浙江工业大学 2017 - 2018 学年第一学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________ 任课教师：__________ 得分：__________

一. 填空题，共 28 分，每空 2 分。

1. $\underline{\quad 0.5 \quad}$.
2. $\underline{\quad 0.5 \quad}$； $\underline{\quad \frac{38}{75} \quad}$.
3. $\underline{\quad 0.25 \quad}$.
4. $\underline{\quad \frac{1}{6} \quad}$.
5. $\underline{\quad -2 \quad}$， $\underline{\quad 4 \quad}$.
6. $\underline{\quad 1.5 \quad}$， $\underline{\quad -0.1 \quad}$， $\underline{\quad 0.05 \quad}$.
7. $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$.
8. $\underline{\quad 10.856 \quad}$.
9. $\underline{\quad 1 \quad}$， $\underline{\quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad}$.

二. 选择题，共 12 分，每题 3 分。

1. D
2. C
3. C
4. D

三. 解答题，共 5 题，60 分。

1. (12 分)

解：

1) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = 0.5 + 0.3 = 0.8$； 4 分

2)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.2, & -1 \leq x < 1, \\ 0.7, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

8 分

3)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= (-1) \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 = 0.9, \\ \mathrm{E}X^2 &= (-1)^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.3 = 1.9, \\ \mathrm{Var}(X) &= 1.9 - 0.9^2 = 1.09. \end{aligned}$$

12 分

2. (12 分)

解：

1) $1 = \int_0^1 ax\,dx + \int_1^2 2 - x\,dx = \frac{1}{2}(a+1) \Rightarrow a = 1$； 4 分

2) 当 $0 \leq x < 1$ 时，$F(x) = \int_0^x as\,ds = \frac{1}{2}x^2$；

当 $1 < x < 2$ 时，$F(x) = \int_0^1 as\,ds + \int_1^x 2 - s\,ds = \frac{1}{2} + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x^2-1) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$；

综上，$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$ 8 分

3) $P(0.5 \leq x \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$. 12 分

3. (16 分)

解：

1) $1 = \int_0^2 \int_0^2 C(1+x)\,dydx = C\int_0^2 2(1+x)\,dx = 8C \Rightarrow C = \frac{1}{8}$； 4 分

2)

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^2 \int_0^y \frac{1}{8}(1+x)\,dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 y + \frac{1}{2}y^2\,dy \\ &= \frac{1}{8}[2 + \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}] = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

8 分

3）$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{8}(1+x)\,dy=\frac{1}{4}(1+x), & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{8}(1+x)\,dx=\frac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

由 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X,Y 相互独立. 12 分

4）$Z=X+Y$ 取值于 $[0,4]$，

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{8}(1+x)\,dx=\frac{1}{8}z+\frac{1}{16}z^2$；

当 $2<z<4$ 时，$f_Z(z)=\int_z^2 \frac{1}{8}(1+x)\,dx=\frac{1}{8}(2-z)+\frac{1}{16}(4-z^2)=-\frac{1}{16}z^2-\frac{1}{8}z+\frac{1}{2}$；

综上，$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{16}z^2+\frac{1}{8}z, & 0<x<2,\\ -\frac{1}{16}z^2-\frac{1}{8}z+\frac{1}{2}, & 1<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 16 分

4.（12 分）

解：

1）矩估计：$EX=\frac{1}{2}(2\theta-\theta)=\frac{1}{2}\theta\Rightarrow\theta=2EX$；从而矩估计 $\hat{\theta}=2\bar{X}$，代入数值 $\bar{x}=\frac{1}{5}[1.2-0.8+0.4+1.8-1.1]=0.3$，从而矩估计值 $\hat{\theta}=0.6$. 6 分

2）极大似然估计：

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{(3\theta)^n}, & -\theta\le x_i\le 2\theta, i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{(3\theta)^n}, & \theta\ge\frac{1}{2}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\text{ 且 }\theta>-\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故极大似然估计值 $\tilde{\theta}=\max\{\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{2}x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n\}$，代入数据得 $\tilde{\theta}=1.1$. 12 分

5.（8 分）

解：

$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2=0.05^2$，$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ 2 分

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=15.68,$$

4 分

显著水平为 0.05 的拒绝域为 $(\chi^2_{0.05}(8),\infty)=(15.507,\infty)$， 6 分

取值在拒绝域中，拒绝原假设，故可以认为这批导线电阻的标准差明显偏大. 8 分