**三值逻辑与多值逻辑综述**

林宇航，应时彦

浙江工业大学信息工程学院，浙江杭州 310014

**摘要：**本文详细讲述了近年来国内外多值逻辑研究的进展，并对有代表性的成果作了重点介绍。讨论了研究三值与多值逻辑的意义，从三值与多值逻辑应用方面综述了这个邻域的发展状况和趋势。

**关键词：**三值；多值；综述；历史

**中图分类号： 文献标识码： 文章编号：**

**Summary of Three-valued Logic and Multi-valued Logic**

YuHang Lin, Ying Shiyan

（College of Information Engineering，Zhejiang University of Technology，Hangzhou 310014，China）

**Abstract:** This article describes in detail the progress of multi-valued logic research at home and abroad in recent years, and highlights the representative results. Discussed the significance of studying three-valued and multi-valued logic, and summarized the development status and trend of this neighborhood from the aspect of three-valued and multi-valued logic application.

**Keywords**：Three-value; multi-value; summary; history

1. 研究多值逻辑的意义

( l ) 许多逻辑问题或者状态本身就是有三值或多值的。例如：物质的固、液、气三态，一个回答的正确性有对、错、半对，成绩的不及格、及格、良好、优秀三类等等。这类问题用三值或多值逻辑处理往往比用二值逻辑处理更为自然、方便。

( 2 ) 在编写程序时，运用多值或三值逻辑可以建立三分支及多路转移，这就可以省去特别多的二分支的选择语句的嵌套，使代码更加简化。

( 3 ) 数字系统的计算机模拟需要表示0、1两个状态以外的许多状态(如α跳变和β跳变等)，都采用的是多值逻辑。

( 4 ) 用二值逻辑很难模拟人的思维过程。多值逻辑中的多阈值逻辑就能较好地模拟神经元的工作。机器学习、神经网络、人脸识别等人工智能问题中大多可以用多值逻辑来解决。

 ( 5 )多值数字系统的信息密度高。当这种数字系统用大规模集成电路实现时，可以大大节省电路的面积。例如，已经在Intel8087数字数据处理机及iAPX -432计算机中使用了四值ROM ，每一位相当于二值ROM的二位，所以电路占的面积不多，从而使整片集成电路节省面积31%。 同样的，大规模、超大规模集成电路发展中的另一个现实问题是集成电路的功能日益增强而体积却日趋缩小。而大规模要求引线数要多，体积小要求引线数少。这一矛盾严重地影响了集成电路的发展，二值逻辑已很难解决这个向题，所以有人提出多值逻辑，理论上可以很好地解决这个向题。例如，在保持信息量不变的前提下，采用三值逻辑所需的连线只有采用二值逻辑所需连线的三分之二，而采用四值逻辑则只需二分之一。

( 6 )随着大型电子计算机系统的复杂度不断提高，其功耗大到难以接受的地步，于是人们越来越关注各种新形式的计算机，光学计算机成为人们关注的焦点之一。光有不同于电的物理特性导致光学计算机有不同于电子计算机的特点：速度可以更快、位数可以更多、使用更多的物理状态（多值）和能耗更小等，理想的光学计算机应该兼有这些特点。目前的光学计算机研究中，有许多研究着力于“高速度”，同时也有研究着力于“位数众多”。可见，多值逻辑的研究对于新一代计算机的研制也是十分重要的。

1. 多值逻辑历史与趋势

从命题逻辑方面看，经典的亚里斯多德逻辑是二值逻辑。在这种逻辑中，存在排中律：不承认既“真”又“假” 或既“不真”又“不假”的命题的存在。但是在某些情况下，这种逻辑会产生悖论，例如著名的“说谎者悖论”。为了解决这一问题，可在“真” 、“假” 值之外引进“不定”，从而成为三值逻辑。但进一步的研究发现，三值逻辑也会产生悖论，为此必须引进四值逻辑。结果，为了处理n值逻辑的悖论。就不得不引人(n+1)值逻辑。

从数学方面看，二值逻辑代数是G．Boole于1854年提出的，后来被称为布尔代数，被广泛应用到数字系统的逻辑设计等领域。第一个对任何基数都保持功能完备的多值逻辑代数是E．L．Post于1921年在题为“基本命题的一般理论导引”的论文中提出的。迄今，较受各方注目的多值逻辑代数系统有Post代数、Vranesic．-Lee-Smith代数、Allen-Gicone代数、模代数等。属于三值代数系统的扩展布尔型代数、T门算子代数、面向器件三值代数以及对称三值代数等，亦较有影响，但各有局限性，有待各方努力，研究出一种既表达简洁、化简方便，又易于工程实现的代数系统。

近代的多值逻辑研究一直是与计算机科学术的发展直接关连的。国外在五十年代初电子计算机出现不久，就有不少多值开关电路的论文。1958

年，苏联莫斯科大学制成了世界上第一台三值计算机CETYHB。 1973年，美国纽约州立大学在二值主机B170上用微程序仿真实现了一台三值计算机TERNCE。作为可行性试验，它在速度与成本两方面都达到了与二值计算机同一数量级的水平。

1. 多值逻辑主要技术成果

研究多值逻辑理论可以从构建逻辑系统和构建代数模型两个方面进行。提出一种多值逻辑，就要构建出它的逻辑联结词和系统这是比经典逻辑更为复杂的工作。

* 1. 前期发展

1931年，Mordchaj Wajsberg最早给出多值逻辑系统，他对Lukasiewicz三值逻辑进行了公理化，给出由四个公理(包括MP规则和代换规则) 构成的系统[1]。这种公理化系统的出现使得多值逻辑真正走向了形式化公理化的道路，成为现代逻辑的分支。Wajsberg的另一重大贡献是同时给出了Lukasiewicz无穷值逻辑的公理系统，但没有给出证明。

1958年由A．Rose和J．B．Rosser 给出完全性证明[2]。A．Rose和J．B．Rosser的证明是在1951年Robert McNaughton给出的定理的基础上，用代数方法给出的。同年，C．C．Chang 建立了MV-代数，对这一系统重新给出了代数证明[3]。C．C．Chang把Lukasiewicz无穷值逻辑系转换为MV-代数，在MV-代数中证明著名的Chang完全定理，从而得到对Lukasiewicz 无穷值逻辑完全性的证明。

1995年Giovanni Panti又利用复曲面簇中关于不确定点消除的De Concini-Procesi定理对该系统的完全性给出了证明，同时对McNaughton定理给出了新的证明[4]。

1955年Karl Schroter提出构建多值逻辑Gentzen系统的方法[5]。 对多值逻辑形式化作出奠基性贡献的是J．B．Rosser和A．R．Turquette[6]，他们发表的重要论文为有穷值逻辑的公理化开辟了道路，此后这一方向的工作无不深受他们的影响。J．B．Rosser和A．R．Turquette定义了一类一元联结词Js，s∈W，W为真值集。当u= s时Js ( u) 取真值1，否则取真值m。这里1是特指值，相当于真，m相当于假，u为公式。通过对Js的定义达到了对有穷值逻辑的公理化。在他们工作的基础上，不少人作出了进一步的贡献。例如，1985年，O．M．Anshakov 和S．V．Rychkov为真值完全的C- 扩充好量化的逻辑给出了一个一般的、有效的公理化方法，这种方法提供了Hilbert型一阶演算系统。真值完全的C- 扩充好量化的逻辑包含许多著名的非经典逻辑，例如所有Lukasiewicz有穷值逻辑，函数完备的Post逻辑，对应于Moisil代数的逻辑，Bochvar和Kleene的多值逻辑等等。1994年，他们又用代数方法证明了这种逻辑演算的完全性定理[7]。最完美的公理化的逻辑系统是只有少数的公理( 模式) 和几个推理规则的系统，但是基于各种需要也有人构造了其他类型的多值逻辑系统，如自然演绎系统和Gentzen型系统。

* 1. 中期发展

1980年代以后，多值逻辑的研究方向趋向分支化和多元化，除了对多值逻辑在模糊集合论中的应用有了较深入的研究，多值逻辑与相关代数系统，多值逻辑中计算复杂性问题也得到详细的探讨和考察。多值逻辑的各个分支不断与边缘科学结合，出现了新的研究领域。如：多值逻辑函数与密码学结合，多值逻辑应用于软计算等等，都是热门的研究方向。时至今日，多值逻辑在语言学，逻辑学，硬件检验和设计，人工智能，数学基础等许多领域均得到了广泛的应用，这种应用为多值逻辑存在的合理性提供了有力的支持。由于涉及太多方面，本文介绍的只是技术理论方面的研究。

在1960年代，Zadeh( 1965)开始用推广的集合论方法形式化模糊概念[8]，人们试图通过多值逻辑的方法为其模糊集寻找理论基础，导致人们对多值逻辑进一步深入研究。捷克人J．Pavelka在1979年对模糊逻辑进行了研究，构建了模糊命题逻辑，对逻辑系统提出了新的完全性概念[9]。1987年V．Novk对Pavelka逻辑给出了一阶谓词系统[10]。

2000年H．jek，P．Paris，J．和Sheperdson，J．证明了有理数谓词逻辑是Lukasiewicz谓词逻辑的一个保守扩充[11]。Pavelka逻辑的代数形态是一种剩余格。剩余格的一个运算称为t- 范数，即“triangular norm”的缩写，这一概念从上世纪90年代从数学的其他领域引进到模糊逻辑。t- 范数是Lukasiewicz合取联结词的推广，从这一连接词可以得到与Lukasiewicz逻辑对应的几种基本连接词，由此得到的逻辑称为t- 范数逻辑。基于所有剩余格的逻辑称为幺半群逻辑，1994 年U．H hle对此类逻辑给出了公理化1942年Rosenbloom提出了Post- 代数[12]。从那时起，Post- 代数的理论及其推广得到了极大的发展，许多重要的成果相继发表。历史上，在这方面作出突出贡献的有：Epstein，Traczyk，Dwinger，Rasiowa，Rousseau，Orlowska等等。1958年，C．C．Chang提出了MV-代数，这是一种与Lukasiewicz无穷值逻辑相配套的代数，利用这种代数C．C．Chang重新证明了Lukasiewicz无穷值逻辑的完全性。现在，MV- 代数已经发展为系统而丰富的理论，是一个非常活跃的研究领域[13]。在模糊代数逻辑方面，剩余格理论是当今的一个研究热点，研究成果极其丰富。 在不同的背景下产生的多值逻辑往往具有不同的联结词。为了把握多值逻辑联结词的性质，函数完备性问题逐渐成为一个热门问题。

1921年，Post提出了第一个函数完备的多值逻辑系统。1935年，Webb找到了第一个单独函数完备的二元多值逻辑函数( 联结词)[14]，该联结词也称为Sheffer联结词，是对经典二值逻辑sheffer函数的推广。1938年，Slupecki给出了一个函数完全的n- 值逻辑公理化系统[15]。

1941年Post 解决了经典二值逻辑的函数完备性问题。然而多值逻辑的情况要复杂的多。在我国，罗铸楷根据王湘浩教授提出的保全关系的系统思想证明了函数完备性问题的一些主要结果[16]。俄国学者S．V．Jablonskii和V．V．Martynjuk以及加拿大人I．G．Rosenberg也都在这方面做了重要贡献。

* 1. 近代发展

函数完备性问题包含三方面的问题：完全多值逻辑函数完备性问题，部分多值逻辑函数完备性问题，一元多值逻辑函数完备性问题。迄今为止，只有一元多值逻辑函数完备性问题还没有得到完全解决。函数完备集判定问题本身也是泛代数中的重要问题，该问题的解决大大推动多值逻辑函数结构理论和泛代数理论的发展，由此产生的有限代数理论仍是重要的研究领域。这些结果在自动机理论，多值逻辑网络，信息安全，逻辑系统的构建等方面有广泛的应用[17]。

马来西亚的Farhana，Soheli研究出一种多值输出的ADC。ADC设计使用的多值逻辑输出提供整体减少电路的复杂性和尺寸的可能性。ADC产生的多值逻辑的输出，而不是常规的二进制输出系统。设计实现电流模式ADC体系结构，是使用一个标准的0．13umCMOS工艺的模型参数模拟。在低功耗方面，设计的性能分析中显示了所希望的性能参数的响应，并取得在电源电压为1．3V的500kHz的采样率[18]。

日本群马大学的Yuminaka，Yasushi提出了多值脉冲位置调制（MVPPM）技术，它是普通单脉冲PPM和多脉冲PPM的推广，允许每符号间隔有多个脉冲，它应用符号时隙帧中多个脉冲的位置和极性的不同组合传递信息，每个脉冲可以改变它的时隙位置和极性。在超大规模集成电路系统，实现高效的数据传输[19]。

美国的Parasa．Vamsi提出了多值逻辑版本的量子伪分数傅里叶变换（QFrFT），这是一个更通用的变换，其中广泛使用的量子傅里叶变换（QFT）是一种特殊情况。Parasa．Vamsi和他的团队展示了如何使用O（N3）两个qudit旋转门有效地实现QPFrFT [20]。

在二值逻辑为主流的现代技术中，多值逻辑不可能一蹴而就代替二值逻辑，怎样把二值逻辑和多值逻辑有效的结合起来甚至使其完美过渡到多值逻辑具有重大研究意义，很多学者都在为这方面努力。目前所使用的数字芯片内部基本上都是基于传统的二值逻辑电路。然而，在进行LSI 和VLSI设计时，遇到了连接复杂性和可测试性成本问题。由于LSI 和VLSI电路一般是由功能模块来实现的，因此，在设计中引入多值逻辑，不仅可以减少模块间的互联，而且可以有效地改善数字处理的性能。但在实际中却增加了设计时间。解决这一新问题的方法之一就是使用规则的电路结构，例如PLA、ROM和RAM等。全零三在其研究中引入了一种多功能文字电路( Multi-Function Literal Circuit )[21]。该电路不仅可以完成二值与多值之间的转换，同时具有一定的可编程性。在进行多值PLA的设计时，能够较好地减少多值PLA的规模，特别是对多输入的情况，能很好地达到优化设计的目的。

* 1. 新型信息载体-量子的发展

量子电路是进行量子计算的硬件基础，具有可逆性，要求其输入和输出之间存在一一映射，因此电路中不存在扇入、扇出和反馈逻辑，理论上不丢失输入信息，不存在能量耗散问题，从而可将芯片的运行速度和计算能力发挥到极致[22]。Bennett证明采用可逆逻辑门构建可逆电路可有效降低计算能耗（理论上可以达到最低能耗）[23]。因此量子计算系统对环境产生的负面影响可以达到最低。而与二值逻辑量子门相比，多值逻辑量子门在存储和处理信息时具有更强的酉变换能力和灵活性，实现相同的任务可以使用更少的门，并可有效减少量子寄存器的位数。

2000年Muthukrishnan和Stroud[24]设计并实现了在线性离子阱中构建一位和两位多值逻辑量子基本门（quantum primitive gate）的方案，有力论述并证明了多值逻辑量子门物理实现的可行性。

2003年Daboul等人[25]提出量子混合门（quantum hybridgate）的概念，即所涉及的各量子位分别在不同的逻辑空间中的量子门，TS门是已经物理实现的混合二值、三值逻辑量子置换门[26]。

2009年Lanyon等人[27]利用线性光子系统实现了三值逻辑Toffoli门，这是量子电路物理实现上的一项重大突破，因为Toffoli门和Hadamard门可构成量子计算的一个通用门集。酉性限制是对量子门的惟一限制，每个酉矩阵都可定义一个有效的量子门[28]。酉矩阵是量子门的数学模型，可清晰的反映出量子门的数学性质，并可检验量子门物理实现的正确性，因此研究量子门的酉矩阵具有一定的意义。于多值逻辑量子置换门实现的置换功能，王东和陈汉武提出了一种多值逻辑量子置换门的酉矩阵构造方法，利用此方法可以简便的构造出多值逻辑量子置换门的酉矩阵。在此基础之上，又给出了混合多值逻辑量子置换门的酉矩阵构造框架，利用此框架可以构造任何混合逻辑量子置换门的酉矩阵。量子门酉矩阵构造方法的给出有助于分析量子态的演化过程，验证量子门及量子电路的正确性和可靠性[29]

1. 总结

这篇论文的几个有代表性的多值逻辑系统中都或多或少存在系统内不能解决的问题，这也在一定程度上说明一元算符逻辑统摄多值逻辑是一个可行的方案。目前，狭义函数相对论可以很好的将正规的三值逻辑还原为二值逻辑，但还不能解释全部的多值逻辑。

而即使一元算符逻辑能穷尽所有多值逻辑的还原，也不能否定多值逻辑的存在的价值。多值逻辑的优点主要是:多值逻辑系统种类繁多，这样可以适应多种多样复杂的问题，使用二值逻辑会显得繁混;多值逻辑系统不仅种类多，而且系统本身也比二值逻辑更加复杂，这样就可以处理更多信息，减少设备的体积，降低成本，而且真值越多的多值逻辑效果越明显。但是由于按照二值逻辑设计的设备已趋于成熟，并且多值逻辑在应用到这些设备上时还存在一些技术难点，因此多值逻辑的应用仍然没有二值逻辑广泛。

多值逻辑同量子力学一样，都是关于“不确定性”的研究。而量子力学发展到今天，人们已经认识到量子概率的不确定性具有某些确定性，因此以解决“不确定”为目标的多值逻辑思想的合理性需要进一步探讨。

**参考文献(References)：**

[1] S．McCall ( ed) ： Polish Logic： 1920- 1939．Clarendon Press，Oxford，2007，40- 65．

[2] Alan Rose and J．Barkley Rosser： Fragments of Many- valued Statement Calculi，Transactions of the American Mathematical Society ，87，1998，1- 53．

[3] C．C．Chang： Algebraic analysis of many- valued logics，Tr an．of the American Math．Soc．88，2006，467- 490．

[4] D．Mundici： A constructive proof of McNaughton．s Theorem in infinite- valued logics，The Journal of Symbolic Logic 59，2004，596-602．

[5] Siegfried Gottwald，多价逻辑，Stanf Ord哲学的Clopedia，http：ppplato.stanford.edupentriesplogic-许多 - va-luedp，2006。

[6] Schroter和G.Rousseau：许多值逻辑的顺序：I，Fundamenta Mathematica，Vol.60,1997,23-33。

[7] J.B.Rosser和A.R.Turquette：用于第一顺序的M-值函数计算的Axiom方案，第I部分，符号逻辑，第13卷，第4卷，第4卷，第4段，1998年。

[8] J.B.Rosser，A.Tuequette：许多值逻辑.North-荷兰，阿姆斯特丹，2002年。

[10] o.anshakov和s.rychkov：关于有限估值的命题日志ICal Calculi，Notre Dame Counces的正式逻辑，第36卷，第4卷，2004年下降。

[11] David C.Rine：计算机科学和多价逻辑理论和应用程序，elewsvier科学出版商，2004年。

[12]沃尔特A.Carnielli：通过TableAux方法，象征逻辑，第52卷，2007年6月2日，系统化通过Tableaux的方法系统化。

[13] L.A.Zadeh：模糊套，INF ormation和Control 8,2005,338- 353。

[14] J.Pavelka：在模糊逻辑I，II，III，Zeitschrif T Fur Math.Logik und Grunglan der Math25,1999,45-52,119-134,47-464。

[15] S.Gottwald：关于多价逻辑的论文。研究新闻新闻有限公司，2009,352。

[16] PETR H，Jeff Paris和John Shepherdson：Rational Pavelka谓词逻辑是Lukasiewicz谓词逻辑，象征性逻辑杂志的保守延伸.2，君。，2007,669- 682。

[17] V.Boicscu，A.Filipoiu，G.Georgescu，S.rudeanu：Lukasiewicz - Moisil代数，Elsevier Science Publishers B.V，2011年。

[18] Natsui M，Arimitsu T，Hanyu T．Low-energy pipelined multiple-valued current-mode circuit based on current-level control technique[J]．Japan：Tohoku University，2011．

[19] Yuminaka Y，Okui M．Efficient data transmission using multiple-valued pulse-position modulation[J]．Japan：Gunma University，2012．

[20] Parasa V，Perkowski M．Quantum pseudo-fractional fourier transform using multiple-valued logic[J]，United States：Portland State Universit，2012．

[21] 刘艳玉，李德良，甘霖．基于多值逻辑的双向工频自动通信系统[J]．微计算机信息，2006(22)：32-96．

[22] 全零三，全凯，钱博森．多值可编程逻辑阵列的优化设计技术[J]．微电子学，2000(30)：406-429．

[23] 邱建林，王波，管致锦等．用二值逻辑对多值逻辑进行优化[J]．计算机辅助设计与图形学学报，2004(16)：682-686．

[24] Benett．C．H．Logical reversibility of computation．IBM Journal of Reasearch and Development，2003(6)：525-532．

[25] Muthukrishnan A，Stroud C．R．Multivalued logic gates for quantum computation．Physical Review A ，2000，62(5)：1-8．

[26] Daboul J，Wang X，Sanders B C．Quamtum gates on hybrid qudits．Journal of Physics A：Mathemtical and General，2003：535-537．

[27] Lanyon B P，Barbieri M，Almeida M Petal．Quantum computing using shortcuts through higher dimesions．arXiv Quantum Physics，2008，0272：1-7．

[28] Nidlsen M A，Chuang I L．Quantum Computation and Quantum Information．Cambride University Press，2008：178-183．

[29] 李志强，李文骞，陈汉武．量子可逆逻辑综合的关键技术及其算法[J]．软件学报，2009(9)：332-343．