\
&= \frac{c}{3} + \frac{9}{2}c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{4} \\
EX^2 &= \int_0^1 cx^3dx + \int_1^2 c(3-x)x^2dx \\
&= \frac{c}{4} + 7c - \frac{15}{4}c = \frac{7}{4} \\
Var(X) &= EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

3）对 $0 < y < 4$，$h(y) = \sqrt{y}$，

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{3}{4\sqrt{y}} - \frac{1}{4}, & 1 < y < 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. (12 分) 每小题 4 分**解：**

1)

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 \int_0^y A(2x+y)dxdy \\
&= \int_0^1 2Ay^2 dy = \frac{2A}{3} \\
&\Rightarrow A = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
P(X+Y<1) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} A(2x+y)dydx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2Ax(1-2x) + \frac{A}{2}[(1-x)^2 - x^2]dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}A + Ax - 4Ax^2 dx = \frac{5}{24}A = \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

3)

$$
f_X(x) = \int_x^1 A(2x+y)dy = 3x(1-x) + \frac{3}{4}(1-x^2) = \frac{3}{4} + 3x - \frac{15}{4}x^2, \quad 0<x<1
$$

$$
f_Y(y) = \int_0^y A(2x+y)dx = 3y^2, \quad 0<y<1
$$

$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X, Y 不独立。

5. (10 分) **解：**

1) 矩估计：

$$EX = \int_2^\infty \lambda x e^{-\lambda(x-2)} dx = \frac{1}{\lambda} + 2$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{EX - 2}$$

故矩估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}-2}$。

2) 极大似然估计：

$$L(\lambda) = \Pi_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda(x_i-2)}$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} - (x_i - 2) = 0$$

得极大似然估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}-2}$。

6. (10 分) **解：** $H_0 : \mu = (\leq)\mu_0 = 900$，$H_1 : \mu > \mu_0$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx 5.06$$

拒绝域为 $(1.8331, \infty)$，

在拒绝域中，拒绝原假设，该肥料显著地提高了农作物的产量。