浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷（A）
参 考 答 案
（ 2015～ 2016 第一学期）

任课教师：______________学院班级：_______________选课班中编号：______

学号：__________________ 姓名：_________________得分：____________

题号	一	二	三	四
得分				

一．填空题(每空 3 分, 共 30 分)

本题得分	

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&3&2\\3&0&4&1\\1&2&3&1\\6&0&7&6\end{vmatrix}$，则其第四行元素的余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$ ___0___

2. 设 $\alpha=(-1,2,\ 1)^T$，$\beta=(2,\ -1,\ 3)^T$，则 $(\alpha\beta^T)^{2016}=$ $\underline{\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&2&-6\\-2&1&-3\end{pmatrix}}$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\3&5&0\end{pmatrix}$，则 $A^T=\underline{\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&5\\1&0&0\end{pmatrix}}$，$A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&3&-1\\1&0&0\end{pmatrix}}$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&1\\1&2&3&-1\end{pmatrix}$，则 $R(A)=$ ___3___，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所包含向量个数为___1___

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，则向量组 β_1,β_2,β_3 线性___无___关

6. 设向量$\alpha=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$和$\beta=(-2,1,x,2)^{\mathrm{T}}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$x=$__4__

7. 设A为3阶方阵，且$A-E$，$A+2E$，$2A-3E$均为奇异矩阵，则$|A|=$__-3__，$|A^*|=$__9__

二. 单项选择题(每小题 2 分,共 10 分)

本题得分	

1. 下列矩阵中，不是初等矩阵的是(　B　).

(A) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

2. 设A和B都为n阶方阵，则矩阵$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$的伴随矩阵是(　D　).

(A) $\begin{pmatrix}|A|A^*&0\\0&|B|B^*\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}|B|B^*&0\\0&|A|A^*\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}|A|B^*&0\\0&|B|A^*\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}|B|A^*&0\\0&|A|B^*\end{pmatrix}$

3. 设A为方阵，α_1,α_2是齐次方程组$Ax=0$的两个不同的解向量，则以下向量中一定是A的特征向量的为（　C　）（特征向量一定是非零向量）

(A) α_1　(B) $\alpha_1+\alpha_2$　(C) $\alpha_1-\alpha_2$　(D) α_2

4. 设$\alpha,\beta\in R^n$，则$\begin{vmatrix}\langle\alpha,\alpha\rangle&\langle\alpha,\beta\rangle\\\langle\beta,\alpha\rangle&\langle\beta,\beta\rangle\end{vmatrix}$的值(　A　).

(A) ≥ 0　(B) $=0$　(C) ≤ 0　(D) 不确定

5. 已知矩阵A相似于对角阵$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中可逆矩阵为(　D　).

(A) $E-A$　(B) $E+A$　(C) $2E-A$　(D) $2E+A$

三、计算题（每题 10 分，共 50 分）

1	2	3	4	5	本题总得分

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

解：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-4&-5\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$$

$$=160$$

2. 已知 3 阶方阵 A 和 B 满足 $AB=2B-7A^*$，且 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 B .

解：由 $AB=2B-7A^*$ 得

$$(A-2E)B=-7A^*=-7|A|A^{-1}=-7A^{-1},$$

所以

$$B=-7(A-2E)^{-1}A^{-1},$$

即

$$B=-7(A-2E)^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&3&-8\\0&-8&19\end{pmatrix}.$$

3. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-3\end{pmatrix}$，求$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数和一组基, 并求剩余向量在这组基下的坐标.

解：对$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$做初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\1&-1&5&-5\\1&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\0&-2&2&-4\\0&-1&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\0&1&-1&2\\0&0&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\0&1&-1&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-3r_3\\r_1-r_2}]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以，$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数为 3，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组基.

α_4在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(-3,2,0)$.

注：若基取为$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$，则$\alpha_2$在基$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

4. 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases},$$

问λ取什么值时，线性方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的通解。

解：系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(2+\lambda)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&-\lambda(3+\lambda)\end{vmatrix}=-\lambda^2(3+\lambda)$$

（1）当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-3$时，$|A|\neq0$，由 Cramer 法则得，方程组有唯一解

（2）当$\lambda=0$时，对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为$R(A)\neq R(\overline{A})$，所以方程组无解.

（3）当$\lambda=-3$时，对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-r_1\\r_3+2r_1}]{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&3&-3&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3+r_2,\ -\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为$R(A)=R(\overline{A})=2<3$，所以方程组有无穷多解，其通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix},\ k\in R.$$

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求（1）矩阵$A$的特征值和特征向量；（2）矩阵$A$是否可以相似对角化？若可以，求出相似变换矩阵$P$，以及相似对角阵$\Lambda=P^{-1}AP$；若不可以，说明理由。

解：（1）特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\1&-1&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-1\right)^2,$$

所以特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

对于特征值$\lambda_1=-1$，解齐次方程组$(A+E)x=0$。由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\r_3+r_2}]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_1=-1$的全部特征值为

$$k_1p_1\quad(k_1\neq 0).$$

对于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$，解齐次方程组$(A-E)x=0$。由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于的全部特征值为

$$k_2p_2+k_3p_3,\ (k_2,k_3\text{不同时为}0).$$

（2）因为矩阵A有三个线性无关的特征向量p_1,p_2,p_3，所以可以相似对角化。

令相似变换矩阵

$$P=\left(p_1,\ p_2,\ p_3\right)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则相似对角阵

$$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1	2	本题总得分

1. 已知n阶方阵A满足$2A^2+3A-5E=O$，证明$A+2E$可逆, 并求其逆矩阵.

解：因为

$$2A^2+3A-5E=(A+2E)(2A-E)-3E=O,$$

所以

$$(A+2E)\left(\frac{2A-E}{3}\right)=E,$$

因此$A+2E$可逆，且

$$(A+2E)^{-1}=\frac{2A-E}{3}.$$

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是正交向量组，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

证明：令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

用α_i和上式两端做内积，得

$$\langle\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\rangle=\langle\alpha_i,0\rangle=0,$$

即

$$k_1\langle\alpha_i,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_i,\alpha_2\rangle+\cdots+k_m\langle\alpha_i,\alpha_m\rangle=0,$$

根据正交性得$k_i\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle=0$.

又因为$\alpha_i\neq0$，因此$\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\neq0$,所以有$k_i=0$. 由$i$的任意性得

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$$

因此α_1, α_2, $\cdots$, α_m 线性无关.