1．z<0 的区域 1 和 z>0 的区域 2 是两种不同的理想电介质，一频率为 $f = 3\times10^9 Hz$ 的均匀平面波沿 $\overline{e_z}$ 方向传播，在两种电介质中的波长分别为 $\lambda_1 = 5cm$ 和 $\lambda_2 = 3cm$。（1）计算入射波能量被反射的百分比；（2）计算区域 1 中的驻波比。

解：（1）入射波能量被反射的百分比

在理想电介质中 $\lambda = \lambda_0 \big/ \sqrt{\varepsilon_r}$

由 $$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{3\times10^9} = 0.1\ \text{m}$$

得 $$\sqrt{\varepsilon_{r1}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{0.1}{0.05} = 2$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{0.1}{0.03} = \frac{10}{3}$$

反射系数

$$\varGamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{2 - 10/3}{2 + 10/3} = -\frac{1}{4}$$

故入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = \left|\varGamma\right|^2 = \frac{1}{16} = 6.25\%$$

（2）区域 1 中的驻波比为

$$S = \frac{1 + |\varGamma|}{1 - |\varGamma|} = \frac{1 + 1/4}{1 - 1/4} = \frac{5}{3}$$

2、空气中传播的均匀平面波的电场强度为 $\vec{E} = (\vec{e}_x 4 + j\vec{e}_y 4)e^{-j20\pi z}$，此电磁波垂直入射到半无限大无耗介质平面分界面上发生反射与透射，无耗介质参数为 $\varepsilon = 4\varepsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 0$，求：

（1）反射系数 Γ 与透射系数 τ；

（2）反射波电场 $\vec{E}_r$ 与透射波电场 $\vec{E}_t$；

（3）空气中合成波电场的驻波系数 S 以及第一波节点的位置；

（4）电磁波从空气到介质中的功率传输效率 η（$\eta = \frac{S_{tav}}{S_{iav}}$）。

解：（1） $\eta_1=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi$， $\eta_2=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\varepsilon_0}}=60\pi$， 则

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{-60\pi}{180\pi}=-\frac{1}{3}$$

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{120\pi}{180\pi}=\frac{2}{3}\text{（或}\tau=1+\Gamma=\frac{2}{3}\text{）}$$

（2）反射波电场 $\vec{E}_r=\Gamma(\vec{e}_x4+j\vec{e}_y4)e^{j20\pi z}=-(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\dfrac{4}{3}e^{j20\pi z}$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\Rightarrow k_2=2k_1=40\pi$$

$$\vec{E}_t=\tau(\vec{e}_x4+j\vec{e}_y4)e^{-j40\pi z}=(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)\frac{8}{3}e^{-j40\pi z}$$

（3）驻波系数 $S=\dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=2$， $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=0.1m$

由于 $\Gamma<0$，在介质分界面上为电场波节点

（4） $\vec{S}_{iav}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_i\times H_i^*\right)=\dfrac{|E_{i0}|^2}{2\eta}\vec{e}_z=\dfrac{32}{240\pi}\vec{e}_z=\dfrac{2}{15\pi}\vec{e}_z$

$$\vec{S}_{tav}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_t\times H_t^*\right)=-\frac{|E_{t0}|^2}{2\eta}\vec{e}_z=-\frac{128/9}{120\pi}\vec{e}_z=\frac{16}{135\pi}\vec{e}_z$$

透射效率为： $\eta=\dfrac{S_{tav}}{S_{iav}}\times100\%=\dfrac{16}{18}=88.9\%$

3、电场方向沿 y 轴，频率为 100MHz，振幅为 10V/m，初始相位为零的均匀平面波沿 z 轴从自由空间垂直入射到理想介质内（$\mu_r=1$），反射波能量降为入射波能量的 4%，且分界面上为驻波电场的最小点。试求：

（1） 理想介质的相对介电常数；

（2） 自由空间内合成波的电场；

（3） 理想介质内的瞬时坡印廷矢量。

解：（1）由反射波能量降为入射波能量的 4%可知，

$$\Gamma^2 = 0.04 \Rightarrow \Gamma = \pm 0.2$$

由分界面上为驻波电场的最小点，所以$\Gamma = -0.2$

由$\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} + 1} = -0.2 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_{r2}} = \dfrac{3}{2}, \varepsilon_{r2} = \dfrac{9}{4}$

（2）在自由空间内$k_1 = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \dfrac{2\pi}{3}$，

在理想介质内$k_2 = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8}\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \dfrac{2\pi}{3} \times \dfrac{3}{2} = \pi$

$\vec{E}_i = \vec{e}_y 10 e^{-j\frac{2}{3}\pi z}$ （1 分） $\vec{E}_r = \vec{e}_y \Gamma 10 e^{j\frac{2}{3}\pi z} = -2\vec{e}_y e^{j\frac{2}{3}\pi z}$

$\vec{E}_1 = \vec{e}_y 10 e^{-j\frac{2}{3}\pi z} - 2\vec{e}_y e^{j\frac{2}{3}\pi z}$

（3）透射系数$\tau = 1 + \Gamma = 0.8$

在理想介质内 $\eta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\eta_0 = 80\pi$

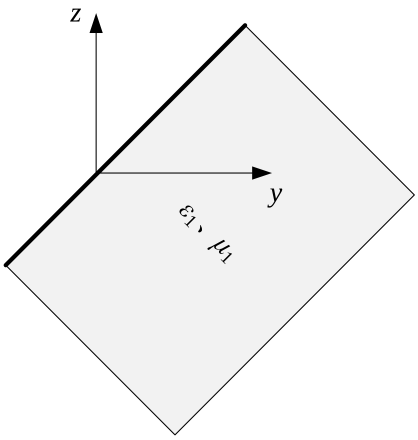
$\vec{E}_t = \vec{e}_y \tau 10 e^{-j\pi z} = 8\vec{e}_y e^{-j\pi z}$ 瞬时值形式

$\vec{E}_t = \mathrm{Re}[\vec{e}_y 8 e^{-j\pi z} e^{j\omega t}] = \vec{e}_y 8\cos(2\pi \times 10^8 t - \pi z)$

相伴的磁场$\vec{H}_t = \dfrac{1}{80\pi}\vec{e}_z \times \vec{e}_y 8\cos(2\pi \times 10^8 t - \pi z) = -\dfrac{1}{10\pi}\vec{e}_x \cos(2\pi \times 10^8 t - \pi z)$

瞬时坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E}_t \times \vec{H}_t = \vec{e}_z \dfrac{4}{5\pi}\cos^2(2\pi \times 10^8 t - \pi z)$

4、空气中传播的均匀平面波的电场为$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-j(y-z)}$，试求：1）传播方向；2）波长和频率；3）相伴的磁场；4）平均坡印廷矢量；5）当该平面波入射到如下图所示的理想介质表面，已知空气中合成波的驻波比为 3，介质内透射波的波长是空气中波长的四分之一，且介质表面上为合成波电场的最小点，求理想介质的相对磁导率 μ_1 和相对介电常数 ε_1。



解：（1）$\vec{k}\bullet\vec{r}=(k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z)\bullet(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)=k_xx+k_yy+k_zz=y-z$

$$\Rightarrow k_x=0,k_y=1,k_z=-1$$

电磁波的传播方向：$\widehat{k}=\dfrac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z$

（2）波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\sqrt{2}\times10^8\Rightarrow f=\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}\times10^8Hz$$

（3）相伴的磁场：$\vec{H}=\dfrac{1}{\eta}\widehat{k}\times\vec{E}=\dfrac{1}{120\pi}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z)\times\vec{e}_xE_0e^{-j(y-z)}$

$$=\frac{-E_0}{120\sqrt{2}\pi}(\vec{e}_z+\vec{e}_y)e^{-j(y-z)}$$

（4）平均坡印廷矢量：$S_{av}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\dfrac{E_0^2}{240\sqrt{2}\pi}(\vec{e}_y-\vec{e}_z)$

（5）此时为垂直入射。

因为驻波比 $S=\dfrac{1+|\mathit{\Gamma}|}{1-|\mathit{\Gamma}|}=3$，得 $|\mathit{\Gamma}|=\dfrac{1}{2}$，且界面上是驻波电场的最小点，故 $\mathit{\Gamma}=-\dfrac{1}{2}$ 。

一方面，由于反射系数 $\mathit{\Gamma}=\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$，其中 $\eta_1=\eta_0$，$\eta_2=\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta_0$，

可得：$\eta_2=\dfrac{1}{3}\eta_0$，即 $\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}=\dfrac{1}{9}$ 。

另一方面，因为介质中的波长$\lambda_2=\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\dfrac{\lambda_0}{4}$，可得$\varepsilon_r\mu_r=16$。

综上，介质的相对磁导率 μ_r 为 4/3，相对介电常数 ε_r 为 12。

5、已知空气中一水平极化的平面波向位于 z=0 处的理想导体斜入射，其电场表达式为 $\vec{E}_{\mathrm{i}}=(\vec{e}_y-\vec{e}_z)\dfrac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(y+z)}$。求：1）入射角；2）入射波磁场；3）反射波磁场与电场；4）导体表面上的电荷密度。

解：（1）由题意可知，$k_{\mathrm{iy}}=k_{\mathrm{iz}}=\sqrt{2}\pi$，所以

$$\vec{k}_{\mathrm{i}}=\vec{e}_yk_{\mathrm{iy}}+\vec{e}_zk_{\mathrm{iz}}=(\vec{e}_y+\vec{e}_z)\sqrt{2}\pi,\quad k=\left|\vec{k}_{\mathrm{i}}\right|=2\pi$$

故入射角为$\theta_{\mathrm{i}}=\arctan\dfrac{k_{\mathrm{iy}}}{k_{\mathrm{iz}}}=\dfrac{\pi}{4}$

2）入射波磁场为：$\vec{H}_{\mathrm{i}}=\dfrac{1}{\eta_0}\vec{e}_{\mathrm{i}}\times\vec{E}_{\mathrm{i}}=-\vec{e}_x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(y+z)}$

3）反射波磁场为：$\vec{H}_{\mathrm{r}}=-\vec{e}_x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(y-z)}$

反射波电场为：$\vec{E}_{\mathrm{r}}=\eta_0\vec{H}_{\mathrm{r}}\times\vec{e}_{\mathrm{r}}=-(\vec{e}_y+\vec{e}_z)\dfrac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(y-z)}$

4）合成波的电场为

$$\vec{E}_1=\vec{E}_{\mathrm{i}}+\vec{E}_{\mathrm{r}}=(\vec{e}_y-\vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}-(\vec{e}_y+\vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}$$
$$=\left[\vec{e}_y(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z})-\vec{e}_z(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z})\right]\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi y}$$
$$=[-\vec{e}_y\mathrm{j}\sin(\sqrt{2}\pi z)-\vec{e}_z\cos(\sqrt{2}\pi z)]120\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi y}$$

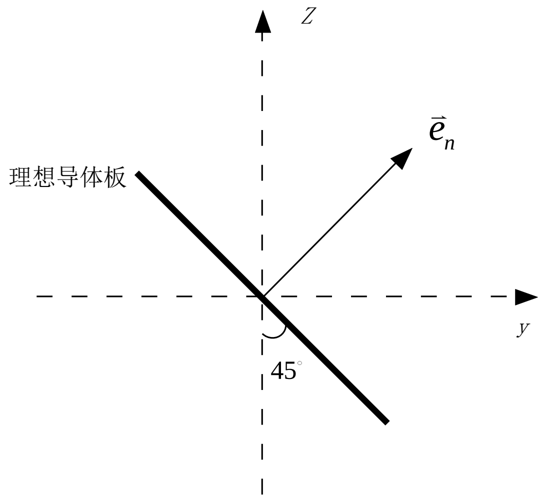
导体表面上存在电荷密度，为$\rho_S=-\varepsilon_0\vec{e}_z\cdot\vec{E}\Big|_{z=0}=-120\sqrt{2}\pi\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi\mathrm{y}}$

课堂练习题：

1. 已知在自由空间中传播的均匀平面波的磁场强度 $\vec{H}_{\mathrm{i}}=\vec{e}_x H_0 e^{jkz}$，其中 H_0 和 k 都是实常数。当该均匀平面波入射到如下图所示的理想导体板上时，试求：

（1）反射波的电场强度；

（2）理想导体板表面的电流密度。



解：（1） 当导体板位于如图 3 所示位置时，由于 $\vec{H}_i=\vec{e}_x H_0 e^{jkz}$

则入射波电场强度

$$\vec{E}_i=\eta_0 \vec{H}_i \times \vec{e}_i=\eta_0 \vec{e}_x H_0 e^{jkz}\times(-\vec{e}_z)=\vec{e}_y \eta_0 H_0 e^{jkz}$$

所以入射波为平行极化波，$\Gamma_{//}=1$

反射波 $\vec{e}_r=\vec{e}_y$

所以， 反射波磁场强度 $\vec{H}_r=\vec{e}_x H_0 e^{-jky}$，

所以反射波电场强度为 $\vec{E}_r=\eta_0 \vec{H}_r \times \vec{e}_r=\vec{e}_z \eta_0 H_0 e^{-jky}$

（2） 入射波磁场强度为 $\vec{H}_i=\vec{e}_x H_0 e^{jkz}$，

反射波磁场强度已由（1）求出为 $\vec{H}_r=\vec{e}_x H_0 e^{-jky}$，

合成波的磁场强度为，$\vec{H}_1=\vec{H}_i+\vec{H}_r=\vec{e}_x H_0(e^{-jky}+e^{jkz})$

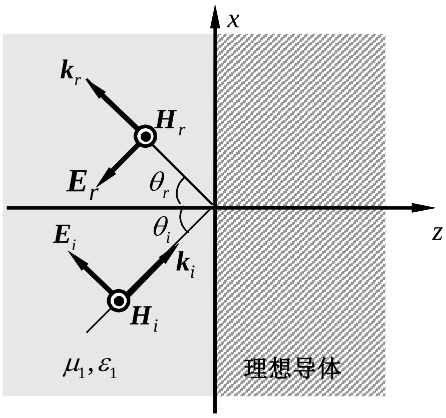
导体板法线 $\vec{e}_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_y+\vec{e}_z)$

所以 ，导体板表面电流密度为，

$$\vec{J}_s = \vec{e}_n \times \vec{H}_1\Big|_{y+z=0} = (\vec{e}_y - \vec{e}_z)\sqrt{2}H_0 e^{-jky} \quad 或 \quad (\vec{e}_y - \vec{e}_z)\sqrt{2}H_0 e^{jkz}$$

补充：

1. 已知空气中磁场强度为 $\vec{H}_\mathrm{i} = -\vec{e}_y e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x+z)}\,\mathrm{A/m}$ 的均匀平面波，向位于 $z=0$ 处的理想导体斜入射，反射波的磁场强度为 $\vec{H}_\mathrm{r} = -\vec{e}_y e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x-z)}\,\mathrm{A/m}$，参考坐标系如下图所示。求：（1）入射角 θ_i；（2）入射波和反射波的电场强度；（3）空气中合成波的磁场强度以及导体表面的感应电流密度。（矢量场均用复数表示）



解：（1） $k_{ix} = k_{iz} = \sqrt{2}\pi$，则入射角 $\theta_\mathrm{i} = \arctan\dfrac{k_\mathrm{ix}}{k_\mathrm{iz}} = \dfrac{\pi}{4}$

（2）由 $\vec{e}_{k_\mathrm{i}} = \dfrac{\vec{k}_\mathrm{i}}{|\vec{k}_\mathrm{i}|} = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$，$\vec{e}_{k_\mathrm{r}} = \dfrac{\vec{k}_\mathrm{r}}{|\vec{k}_\mathrm{r}|} = \dfrac{\vec{e}_x - \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$

入射波电场为：

$$\vec{E}_\mathrm{i} = \eta_0 \vec{H}_\mathrm{i} \times \vec{e}_{k_\mathrm{i}} = \eta_0 \vec{H}_\mathrm{i} \times \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}} = (-\vec{e}_x + \vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}} e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x+z)}$$

反射波电场为：

$$\vec{E}_\mathrm{r} = \eta_0 \vec{H}_\mathrm{r} \times \vec{e}_{k_\mathrm{r}} = \eta_0 \vec{H}_\mathrm{r} \times \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_z}{\sqrt{2}} = (\vec{e}_x + \vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}} e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x-z)}$$

（3）$\vec{H}_1 = \vec{H}_\mathrm{i} + \vec{H}_\mathrm{r} = -\vec{e}_y 2\cos(\sqrt{2}\pi z) e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}\,\mathrm{A/m}$

$\vec{J}_\mathrm{s} = \vec{e}_\mathrm{n} \times \vec{H}_1\big|_{z=0} = -\vec{e}_z \times (-\vec{e}_y) 2e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x} = -\vec{e}_x 2e^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}\,\mathrm{A/m}$