电子科技大学 2020-2021 学年第一学期期中考试

考试科目：概率论与数理统计 考试形式：闭卷 考试日期：2020 年 11 月 14 日

一、简答题(共40分，共4题，每题10分)

1、(10分)请描述随机事件互不相容和随机事件相互独立的概念，并举例说明：1）事件A与事件B相互独立，事件C是事件B的子集，能否推知事件A与事件C相互独立？2）事件A与事件B互不相容，事件C是事件B的子集，能否推知事件A与事件C互不相容？

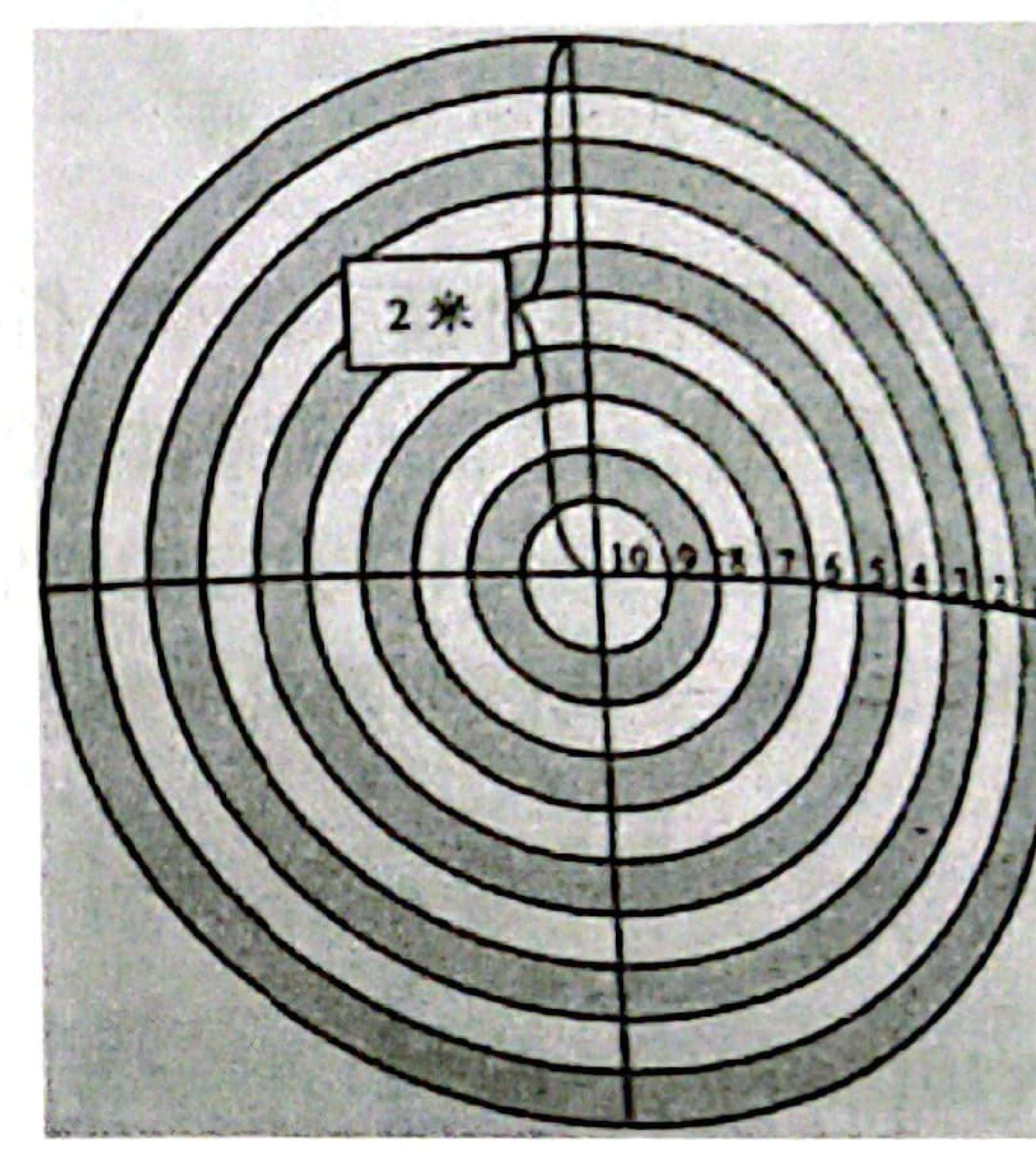
2、(10分)已知随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1+2x}{4}, & 0\le x<1.5 \\ 1, & x\ge 1.5 \end{cases}$.请根据该分布函数的特点判断：$X$是离散型随机变量吗？是连续型随机变量吗？说明理由。

3、(10分)设随机变量X服从参数为4的泊松分布，Y表示做5次重复独立观测，事件$\{X=2\}$出现的次数，请分析并表示出$\{Y=3\}$的概率。

4、(10分)设随机变量X在$[0,2]$上服从均匀分布，Y服从参数λ=2的指数分布，且X,Y相互独立，求$P\{X+Y<1\}$

二、(15分)已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱装有3件合格品和3件次品，乙箱中装有3件合格品，从甲箱中任取3件放入乙箱；若从乙箱中取出了一件产品发现是次品，求从甲箱中取出3件产品都是次品的概率。

三、(15分)一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。现将该靶子按半径等分为1到10环(如下图所示)，若独立射击3次，求有两次命中9环及以上的概率。



四、(15分)设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, 0\le x<1, 0<y<1-x\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x|y)$和$P\left\{X\le\frac{1}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$.

五、(15分)设随机变量X服从$(0,1)$上的均匀分布，求$Y=X^2+1$的概率密度。

参考答案

1、解：随机事件互不相容：指某一事件发生的情况下，其余事件一定不会发生。

随机事件相互独立：指某件事的发生与否对其余事件的发生没有影响。

2、解：在$0\le x<1.5$时，x的取值是任意的、无限的。不满足离散型随机变量。有限或可列无穷的特点，所以，x不是离散型随机变量。在x=0处，函数不连续，所以x不是离散型随机变量。

3、解：由题意知，$P\{x_n=k\}\approx\dfrac{4^k}{k!}e^{-4}$，则$P\{x=2\}=\dfrac{4^2}{2!}e^{-4}=8e^{-4}$,则$P\{Y=3\}=C_5^3P\{x=2\}^3\left[1-P\{x=2\}\right]^2$

$=10\left(8e^{-4}\right)^3\left(1-8e^{-4}\right)^2$

4、解：由题值：$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

$\because X,Y$相互独立，$\therefore f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0\le x\le 2, y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则

$$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{X+Y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^{1-x}e^{-2y}dydx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(1-e^{2x-2}\right)dx=1-\frac{e^2}{4}+\frac{e^{-2}}{4}$$

二、解：令B表示从乙箱中取出一件产品为次品。令A_i表示从甲箱中取出了i件次品放入乙箱，

$i\in\{0,1,2,3\}$,由题知：$P(A_0)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$，同理，$P(A_1)=\dfrac{9}{20}$，$P(A_2)=\dfrac{9}{20}$,$P(A_3)=\dfrac{1}{20}$,

且有：$P(B|A_0)=0,P(B|A_1)=\dfrac{1}{6},P(B|A_2)=\dfrac{1}{3},P(B|A_3)=\dfrac{1}{2}$。

由贝叶斯公式：$P(A_3|B)=\dfrac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum\limits_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\dfrac{1}{10}$。

三、解：命中九环及以上的概率可表示为：$P\{0\le x\le 2d\}$,其中$d=\frac{2}{10}=0.2m$

即：$P\{0\le x\le 0.4\}$,由题意，$P\{0\le X\le x\}=kx^2$，取$x=2$,有：$P\{0\le x<2\}=1$,则$k=\frac{1}{4}$,$P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}$。

设题设条件为事件A,$\because P\{0\le x<0.4\}=\frac{(0.4)^2}{4}=0.04$。

$\therefore P(A)=C_3^2P\{0\le x<0.4\}^2\left(1-P\{0\le x<0.4\}\right)=0.004608=0.4608\%$

四、解：由题目条件可得二维随机变量(X,Y)的联合概率函数为$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$

其中$D:\{0\le x<1,0<y<1-x\}$。

(1)由题，$f_y=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-Y}1dx, & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases}1-y, & 0\le x\le 1\\ 0, & x<0\ or\ x>1\end{cases}$

则$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2}{1-y}, & 0<y\le 1-x\\ 0, & other\end{cases}$

(2)由(1)，$P\left\{x\le\frac{1}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{4}}f_{X|Y}\left(x\middle|y=\frac{1}{2}\right)dx=1$

五、解：由题,$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$Y=x^2+1\in(1,2)$,

对任意的$y\in(0,2)$,有:$F_Y(y)=P\{x^2+1\le y\}=P\{x\le\sqrt{y-1}\}=F_x\left(\sqrt{y-1}\right)$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}1 & 1<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$