（1）已知无源的空气中的磁场强度为

$$\vec{H} = \vec{e}_y 0.1\sin\left(10\pi x\right)\cos(6\pi \times 10^9 t - kz)$$

利用波动方程求解常数 **k** 的值。

解：$\vec{H}$ 满足无源区域波动方程，因此有

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} = -\vec{e}_y 0.1 \times (10\pi)^2 \sin(10\pi x)\cos(6\pi \times 10^9 t - kz)$$

$$-\vec{e}_y k^2 \cdot 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi \times 10^9 t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\vec{e}_y (6\pi \times 10^9)^2 \times 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi \times 10^9 t - kz)$$

因此有

$$-(10\pi)^2 - k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \times \left[-(6\pi \times 10^9)^2\right] = 0$$

$$k = 10\sqrt{3}\pi$$

（2）在一各向同性媒质（μ, ε）组成的无源区域中，若存在电场强度 $\vec{E} = \vec{e}_y E_m \sin\alpha x \cos(\omega t - \beta z)$ ，试求：（A）与该电场强度相伴的磁场强度 $\vec{H}$（用复矢量形式表示）；（B）根据亥姆霍兹方程，确定 α 和 β 之间满足的关系；（C）平均能流密度矢量。

解：（A）电场强度的复矢量形式为 $\vec{E}_y = \vec{e}_y E_m \sin\alpha x e^{-j\beta z}$

利用 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$，可求得 $\vec{H}$，

即 $\vec{H}=-\dfrac{\beta E_m}{\omega\mu}\sin\alpha x e^{-j\beta z}\vec{e}_x+j\dfrac{\alpha E_m}{\omega\mu}\cos\alpha x e^{-j\beta z}\vec{e}_z$

（B）将电场强度的复矢量形式，代入无源区域时谐电磁波满足的亥姆霍兹方程 $\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$， 可得到 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon=\alpha^2+\beta^2$。

（C）平均能流密度矢量：$\vec{S}_{av}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=\vec{e}_z\dfrac{\beta E_m^2}{2\omega\mu}\sin^2\alpha x$。