练习一

一、填空题

（1）函数 $f(X)=e^{x_1x_2}\sin x_2$ 在 $X=(0,\pi/2)^T$ 处的所有下降方向为________，最速下降方向为________， X 在该方向上的方向导数为________.

（2）设 A,B 为凸集，则在 $A\cup B, A\cap B, A+B$ 中，不是凸集的是________.

（3） $D=\{X\in R^n \mid f(X)>1\}$ 是否为凸集________，这里 $f(X)$ 为凹函数.

（4） $f(X)=\alpha x_1(x_1+2x_2)-\beta x_2^2$ 是凸函数的充要条件是__________.

（5）线性规划 $\min f(X)$; $s.t.\, 2x_1-x_2=1;\ x_1+x_3=1;\ x_i\geq 0,\ i=1\sim 3.$ 的可行区域的一个顶点为________.

二、求下面函数的梯度和 Hesse 矩阵

（1） $f(X)=\dfrac{1}{2}X^TAX+b^TX$.

（2） $f(X)=\left\|X\right\|_2$.

(3) $f(X)=\ln(g(X))$，这里， $g(X):R^n\to R^+$ 二次连续可微.

三、判定下面函数是否为凸函数

（1） $f(X)=-x_1^2+2x_1x_2-5x_2^2+10x_1-10x_2$

（2） $f(X)=x_1e^{-(x_1+x_2)}$；

（3） $f(X)=\ln(e^{x_1}+\ldots+e^{x_n})$；

（4） $f(X)=\left\|AX-b\right\|_2^2$

（5） $f(x)=\int_{-\infty}^{x}F(y)\,dy$，这里 $F(y)$ 是连续型随机变量 Y 的分布函数

（6） $f(x)=\max\{x^2,3x,e^{-x}\}$

（7） $f(X)=g(h(X))$，这里， $h(X):R^n\to R^1$， $g(x):R^1\to R^1$ 均为凸函数.

四、利用最优性条件求下面函数的最优解

（1） $f(X)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)-\dfrac{1}{3}\right)^2$；

（2） $f(X)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1^3+x_1^4$

五、考虑 $\min f(X)=x_1^2+2x_2^2+4x_1+4x_2$，验证由最速下降法（负梯度法）得到的迭代点列为 $X^k=\left(\dfrac{2}{3^k}-2,\ (-\dfrac{1}{3})^k-1\right)^T$，这里， $X^0=(0,0)^T$.

zhangxiaowei@uestc.edu.cn
2022.9.28