电子科技大学 2017-2018 学年第 1 学期期中考试 A 卷

考试科目：概率论与数理统计 考试形式：闭卷 考试日期：2017 年 11 月___日

1、请阐述下列概念之间的差异，并举例说明。（10 分，每小题 5 分）

（1）事件 $A_1, A_2, \cdots A_n \ (n \geq 3)$ 两两独立和相互独立；（5 分）

（2）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数和边缘分布函数；（5 分）

2、（15 分）某工厂有三条生产同一产品的生产线Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，所生产的产品分别占全部产品的 50%，30%，20%，并且它们的次品率分别为 5%，3%，2%。今从全部产品中任取一件，问：（1）它是次品的概率为多少？（2）若发现它是次品，它来源于生产线 A 的概率是多少？

3、（15 分）设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其对应的概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，试判断以下哪个函数是概率密度函数，并说明理由。（1）$2f_1(x)-f_2(x), x \in R^2$；

（2）$2f_1(x)f_1(y), -\infty < x \leq y < \infty$；　（3）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x), x \in R$

4、（10 分）某社区有两千人共同使用服务大厅的 2 个服务窗口，在一个固定时间段内，每人需要使用该服务器的概率为千分之一。问：在此段时间内，服务大厅排队等待的人数不少于 6 个人的概率？（注：正在接受服务的人不计入排队等待，$\sum_{k\geq 6}^{2000}\frac{2^k}{k!}e^{-2} \approx 1.66\%$，$\sum_{k\geq 8}^{2000}\frac{2^k}{k!}e^{-2} \approx 0.11\%$）

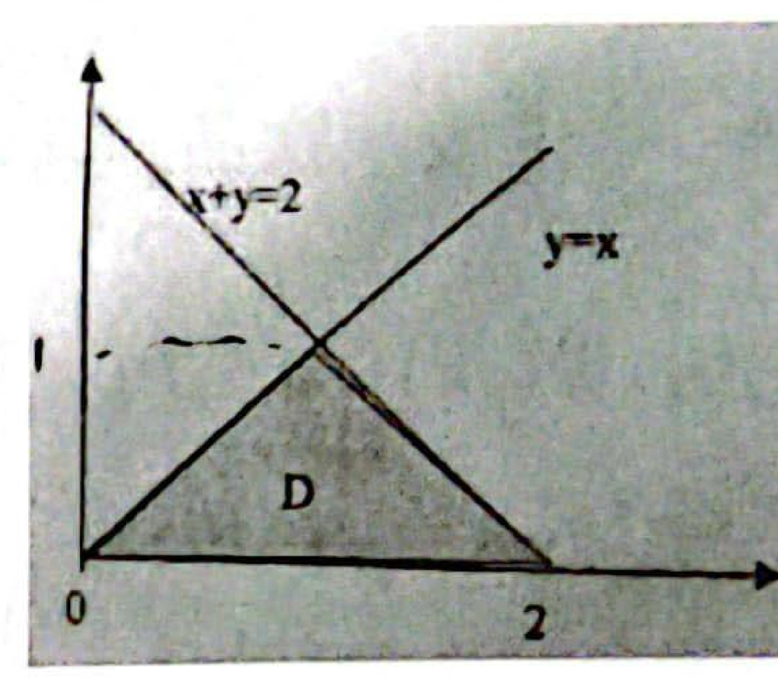
5、（15 分）设电子管寿命 x 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x>100,\\ 0 & ,x\le 100,\end{cases}$ ，若一架收音机上装有三个这种管子，求（1）使用的最初 150 小时内，至少有两个电子管被烧坏的概率；（2）在使用的最初 150 个小时内烧坏的电子管数 Y 的分布列；（3）Y 的分布函数。

6、（20 分）二维随机变量 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，其中 $D=\{(x,y): y\ge 0, y\le x\le 2-y\}$，试求：

（1）随机变量 x 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$；

（2）条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；

（3）条件概率 $P\{0<Y<0.6|x=0.5\}$



7　（15 分）某电子元件的寿命 T（单位：小时）服从参数为 $\lambda=0.1$ 的指数分布。现由于生产工艺的改造，使得该电子元件的寿命在原来的基础上改变了 w 小时。假设 w 服从标准正态分布，且与 T 相互独立。求：受生产工艺改造后的电子元件的寿命不小于 10 小时的概率？

电子科技大学 2017-2018 学年第 1 学期期中考试 A 卷参考答案

1、解：（1）相互独立强于两两独立。两两独立通常不能推出事件 $A_1, A_2, \cdots A_n (n \geq 3)$ 的相互独立。

例：同时掷两个均匀的正四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码 1，2，3，4。

$A=\{$甲四面体向下的一面是偶数$\}$，$B=\{$乙四面体向下的一面是奇数$\}$，

$C=\{$两个四面体向下的一面同为奇数或偶数$\}$；

A、B、C 中任意两个都是相互独立的，但 A、B、C 不相互独立。

（2）由二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数可确定随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数，但边缘分布函数通常不能确定联合分布函数。

例：二维正态分布 $(X,Y) \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho\right), \rho \neq 0$。但若随机变量 X 和 Y 相互独立，则联合分布函数等于边缘分布函数的乘积。

2、解：令 B 表示次品，A_i，$i=1,2,3$ 表示产品来源于第 i 条生产线。

由题知：$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.2;$ 且 $P(B|A_1)=0.05, P(B|A_2)=0.03, P(B|A_3)=0.02$，

（1）由全概率公式，$P(B)=\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)$=0.5*0.05+0.3*0.03+0.2*0.02=0.038

（2）由贝叶斯公式 $P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)}=\dfrac{0.025}{0.038}\approx 65.79\%$

3、解：（1）不一定为概率密度函数，因其可能不满足非负性。

（2）是概率密度函数，满足非负归一性。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} 2f_1(x)f_1(y)dx\right]dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 2F_1(y)f_1(y)dy=F^2{}_1(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$$

（3）是概率密度函数，满足非负归一性。$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right)dx=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$。

4、解：假设两千人独立地使用服务大厅，即相当于做了两千重贝努利实验。题目所求即为两千重贝努利实验中，需要使用服务大厅的人数分布。令 x 表示该固定时间段内，需要使用服务大厅的人数，则 x 服务二项分布，即 $X \sim B(2000, 0.001)$，由于有 2 个服务窗口，当大厅中有不少于 6 个人排队等待，说明服务大厅中至少有 8 人，所求概率为 $\sum_{k\geq 8}^{2000} C_{2000}^{k}\left(10^{-3}\right)^k\left(1-10^{-3}\right)^{2000-k}$。根据泊松极限定理，可认为 x 近似服从参数为 2000*0.001=2 的泊松分布，则有 $\sum_{k\geq 8}^{2000} C_{2000}^{k}\left(10^{-3}\right)^k\left(1-10^{-3}\right)^{2000-k} \approx \sum_{k\geq 8}^{2000}\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}\approx 0.11\%$

5、解：Y 为在使用的最初 150 小时内烧坏的电子管数，$Y \sim B(3,p)$，其中 $P=P(X\leq 150)=\int_{100}^{150}\dfrac{100}{x^2}dx=\dfrac{1}{3}$，

（1）所求概率为$P(Y\geq 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$;

（2）Y 的分布列为$P(Y=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$ $,k=0,1,2,3,$ 即$\begin{array}{c|cccc} Y & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{array}$.

（3）Y 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \frac{8}{27}, & 0\leq x<1\\ \frac{20}{27}, & 1\leq x<2\\ \frac{26}{27}, & 2\leq x<3\\ 1\ , & x\geq 3\end{cases}$

6、解：由题目条件可得二维随机变量(X,Y)的联合概率函数为$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$，

（1）$f_x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy=\begin{cases}\int_0^x 1dy & ,0\leq x\leq 1\\ \int_0^{2-x} 1dy & ,1\leq x\leq 2\\ 0 & ,\ x<0\ or\ x>2\end{cases}=\begin{cases}x & ,0\leq x\leq 1\\ 2-x & ,1\leq x\leq 2\\ 0 & ,\ x<0\ or\ x>2\end{cases}$

（2）当 x<0 或 x>2 时，不存在条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；

当$0\leq x\leq 1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\leq y\leq x;\\ 0, & y<0\ or\ y>x.\end{cases}$，当 1<x<2 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x}, & 0\leq y\leq 2-x\\ 0, & y<0\ or\ y>2-x\end{cases}$

（3）$P\{0<Y<0.6|x=0.5\}=\int_0^{0.6} f_{Y|X}(y|x=0.5)dy=\int_0^{0.5}\frac{1}{0.5}dy=1$。

7、解：受生产工艺改造的影响，改造后的电子元件的寿命为 T+W。题求$P\{T+W>10\}$.由于 w 与 T

相互独立，可知(W,T)的联合概率密度函数为$f_{(W,T)}(w,t)=\begin{cases}\frac{0.1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2-0.1t}, & -\infty<w<\infty, t>0;\\ 0, & otherwise.\end{cases}$,

$$P\{T+W>10\}=P\{T>10-W,W>10\}+P\{T>10-W,W\leq 10\}=P\{W>10\}+P\{T+W>10,W\leq 10\},$$

其中$P\{T+W>10,W\leq 10\}=\int_{-\infty}^{10}\left(\int_{10-w}^{+\infty}\frac{0.1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2-0.1t}dt\right)dw=\int_{-\infty}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2-1+0.1w}dw$

$$=\int_{-\infty}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(w-0.1)^2-0.99}dw=\int_{-\infty}^{9.9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2-0.99}du=e^{-0.99}\Phi(9.9)$$

所以，$P\{T+W>10\}=1-\Phi(10)+e^{-0.99}\Phi(9.9)\approx e^{-1}$。