浙江工业大学05/06(二)高等数学AⅡ考试试卷A标准答案

一、填空题（每小题4分）：

1．$\dfrac{y}{x+y}dx+\left(\ln(x+y)+\dfrac{y}{x+y}\right)dy$，　　2．$\left(y+xj'(x)\right)f_1'+2\left(x+yj'(x)\right)f_2'$，

3．0，　　4．$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$，5．$24p$，　6．$\sqrt{2}$．

二、选择题（每小题4分）： 1．D，　2．B，　3． B、C．

三、试解下列各题（每小题7分）：

1．**隐函数**$z=z(x,y)$**由方程**$xyz=e^z$**确定，求：**$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{\left(e^z-xy\right)^3}$$

2．**求圆柱面**$x^2+y^2=1$**被平面**$x+y+z=0$**截得椭圆的长半轴的长度．**

解：椭圆过原点

求函数$u=x^2+y^2+z^2$**在满足条件**$x^2+y^2=1$，$x+y+z=0$**下的最大值点**

令$F(x,y,z,l,m)=x^2+y^2+z^2+l(x+y+z)+m(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} F_x=2x+l+2ux=0 \\ F_y=2y+l+2my=0 \\ F_z=2z+l=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z=\mp\sqrt{2} \end{cases}$$

所以长半轴长度为$\sqrt{3}$

四、试解下列各题（每小题 7）：

1．**计算二次积分** $\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$

解：= $\int_1^2 dx\int_1^{x^2}\frac{\ln x}{x^2-1}dy$

$= \int_1^2 \ln x dx \quad =2\ln 2-1$

2．**求** $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$ **，其中** Ω **是由曲面** $4z^2=25(x^2+y^2)$ **及平面** $z=5$ **所围成的闭区域**.

解： **=** $\int_0^5 dz\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)dxdy$

=$=\int_0^5 dz\int_0^{2p}dq\int_0^{\frac{2z}{5}}r^3dr \qquad =8p$

3．**求：** $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$ **，其中** Σ **为上半球体** $x^2+y^2\le a^2$**，** $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ **的表面外侧**.

解： **=**$\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2)dxdydz$

$=\int_0^{2p}dq\int_0^{\frac{p}{2}}dj\int_0^a r^4\sin j\, dr$

=$\frac{2pa^5}{5}$

五、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n$ **的收敛区间及和函数**.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ **，收敛半径** $R==\infty$ **，收敛区间为** $(-\infty,+\infty)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

=$\left(\frac{x}{3}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\left(\frac{x}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ **=**$\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+1\right)e^{\frac{x}{3}}$

六、（8 分）设 $f(x)$ **是周期为** $2p$ **的周期函数，它在** $[-p,p)$ **上的表达式为** $f(x)=x$ **，1．将**

$f(x)$ **展开成傅里叶级数**

2．若设该傅里叶级数的和函数为 $S(x)$ **，则求** $S(3p)$ **，** $S(\frac{7}{2}p)$ **的值．**

解：1． $f(x)$ **是周期为** $2p$ **的奇函数，** $a_n=0$ **，**

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p x\sin nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$$

$$f(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty,x\neq\pm p,x\neq\pm 3p,\cdots)$$

2．$S(3p)=0$，$S(\frac{7}{2}p)=-\frac{p}{2}$.

七、(9 分) 设 $y=f(x)\geq 0\quad(a\leq x\leq b)$ **是** xOy **平面上一条单调光滑曲线，将此曲线绕** x **轴旋转一周得旋转曲面** Σ.

1．**试证：曲面** Σ **的面积计算公式** $S=2p\int_L yds$ **，其中** L **为曲线** $y=f(x)\quad(a\leq x\leq b)$ **，（即可以用关于弧长的曲线积分计算此类曲面** Σ **的面积）**．

2．**用此公式计算曲线** $y=\sqrt{a^2-x^2}\quad(0\leq x\leq a)$ **绕** x **轴旋转一周得旋转曲面** Σ **的面积**.

1．**证法１：面积元素** $dS=2pyds$ **，积分区域为曲线** L **，故** $S=\int_L dS=2p\int_L yds$ **.**

证法２：由对称性知，只须计算 $z\geq 0,y\geq 0$ **的部分** Σ_1

Σ_1 **在** xoy **面投影区域为** $a\leq x\leq b,0\leq y\leq f(x)$

Σ_1 **的方程为** $z=\sqrt{f^2(x)-y^2}$ **，** $dS=\dfrac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}dxdy$

$$S=\iint_{\Sigma}dS=4\iint_{\Sigma_1}dS=4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx\int_0^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}$$

$$=2p\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx=2p\int_L yds$$

2． $S=2p\int_L yds=\quad=2p\int_0^a f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx=2p\int_0^a adx=2pa^2$

八、（4分）设 $u=u(x,y)$ **，** $v=v(x,y)$ **具有二阶连续偏导数且使曲线积分** $\int_{L_1}udx+vdy$ **与**

$\int_{L_1} vdx - udy$ **都与路径无关，证明：函数** $u = u(x,y)$ ， $v = v(x, y)$ **分别满足方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

证明： $\int_{L_1} udx + vdy$ **与** $\int_{L_1} vds - udy$ **都与路径无关**

所以 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$

又 $v = v(x, y)$ **具有二阶连续偏导数，所以** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$u = u(x,y)$ **具有二阶连续偏导数，所以** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

所以 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$