浙 江 工 业 大 学
线 性 代 数 期 末 试 卷
（ 2017 ～ 2018 第 一 学 期 ）

任课教师：______________学院班级：___________________班中编号：_________

学号：____________________ 姓名：_________________ 得分：___________

题号	一	二	三	四
得分				

本题得分	

一．填空题(每小题 3 分，共 30 分)

1. 三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & k \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$的值为零，则 $k=$______。6

2. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=2$，则其代数余子式的和$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$______。2

3. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$A^3=$_____________。$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$|A^{-1}|=$_________。$1/4$

5. 若向量α与向量β线性相关，则向量α与向量$\alpha+\beta$ 线性______关。相

6. 若向量组α_1，α_2，α_3与向量组β_1，β_2，β_3，β_4等价，则两向量组的秩________。相等

7. 设A是5×4矩阵，且秩$R(A)=2$, 则方程组$AX=0$的基础解系含有______个解向量。2

8. 设四元非齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的系数矩阵的秩$\mathbf{R(A)}=\mathbf{3}$，已知$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$是它的三个解向量，且$\boldsymbol{\alpha_1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{4}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$，则该方程组的通解为________。$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}+\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$，$\forall\mathbf{k}\in\mathbf{R}$

9. 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$的三个特征值为$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，则$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=$_______。0

10. 若矩阵$\mathbf{A}$ 与矩阵$\mathbf{B}$相似，且$|\mathbf{A}|=\mathbf{1}$，则$|\mathbf{B}|=$_________。1

本题得分	

二. 单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 设A和B都是 *n* 阶方阵，且满足等式$AB=0$, 则必有(　　　　)。D

   (A) $A=0$　　　　(B) $B=0$

   (C) $BA=0$　　　　(D) $|BA|=0$

2. 设n阶方阵A、B、C满足$ABC=E$，其中E是单位矩阵。则必有（　　　　)。C

   (A) $A=BC$　　(B) $A=CB$　　(C) $A=C^{-1}B^{-1}$　　(D) $A=B^{-1}C^{-1}$

3. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$线性无关，向量组$\boldsymbol{\beta_1}$，$\boldsymbol{\beta_2}$线性相关，则向量组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha_1}\\\boldsymbol{\beta_1}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha_2}\\\boldsymbol{\beta_2}\end{pmatrix}$(　　　　)。A

   (A) 线性无关　　(B) 线性相关　　(C) 选项(A)和(B)都不对　　(D) 线性相关性无法确定

4. 设A为$m\times n$矩阵，$AX=0$是与非齐次线性方程组$AX=b$对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（　　　　)。D

   (A)若 $AX=0$只有零解，则 $AX=b$有唯一解。

   (B) 若 $AX=0$有非零解，则 $AX=b$有无穷多个解。

   (C) 若 $AX=b$有无穷多个解，则 $AX=0$只有零解。

   (D) 若 $AX=b$有无穷多个解，则 $AX=0$有非零解。

5. 设α和β都是n维实向量，以下关于向量内积和向量长度的结论正确的是（　　　　)。

C

(A) $\langle 2\alpha, 2\beta\rangle = 2\langle\alpha,\ \beta\rangle$ (B) $\|-\alpha\| = -\|\alpha\|$

(C) $\|\alpha-\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$ (D) $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

1	2	3	4	本题总得分

三、计算题（每小题 10 分, 共 40 分）

1. 计算四阶行列式$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 14 & 17 \end{vmatrix} \qquad 2\text{ 分}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 14 & 17 \end{vmatrix} \qquad 6\text{ 分}$$

$$= 900 \qquad 10\text{ 分}$$

2. 已知$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{X}$, 其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵$\mathbf{X}$。

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{B} \qquad 2\text{ 分}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E},\ \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad 4\text{ 分}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 11 \end{pmatrix} \qquad 8\text{ 分}$$

$$= (\mathbf{E},\ \mathbf{X}) \qquad 10\text{ 分}$$

3. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的秩和它的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2\text{ 分}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 7\text{ 分}$$

向量组的秩为 3；极大无关组为α_1，α_2，α_3；$\alpha_4 = 3\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_3$　　10 分

4. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，（1）求矩阵$A$的特征值与特征向量。（2）问 a 为何值时，矩阵$A$可对角化？ 为什么？

A 的特征值为$2, -1, -1$.　　2 分

对应 2 的特征向量为$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　4 分

对应-1的特征向量为 $p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (a = 0);$　　6 分

$p_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (a \neq 0)$　　8 分

当$a = 0$时，矩阵 A 可对角化。因为 A 有三个线性无关的特征向量。10 分

本题得分	

四、证明题（10 分）设分块矩阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$是可逆矩阵。（1）证明$A_1$和$A_2$都是方阵；（2）证明$A_1$和$A_2$都是可逆矩阵，（3）试求$A^{-2}$。

假设A_1不是方阵，则A_1的标准形矩阵必有零行或零列。而矩阵的初等变换保持矩阵的秩不变，A 又是可逆矩阵。矛盾！同理可证，A_2也是方阵。　4 分

$$|A| = |A_1||A_2| \neq 0 \qquad 7\text{ 分}$$

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & A_2^{-2} \end{pmatrix} \qquad 10\text{ 分}$$