一、（20 分）考虑优化问题

$$\min\ x_1x_2;$$
$$s.t. -2x_1+x_2+3\geqslant 0$$

1.用外部罚函数法求解；
2.用对数罚函数法求解；

二、（25 分）考虑线性规划：

$$\max\ 3x_1+5x_2;$$
$$s.t.\ x_1\leqslant 4;$$
$$x_2\leqslant 6;$$
$$x_1+2x_2\leqslant 18;$$
$$x_i\geqslant 0, i=1,2$$

1、用单纯形法求最优解X^*；2、验证X^*是 KKT 点；
3、求X^*处的所有可行方向；4、求对偶线性规划的最优解W^*.

三、（15 分）用 FR 共轭梯度法求解下面的非凸无约束优化问题，这里$X^0=(1,5)^{\mathrm{T}}$

$$\min\ f(X)=-2x_1^2+x_1x_2+1 \qquad (*)$$

1、已知第一次迭代过程如下，请完成后续过程，停机条件为$\|g^k\|=0$.

$g^0=(1,1)^{\top}, P^0=-g^0=(-1,-1)^{\top}$;

$\varphi(t)\triangleq f(X^0+tP^0)$，令$\varphi'(t)\triangleq 0$，解之，$t_0=-1$;

$X^1=X^0+t_0P^0=(2,6)^{\top}$;

继续作答。

2、由第 1 问得到的X^*是该问题的局部最优解吗？若添加约束条件$-3x_1+x_2=0$之后呢，即X^*是约束优化问题

$$\min\ f(X)=-2x_1^2+x_1x_2+1$$
$$s.t.\ -3x_1+x_2=0$$

的局部最优解吗？为什么？

3、请指出用 FR 共轭梯度法求解问题$(*)$时不合理或错误之处。

四、（25 分）用 Rosen 梯度投影法求解下面约束优化问题，这里$X^0=(1,0)^{\mathrm{T}}$，请先填写空格处的缺省数据，然后写出后续计算过程。

$$\min\ f(X)=x_1^2-x_1x_2+2x_2^2;$$
$$s.t.\ 2x_1+x_2\geqslant 2;\ x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0.$$

解：

(a). P^0: $g^0=(2,-1)^{\top}, N_0=$____________

$M_0=(N_0N_0^{\top})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}, \mathbb{Q}_0=I-N_0^{\top}M_0N_0=$____________

$P^0=-\mathbb{Q}_0g^0=(0,0)^T$

(b). 求q_0；$q_0=M_0N_0g^0=$____________

继续作答，【提示：$u=A_0''X^0-b_0''$， $v=A_0''P^0$】

五、填空题（15×1）

1.考虑$\min\ f(X)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$，若$X^0=(1,1)^{\mathrm{T}}$，则该点处的最速下降方向$P^0$为_________，牛顿方向为__________，沿牛顿方向的方向导数为__________；若采取精确一维搜索，则$(g^1)^{\mathrm{T}}P^0=$__________；若采用 Armijio 准则

$\begin{pmatrix} f(X^0+tP^0)\leqslant f(X^0)+\rho t(g^0)^{\mathrm{T}}P^0 \\ \rho=1/10 \end{pmatrix}$进行非精确一维搜索后，则满意步长$t=$_______

2.在两阶段法中，若辅助线性规划的最优值为 1，则原规划最优解的情况为_______.

3.若用黄金分割法求解$\min\ \varphi(t)=|t|$，若初始搜索区间为$[-2,1]$，则第一次迭代后的搜索区间为_______.

4.点列$\{X^k\}=k^{-k}$，则收敛速度为__________.

5.若 $f(X)$ 为凸函数且二次连续可微，则$\nabla^2 e^{f(X)}$ =________；$e^{f(X)}$ 是否为凸函数________(填是或否).

6.已知$\min\ b_1x_1+5x_3;\ s.t.,\ 2x_1+x_2+x_3\geqslant 2b_1$；$6x_1-x_2+x_3\geqslant b_1;\ x_i\geqslant 0,\forall i,$ 的最优解$X^*=(36/5,b_2,6/5)^{\mathrm{T}}$, $b_1>0$, 则 $b_2=$ ________，此线性规划是否有唯一最优解：_______(填是或否).

7.考虑$\min\ C^TX+b$，$s.t.,\|X\|\leqslant 5$，这里，$C=(-3,4,0)^T\in R^3$, $X\in R^n, b=2021$，则最优解$X^*=$________.

8.考虑$\min\ f(X)=\|X\|^2/2$,这里，$X\in R^3$，若$X^0=(0,-2,-4)^T$，则信赖域子问题

$\min\ q_0(S)=S^T(\nabla g^0)S/2+(g^0)^TS+f(X^0), s.t., \|S\|\leqslant h_0=2$ 的最优解$S^0=$________，因此信赖域半径h_1变化情况为_________(填增大或缩小或不变)