第二次作业

讨论一

定义$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^{\ 2} + \ldots x_n^{\ 2}}$、$\|X\|_A = \sqrt{X^T A X}$，考虑$\min f\left(X\right) = \frac{1}{2} X^T A X + b^T X + c$，$A > 0$，$\lambda_1, \lambda_n$ 分别表示 A 的最小最大特征根（值）。以 X^k 为起点，沿着 $p^k = -g^k \left(g^k \overset{\Delta}{=} \nabla f\left(X^k\right) \right)$精确一维搜索后，得$X^{k+1}$，即$X^{k+1} = X^k + t_k p^k$。

① 证明：$t_k = \frac{\|g^k\|_2^2}{\|g^k\|_A^2}$；

② 证明：$\frac{\|X^{k+1} - X^*\|_A^2}{\|X^k - X^*\|_A^2} = 1 - \frac{\|g^k\|_2^4}{\|g^k\|_A^2 \cdot \|g^k\|_{A^{-1}}^2}$；

③ 证明：利用$\frac{\|g^k\|_2^4}{\|g^k\|_A^2 \cdot \|g^k\|_{A^{-1}}^2} \geq \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{\left(\lambda_1 + \lambda_n\right)^2}$（Kantoroich 不等式）；

说明：$\frac{\|X^{k+1} - X^*\|_A}{\|X^k - X^*\|_A} \leq \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$；$\|X^{k+1} - X^*\|_A^2 \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^{2^{k+1}} \cdot \|X^0 - X^*\|_A^2$，这里$X^*$为$f\left(X\right)$最优解，$X^0$为初始迭代点。

并由此说明最速下降法只有不低于$\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$线性收敛速度，若$f\left(x\right)$的等高线为同心圆族时，算法具有超线性收敛速度。

④ 说明$\|\cdot\|_A$与$\|\cdot\|_2$等价性，即存在$\alpha > 0, \beta > 0$，对$\forall X \in R^n$，都有$\alpha \|X\|_2 \leq \|X\|_A \leq \beta \|X\|_2$

讨论二

Fibonacci 法

若可以利用的试探点为$n+1$个，则搜索结束后收敛：

$$\min\ \beta_1\,\beta_2\ldots\beta_k\ldots\beta_n$$

$$s.t.\quad \beta_{k+1}=\frac{1-\beta_k}{\beta_k}$$

$$\frac{1}{2}\le\beta_k<1$$

$$k=1,2,\ldots n$$

针对此优化问题：

① 当n=2时

$$\min\quad \beta_1\,\beta_2$$

$$s.t.\quad \beta_2=\frac{1-\beta_1}{\beta_1}$$

$$\frac{1}{2}\le\beta_i<1,\quad i=1,2$$

可转化为

$$\min\ \ 1-\beta_1\ \text{，或}\min\ \frac{\beta_2}{1+\beta_2}$$

$$s.t.\quad \frac{1}{2}\le\beta_i<1,\quad i=1,2$$

$$\beta_2=\frac{1-\beta_1}{\beta_1}$$

显然 $\beta_2=\frac{1}{2}$，　$\beta_1=\frac{2}{3}$

② 当n=3时，目标函数可转换成$\frac{-2\beta_1^{\,2}+3\beta_1}{1-\beta_1}$或$\frac{\beta_3}{\beta_3+2}$

易得 $\beta_1=\frac{3}{5}$，$\beta_2=\frac{2}{3}$，$\beta_3=\frac{1}{2}$

③ 证明 $\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_k\ldots\beta_n=\frac{\beta_n}{L_{n-1}+L_{n-2}\beta_n}$

这里 L_n 为 *Fibonacci* 数列的第 n 项，即 L_1=1，L_2=2，$L_3=3$，L_4=5，L_5=8…

进而说明 $\beta_k=\frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+2}}$ 时，$1\le k\le n$，目标达到最小，即使得区间收缩得最短

注意：1. 请大家按习题顺序排序，标清楚每个题的题号；作业写明“班内小号+姓名”，如“B001 张某某”；

2.第二次作业提交时间为期末考试前，具体提交方式后面通知。

请大家按时提交作业，谢谢！