2021-2022 学年第1 学期期末考试

一、选择题(共40分,共10题,每小题4分)

1.设$P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$,则下面结论正确的是( ).

(A) 事件A与B相互独立;

(B) 事件A与B互不相容;

(C) $A\subset B$;

(D) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

A

2.设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$, $Y=2X+3$,则Y的概率密度函数为().

(A) $-\frac{1}{2}f\left(\frac{y-3}{2}\right)$;

(B) $\frac{1}{2}f\left(\frac{y-3}{2}\right)$;

(C) $-\frac{1}{2}f\left(\frac{y+3}{2}\right)$;

(D) $\frac{1}{2}f\left(\frac{y+3}{2}\right)$.

B

3.(已换为其他题)关于随机变量的分布,下列说法正确的是( ).

(A)若随机变量X和Y的分布相同,则$P\{X=Y\}=1$;

(B)若$P\{X=Y\}=1$,则随机变量X和Y的分布相同;

(C)若随机变量X和Y的分布相同,则X和Y是同一个随机变量;

(D)若$P\{X=Y\}=1$,则X和Y是同一个随机变量.

B

4.设随机变量X表示100次重复独立射击命中目标的次数,且每次射击命中目标的概率为0.1,则 $E(X^2)=(C)$.

$(A)10$; $(B)9$; $(C)109$; $(D)100$.

$E(X_i)=1\times p+0\times(1-p)=p$

$D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=p-p^2=p(1-p)$

5.设随机变量X和Y都服从正态分布,则（ ）.

(A) $X+Y$一定服从正态分布;

(B) (X,Y)不一定服从二维正态分布;

(C) X与Y相互独立等价于不相关;

(D) 若X和Y相互独立,则函数$f(X+Y)$服从正态分布

B

6.下列分布类型不具备可加性的是（ ）

(A)正态分布; (B)二项分布; (C)均匀分布; (D)泊松分布.

C

7.设总体X服从区间$[5,\theta]$上的均匀分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的样本,则参数θ的极大似然估计量为( ).

(A) $2\bar{X}-5$;　　　　(B) $5-2\bar{X}$;

(C) $\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$;　(D) $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

C

8.设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,$\bar{X}$为样本均值,则下列哪个统计量是总体方差的无偏估计量（ ）.

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})^2$;　　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2$

(C)上述二者都是;　　(D) 上述二者都不是.

D

9.在假设检验中,设H_0为原假设,犯第一类错误的情况是( ).

(A) H_0为真,接受H_0;　　(B)H_0不真，接受H_0;

(C)H_0为真，拒绝H_0;　　(D)H_0不真,拒绝H_0.

C

10.设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自总体$X\sim N(0,3^2)$的一部分样本,

则$\dfrac{3X_{10}}{\sqrt{X_1^2+\cdots X_9^2}}$服从().

$(A)N(0,1)$;　　　　$(B)t(3)$;

(C) $t(9)$;　　　　$(D)F(1,9)$

C

二、计算题(10分)假设某地区位于甲、乙两河流的汇合处，当任一河流泛滥时,该地区即遭受水灾。设某时期内甲河流泛滥的概率为0.1;乙河流泛滥的概率为0.2;当甲河流泛滥时,乙河流泛滥的概率为0.3,试求:（1）该时期内这个地区遭受水灾的概率;(2)当乙河流泛滥时,甲河流泛滥的概率.

解:设$A=\{$甲河流泛滥$\}$,$B=\{$乙河流泛滥$\}$

(1) 由题意,该地区遭受水灾可表示为$A\cup B$,于是所求概率为:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B/A)$$
$$=0.1+0.2-0.1\times 0.3=0.27$$

(2) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.1\times 0.3}{0.2}=0.15$$

三、计算题(10分) 设(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4(1-x)y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

(1)求X和Y的边缘概率密度;(2)判断X与Y是否相互独立;(3)求$P\{X+Y\le 1\}$.

解:(1) 当$0<x<1$时,

$$f_x(x)=\int_0^1 4(1-x)ydy=4(1-x)\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=2(1-x)$$

所以:$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_y(y)=\int_0^1 4(1-x)ydx=4y\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=2y$

所以:$f_Y(x)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) ∵ 所有的$x,y\in(-\infty,+\infty)$,对于$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$都成立

∴ X与Y互相独立

$$(3)\ P\{X+Y\le 1\}=4\int_0^1(1-x)dx\int_0^{-x+1}y\,dy$$

$$=2\left[x-\frac{1}{2}x^2-x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

四、计算题(10分)设一工厂生产某种设备,其寿命X(以年计)的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

工厂规定,出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换。若一台设备无须调换,厂方净赢利100元,若调换一台设备则净亏损200元,试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

解: 设一台机器的净赢利为Y,X表示一台机器的寿命,

$$Y=\begin{cases}100 & X>1\\ 100-300=-200 & 0<X\le 1.\\ 0 & X\le 0\end{cases}$$

$$P\{0<X\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$$

$$E(Y)=100e^{-\frac{1}{4}}-200\left(1-e^{-\frac{1}{4}}\right)=33.64$$

五、计算题(10分)设供电站供应某地区1000户居民用电,各户用电情况相互独立。已知每户每日用电量(单位:度) 服从$[0,20]$上的均匀分布,利用中心极限定理求这1000户居民每日用电量超过10100度的概率。(所求概率用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示).

解:用X_i表示第i户居民的用电量,则$X_i \sim U[0,20]$

$$EX_i=\frac{0+20}{2}=10,\quad DX_i=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{100}{3},$$

则 1000 户居民的用电量为 $X=\sum_{i=1}^{1000}X_i$, 由独立同分布中心极限定理

$$P\{X>10100\}=1-P\{X\le 10100\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-1000\times 10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\le\frac{10100-1000\times 10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{10100-1000\times 10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$$

六、计算题(10分)设某次考试的学生成绩X服从正态分布,现从中随机抽取36位考生的成绩,算得平均值为66.5分,样本标准差为15分,问在显著性水平$\alpha=0.05$下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分?(参考数据$t_{0.025}(35)=2.0301$)

解:(1)建立假设$H_0:\mu=\mu_0=70, H_1:\mu\neq 70$

(2) 选统计量$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(3) 对给定的显著性水平α,确定k,使$P\{|T|\ge k\}=\alpha$,由参考数据知

$k=t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$,所以拒绝域为$|t|\ge 2.0301$.

(4)由于$\bar{x}=66.5, s=15, n=36$,所以$|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4$

由于$1.4<2.0301$,所以接受原假设H_0,即可以认为这次考试的平均成绩为70分.

七、计算题(10分)一个工厂为研究每月产品的总成本Y(千元)与该月产量X(千件)之间的相关关系,抽样取得了10组数据,计算得: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 777$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1657$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 70903$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 277119$ $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 132938$

(1)求Y关于X的一元经验线性回归方程;(2)检验X与Y的线性相关关系是否显著($\alpha = 0.01$)?

$(R_{0.01}(8) = 0.765, R_{0.01}(9) = 0.735)$

解: (1) $l_{xy} = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 4189.1$, $l_{xx} = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 10530.1$,

$l_{yy} = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 2554.1$; $\hat{b} = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} \approx 0.398$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 134.8$

Y关于X的一元经验线性回归方程为:$\hat{y} = 134.8 + 0.398x$

(2) $R = \dfrac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} \approx 0.808 > R_{0.01}(8) = 0.765$, 线性相关关系显著