练习一：泊松分布

题目：

上午8:30点开始银行某柜台开始存取款工作，此时有一大堆人排队等候存取款业务，设每人存取款时间独立且都服从均值为10分钟的指数分布，记：

- A为事件“到上午9:30点钟为止恰有10人完成存取款”
- B为事件“到上午9:00为止恰有4人完成存取款”

求P(A)，P(B|A)。

练习一：泊松分布

解： 以上午8:30点作为0时刻，以1小时为单位时间，以N(t)表示[0 t]中完成取款的人数，则{ N(t)，t ≥ 0 }是 λ = 6 的泊松过程，则两个事件可记为：A = { N(1)=10 }，B = { N(0.5) = 4 }。

（1）

$$P[A]=\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=10\\ \lambda=6\\ t=1}}=\frac{6^{10}e^{-6}}{10!}$$

（2）

$$P[B|A]=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P\{N(0.5)=4,\ N(1)=10\}}{P\{N(1)=10\}}=\frac{P\{N(0.5)=4,\ N(1)-N(0.5)=10-4\}}{P\{N(1)=10\}}$$

$$=\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=4\\ \lambda=6\\ t=0.5}}\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=6\\ \lambda=6\\ t=0.5}}\Bigg/\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=10\\ \lambda=6\\ t=1}}=\frac{\dfrac{3^4e^{-3}}{4!}\,\dfrac{3^6e^{-3}}{6!}}{\dfrac{6^{10}e^{-6}}{10!}}$$

练习二：题目

题目：

顾客以泊松过程到达某商店，速率为4人/小时，已知商店上午9:00开门，

（1）求到9:30时顾客人数不多于1人，到11:30时顾客人数不少于1人的概率

（2）求第2位顾客在10点前来到的概率？

练习二：解答

解：（1）

$$P[N(0.5)\le 1, N(2.5)\ge 1]=P[N(0.5)=0, N(2.5)-N(0.5)\ge 1]$$
$$+P[N(0.5)=1, N(2.5)-N(0.5)\ge 0]$$
$$=e^{-0.5\lambda}(1-e^{-2\lambda})+0.5\lambda e^{-0.5\lambda}\times 1$$
$$=e^{-2}(3-e^{-8})$$

（2）

$$P[S_2\le 1]=P[N(1)\ge 2]=1-P[N(1)=0]-P[N(1)=1]$$
$$=1-e^{-4}-4e^{-4}$$
$$=1-5e^{-4}$$

练习三：题目

设到达火车站的顾客数服从参数为λ的泊松过程，火车t时刻离开车站，求在[0 t]到达火车站的所有顾客平均等待时间。

练习三：解答

解：

每个顾客的到达时刻为Si，在[0 t]内到达的顾客数为N(t)，则所有顾客的总等待时间为：

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$$

则：

$$E\left[S(t) \middle| N(t) = n\right] = E\left\{\sum_{i=1}^{n} (t - S_i) \middle| N(t) = n\right\}$$

$$= nt - E\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i \middle| N(t) = n\right\}$$

练习三：解答

$$f_{S_1,S_2,\dots,S_n}(t_1,t_2,\dots,t_n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n} & 0<t_1<t_2<\dots<t_n\le t\\ 0 & others\end{cases}$$

到达时间的条件分布

S_1， S_2， …， S_n

[0, t] 均匀分布独立随机变量

U_1， U_2， …， U_n 的顺序统计量

$U_{(1)}$， $U_{(2)}$， …， $U_{(n)}$分布相同

$$f_{U_{(1)}U_{(2)}\dots U_{(n)}}(u_1,u_2,\dots u_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n} & 0<u_1<u_2<\dots<u_n\le t\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

练习三：解答

$$E\left[S(t)\middle|N(t)=n\right]=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}S_i\middle|N(t)=n\right\}=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\middle|N(t)=n\right\}$$

$$=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}U_i\middle|N(t)=n\right\}=\frac{nt}{2}$$

$$E\left[S(t)\right]=E\left\{E\left[S(t)\middle|N(t)=n\right]\right\}=E\left\{\frac{N(t)\,t}{2}\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{P\left[N(t)=n\right]\frac{nt}{2}\right\}=\frac{t}{2}\times\lambda t$$

$$=\frac{\lambda t^2}{2}$$

练习四：题目

设{ X(t), t ≥ 0 } 是具有跳跃强度

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$$

的非齐次泊松过程(ω≠0)，求EX(t)，DX(t)。

练习四：解答

解：

$$EX(t) = DX(t) = m_X(t)$$

$$= \int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}(1 + \cos\omega s)ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]$$

练习八：题目

设意外事故的发生频率受某种未知因素X的影响，有两种可能A、B，其概率分别为$P(X=A)=p$和$P(X=B)=1-p$。当未知因素为A时，[0 t]内事故发生次数N(t)为参数λ_A的泊松流，否则为参数λ_B的泊松流。已知到t时刻为止已经发生了n次事故，求在[t t+s]时段内无事故的概率。

练习八：解答

解：

到t时刻为止已经发生了n次事故，求在[t t+s]时段内无事故的概率

$$\{N(t+s)-N(t)=0 \mid N(t)=n, X\}$$

$$P\{N(t+s)-N(t)=0 \mid N(t)=n, X\}$$

$$=\frac{P\{N(t+s)-N(t)=0, N(t)=n, X\}}{P\{N(t)=n, X\}}$$

练习八：解答

$$P\{N(t+s)-N(t)=0 \big| N(t)=n\,,\,X\}$$

$$=\frac{\sum_{i\in\{A,B\}} P\{N(t+s)-N(t)=0\,,\,N(t)=n\,|\,X_i\}P\{X_i\}}{\sum_{i\in\{A,B\}} P\{N(t)=n \big| X_i\}P\{X_i\}}$$

$$=\frac{\sum_{i\in\{A,B\}} P\{N(t+s)-N(t)=0\,|\,X_i\}P\{N(t)=n\,|\,X_i\}P\{X_i\}}{p\dfrac{(\lambda_A t)^n e^{-\lambda_A t}}{n!}+(1-p)\dfrac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!}}$$

练习八：解答

$$= \frac{p\dfrac{e^{-\lambda_A s}}{1}\dfrac{(\lambda_A t)^n e^{-\lambda_A t}}{n!}+(1-p)\dfrac{e^{-\lambda_B s}}{1}\dfrac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!}}{p\dfrac{(\lambda_A t)^n e^{-\lambda_A t}}{n!}+(1-p)\dfrac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!}}$$

$$= \frac{pe^{-\lambda_A(t+s)}\lambda_A{}^n+(1-p)e^{-\lambda_B(t+s)}(\lambda_B)^n}{p(\lambda_A)^n e^{-\lambda_A t}+(1-p)(\lambda_B)^n e^{-\lambda_B t}}$$

练习九：题目

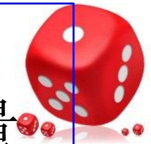
某校车候车区时段为[0,T），候车人流服从参数为λ的泊松过程N(t)。在T时刻校车发车，带走全部乘客。若在$t \in (0, T)$增加一班校车将当时候车的乘客全部带走，为了使所有乘客在候车区的总等候时间的平均时间最小，求t的最佳选择，说明原因。

练习九：解答

设在[0，t]时间段内第i个乘客到达时间为Si，到达的总乘客数为N(t)，在[t，T]时间段内第j个乘客到达时间为Rj，到达的总乘客数为N(T) – N(t)，则**总的等候时间**为：

$$W=\sum_{i=0}^{N(t)}\left(t-S_i\right)+\sum_{i=0}^{N(T-t)}\left(T-t-R_i\right)$$

总等候时间的平均值为： $E\left[W\right]$



到达时间的条件分布 S_1， S_2， …， S_n ⟷ [0, t] 均匀分布独立随机变量 U_1， U_2， …， U_n 的顺序统计量 $U_{(1)}$， $U_{(2)}$， …， $U_{(n)}$分布相同

到达时间的条件分布 R_1， R_2， …， R_k ⟷ [0, T-t] 均匀分布独立随机变量 V_1， V_2， …， V_k 的顺序统计量 $V_{(1)}$， $V_{(2)}$， …， $V_{(k)}$分布相同

$$
\begin{aligned}
E[W] &= E\left[\sum_{i=0}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=0}^{N(T-t)}(T-t-R_i)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{N(t)}(t-S_i)\right]+E\left[\sum_{i=0}^{N(T-t)}(T-t-R_i)\right] \\
&= E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{n}(t-S_i)\mid N(t)=n\right]\right\}+E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{k}(T-t-R_i)\mid N(T-t)=k\right]\right\} \\
&= E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{n}(t-U_i)\mid N(t)=n\right]\right\}+E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{k}(T-t-V_i)\mid N(T-t)=k\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$E[W]=E\left\{\sum_{i=0}^{n}E\left(t-U_i\right)\mid N(t)=n\right\}+E\left\{\sum_{i=0}^{k}E\left(T-t-V_i\right)\mid N(T-t)=k\right\}$$

$$=E\left(\frac{t*N(t)}{2}\right)+E\left(\frac{(T-t)*N(T-t)}{2}\right)$$

$$=\frac{t*\lambda t}{2}+\frac{(T-t)*\lambda(T-t)}{2}$$

$$=\lambda\left(t^2-Tt+0.5T^2\right)$$

$$\frac{\partial E[W]}{\partial t}=\lambda\left(2t-T\right)=0$$

$$\boxed{t=\frac{T}{2}}$$

解毕！

练习十：题目

设$N_A(t)$与$N_B(t)$分别是参数为λ_A与λ_B的齐次泊松过程，且相互独立。求：

（1）$N_A(S_2^{(B)})$的数学期望；

（2）$S_{N_A(t)}^{(B)}$的特征函数，$t \geq 0$。

（其中$S_n^{(B)}$表示$N_B(t)$过程的第 n 次事件发生时刻）。

练习十：解答

（1）$N_A\left(S_2^{(B)}\right)$的数学期望

解：

$$
\begin{aligned}
E\left[N_A\left(S_2^{(B)}\right)\right] &= E\left[E\left[N_A\left(S_2^{(B)}\right) \mid S_2^{(B)}=t\right]\right] \\
&= E\left[E\left[N_A(t) \mid S_2^{(B)}=t\right]\right] \\
&= E\left[\lambda_A S_2^{(B)}\right] \\
&= E\left[\lambda_A\left(T_1^{(B)}+T_2^{(B)}\right)\right] \\
&= \frac{2\lambda_A}{\lambda_B}
\end{aligned}
$$

（2）$S_{N_A(t)}^{(B)}$ 的数学期望

$$\phi_{S_{N_A(t)}^{(B)}}(v)=E\left[\exp\left(jvS_{N_A(t)}^{(B)}\right)\right]=E\left[E\left[\exp\left(jvS_n^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]$$

$$=E\left[E\left[\exp\left(jv\sum_{i=1}^{n}T_i^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]=E\left[E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(jvT_i^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]$$

$$=E\left[\left[\prod_{i=1}^{n}E\left\{\exp\left(jvT_i^{(B)}\right)\right\}\right]\mid N_A(t)=n\right]=E\left[\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^n\mid N_A(t)=n\right]$$

$$=E\left[\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^{N_A(t)}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^k\left(\frac{\left(\lambda_A t\right)^k e^{-\lambda_A t}}{k!}\right)$$

$$=e^{-\lambda_A t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_B\lambda_A t}{\lambda_B-jv}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda_A t}e^{\frac{\lambda_B\lambda_A t}{\lambda_B-jv}}$$

$$=\exp\left(\frac{jv\lambda_A t}{\lambda_B-jv}\right)$$

解毕！