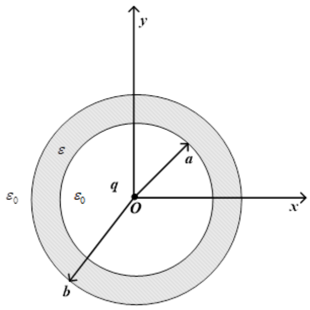
（1）如右图所示，介电常数为 ε 的介质球壳的内径为 ***a***，外径为 ***b***，球心为坐标原点。有一带电量为 ***q*** 的点电荷位于该球心，计算介质球壳的极化强度矢量和极化体、面电荷密度。



解：设介质中的电位移矢量为 D，由高斯定理可得

$$4\pi r^2 D = q \qquad a < r < b$$

求得

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}_r \frac{q}{4\pi r^2} \qquad a < r < b$$

介质中极化强度矢量 P 与电位移矢量 D 的关系为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{\varepsilon_0 E} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0}}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D}$$

求得

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0}}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}_r \frac{q(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0})}{4\pi \boldsymbol{\varepsilon} r^2} \qquad a < r < b$$

介质中的极化电荷体密度为

$$\rho_{\boldsymbol{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$$

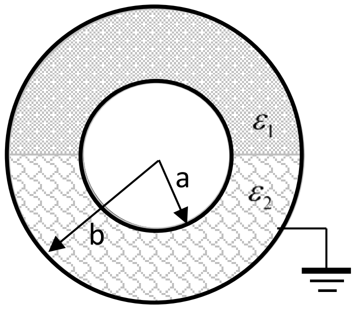
在 r=a 的分别面上极化电荷面密度为

$$\rho_{\boldsymbol{sp}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{e}_r \frac{q(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0})}{4\pi \boldsymbol{\varepsilon} r^2} \cdot (-\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}})|_{r=a} = \frac{q(\boldsymbol{\varepsilon_0} - \boldsymbol{\varepsilon})}{4\pi \boldsymbol{\varepsilon} a^2}$$

在 r=b 的分别面上极化电荷面密度为

$$\rho_{\boldsymbol{sp}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{e}_r \frac{q(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0})}{4\pi \boldsymbol{\varepsilon} r^2} \cdot (\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}})|_{r=b} = \frac{q(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0})}{4\pi \boldsymbol{\varepsilon} b^2}$$

（2）球形电容器，内外导体半径分别为 a 和 b。其间填充介电常数分别为 ε_1 、ε_2 电介质。设内导体带电荷量为 q，外球接地，如右图所示，求两球壳间的电场强度矢量与电位移矢量的分布。



解：由高斯定理有

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = q$$

应用两种介质分界面上电场的边界条件 $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$

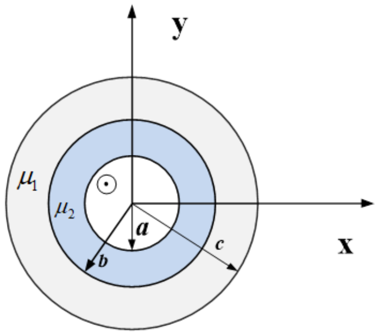
以及本构关系条件 $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1$、$\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2$， 可以得到两球壳间的电场强度为

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{\varepsilon_1 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2 = \vec{e}_r \frac{\varepsilon_2 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

（3）如右图所示，无线长同轴线的内导体是半径为 a 的圆柱，外导体是半径为 c 的薄圆柱面，厚度可忽略不计，内外导体间填充有磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种不同的磁介质，分界面是半径为 b 的圆柱面。设同轴线中通过的电流为 I，试求：$\rho=b$ 的分界面上磁化电流面密度。



解：设磁导率为 μ_1 和 μ_2 的磁介质中磁场强度、磁感应强度分别为 $\vec{H}_1$、$\vec{B}_1$、$\vec{H}_2$、$\vec{B}_2$，由安培环路定理可得

$$2\pi\rho H_1 = I \qquad b<\rho<c$$

$$2\pi\rho H_2 = I \qquad a<\rho<b$$

求得

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \qquad b<\rho<c$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \qquad a<\rho<b$$

μ_1 和 μ_2 磁介质中的磁化强度 $\vec{M}_1$、$\vec{M}_2$ 分别为

$$\vec{M}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1 = \frac{\mu_1\vec{H}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1 = \frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \quad b<\rho<c$$

$$\vec{M}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{H}_2 = \frac{\mu_2\vec{H}_2}{\mu_0} - \vec{H}_2 = \frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \quad a<\rho<b$$

在 ρ=b 的分别面上磁化电流面密度为

$$\vec{J}_{SM}\Big|_{\rho=b}=\left(\vec{M}_1\times\vec{e}_{n1}+\vec{M}_2\times\vec{e}_{n2}\right)\Big|_{\rho=b}$$

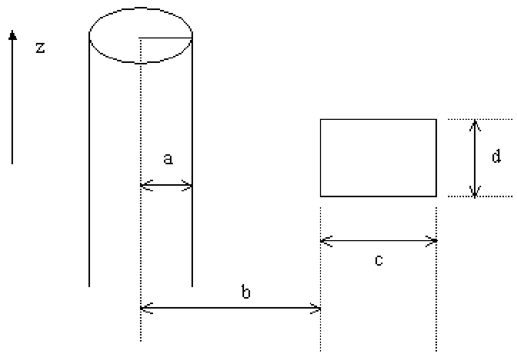
$$=\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi\times\left(-\vec{e}_\rho\right)+\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi\times\vec{e}_\rho\right)\Bigg|_{\rho=b}$$

$$=\vec{e}_z\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_0}\frac{I}{2\pi b}$$

（4）如右图所示，半径为 *a* 的无限长圆柱，其电流密度分布为 $\vec{J}_z=\vec{a}_z rJ_0(r\le a)$**，在圆柱附近有一与之平行的矩形回路。求：**

（*a*）圆柱内、外的磁感应 $\vec{B}$**；**

（*b*）矩形回路的磁通。



解：（*a*）当 $r\le a$ 时，在无限长圆柱内取一半径为 r 的圆，该闭合回路所包围的电流为：

$$I=\int_0^r J_z 2\pi r dr=\int_0^r J_0 2\pi r^2 dr=\frac{2\pi r^3 J_0}{3}$$

根据安培环路定律，有：

$$\oint_c H\cdot 2\pi r=I=\frac{2\pi r^3 J_0}{3}\text{；因此 } B_\varphi=\mu_0 H_\varphi=\frac{r^2\mu_0 J_0}{3}$$

当 $r>a$ 时，在无限长圆柱外取一半径为 r 的圆，该闭合回路所包围的电流为：

$$I=\int_0^a J_z 2\pi r dr=\int_0^a J_0 2\pi r^2 dr=\frac{2\pi a^3 J_0}{3}$$

根据安培环路定律，有

$$\oint_c H\cdot 2\pi r = I = \frac{2\pi a^3 J_0}{3}$$；因此 $B_\varphi = \mu_0 H_\varphi = \dfrac{a^3\mu_0 J_0}{3r}$

综合以上结果有

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{r^2\mu_0 J_0}{3}\vec{e}_\varphi & r \le a \\ \dfrac{a^3\mu_0 J_0}{3r}\vec{e}_\varphi & r > a \end{cases}$$

（b）矩形回路的磁通

$$\Phi = \int_S B_\phi dS = \int_b^{b+c} B_\phi d dr = \int_b^{b+c}\frac{a^3 d\mu_0 J_0}{3r}dr = \frac{a^3 d\mu_0 J_0}{3}\ln\frac{b+c}{b}$$

课堂练习：

1. **半径为 a 的导线（沿 z 轴放置）中电流密度分布为 $\vec{J} = \vec{e}_z J_0\rho$，则该导线中的电流为？**

解： $I = \iint\limits_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ **,其中的积分面为导线横截面**

$$I = \iint\limits_S \vec{e}_z J_0\rho\cdot\vec{e}_z\rho d\varphi d\rho = J_0\cdot 2\pi\int_0^a \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{2\pi J_0}{3}\rho^3\Big|_0^a = \frac{2\pi J_0 a^3}{3}$$

2. **试确定磁场表达式 $\vec{B} = 3x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - cz\vec{e}_z$ 中，常数 c 的值。**

解：因为表达式为磁场，因此是无散场，满足 $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

所以 $\nabla\cdot\vec{B}=3+2-c=0$

因此，***c*=5**。

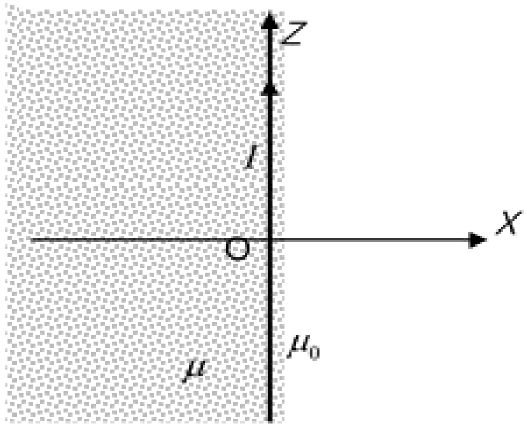
3、电导率为$\sigma=10^8(S/m)$的直导线中通过恒定电流 **10*A***，若导线的直径为 **2*mm***，试求导线内的电场强度 $\vec{E}$ 的大小。

解：由于$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，有$E=\dfrac{J}{\sigma}$

又有$J=\dfrac{I}{S}=\dfrac{10}{\pi10^{-6}}=\dfrac{1}{\pi}10^7$

因此$E=\dfrac{J}{\sigma}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{10^7}{10^8}=\dfrac{1}{10\pi}(V/m)$

4、如下图所示，***x*<0** 的半空间充满磁导率为μ的磁介质，***x*>0** 的半空间为空气。有一无限长直细导线置于 *z* 轴上，导线中的电流为 ***I***。求电流 ***I*** 产生的磁感应强度。



解：设磁导率分别为μ_0和μ的区域中磁场强度、磁感应强度分别为$\vec{H}_0$、$\vec{B}_0$、$\vec{H}_1$、$\vec{B}_1$，其方向均为$\vec{e}_\varphi$方向。由安培环路定律可得

$$\pi r H_0 + \pi r H_1 = I$$

再根据介质分别面的边界条件：$B_0 = B_1 = B$

以及介质的本构关系：$B_0 = \mu_0 H_0, B_1 = \mu H_1$

可以得到$\pi r \dfrac{B}{\mu_0} + \pi r \dfrac{B}{\mu} = I$

因此得到两区域的磁感应强度均为$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \dfrac{\mu_0 \mu I}{\pi r\left(\mu_0 + \mu\right)}$。