18/19 浙江工业大学高等数学IIA考试试卷

学院：______ 班级:______ 姓名：________ 学号:_________
任课老师：________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、填空选择题（每小题3分）：

1．微分方程 $y''+4y=0$ 的通解是________。$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

2．动点 $M(x,y,z)$ 到 z 轴的距离与到点 $(1,-1,0)$ 的距离相等，则动点 $M(x,y,z)$ 的轨迹方程是________。$z^2-2x+2y+2=0$

3．设 $z=f(xy,\dfrac{y}{x})$，其中 $f(x,y)$ 偏导数连续，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_______。$yf_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'$

4．函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(0,0)$ 沿方向 $\vec{l}=(1,1)$ 的方向导数是___。0

5．设 Ω 是曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2),\ z=x^2+y^2$ 所围空间体大的那部分，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$ 在柱面坐标系下的三次积分是____________________________。

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

6．设 L 是曲线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧，则 $\int_L(x^2-y^2)dx=$__。$\dfrac{2}{15}$

7．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-2,2)$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛域是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

8．设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & -\pi\le x<0\\ 4-x^2 & 0\le x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数，则 $S(3)=$________。-5

9．设 $z=z(x,y)$ 可微，且满足 $z(x,y)\big|_{y=x^2}=1$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y=x^2}=x$，则有（ D ）

A、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=x^2}=0$；B、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=x^2}=1$；C、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=x^2}=x$；D、$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=x^2}=-\dfrac{1}{2}$。

10． 下列级数中条件收敛的是（ B ）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{2n^3+1}}$； B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$； D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})$。

11. 设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$；$\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧，则下列等式正确的是（C）。

A、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}R^2dv=\frac{4\pi}{3}R^5$；

B、$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}R^2dxdy=\pi R^4$；

C、$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}R^2dS=4\pi R^4$；　　D、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=0$。

二、判断下列各命题（结论）是否正确（在括弧内填入√或×）（每小题 2 分）：

1．若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则函数在该点连续。（ × ）

2．函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处可微。（ × ）

3．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ 的极限存在。（ √ ）

4．若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_n=0$，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。 （ √ ）

5．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛。（ × ）

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求与两直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 平行，且过原点的平面方程。

解：

平面的法向量 $\vec{n}=(1,2,1)\times(0,1,1)=(1,-1,1)$　　3 分

平面方程 $x-y+z=0$　　6 分

2．曲线 $2x=y^2, z=x^2$ 在某一点处的切线与向量 $\vec{a}=(1,1,1)$ 平行，求该点的坐标。

解：

曲线的切向量 $\vec{T}=(y,1,y^3)$　　3 分

与 $\vec{a}=(1,1,1)$ 平行可得 $y=1$，从而有该点坐标 $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4})$　　6 分

3．证明球面上任意一点的法线都过球心。

解：

设球面方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$，$M(x_1,y_1,z_1)$ 是球面上点，

则球面在 M 点的法线方程是 $\frac{x-x_1}{x_1-x_0}=\frac{y-y_1}{y_1-y_0}=\frac{z-z_1}{z_1-z_0}$　　4 分

把球心坐标 (x_0,y_0,z_0) 代入法线方程知满足，即法线过球心　　6 分

注：若对 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 证明扣 2 分。

4．求 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中区域 D 由曲线 $x^2-2x+y^2=0$ 所围成。

解： $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho$ 4 分

$=\frac{3}{2}\pi$ 6 分

5．求 $\iint\limits_\Sigma (z^2+x)dydz-2y^2dxdy$，其中 $\sum$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 1$ 之间部分的下侧。

解 1：$\iint\limits_\Sigma (z^2+x)dydz-2y^2dxdy=-\iint\limits_\Sigma \left[2x(z^2+x)+2y^2\right]dxdy$ 2 分

$=2\iint\limits_D \left[x(x^2+y^2)^2+x^2+y^2\right]dxdy$ 4 分

$=2\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\pi$ 6 分

解 2：补上一个面 $\sum_1 : z=1$，利用高斯公式

$\iint\limits_\Sigma (z^2+x)dydz-2y^2dxdy=\iiint\limits_\Omega dxdydz+2\iint\limits_D y^2dxdy$ 3 分

$=\pi$ 6 分

四、试解下列各题（每小题 7 分）：

1．积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]ydx+f(x)dy$ 与路径无关，$f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，求 I 的值。

解：

由积分与路径无关可得 $e^x+f(x)=f'(x)$ 2 分

解微分方程得 $f(x)=(x+1)e^x$ 5 分

从而 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+(x+1)e^x]ydx+(x+1)e^xdy=2e$ 7 分

2．（1）将函数 $f(x)=(1+x)\ln(1-x)$ 展开成 x 的幂级数，

（2）求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 的和。

解：

$(1+x)\ln(1-x)=\ln(1-x)+x\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}$ 3 分

$=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n-1)}x^n \qquad -1\le x<1$ 5 分

$$=-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}x^{n+1}$$

用 $x=-1$ 代入可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=1$ 　　7 分

五、（9 分）求球面$\sum$：$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$（$a>0$）上到平面 $x+y+z=0$ 的最大与最小距离，并证明 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}+a\right)^2 dS\geq 12\pi a^4$，

解：

球面上的点到平面 $x+y+z=0$ 的距离 $d=\frac{|x+y+z|}{\sqrt{3}}$，利用条件极值得目标函数 $L=\frac{1}{3}(x+y+z)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2)$ 　　2 分

由方程组 $\begin{cases} L_x=\frac{2}{3}(x+y+z)+\lambda(2x-2a)=0 \\ L_y=\frac{2}{3}(x+y+z)+\lambda(2y-2a)=0 \\ L_z=\frac{2}{3}(x+y+z)+\lambda(2z-2a)=0 \\ x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0 \end{cases}$ 　得驻点 $x=y=z=(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}})a$

（或利用球面上平行平面 $x+y+z=0$ 的切平面也可得驻点） 　　5 分

由此可得球面上的点到平面 $x+y+z=0$ 的最大最小距离分别是

$$(\sqrt{3}+1)a,\ (\sqrt{3}-1)a$$ 　　6 分

进而易知函数 $\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$ 在上述球面约束条件下的最小值是 $(\sqrt{3}-1)a$

即有 $\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}+a\geq\sqrt{3}a \qquad (x,y,z)\in\Sigma$

所以有 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}+a\right)^2 dS\geq\iint\limits_{\Sigma}3a^2dS=12\pi a^4$ 　　9 分

六、（4 分）函数 $z=f(x,y)$ 偏导数存在是可微分的必要条件，请证明之。

证明：

由 $z=f(x,y)$ 可微，

有 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 　　1 分

在上式中令 $\Delta y=0$，得 $\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$

从而极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A$ 存在

即 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数存在，同理可得关于 y 偏导数存在。 4 分