# 第 5 章 平面电磁波

**5.2** 理想介质（参数为$\mu=\mu_0$、$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$、$\sigma=0$）中有一均匀平面波沿 x 方向传播，已知其电场瞬时值表达式为

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 377\cos(10^9 t-5x)\ \text{V/m}$$

试求：（1）该理想介质的相对介电常数；（2）与$\boldsymbol{E}(x,t)$相伴的磁场$\boldsymbol{H}(x,t)$；（3）该平面波的平均功率密度。

**解** （1）理想介质中的均匀平面波的电场$\boldsymbol{E}$应满足波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

据此即可求出欲使给定的$\boldsymbol{E}$满足方程所需的媒质参数。

方程中

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y\nabla^2 E_y=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=-\boldsymbol{e}_y 9425(10^9 t-5x)$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\boldsymbol{e}_y\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_y 377\times10^{18}\cos(10^9 t-5x)$$

故得

$$-9425\cos(10^9 t-5x)+\mu\varepsilon[377\times10^{18}\cos(10^9 t-5x)]=0$$

即

$$\mu\varepsilon=\frac{9425}{377\times10^{18}}=25\times10^{-18}$$

故

$$\varepsilon_r=\frac{25\times10^{-18}}{\mu_0\varepsilon_0}=25\times10^{-18}\times(3\times10^8)^2=2.25$$

其实，观察题目给定的电场表达式，可知它表征一个沿＋x 方向传播的均匀平面波，其相速为

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{10^9}{5}=2\times10^8\ \text{m/s}$$

而

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\times3\times10^8$$

故

$$\varepsilon_r=\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25$$

（2）与电场$\boldsymbol{E}$相伴的磁场$\boldsymbol{H}$可由$\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}$求得。先写出$\boldsymbol{E}$的复数形式$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-j5x}$ V/m，故

$$\boldsymbol{H}=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{j\omega\mu_0}377\mathrm{e}^{-j5x}(-j5)=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{10^9\times4\pi\times10^{-7}}\mathrm{e}^{-j5x}=\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-j5x}\ \text{A/m}$$

则得磁场的瞬时值表达式

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-j5x}\mathrm{e}^{j10^9 t}\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_z 1.5\cos(10^9 t-5x)\quad \mathrm{A/m}$$

也可以直接从关系式 $\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}$ 得到 $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 377e^{-j5x}=\boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\eta_0}\times 377e^{-j5x}=\boldsymbol{e}_z 1.5e^{-j5x}\ \mathrm{A/m}$$

（3）平均坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-j5x}\times\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{j5x}\right]=\boldsymbol{e}_x 282.75\quad \mathrm{W/m^2}$$

**5.4** 有一均匀平面波在 $\mu=\mu_0$、$\varepsilon=4\varepsilon_0$、$\sigma=0$ 的媒质中传播，其电场强度 $E=E_m\sin(\omega t-kz+\dfrac{\pi}{3})$。若已知平面波的频率 $f=150\mathrm{MHz}$，平均功率密度为 $0.265\mu\mathrm{W/m^2}$。试求：（1）电磁波的波数、相速、波长和波阻抗；（2）$t=0$、$z=0$ 时的电场 $E(0,0)$ 值；（3）经过 $t=0.1\mu\mathrm{s}$ 后，电场 $E(0,0)$ 出现在什么位置？

**解** （1）由 $\boldsymbol{E}$ 的表达式可看出这是沿+z 方向传播的均匀平面波，其波数为

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}=2\pi\times150\times10^6\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}=$$

$$2\pi\times150\times10^6\times2\times\frac{1}{3\times10^8}=2\pi\quad \mathrm{rad/m}$$

相速为

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}}=1.5\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=1\ \mathrm{m}$$

波阻抗为

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}}=60\pi\approx188.5\ \Omega$$

（2）平均坡印廷矢量为

$$S_{av}=\frac{1}{2\eta}E_m^2=0.265\times10^{-6}\quad \mathrm{W/m^2}$$

故得

$$E_m=(2\eta\times0.265\times10^{-6})^{1/2}\approx10^{-2}\ \ \mathrm{V/m}$$

因此

$$E(0,0)=E_m\sin(\frac{\pi}{3})=8.66\times10^{-3}\ \ \mathrm{V/m}$$

（3）随着时间 $t$ 的增加，波将沿+z 方向传播，当 $t=0.1\mu\mathrm{s}$ 时，电场为

$$E=10^{-2}\sin(2\pi ft-kz+\frac{\pi}{3})=$$

$$10^{-2}\sin(2\pi\times150\times10^6\times0.1\times10^{-6}-2\pi z+\frac{\pi}{3})=8.66\times10^{-3}$$

得

$$sin(30\pi - 2\pi z + \frac{\pi}{3}) = 0.866$$

即

$$30\pi - 2\pi z + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

则

$$z = 15\text{m}$$

**5.6** 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 10^{-4} e^{-j20\pi z} + \boldsymbol{e}_y 10^{-4} e^{-j(20\pi z - \frac{\pi}{2})} \quad \text{V/m}$$

求：（1）平面波的传播方向和频率；

（2）波的极化方式；

（3）磁场强度 $\boldsymbol{H}$；

（4）流过沿传播方向单位面积的平均功率。

**解** （1）传播方向为 $\boldsymbol{e}_z$

由题意知 $k = 20\pi = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，故

$$\omega = \frac{20\pi}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 6\pi\times10^9 \quad \text{rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3\times10^9\ \text{Hz} = 3\ \text{GHz}$$

（2）原电场可表示为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x + j\boldsymbol{e}_y)10^{-4}\text{e}^{-j20\pi z}$$

是左旋圆极化波。

（3）由 $$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}$$

得

$$\boldsymbol{H} = \frac{10^{-4}}{120\pi}(\boldsymbol{e}_y - j\boldsymbol{e}_x)\text{e}^{-j20\pi z} =$$

$$-\boldsymbol{e}_x 2.65\times10^{-7}\text{e}^{-j(20\pi z - \frac{\pi}{2})} + \boldsymbol{e}_y 2.65\times10^{-7}\text{e}^{-j20\pi z}$$

（4） $$\boldsymbol{S}_{av} = \tfrac{1}{2}Re[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] =$$

$$\frac{1}{2}\text{Re}\{[\boldsymbol{e}_x 10^{-4}\text{e}^{-j20\pi z} + \boldsymbol{e}_y 10^{-4}\text{e}^{-j(20\pi z - \frac{\pi}{2})}]\times$$

$$[\boldsymbol{e}_y 2.65\times10^{-7}\text{e}^{j20\pi z} - \boldsymbol{e}_x 2.65\times10^{-7}\text{e}^{j(20\pi z - \frac{\pi}{2})}]\} =$$

$$\boldsymbol{e}_z 2.65\times10^{-11} \quad \text{W/m}^2$$

即 $$P_{av} = 2.65\times10^{-11} \quad \text{W/m}^2$$

**5.7** 在空气中，一均匀平面波的波长为 12cm，当该波进入某无损媒质中传播时，其波长减小为 8cm，且已知在媒质中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的振幅分别为 50V/m 和 0.1A/m。求该平面波的频率和媒质的相对磁导率和相对介电常数。

**解** 自由空间中，波的相速 $v_p = c = 3\times10^8\ \text{m/s}$，故波的频率为

$$f=\frac{v_p}{\lambda_0}=\frac{c}{\lambda_0}=\frac{3\times10^8}{12\times10^{-2}}=2.5\times10^9\ \text{Hz}$$

在无损耗媒质中，波的相速为

$$v_p=f\lambda=2.5\times10^9\times8\times10^{-2}=2\times10^8\ \text{m/s}$$

又

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

故

$$\mu_r\varepsilon_r=(\frac{c}{v_p})^2=\frac{9}{4} \qquad (1)$$

无损耗媒质中的波阻抗为

$$\eta=\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|}=\frac{E_m}{H_m}=\frac{50}{0.1}=500\ \Omega$$

又由于

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

故

$$\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}=(\frac{\eta}{\eta_0})^2=(\frac{500}{377})^2 \qquad (2)$$

联解式（1）和式（2），得

$$\mu_r=1.99,\quad \varepsilon_r=1.13$$

**5.12** 已知在自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\times0.8\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\quad \text{A/m}$$

（1）求该均匀平面波的频率、波长、相位常数、相速；

（2）求与$\boldsymbol{H}(z,t)$相伴的电场强度$\boldsymbol{E}(z,t)$；

（3）计算瞬时坡印廷矢量。

**解** （1）从给定的磁场表达式，可直接得出

频率 $$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{6\pi\times10^8}{2\pi}=3\times10^8\ \text{Hz}$$

相位常数 $$\beta=2\pi\ \text{rad/m}$$

波长 $$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{2\pi}=1\ \text{m}$$

相速 $$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{6\pi\times10^8}{2\pi}=3\times10^8\ \text{m/s}$$

（2）与$\boldsymbol{H}(z,t)$相伴的电场强度

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\eta_0\boldsymbol{H}(z,t)\times\boldsymbol{e}_z=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\times\boldsymbol{e}_z0.8\times120\pi\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)=$$
$$(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y)96\pi\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)$$

（3）瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}(z,t)=\boldsymbol{E}(z,t)\times\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_z153.6\pi\cos^2(6\pi\times10^8t-2\pi z)\quad \text{W/m}^2$$

**5.21** 证明电磁波在良导体中传播时，场强每经过一个波长，振幅衰减 55dB。

**解** 在良导体中$\alpha \approx \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$，故场强的衰减因子为

$$e^{-\alpha z} \approx e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}$$

场强的振幅经过 z = λ 的距离后

$$\left|\frac{E_m(\lambda)}{E_m(0)}\right| = e^{-2\pi} = 0.002$$

即衰减到起始值的 0.002。用分贝表示，则为

$$20\lg\left|\frac{E_m(\lambda)}{E_m(0)}\right| = 20\lg e^{-2\pi} = -2\pi \times 20\lg e \approx -55\text{dB}$$

**5.22** 有一线极化的均匀平面波在海水($\varepsilon_r = 81$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 4\text{S/m}$)中沿+$y$ 方向传播，其磁场强度在 $y$=0 处为

$$\boldsymbol{H}(0,t) = \boldsymbol{e}_x 0.1\sin(10^{10}\pi t - \pi/3)\,\text{A/m}$$

（1）求衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及透入深度；（2）求出 $\boldsymbol{H}$ 的振幅为 0.01A/m 时的位置；（3）写出 $\boldsymbol{E}(y,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(y,t)$ 的表示式。

**解** （1）$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \dfrac{4\times 36\pi\times 10^9}{10^{10}\pi\times 81} = \dfrac{16}{90} \approx 0.18$

可见，在角频率$\omega = 10^{10}\pi$时，海水为一般有损耗媒质，故

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2} - 1\right]} = 10^{10}\pi\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2} - 1]} = 83.9\ \text{Np/m}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2} + 1\right]} = 10^{10}\pi\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2} + 1]} \approx 300\pi\ \text{rad/m}$$

$$\eta_c = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{81\varepsilon_0}}}{\sqrt{1 - j0.18}} = \frac{41.89}{1.008e^{-j0.028\pi}} = 41.56e^{j0.028\pi}\ \Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^{10}\pi}{300\pi} = 0.333\times 10^8\,\text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{300\pi} = 6.67\times 10^{-3}\,\text{m}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{83.9} = 11.92\times 10^{-3}\,\text{m}$$

（2）由$0.01 = 0.1e^{-\alpha y}$，即$e^{-\alpha y} = 0.1$得

$$y = \frac{1}{\alpha}\ln 10 = \frac{1}{83.9}\times 2.303 = 27.4\times 10^{-3}\,\text{m}$$

（3）
$$\boldsymbol{H}(y,t) = \boldsymbol{e}_x 0.1e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t - 300\pi y - \frac{\pi}{3})\text{A/m}$$

其复数形式为

$$\boldsymbol{H}(y) = -\boldsymbol{e}_x 0.1je^{-83.9y}e^{-j300\pi y}e^{-j\frac{\pi}{3}}\text{A/m}$$

故电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(y)=\eta_c\boldsymbol{H}(y)\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 41.56e^{j0.028\pi}\times0.1e^{-83.9y}\times e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\boldsymbol{e}_z 4.156e^{-83.9y}e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}-0.028\pi+\frac{\pi}{2})}\ \text{V/m}$$

则

$$\boldsymbol{E}(y,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(y)e^{j\omega t}]$$

$$=\boldsymbol{e}_z 4.156e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3}+0.028\pi)\text{V/m}$$

**5.25** 在相对介电常数 $\varepsilon_r=2.5$、损耗角正切值为 $10^{-2}$ 的非磁性媒质中，频率为 3GHz、$\boldsymbol{e}_y$ 方向极化的均匀平面波沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向传播。

（1）求波的振幅衰减一半时，传播的距离；

（2）求媒质的本征阻抗、波的波长和相速；

（3）设在 $x=0$ 处的 $\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 50\sin(6\pi\times10^9 t+\frac{\pi}{3})$，写出 $\boldsymbol{H}(x,t)$ 的表达式。

**解** （1）由 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\dfrac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma}{2\pi\times3\times10^9\times2.5\times10^{-9}/(36\pi)}=\dfrac{18\sigma}{3\times2.5}=10^{-2}$

得

$$\sigma=\frac{3\times2.5\times10^{-2}}{18}=0.417\times10^{-2}\ \text{S/m}$$

而

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-2}<<1$$

该媒质在 $f$=3GHz 时可视为弱导电媒质，故衰减常数为

$$\alpha\approx\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{0.417\times10^{-2}}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}=0.497\ \text{Np/m}$$

由 $e^{-\alpha x}=\dfrac{1}{2}$，得波的振幅衰减一半时，传播的距离

$$x=\frac{1}{\alpha}\ln2=\frac{1}{0.497}\ln2=1.395\,\text{m}$$

（2）对于弱导电媒质，本征阻抗为

$$\eta_c\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(1+j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon})=\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}(1+j\frac{10^{-2}}{2})=238.44(1+j0.005)=$$

$$238.44e^{j0.286^\circ}=238.44e^{j0.0016\pi}\Omega$$

而相位常数

$$\beta\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{2.5\mu_0\varepsilon_0}=2\pi\times3\times10^9\times\frac{\sqrt{2.5}}{3\times10^8}=31.6\pi\ \text{rad/m}$$

故波长和相速分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{31.6\pi}=0.063\text{m}$$

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times3\times10^9}{31.6\pi}=1.89\times10^8\ \text{m/s}$$

（3）在 $x$=0 处，

$$\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 50\sin(6\pi\times10^9 t+\frac{\pi}{3})\,\mathrm{V/m}$$

故

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 50e^{-0.497x}sin(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3})V/m$$

则

$$\boldsymbol{H}(x)=\frac{1}{|\eta_c|}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}(x)e^{-j\phi}=$$

$$\frac{1}{238.44}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 50e^{-0.497x}e^{-j31.6\pi x}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j0.0016\pi}=$$

$$\boldsymbol{e}_z 0.21e^{-0.497x}e^{-j31.6\pi x}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j0.0016\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{A/m}$$

故

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(x)e^{j\omega t}]=$$

$$\boldsymbol{e}_z 0.21e^{-0.497x}\sin(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}-0.0016\pi)\,\mathrm{A/m}$$

**5.27** 频率为 150MHz 的均匀平面波在损耗媒质中传播，已知 $\varepsilon_r=1.4$、$\mu_r=1$ 及 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-4}$，问电磁波在该媒质中传播几米后，波的相位改变 $90^{\circ}$？

**解** 因 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-4}<<1$，为弱导电媒质。故

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r}=$$

$$2\pi\times150\times10^6\times\frac{\sqrt{1.4}}{3\times10^8}=1.18\pi\quad\mathrm{rad/m}$$

由相移量

$$\beta z=1.18\pi z=\frac{\pi}{2}$$

故得到

$$z=0.424\ \mathrm{m}$$