1.3　习题参考答案及提示

1．A，B，C 是集合，若 A∈B 且 B∈C，可能有 A∈C 吗？常有 A∈C 吗？举例说明。

解 有可能有 A∈C，

假设 A={a}，B={{a}}，C={{a}，{{a}}}，则显然有 A∈B 且 B∈C，有 A∈C。

但不常有 A∈C。

假设 A={a}，B={{a}}，C={{{a}}}，则有 A∈B 且 B∈C，但 A∉C。

2．设 S={N, Q}，若 2∈N，N∈S，则 2∈S 是否正确？

解　不正确。

3．用列举法写出下列集合。

（1）{x|(x∈Z)并且(2＜x＜10)}。

（2）{x|x 是 People's Republic of China 中的英文字母}。

（3）所有正整数立方的聚集。

（4）所有 7 的正倍数的聚集。

解　（1）设 A={x|(x Z)并且(2＜x＜10)}，则 A={3，4，5，6，7，8，9}；

（2）设 B={x|x 是 People's Republic of China 中的英文字母}，则

B= ={a, b, c, e, f, h, i, l, n, o, p, r, s, u}；

（3）设 C 是所有正整数的立方的聚集，则

C={1, 8, 27, 64, …, n^3, …}；

（4）设 D 是所有 7 的正倍数的聚集，则 D={7，14，21，28，…，7k，…}；

4．用描述法写出下列集合。

（1）小于 10000 的非负实数的聚集。

（2）偶数集。

（3）年龄大于 18 岁的中国公民。

（4）直角坐标系中，单位圆(不包括单位圆周)的点集。

解　（1）设 A 是小于 10000 的非负实数的聚集，则

A={x|(x∈Z)并且(0≤x≤1000)}；

（2）设 E 为偶数集，则 E={x|(k∈Z)并且(x=2k)}；

（3）C 为年龄大于 18 岁的中国公民，则 C={x|(x 的年龄大于 18 岁且 x 是中国公民}；

（4）设 D 是直角坐标系中单位元（不包括单位圆周）的点集，则

D={<x, y>|(x, y∈R)并且($x^2+y^2<1$)}。

5．找出下列集合之间的关系。

（1）A = {x|(x∈Z)并且(1＜x＜5)}；　　（2）B = {2，3}；

（3）C = {x|$x^2-5x+6=0$}；　　（4）D = {{2，3}}；

（5）E = {2}；　　（6）F = {x|(x = 2)或(x = 3)或(x = 4)或(x = 5)}。

解　因为 A = {2, 3, 4}，B = {2, 3}，C = {2, 3}，D = {{2, 3}}，E = {2}，F = {2, 3, 4, 5}，所以有 E⊂B⊂A⊂F，B∈D，B = C。

6．简要说明{a}与{{a}}的区别，并分别列出它们的元素与子集。

解　{a}是以 a 为元素的集合，子集有 Φ，{a}；

{{a}}是以{a}为元素的集合，子集有 Φ，{{a}}。

7．确定下列结论是否正确。

（1）$\phi\subseteq\phi$　　（2）$\phi\in\phi$　　（3）$\phi\subseteq\{\phi\}$

（4）$\phi\in\{\phi\}$　　（5）$\{\phi\}\subseteq\{\phi, \{\phi\}\}$　　（6）$\{\phi\}\in\{\phi, \{\phi\}\}$

（7）$\{\{\phi\}\}\subseteq\{\phi,\{\phi\}\}$　（8）$\{\{\phi\}\}\in\{\phi,\{\phi\}\}$　（9）$\{a, b\}\subseteq\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

（10）$\{a, b\}\in\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$　（11）$\{a, b\}\subseteq\{a, b, \{a, b\}\}$　（12）$\{a, b\}\in\{a, b, \{a, b\}\}$

解 正确的为：(1)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(9)，(11)，(12)；

错误的为：(2)，(8)，(10)。

8．设 A，B，C 是集合，证明或反驳下列断言。

（1）$A\in B$ 并且 $B\subseteq C\Rightarrow A\in C$。

（2）$A\in B$ 并且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$。

（3）$A\in B$ 并且 $B\not\in C\Rightarrow A\not\in C$。

（4）$A\not\in B$ 并且 $B\subseteq C\Rightarrow A\not\in C$。

解 （1）由 $B\subseteq C$ 知：对任意 $x\in B$，有 $x\in C$，因此由 $A\in B$，就有 $A\in C$。故结论一定成立。

（2）若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{\{a\},a\}$，则有 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$ 能推出 $A\subseteq C$；但是，若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{\{a\},b\}$，则有 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$ 能却没有 $A\subseteq C$。故结论不一定成立。

（3）若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C= \{b,c\}$，则有 $A\in B$ 并且 $B\not\in C$ 能推出 $A\not\in C$；但是，若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C= \{\{a\},a\}$，则有 $A\in B$ 并且 $B\not\in C$，此时 $A\in C$。故结论不一定成立。

（4）若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{b\}, b\}$，则有 $A\not\in B$ 并且 $B\subseteq C$ 能推出 $A\not\in C$；但是，若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{a\}, b\}$，则有 $A\not\in B$ 并且 $B\subseteq C$，此时 $A\in C$。故结论不一定成立。

9．求下列集合的基数和每个集合的幂集。

（1）$\{1, 2, 3\}$　（2）$\{1, \{2, 3\}\}$　（3）$\{\{1, \{2, 3\}\}\}$

（4）$\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 2, 1\}\}$　（5）$\{\{\phi, 2\}, \{2\}\}$　（6）$\{\phi, \{a\}\}$

解（1）基数为 3，幂集为：$\{\Phi,\{1\},\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$；

（2）基数为 3，幂集为：$\{\Phi,\{1\},\{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2,\{1, 2\}\}$；

（3）基数为 2，幂集为：$\{\Phi, \{\{1, 2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}\}$。

（4）基数为 1，幂集为：$\{\Phi, \{\{1, 2\}\}\}$；

（5）基数为 2，幂集为：$\{\Phi, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$；

（6）基数为 3，幂集为：$\{\Phi, \{\Phi\}, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\Phi, a\}, \{\Phi, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\Phi, a, \{b\}\}\}$。

10．设 $A=\phi$，$B=\{a\}$，求 $P(A)$，$P(P(A))$，$P(B)$，$P(P(P(B)))$。

解 $P(A)=\{\phi\}$，

$P(P(A))=\{\phi，\{\phi\}\}$，

$P(P(P(A)))=\{\phi，\{\phi\}，\{\{\phi\}\}，\{\phi，\{\phi\}\}\}$。

$P(B)=\{\phi，\{a\}\}$，

$P(P(B))=\{\phi，\{\phi\}，\{\{a\}\}，\{\phi，\{a\}\}\}$，

$P(P(P(B)))=\{\phi，\{\phi\}，\{\{\phi\}\}，\{\{\{a\}\}\}，\{\{\phi，\{a\}\}\}，\{\phi，\{\phi\}\}，\{\phi，\{\{a\}\}\}，\{\phi，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\{\phi\}，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\{\{a\}\}，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\{\phi\}，\{\{\phi\}\}\}，\{\phi，\{\phi\}，\{\{a\}\}\}，\{\phi，\{\{a\}\}，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\{\phi\}，\{\{a\}\}，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\phi，\{\phi\}，\{\phi，\{a\}\}\}，\{\phi，\{\phi\}，\{\{a\}\}，\{\phi，\{a\}\}\}$。

11．设 A，B 为任意集合，证：

（1）$A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$；

（2）$P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$；

（3）$P(A) = P(B)\Leftrightarrow A = B$。

证明 （1）对$\forall x\in P(A)$，根据幂集的定义，有 $x\subseteq A$。又因为 $A\subseteq B$，所以 $x\subseteq B$，即 $x\in P(B)$。从而 $P(A)\subseteq P(B)$；

（2）对$\forall x\in A$，有$\{x\}\in P(A)$。又因为 $P(A)\subseteq P(B)$，所以$\{x\}\in P(B)$，即 $x\in B$。从而 $A\subseteq B$；

（3）"$\Rightarrow$"

因为 $P(A)=P(B)$，所以有 $P(A)\subseteq P(B)$ 且 $P(B)\subseteq P(A)$；由（2）知有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，从而有 $A=B$。

“$\Leftarrow$”

因为 $A=B$，所以有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；由(1)知 $P(A)\subseteq P(B)$ 且 $P(B)\subseteq P(A)$，从而有 $P(A)=P(B)$。

12．设 $A=\{x|x$ 是 computer 中的字母$\}$，$B=\{x|x$ 是 computing 中的字母$\}$。求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{c, o, m, p, u, t, e, r\}$，$B=\{c, o, m, p, u, t, i, n, g\}$，则

$A\cup B=\{c, o, m, p, u, t, e, r, i, n, g\}$，$A\cap B=\{c, o, m, p, u, t\}$。

13．设全集 $U=\{1，2，3，4，5，6\}$，$A=\{1，4，6\}$，$B=\{1，2，5\}$，$C=\{2，3\}$。确定下面的集合。

（1）$A\cap B^c$　　（2）$(A\cap B)\cup C^c$　　（3）$(A\cup B)^c$

（4）$(B\oplus C)^c$　　（5）$B^c\cup C^c$　　（6）$P(A)\cup P(C)$

解 （1）$A\cap B^c=\{4，6\}$；　　（2）$(A\cap B)\cup C^c=\{1，4，5，6\}$；

（3）$(A\cup B)^c=\{3\}$；　　（4）$(B\oplus C)^c=\{1，3，5\}$；

（5）$B^c\cup C^c=\{1，3，4，5，6\}$；　（6）$P(A)\cup P(C)=\{\Phi，\{1\}\}$。

14．设全集 $U=\{1，2，3, \cdots，9\}$，$S_1=\{2，4，8\}$，$S_2=\{1，3，5，7，9\}$，$S_3=\{3，4，5\}$，$S_4=\{3，5\}$,确定在以下条件下 X 与 S_1，S_2，S_3，S_4 的关系。

（1）若 $X-S_3=\phi$。

（2）若 $X\subseteq S_4$ 但 $X\cap S_2=\phi$。

（3）若 $X\subseteq S_1$ 且 $X\not\subseteq S_3$。

（4）若 $X\subseteq S_3$ 且 $X\not\subseteq S_1$。

解 （1）因为 $X-S_3=\Phi$，根据“-”的定义，X 一定是 S_3 的子集；

（2）因为 $X\subseteq S_4$，所以 $X=\Phi$，或者 $3\in X$ 或者 $5\in X$；有因为 $X\cap S_2=\Phi$，这说明 $3\notin X$ 且 $5\notin X$，从而有 $X=\Phi$。因此 X 是 S_1, S_2, S_3 和 S_4 的子集；

（3）因为 $X\subseteq S_1$，所以 $X=\Phi$，或者 $2\in X$ 或者 $4\in X$ 或者 $8\in X$；又因为 $X\not\subseteq S_3$，所以 X 不可能是 Φ 和 $\{4\}$，即 X 可能是 $\{2\}$或$\{8\}$或$\{2,4\}$或$\{2,8\}$或$\{4,8\}$或$\{2, 4, 8\}$，从而 $X\subseteq S_1$。

（4）与（3）类似，X 可能是$\{3\}$或$\{5\}$或$\{3,4\}$或$\{3,5\}$或$\{4,5\}$或$\{3, 4, 5\}$。无论何种情况，$X\subseteq S_3$ 总是成立，若 X 是$\{3\}$或$\{5\}$或$\{3,5\}$时，$X\subseteq S_4$。

15．当 $A\neq\phi$ 时，

（1）若只有 $A\cup B=A\cup C$，是否一定有 $B=C$？

（2）若只有 $A\cap B=A\cap C$，是否一定有 $B=C$？

（3）若有 $A\cup B=A\cup C$ 并且 $A\cap B=A\cap C$，是否一定有 $B=C$？

解 （1）不一定成立。当 $A\supseteq B$，$A\supseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$；

（2）不一定成立。当 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$；

（3）结论成立。因为

$B=B\cup(B\cap A)=B\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)$

$=(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup C=C$。

16．设 A，B，C 是集合，试给出下列结论成立的条件。

（1）$(A-B)\cup(A-C)=A$。

（2）$(A-B)\cup(A-C)=\phi$。

（3）$(A-B)\cap(A-C)=\phi$。

（4）$(A-B)\oplus(A-C)=\phi$。

解 （1）因为$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A\cap\overline{B\cap C}=A-(B\cap C)$，

故当 $A\cap(B\cap C)=\Phi$ 时，$(A-B)\cup(A-C)=A$ 成立；

（2）由（1）知，$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$，所以当 $A\subseteq B\cap C$ 时，$(A-B)\cup(A-C)=\Phi$ 成立；

（3）因为$(A-B)\cap(A-C)=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A\cap\overline{B\cup C}=A-B\cup C$，所以当 $A\subseteq B\cup C$ 时，$(A-B)\cap(A-C)=\Phi$ 成立；

（4）因为 $A\oplus A=\Phi$,所以当 $A-B=A-C$ 时，$(A-B)\oplus(A-C)=\Phi$。

17．画出下列集合的文氏图。

（1）$A^c\cap B^c$　　（2）$(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$　　（3）$A\cap(B^c\cup C)$

解 （1）$\overline{A}\cap\overline{B}$ 的文氏图如图 1.1 中的阴影部分。

（2）$(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$的文氏图如图 1.2 中的阴影部分。

（3）$A\cap(\overline{B}\cup C)$的文氏图如图 1.3 中的阴影部分。

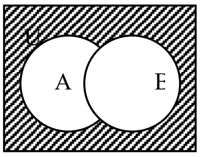


图 1.1

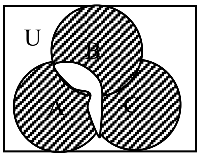


图 1.2

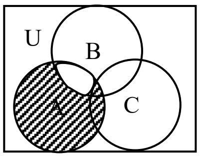


图 1.3

18．试证明下列集合都是可数集合。

（1）$\mathbf{O}^+=\{x\mid x\in\mathbf{N}, x$ 是正奇数$\}$；

（2）$S=\{y\mid y=3x+1，x\in\mathbf{N}\}$。

证明 （1）在 $\mathbf{O}^+$与 $\mathbf{N}$ 之间建立一一对应关系 φ_1：$\mathbf{N}\to\mathbf{O}^+$如下：

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & , \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & \cdots & \end{array}$$

所以 $\mathbf{O}^+$是可数集合。

（2）在 S 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一一对应关系 φ_2：$\mathbf{N}\to\mathbf{S}$ 如下：

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & , \\ 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 3n+1 & \cdots & \end{array}$$

所以 S 是可数集合。

19．试证明集合 $A=\{x\mid 0<x<1\}\cup\{0，1，2，3\}$是不可数集合。

证明 （1）在集合 A 和开区间(0, 1)之间建立如下对应关系：

$$f:\begin{cases}0\to 1/16,\\ 1\to 1/8,\\ 2\to 1/4,\\ 3\to 1/2,\\ \dfrac{1}{2^n}\to\dfrac{1}{2^{n+4}}\left(n=1,2,3,\cdots\right),\\ n\to n\qquad\left(\text{其它}n\in(0,1)\right).\end{cases}$$

显然上述对应关系是一一对应关系。所以集合 A 与(0, 1)是等势的, 即[0, 1]是不可数集合。

20．假设全集 U＝{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, 集合 A、B 和 C 对应的比特串分别为 1111001111 、0101111000 和 1000000001，其中如果元素 i 属于某集合, 则比特串中第 i 个比特为 1, 否则为 0。试计算，

（1）A∪B∩C。　　　（2）A∩（B^c ∪C）。

解　根据 U 中元素的顺序和比特串的定义,设集合 A、B、C 和$\overline{B}$对应的比特串分别为 A_1、B_1、C_1和 D_1 则

(1) 首先计算$(A_1\vee B_1)\wedge C_1$ =1000000001。然后按照比特串的定义还原集合,得(A∪B)∩C={1, 10};

(2) 首先计算 D_1，得 D_1=1010000111。然后计算 $A_1\wedge(D_1\vee C_1)$=1010000111。最后按照比特串的定义还原集合,得 A∩($\overline{B}$ ∪C)={1, 3, 8, 9, 10}。

21．在 20 个大学生中, 有 10 人爱好音乐, 有 8 人爱好美术, 有 6 人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

解　设所有的大学生的集合为 U, 爱好音乐的学生集合为 A, 爱好美术的学生集合为 B, 既爱好音乐和又爱好美术的学生组成的集合为$A\cap B$, 则既不爱好音乐又不爱好美术的学生组成的集合为$\overline{A}\cap\overline{B}$。根据已知有

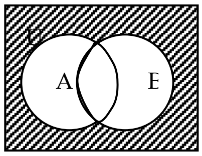


图 1.4

$|U|=20, |A|=10, |B|=8, |A\cap B|=6$

由图 1.4 知, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=10+8-6=12$

从而$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|U|-|A\cup B|=20-12=8$

即, 不爱好音乐又不爱好美术的学生有 8 个。

1.4　应用实践

22．程序设计：给出一个有限集，试计算它的幂集。

（1）　设计思路

输入：一个有限集合

输出：该集合的幂集

实现语音：C 语言

基本思路：由幂集的定义可知，设 A 为任意集合，把 A 的所有不同子集构成的集合叫做 A 的幂集，记作 P(A)或 2^A，即$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$。对于一个 n 元集，它共有 $\mathbf{2^n}$ 个不同的子集，最简单的方法是穷举法，即对集合 A 中的每一个元素，都可以选择放入这个子集或是不放入这个子集.因此通过一个变量来判断，设置一个判断数组，初始值

为 0，然后类似二进制的方式不断加 1，直到数组中所有元素都变为 1，通过循环输出直到判断数组中显示的子集等于原集合。

（2） 伪代码

```
#include<stdio.h>                              （方框内全选即可）
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

int main()
{
    int i, j, k, number;
    printf("请输入集合中的元素个数：");
    scanf("%d", &number);
    int* a;
    a = (int*)malloc(sizeof(int) * number);
    printf("请输入集合中的元素，每个元素以空格隔开:");
    for (i = 0; i < number; i++)
    {
        scanf("%d", &a[i]);
    }
    int* b;
    b = (int*)malloc(sizeof(int) * number);
    for (i = 0; i < number; i++)
```

（3） 参考源代码（链接）

23．应用实践：请设计一个集合计算器，使得其可以计算集合的交、并，差与对称差。

```
    for (j = 0; j < pow(2, number); j++)
    {
        printf("{ ");
        for (i = 0; i < number; i++)
        {
            if (b[i] == 1) printf("%d ", a[i]);//输出判断数组中1的位置所指示的数
        }
        printf("} ");
        for (k = number - 1; k >= 0; k--)
        {
            if (b[k] == 0) {
                b[k] = 1; break; //判断数组每次加一直到数组中所有数都为一
            }
            else b[k] = 0;
        }
```

（1） 设计思路

输入：两个有限集合

输出：这两个集合的交、并、差、补与对称差集合

实现语言：C 语言

基本思路：根据以下定义：

集合的并运算 设 A 和 B 是任意两个集合，则 A∪B＝{x|x∈A 或 x∈B}。

集合的交运算 设 A 和 B 是任意两个集合，则 A∩B＝{x|x∈A 且 x∈B}。

集合的差运算 设 A 和 B 是任意两个集合，则 A−B＝{x|x ∈A 但 x∉B}。

集合的对称差运算 设 A 和 B 是任意两个集合，则 A⊕B＝(A−B)∪(B−A)。

求两集合的交集可以通过遍历的方法，取一个集合中的元素与另一个集合中的所有元素进行对比，若相同则将其放入并集的数组中。

求两集合的并集可以在遍历的过程中将集合 A 中的元素与集合 B 中的元素进行对比，不同的元素首先放入数组，之后再将集合 B 的所有元素填入并集数组中即可。

求两集合的差集可以在遍历的过程中将集合 A 中的元素与集合 B 中的元素进行对比，不同的元素放入一个数组中即可。

求两集合的对称差集即是将两个集合求差集的操作将差数与被差数调换进行两次差集运算后将结果分别赋给两个新的数组，之后再对新的数组进行并集的计算即可。

（2） 伪代码

```
    for (i = 0; i < number1; i++) {            //求两集合的交集
        for (int j = 0; j < number2; j++) {
            if (a[i] == b[j]) {
                jiaoji[t] = a[i];
                t++;
            }}}
    for (i = 0; i < number1; i++) {            //求差集（A-B）
        int isdifferent = 1;
        for (int j = 0; j < number2; j++) {
            if (a[i] == b[j]) {
                isdifferent = 0;
                break;
            }
        }
        if (isdifferent == 1) {
            bingji[u] = a[i];
            chaji_1[u] = a[i];
            u++;
            r++;
            isdifferent = 1;
        }
```

```
    for (i = 0; i < number2; i++) {            //求差集（B-A）
        int isdifferent = 1;
        for (int j = 0; j < number1; j++) {
            if (b[i] == a[j]) {
                isdifferent = 0;
                break;
            }
        }
        if (isdifferent == 1) {
            chaji_2[s] = b[i];
            s++;
            isdifferent = 1;
        }
    }

    for (i = 0; i < number2; i++) {      //差集（A-B）后加上B即为A与B的并集
        bingji[u] = b[i];
        u++;
    }
    for (i = 0; i < r; i++) {                      //将（A-B）与（B-A）两个集合求并即为A与B的对称差集
        duichenchaji[q] = chaji_1[i];
        q++;
    }
    for (i = 0; i < s; i++) {
        duichenchaji[q] = chaji_2[i];
        q++;
    }
```

（3） 参考源代码（链接）

```
#include<stdio.h>                          （方框内全选即可）
#include<stdlib.h>
#include<string.h>
#include<math.h>

int main()
{
    int i, number1, number2;
    printf("请输入集合A中的元素个数：");
    scanf("%d", &number1);
    int* a;
    a = (int*)malloc(sizeof(int) * number1);
```

2.3 习题参考答案及提示

1. 下列语句哪些是命题,哪些不是命题。

（1）别过来。

（2）我们要发扬连续作战的作风，再接再厉，争取更大的胜利。

（3）我正在说谎话。

（4）本句不是命题。

（5）2 是素数当且仅当三角形有三条边。

（6）孔子是我国古代伟大的思想家和教育家。

（7）几点了？

（8）客观规律是不以人们意志为转移的。

（9）4+x=9。

（10）9+5≤10。

（11）中国有四大发明。

（12）现在是早上 8:00。

解 语句(1),(2),(3),(4),(7),(9)不是命题；语句 (5),(6),(8),(10), (11),(12)是命题。

2. 确定下列命题的真值,并指出它是原子命题还是复合命题。

（1）“大李杜”是李白和杜甫的合称。

（2）5不是有理数。

（3）如果 1+2=3,则 4+5=8。

（4）6 是 2 的倍数或是 3 的倍数。

（5）7 是素数当且仅当三角形有四个角。

（6）鲁迅是我国伟大的文学家和思想家。

（7）9+ 6≤14。

（8）18 只能被 1 和它本身整除。

（9）2 是偶数或是奇数。

（10）圆的面积等于半径的平方乘以Π。

（11）可导的实函数都是连续函数。

（12）所有素数都是奇数。

解 命题(1),(4),(6),(9),(10),(11)的真值为“真”，命题(2),(3),(5),(7),(8),(12)的真值为“假”;命题(1), (8),(10), (11),(12)是原子命题,命题(2),(3),(4), (5),(6), (7), (9)是复合命题。

3. 设 P，Q 的真值为 0，R，S 的真值为 1。试求下列命题的真值。

（1）P∨(Q∧R)∨┐S。

（2）((┐P→P∧┐R)↔S)∧Q∨┐P。

（3）(P→Q)∧(┐R∨S)。

（4）┐(P∨Q)→(┐R∨┐S)。

（5）(┐P→S)∧(Q→R)。

（6）(P∧(┐R∨S))↔R。

（7）R∧(┐P→Q)→S。

（8）┐(P∨Q∧R)↔((P∨S)∧Q)。

解 （1）P∨(Q∧R)∨┐S = 0∨(0∧1)∨┐1 = 0∨0∨0=0。

(2) $((\neg P\to P\land\neg R)\leftrightarrow S)\land Q\lor\neg P=((\neg 0\to 0\land\neg 1)\leftrightarrow 1)\land 0\lor\neg 0$

$=((1\to 0\land 0)\leftrightarrow 1)\land 0\lor 1=((1\to 0)\leftrightarrow 1)\land 0\lor 1$

$=(0\leftrightarrow 1)\land 0\lor 1=0\land 0\lor 1=0\lor 1=1$。

(3) $(P\to Q)\land(\neg R\lor S)=(0\to 0)\land(\neg 1\lor 1)=1\land 1=1$。

(4) $\neg(P\lor Q)\to(\neg R\lor\neg S)=\neg(0\lor 0)\to(\neg 1\lor\neg 1)$

$=\neg 0\to(0\lor 0)=1\to 0=0$。

(5) $(\neg P\to S)\land(Q\to R)=(\neg 0\to 1)\land(0\to 1)=(1\to 1)\land 1=1\land 1=1$。

(6) $(P\land(\neg R\lor S))\leftrightarrow R=(0\land(\neg 1\lor 1))\leftrightarrow 1=(0\land(0\lor 1))\leftrightarrow 1$

$=(0\land 1)\leftrightarrow 1=0\leftrightarrow 1=0$。

(7) $R\land(\neg P\to Q)\to S=1\land(\neg 0\to 0)\to 1=1\land(1\to 0)\to 1=1\land 0\to 1=1$。

(8) $\neg(P\lor Q\land R)\leftrightarrow((P\lor S)\land Q)=\neg(0\lor 0\land 1)\leftrightarrow((0\lor 1)\land 0)$

$=\neg(0\lor 0)\leftrightarrow(1\land 0)==1\leftrightarrow 0=0$。

解题提示：命题联结词的真值规定以及命题联结词的优先级顺序。

4. 设命题 P：你的期末考试得了 A；Q：你做了教材上的每一道习题；R：这门课你得了 A。将下列句子符号化。

(1) 这门课你得了 A,但你并没有做教材的每一道习题。

(2) 你的期末考试得了 A, 你做了教材上的每一道习题,并且这门课你得了 A。

(3) 想在这门课得 A, 你必须在期末考试得 A。

(4)你的期末考试得了 A, 你没有做教材的每一道习题;尽管如此,这门课你还是得了 A。

(5) 期末考试得 A 并且做教材上的每一道习题,足以使你这门课得 A。

(6) 你这门课得 A 当且仅当你做了教材上的每一道习题或期末考试得 A。

解 (1) $R\land\neg Q$。

(2) $P\land Q\land R$。

(3) $R\to P$。

(4) $P\land\neg Q\land R$。

(5) $(P\land Q)\to R$。

(6) $R\leftrightarrow(Q\lor P)$。

解题提示：自然语言关联词的五种关系分别对应五种命题联结词。

5. 设命题 P：这个材料很有趣；Q：这些习题很难；R：这门课程使人喜欢。将下列句子符号化。

(1) 这个材料很有趣,并且这些习题很难;

(2) 这个材料无趣,习题也不难,那么,这门课程就不会使人喜欢;

(3) 这个材料无趣,习题也不难,而且这门课程也不使人喜欢;

(4) 这个材料很有趣意味着这些习题很难,反之亦然;

(5) 或者这个材料很有趣,或者这些习题很难,并且两者恰具其一。

解 (1) $P\land Q$。

(2) $(\neg P\land\neg Q)\to\neg R$。

(3) $\neg P\land\neg Q\land\neg R$。

(4) $P\leftrightarrow Q$。

(5) $P\overline{\lor}Q$ 或 $(P\land\neg Q)\lor(\neg P\land Q)$ 或 $(P\lor Q)\land(\neg P\lor\neg Q)$。

解题提示：自然语言关联词的五种关系分别对应五种命题联结词。

6. 将下列命题符号化。

(1) 2 和 4 的最小公倍数是 8。

(2) 王丽和王梅都不是大学生。

（3）今天上午 9:00 我在北京或者上海。
（4）我选修离散数学或者计算机网络。
（5）如果我考上了大学,那么我将不玩电子游戏。
（6）如果公用事业费用增加或者增加基金的要求被否定,那么当且仅当现有计算机设备不适用的时候,才需购买一台新计算机。
（7）虽然天气晴朗,但梅花还是没有开放。
（8）明天我在广州当且仅当 2+2=4 或 3 是偶数;
（9）只有德、智、体全面发展的学生才能被评为“三好生”。
（10）程序运行停机的原因在于语法错误或者输入参数不合理。
（11）除非她以短信或者打电话方式通知我,否则我将不出席会议;
（12）若 a 和 b 是偶数，则 a+b 是偶数。

解　（1）设 P:2 和 4 的最小公倍数是 8,则
命题(1)可符号化为：P。
（2）设 P:王丽是大学生；Q:王梅是大学生,则
命题(2)可符号化为：$\neg P \wedge \neg Q$。
（3）设P: 今天上午9:00我在北京,Q：今天上午9:00我在上海,则
命题(3)可符号化为：$P \overline{\vee} Q$,或者$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$或$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$。
（4）设P: 我选修离散数学,Q：我选修计算机网络,则
命题(4)可符号化为：$P \vee Q$。
（5）设P：我考上了大学；Q：我将玩电子游戏，则
命题(5)可符号化为：$P \rightarrow \neg Q$。
（6）设P：公用事业费用增加；Q：增加基金的要求被同意；R：现有计算机设备适用；S：购买一台计算机，则
命题(6)可符号化为：$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg R \leftrightarrow S)$。
（7）设P：天气晴朗,Q：梅花开放，则
命题(7)可符号化为：$P \wedge \neg Q$。
（8）设P：明天我在广州,Q:2+2=4,R:3是偶数,则
命题(8)可符号化为：$P \leftrightarrow (Q \vee R)$。
（9）设P：品德好的学生；Q：学习成绩好的学生，R: 体育成绩好的学生,S:三好学生,则命题(9)可符号化为：$S \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$。
（10）设P：程序运行停机的原因在于语法错误,Q: 程序运行停机的原因在于输入参数合理,则命题(10)可符号化为：$P \vee \neg Q$。
（11）设P：她以短信方式通知我；Q：她以电话方式通知我；R：我将出席会议，则命题(10)可符号化为：$\neg (P \vee Q) \rightarrow \neg R$。
（12）设P：a是偶数；Q：b是偶数；R：a+b是偶数，则
命题(9)可符号化为：$(P \wedge Q) \rightarrow R$。

解题提示：命题符号化时,先找出原子命题,再确定命题联结词。

7. 设命题 P:天正在下雪,Q:我将进城,R:我有空。用自然语言写出下列命题。
（1）$Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$。
（2）$P \wedge Q$。
（3）$(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$。
（4）$\neg (R \vee Q)$。

解　（1）我将进城去当且仅当我有空且天不下雪。
（2）虽然天正在下雪，但我将进城去。

（3）如果我进城，那么我有空，并且如果我有空，那么我将进城。
（4）我没有空且我不进城。
解题提示：自然语言关联词的五种关系分别对应五种命题联结词。
8. 设命题 P:你超过半小时进考场，Q:你错过了这次期末考试，R:你通过了这门课。用自然语言写出下列命题。
（1）$P\rightarrow Q$。
（2）$\neg Q\leftrightarrow R$
（3）$(P\vee Q)\rightarrow\neg R$。
（4）$\neg(P\vee Q)\vee\neg R$。
（5）$(P\rightarrow\neg R)\wedge(Q\rightarrow\neg R)$。
（6）$(P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge R)$。
解 （1）如果你超过半小时进考场，那么你就错过了这次期末考试。
（2）你没有错过这次期末考试当且仅当你通过了这门课。
（3）如果你超过半小时进考场或者错过了这次期末考试，那么你就不能通过这门课。
（4）你不是超过半小时进考场或者错过了这次期末考试，或者你不能通过这门课。
（5）如果你超过半小时进考场， 那么你就不能通过这门课，并且如果你错过了这次期末考试， 那么你就不能通过这门课。
（6）你超过半小时进考场且错过了这次期末考试，或者你没有错过这次期末考试且通过了这门课。
解题提示：自然语言关联词的五种关系分别对应五种命题联结词。
9. 设 P，Q，R 和 S 是原子命题，试判断下列符号串是否为命题公式。
（1）$((P\wedge(Q\vee R))\leftrightarrow(Q\wedge((\neg S)\rightarrow R)))$。
（2）$(\neg P)\wedge Q\vee$。
（3）$P\rightarrow((\neg P)\wedge Q)$ 。
（4）$(P\wedge Q)\wedge(R\vee Q))\leftrightarrow S\rightarrow R$。
（5）$\neg P\wedge P\wedge P\wedge\ldots\wedge P\wedge\ldots$。
（6）$(P\wedge Q)\wedge(R+Q)$。
解（1）是，因为符合命题公式的定义。
（2）不是，因为“∨”后缺少一个析取项。
（3）是，因为符合命题公式的定义。
（4）不是，因为括号不匹配，少了一个左括号。
（5）不是，因为此该符号串含无限多个符号。
（6）不是，因为命题公式不包含符号“+”。
解题提示：命题公式是由原子命题、命题联结词和括号构成的有限长度的合法的符号串。
10. 试给出下列公式的一个成真赋值和一个成假赋值。
（1）$P\wedge(Q\vee R)\rightarrow R$。
（2）$(\neg P)\wedge Q\leftrightarrow R$ 。
（3）$P\rightarrow(\neg P\wedge Q)$。
（4）$P\leftrightarrow(Q\rightarrow R)$。
（5）$\neg P\wedge P$。
（6）$(\neg Q\vee Q)$。
解（1）成真赋值为：P=0，Q=1，R=1，成假赋值为：P=1，Q=1，R=0。
（2）成真赋值为：P=0，Q=1，R=1，成假赋值为：P=0，Q=1，R=0。
（3）成真赋值为：P=0，Q=1，成假赋值为：P=1，Q=0。

（4）成真赋值为：P=0，Q=1，R=0, 成假赋值为：P=1，Q=1，R=0。
（5）成真赋值为：无, 成假赋值为：P=1。
（6）成真赋值为：Q=1, 成假赋值为：无。

解题提示：成真赋值，成假赋值的定义。

11. 用真值表判断下列公式的类型。

（1）(P→P)∨(P→¬P)。
（2）¬P→(Q∨R)。
（3）(P∨¬Q)∨(¬P∨Q)。
（4）((P∨Q)→R)↔Q。
（5）(P→Q)↔(P∧¬Q)。
（6）(P∨Q)∧(¬P∨Q)∧(P∨¬Q)∧(¬P∨¬Q)。

解（1）(P→P)∨(P→¬P)的真值表如下：

	¬P	(P→P)	(P→¬P)	(P→P)∨(P→¬P)
	1	1	1	1
	0	1	0	1

所以(P→P)∨(P→¬P)是永真公式。

（2）¬P→(Q∨R)的真值表如下：

P Q R	¬P	Q∨R	¬P→(Q∨R)
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	1
1 1 0	0	1	1
1 1 1	0	1	1

所以¬P→(Q∨R)是可满足公式。

（3） (P∨¬Q)∨(¬P∨Q)的真值表如下：

P Q	¬Q	¬P	P∨¬Q	¬P∨Q	(P∨¬Q)∨(¬P∨Q)
0 0	1	1	1	1	1
0 1	0	1	0	1	1
1 0	1	0	1	0	1
1 1	0	0	1	1	1

所以(P∨¬Q)∨(¬P∨Q)是永真公式。

（4）((P∨Q)→R)↔Q 的真值表如下：

P Q R	P∨Q	P∨Q→R	$((P\vee Q)\to R)\leftrightarrow Q$
0 0 0	0	1	0
0 0 1	0	1	0
0 1 0	1	0	0

0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

所以((P∨Q)→R)↔Q是可满足公式。

（5）(P→Q)↔(P∧¬Q)的真值表如下：

P	Q	P→Q	¬Q	P∧¬Q	(P→Q)↔(P∧¬Q)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

所以(P→Q)↔(P∧¬Q)是永假公式。

（6）设 G=(P∨Q)∧(¬P∨Q)∧(P∨¬Q)∧(¬P∨¬Q)，则 G 的真值表如下：

P	Q	P∨Q	¬P∨Q	P∨¬Q	¬P∨¬Q	G
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

所以(P∨Q)∧(¬P∨Q)∧(P∨¬Q)∧(¬P∨¬Q)是永假公式。

解题提示：命题联结词的真值规定、优先级规定以及真值表的构建方法。

12. 用真值表验证下列基本等价关系。

（1）G∨(H∨S)＝(G∨H)∨S。

（2）G∧(H∧S)＝(G∧H)∧S。

（3）G∨(H∧S)＝(G∨H)∧(G∨S)。

（4）G∧(H∨S)＝(G∧H)∨(G∧S)。

（5）¬(G∨H)＝¬G∧¬H。

（6）G∧(G∨H)＝G。

解 （1）G∨(H∨S)＝(G∨H)∨S 等价于(G∨(H∨S))↔((G∨H)∨S)=1，构造 G∨(H∨S)↔(G∨H)∨S 的真值表如下：

G	H	S	(G∨(H∨S))↔((G∨H)∨S)				
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1

0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表结果可知(G∨(H∨S))↔((G∨H)∨S)是永真公式,所以 G∨(H∨S)＝(G∨H)∨S。

（2）G∧(H∧S)＝(G∧H)∧S 等价于(G∧(H∧S))↔((G∧H)∧S)=1,构造(G∧(H∧S)) ↔((G∧H)∧S)的真值表如下:

G	H	S	(G∧(H∧S))↔((G∧H)∧S)				
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表结果可知(G∧(H∧S)) ↔((G∧H)∧S)是永真公式,所以 G∧(H∧S)＝(G∧H)∧S。

（3）G∨(H∧S)＝(G∨H)∧(G∨S)等价于(G∨(H∧S))↔((G∨H)∧(G∨S))=1,构造(G∨(H∧S))↔((G∨H)∧(G∨S))的真值表如下:

G	H	S	(G∨(H∧S))↔((G∨H)∧(G∨S))					
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表结果可知 G∨(H∧S) ↔(G∨H)∧(G∨S)是永真公式,所以 G∨(H∧S)＝(G∨H)

∧(G∨S)。

（4）G∧(H∨S)＝(G∧H)∨(G∧S)等价于(G∧(H∨S))↔((G∧H)∨(G∧S))=1,构造G∧(H∨S)↔ (G∧H)∨(G∧S)的真值表如下:

G	H	S	(G∧(H∨S))↔((G∧H)∨(G∧S))						
0	0	0	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	0	0	0	
0	1	1	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	

由真值表结果可知(G∧(H∨S))↔((G∧H)∨(G∧S))是永真公式,所以G∧(H∨S)＝(G∧H)∨(G∧S)。

（5）¬(G∨H)＝¬G∧¬H 等价于(¬(G∨H))↔(¬G∧¬H)=1,构造(¬(G∨H))↔(¬G∧¬H)的真值表如下:

G	H	(¬(G∨H))↔(¬G∧¬H)					
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0

由真值表结果可知(¬(G∨H))↔(¬G∧¬H)是永真公式,所以¬(G∨H)＝¬G∧¬H。

（6）G∧(G∨H)＝G 等价于(G∧(G∨H))↔G =1,构造(G∧(G∨H))↔G 的真值表如下:

G	H	(G∧(G∨H))↔G		
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

由真值表结果可知(G∧(G∨H))↔G 是永真公式,所以 G∧(G∨H)＝G。

解题提示：命题联结词的真值规定、优先级规定以及真值表的构建方法。

13. 试判断下述结论的正确性。

（1）若 P∧R=Q∧R，则有 P＝Q。

（2）若 P∨R=Q∨R，则有 P＝Q。

（3）若┐P=┐Q，则有 P＝Q。

解 （1）不一定正确。

因为 P∧R=Q∧R，所以当 P∧R=0 时，一定有 Q∧R=0，此时若 R=0，则 P 和 Q 真值可以不相同。当 P 和 Q 的真值不同时，P＝Q 就不成立。

（2）不一定正确。

因为 P∨R=Q∨R，所以 P∨R=1 时，一定有 Q∨R=1，此时若 R=1，则 P 和 Q 真值可以不相同。当 P 和 Q 的真值不同时，P＝Q 就不成立。

（3）一定正确。

因为若$\neg P=\neg Q$，所以$\neg P$，$\neg Q$的真值相同，从而有P，Q的真值相同，从而P=Q。

解题提示：如果正确，则根据定理2.1直接证明；如果不一定正确，举反例即可。

14. 用基本等价关系式判断下列公式的类型。

（1）$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$。

（2）$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

（3）$\neg(\neg Q\vee\neg R)\vee\neg(Q\to R)$

（4）$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$

（5）$\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R$。

（6）$(Q\to(P\wedge(P\to\neg Q)))\wedge Q$。

解（1）$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)=\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg(\neg Q)\vee\neg P)$

$=(P\wedge\neg Q)\vee Q\vee\neg P=(P\wedge\neg Q)\vee\neg(P\wedge\neg Q)=1$

即$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$是永真公式。

（2）$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge((P\vee Q)\wedge(P\vee R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))=1$

即$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$是永真公式。

（3）$\neg(\neg Q\vee\neg R)\vee\neg(Q\to R)$

$=\neg(\neg Q\vee\neg R)\vee\neg(\neg Q\vee R)$

$=(Q\wedge R)\vee(Q\wedge\neg R)=Q\wedge(R\vee\neg R)=Q$

即$\neg(\neg Q\vee\neg R)\vee\neg(Q\to R))$ 是可满足公式。

（4）$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R=T\wedge R=R$

即$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$是可满足公式。

（5）$\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R=\neg(\neg P\vee Q)\wedge Q\wedge R=P\wedge\neg Q\wedge Q\wedge R=0$

即$\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R$是永假公式。

（6）$(Q\to(P\wedge(P\to\neg Q)))\wedge Q=(\neg Q\vee(P\wedge(\neg P\vee\neg Q)))\wedge Q$

$=(\neg Q\vee((P\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q))\wedge Q$

$=(\neg Q\vee(P\wedge\neg Q))\wedge Q=\neg Q\wedge Q=0$。

即$(Q\to(P\wedge(P\to\neg Q)))\wedge Q$是永假公式。

解题提示：根据24个基本等价公式，如果给定公式与“1”等价，则该公式是永真公式；如果给定公式与“0”等价，则该公式是永假公式；如果给定公式不能等价转化为“1”或者“0”，则该公式是可满足公式的。

15. 简化下列命题公式。

（1）$((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\wedge R$。

（2）$P\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))$。

（3）$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$。

（4）$((P\to Q)\wedge P\wedge R)\vee R$。

（5）$(Q\wedge R)\vee(\neg Q\vee(\neg Q\vee R)$

解（1）$((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\wedge R=((P\to Q)\leftrightarrow(P\to Q))\wedge R=1\wedge R=R$。

（2）$P\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))=P\vee(\neg P\wedge 1)=P\vee\neg P=1$。

（3）$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=(P\vee\neg P)\wedge(Q\wedge R)=1\wedge(Q\wedge R)=Q\wedge R$。

（4）$((P\to Q)\wedge P\wedge R)\vee R=R$。

（5）$(Q\wedge R)\vee(\neg Q\vee(\neg Q\vee R)$

$=(Q\wedge R)\vee(\neg Q\vee R)$

$=\neg Q\vee R$。

解题提示：根据 24 个基本等价公式直接化简即可。

16. 用基本等价公式证明下列等式。

（1）$(P\to R)\wedge(Q\to R)=(P\vee Q)\to R$。

（2）$P\to(Q\to P)=\neg P\to(P\to\neg Q)$。

（3）$P\to(Q\to R)=Q\to(P\to R)$。

（4）$\neg(P\leftrightarrow Q)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

（5）$P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$。

解（1）$(P\to Q)\wedge(R\to Q)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$

$=(\neg P\wedge\neg R)\vee Q=\neg(P\vee R)\vee Q=(P\vee Q)\to R$。

（2）$P\to(Q\to P)=\neg P\vee(\neg Q\vee P)=P\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$=\neg\neg P\vee(\neg P\vee\neg Q)=\neg P\to(P\to\neg Q)$。

（3）$P\to(Q\to R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=\neg Q\vee(\neg P\vee R)=Q\to(P\to R)$。

（4）$\neg(P\leftrightarrow Q)=\neg((P\to Q)\wedge(Q\to P))=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

（5）$P\to(Q\to R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$

$=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\to R$。

解题提示：根据 24 个基本等价公式直接证明即可。

17. 将下列公式用极小联结词的完备集{¬，∧}等价表示。

（1）$(\neg P\to Q)\vee R$。

（2）$P\to(\neg Q\leftrightarrow P)$ 。

（3）$(\neg P\to R)\leftrightarrow(P\wedge Q)$。

解 （1）$(\neg P\to Q)\vee R=\neg(\neg P)\vee Q\vee R=P\vee Q\vee R=\neg(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

（2）$P\to(\neg Q\leftrightarrow P)=\neg P\vee((\neg(\neg Q)\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

$=\neg P\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

$=(\neg P\vee P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg P\vee\neg Q))=\neg P\vee\neg Q=\neg(P\wedge Q)$。

（3）$(\neg P\to R)\leftrightarrow(P\wedge Q)=(P\vee R)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$=(\neg(P\vee R)\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg(P\wedge Q)\vee(P\vee R))$

$=((\neg P\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q)$

$=(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee P)\wedge(\neg R\vee Q)$

$=\neg(P\wedge\neg Q)\wedge\neg(R\wedge\neg P)\wedge\neg(R\wedge\neg Q)$

解题提示：根据 24 个基本等价公式直接转化即可。

18. 将下列公式用极小联结词的完备集{¬，→}等价表示。

（1）$P\wedge(Q\vee R)\wedge R$。

（2）$(\neg P\vee Q)\leftrightarrow R$。

（3）$P\wedge(\neg P\to Q)$。

（4）$(P\leftrightarrow Q)\to R$。

解 （1）$P\wedge(Q\vee R)\wedge R=P\wedge R=\neg(\neg P\vee\neg R)=\neg(P\to\neg R)$

（2）$(\neg P\vee Q)\leftrightarrow R=((\neg P\vee Q)\to R)\wedge(R\to(\neg P\vee Q))$

$=((P\to Q)\to R)\wedge(R\to(P\to Q))$

$=\neg(\neg((P\to Q)\to R)\vee\neg(R\to(P\to Q)))$

$=\neg(((P\to Q)\to R)\to\neg(R\to(P\to Q)))$

（3）$P\wedge(\neg P\to Q)=\neg(\neg P\vee\neg(\neg P\to Q))=\neg(P\to\neg(\neg P\to Q))$

（4）$(P\leftrightarrow Q)\to R=((P\to Q)\wedge(Q\to P))\to R=\neg(\neg(P\to Q)\vee\neg(Q\to P))\to R$

19.求下列公式所对应的合取范式和析取范式。

（1）$P\wedge(P\to Q)$。

（2）$(\neg P\wedge Q)\to R$。

（3）$\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\to R)$。

（4）$P\to((Q\wedge R)\to S)$。

（5）$\neg(P\wedge Q)\wedge(P\vee Q)$。

（6）$\neg(P\to Q)\vee(P\vee Q)$。

解　（1）$P\wedge(P\to Q)=P\wedge(\neg P\vee Q)$　--------- 为合取范式

$=(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)$　--------- 为析取范式

（2）$(\neg P\wedge Q)\to R=\neg(\neg P\wedge Q)\vee R=P\vee\neg Q\vee R$

--------- 既为合取范式，也为析取范式

（3）$\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\to R)=\neg P\wedge Q\wedge(\neg S\vee R)$　--------- 为合取范式

$=(\neg P\wedge Q\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$　--------- 为析取范式

（4）$P\to((Q\wedge R)\to S)=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee S$ -----合取范式，析取范式

（5）$\neg(P\wedge Q)\wedge(P\vee Q)=(\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)$　-------- 为合取范式

$=(\neg P\wedge P)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee Q)$ --- 为析取范式

（6）$\neg(P\to Q)\vee(P\vee Q)=\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\vee Q)=(P\wedge\neg Q)\vee(P\vee Q)$

$=P\vee Q$　--------- 既为合取范式，也为析取范式

解题提示：利用 24 个基本等价关系，根据合取范式、析取范式的定义直接计算即可。

20.求下列公式所对应的主合取范式和主析取范式，并指出哪些是永真式？哪些是永假式？

（1）$\neg((P\wedge Q)\vee R)\to R$。

（2）$(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$。

（3）$Q\wedge(P\vee\neg Q)$。

（4）$P\to(P\wedge(Q\to P))$。

（5）$(Q\to P)\wedge(\neg P\wedge Q)$。

（6）$(P\wedge\neg R)\vee(S\wedge P)$。

（7）$(P\wedge R)\vee(S\wedge R)\vee\neg P$。

（8）$(P\to Q)\to R$。

解（1）利用基本等价公式来求：

$\neg((P\wedge Q)\vee R)\to R=(P\wedge Q)\vee R\vee R=(P\wedge Q)\vee R$

$=(P\wedge Q\wedge(R\vee\neg R))\vee((P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)$

$=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

---------主析取范式

$=\neg((\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R))$

$=(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$　---------主合取范式

（2）利用真值表技术来求：

建立公式：$(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$的真值表如下：

P Q	$\neg P\vee\neg Q$	$(P\leftrightarrow\neg Q)$	$(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$
0 0	1	0	0
0 1	1	1	1
1 0	1	1	1
1 1	0	0	1

$(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)=(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ ---------主析取范式

$=(P\vee Q)$ ---------主合取范式

（3）建立公式：$Q\wedge(P\vee\neg Q)$的真值表如下：

P Q	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge(P\vee\neg Q)$
0 0	1	0
0 1	0	0
1 0	1	0
1 1	1	1

$Q\wedge(P\vee\neg Q)=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)$ ---------主合取范式

$=(P\wedge Q)$ ----------主析取范式

（4）$P\to(P\wedge(Q\to P))=\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))=\neg P\vee P=1$

----------主合取范式为“空”

$=(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ ----------主析取范式

此公式为永真公式。

（5）$(Q\to P)\wedge(\neg P\wedge Q)=(\neg Q\vee P)\wedge(\neg P\wedge Q)$

$=(\neg Q\vee P)\wedge\neg(P\vee\neg Q)=0$ ----------主析取范式为“空”

$=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$----------主合取范式

此公式为永假公式。

（6）$(P\wedge\neg R)\vee(S\wedge P)=(P\wedge\neg R\wedge(S\vee\neg S))\vee(P\wedge(R\vee\neg R)\wedge S)$

$=(P\wedge\neg R\wedge S)\vee(P\wedge\neg R\wedge\neg S)\vee(P\wedge R\wedge S)$ ---------主析取范式

$=\neg((P\wedge R\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge R\wedge S)\vee(\neg P\wedge\neg R\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge\neg R\wedge S)$

$\vee(\neg P\wedge R\wedge\neg S))$

$=(\neg P\vee\neg R\vee S)\wedge(P\vee\neg R\vee\neg S)\wedge(P\vee R\vee S)\wedge$

$(P\wedge\neg R\wedge S)\wedge(P\wedge R\wedge\neg S)$ ---------主合取范式

（7）建立公式：$(P\wedge R)\vee(S\wedge R)\vee\neg P$ 的真值表如下：

P S R	$P\wedge R$	$S\wedge R$	$\neg P$	$(P\wedge R)\vee(S\wedge R)\vee\neg P$
0 0 0	0	0	1	1
0 0 1	0	0	1	1
0 1 0	0	0	1	1
0 1 1	0	1	1	1
1 0 0	0	0	0	0
1 0 1	1	0	0	1
1 1 0	0	0	0	0
1 1 1	1	1	0	1

$(P\wedge R)\vee(S\wedge R)\vee\neg P=(\neg P\vee S\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg S\vee R)$ ---------主合取范式

$=(\neg P\wedge\neg S\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg S\wedge R)\vee(\neg P\wedge S\wedge\neg R)$

$\vee(\neg P\wedge S\wedge R)\vee(P\wedge\neg S\wedge R)\vee(P\wedge S\wedge R)$ --------- 主析取范式

（8）$(P\to Q)\to R=\neg(\neg P\vee Q)\vee R=(P\wedge\neg Q)\vee R=(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

$=(P\vee(\neg Q\wedge Q)\vee R)\wedge((\neg P\wedge P)\vee\neg Q\vee R)$

$=(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

---------主合取范式

$(P\to Q)\to R=m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

--------- 主析取范式

21.用基本等价公式的转换方法验证下述论断是否有效。

（1）$P\to Q, R\wedge S, \neg Q\Rightarrow P\wedge S$。

（2）$P\vee\neg R, Q\vee S, R\to(S\wedge P)\Rightarrow S\to P$。

（3）$\neg(P\wedge\neg Q), \neg Q\vee R, \neg Q\Rightarrow\neg P$。

（4）$\neg P\to Q, Q\to R, R\to P\Rightarrow P\vee Q\vee R$。

（5）$P, Q\to R, R\vee S\Rightarrow Q\to S$。

（6）$\neg Q\wedge R, R\wedge P, Q\Rightarrow P\vee\neg Q$。

证明（1）因为$((P\to Q)\wedge(R\wedge S)\wedge\neg Q)\to(P\wedge S)$

$=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(R\wedge S)\wedge\neg Q)\vee(P\wedge S)$

$=((P\wedge\neg Q)\vee\neg R\vee\neg S\vee Q)\vee(P\wedge S)=P\vee Q\vee\neg R\vee\neg S\neq 1$，

所以$P\to Q$，$R\wedge S$，$\neg Q\not\Rightarrow P\wedge S$。

（2）因为$((P\vee\neg R)\wedge(Q\vee S)\wedge(R\to(S\wedge P)))\to(S\to P)$

$=\neg((P\vee\neg R)\wedge(Q\vee S)\wedge(R\to(S\wedge P)))\vee(S\to P)$

$=\neg(P\vee\neg R)\vee\neg(Q\vee S)\vee\neg(\neg R\vee(S\wedge P))\vee(\neg S\vee P)$

$=(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg S)\vee(R\wedge(\neg S\vee\neg P))\vee(\neg S\vee P)$

$=(\neg P\wedge R)\vee(R\wedge\neg S)\vee(R\wedge\neg P)\vee((\neg Q\wedge\neg S)\vee\neg S)\vee P$

$=(\neg P\wedge R)\vee(R\wedge\neg S)\vee(R\wedge\neg P))\vee\neg S\vee P$

$=(\neg P\wedge R)\vee\neg S\vee P=R\vee\neg S\vee P\neq 1$，

所以 $P\vee\neg R$，$Q\vee S$，$R\to(S\wedge P)\not\Rightarrow S\to P$。

（3）因为$(\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg Q)\to\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee Q\vee\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee Q\vee\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee Q\vee\neg P=(P\wedge\neg Q)\vee\neg(P\wedge\neg Q)=1$，

所以 $\neg(P\wedge\neg Q)$，$\neg Q\vee R$，$\neg Q\Rightarrow\neg P$。

（4）因为$((\neg P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge(R\to P))\to(P\vee Q\vee R)$

$=\neg(P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee\neg(\neg R\vee P))\vee(P\vee Q\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg P))\vee(P\vee Q\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\vee Q\vee R)=\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q)\vee R=1$，

所以 $\neg P\to Q$，$Q\to R$，$R\to P\Rightarrow P\vee Q\vee R$。

（5）因为$((P\wedge(Q\to R)\wedge(R\vee S))\to Q\to S)$

$=\neg P\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee\neg(R\vee S))\vee(\neg Q\vee S)$

$=\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee(\neg R\wedge\neg S))\vee(\neg Q\vee S)$

$= \neg P \vee (\neg R \wedge (Q \vee \neg S)) \vee (\neg Q \vee S) \neq 1$，

所以 P，Q→R，R∨S$\nRightarrow$Q→S。

（6）因为$(\neg Q \wedge R \wedge R \wedge P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$

$= \neg (\neg Q \wedge R \wedge R \wedge P \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q)$

$= Q \vee \neg R \vee \neg P \vee \neg Q \vee P \vee \neg Q = 1$，

所以 ┐Q∧R, R∧P, Q⇒P∨┐Q。

22.用演绎法证明下述论断的正确性。

（1）C∨D,（C∨D)→┐P,┐P→(A∧┐B),(A∧┐B)→(R∨S)⇒R∨S。

（2）P∨Q,Q→R,P→M,┐M⇒R∧(P∨Q)。

（3）P,P→(Q→(R∧S)) ⇒Q→S。

（4）P→(Q→R),R→(Q→S)⇒P→(Q→S)。

（5）P→(Q→R)⇒(Q→(R→S))→(P→(Q→S))。

（6）┐(P→Q)→┐(R∨S),(Q→P)∨┐R,R⇒P↔Q。

证明（1）

①	C∨D	P
②	(C∨D)→┐P	P
③	┐P	T,①,②,I
④	┐P→(A∧┐B)	P
⑤	(A∧┐B)	T,③,④,I
⑥	(A∧┐B)→(R∨S)	P
⑦	R∨S	T,⑤,⑥,I

（2）

①	┐M	P
②	P→M	P
③	┐P	T,①,②,I
④	P∨Q	P
⑤	Q	T,③,④,I
⑥	Q→R	P
⑦	R	T,⑤,⑥,I
⑧	R∧(P∨Q)	T,④,⑦,I

（3）

①	P	P
②	P→(Q→(R∧S))	P
③	(Q→(R∧S))	T,①,②,I
④	Q	P （附加前提）
⑤	(R∧S)	T,③,④,I
⑥	S	T,⑤,I
⑦	Q→S	CP,④,⑥

（4）

①	P	P (附加前提)
②	P→(Q→R)	P
③	Q→R	T,①,②,I
④	Q	P （附加前提）
⑤	R	T,③,④,I
⑥	R→(Q→S)	P
⑦	Q→S	T,⑤,⑥,I
⑧	P→(Q→S)	CP,①,⑦

（5）

①	Q→(R→S)	P (附加前提)

② R→(Q→S)　　　　T,①,E
③ P→(Q→R)　　　　P
④ P　　　　　　　P（附加前提）
⑤ Q→R　　　　　T,③,④,I
⑥ Q　　　　　　　P（附加前提）
⑦ R　　　　　　　T,⑤,⑥,I
⑧ (Q→S)　　　　　T,②,⑦
⑨ P→(Q→S)　　　CP,④,⑧
⑩ (Q→(R→S))→(P→(Q→S))　CP,①,⑨

（6）① R　　　　　　　P
② (Q→P)∨┐R　　　P
③ (Q→P)　　　　　T,①,②,I
④ R∨S　　　　　　T,①,I
⑤ ┐(P→Q)→┐(R∨S)　P
⑥ P→Q　　　　　　T,④,⑤,I
⑦ P↔Q　　　　　　T,③,⑥,I

23. 求下列各对比特串的按位 OR、按位 AND 及按位 XOR。

（1）101 1110，010 0001
（2）1111 0000，1010 1010
（3）00 0111 0001，10 0100 1000
（4）11 1111 1111，00 0000 0000

解（1）(101 1110)OR(010 0001)= 111 1111
(101 1110) AND (010 0001)= 000 0000
(101 1110) XOR (010 0001)= 111 1111
（2）(1111 0000) OR (1010 1010)= 1111 1010
(1111 0000) AND (1010 1010)= 1010 0000
(1111 0000) XOR (1010 1010)= 0101 1010
（3）(00 0111 0001) OR (10 0100 1000)= 10 0111 1001
(00 0111 0001)AND (10 0100 1000)= 00 0100 0000
(00 0111 0001)XOR (10 0100 1000)= 10 0011 1001

24. 计算下列表达式

（1）1 1000∧(0 1011∨1 1011)。
（2）(0 1111∧1 0101)∨0 1000。

解（1） 1 1000∧(0 1011∨1 1011)= 1 1000∧1 1011=1 1000
（2）(0 1111∧1 0101)∨0 1000 =0 0101)∨0 1000=0 1101

25.设计一个简单的表决器，表决者每人身旁有一个按钮，若同意则按下按钮；否则不按按钮；当表决结果超过半数时，会场电铃就会响，否则电铃就不会响。试以表决人数为三人的情况下设计表决电路的逻辑关系。

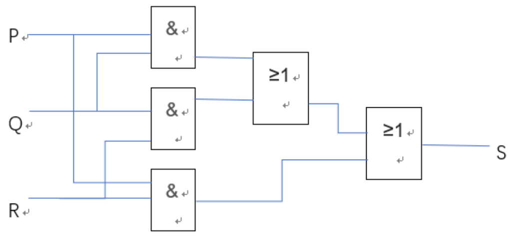
解 设 P，Q 和 R 为三个按钮，其中 1 表示按下按钮，0 表示不按按钮，S 为电铃，其中 1 表示电铃响，0 表示不响，则根据题意，可得下面的表格。

P	Q	R	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

即 $S = (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$
$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (R \wedge Q)$

其电路图如下所示。



26.某公司要从赵，钱，孙，李，周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件，用主析取范式分析该公式如何选派他们出国。

（1）若赵去，钱也去；（2）李周两个人中至少有一个人去；

（3）钱孙两个人有一个人去，且仅有一个人去；

（4）孙李二人同去或者同不去；（5）若周去，则赵钱也去。

解 设A:赵去，B:钱去，C:孙去，D:李去，E:周去，则5个条件分别表示为：A→B；D∨E；（B∧┐C）∨（┐B∧C）；（C∧D）∨┐C∧┐D）；E→(A∧B)，则根据题意符号化有：

（A→B）∧（D∨E）∧（(B∧┐C）∨（┐B∧C)）∧（(C∧D）∨┐C∧┐D)）∧（E→(A∧B)）

上式的主析取范式：

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E)$$

显然当A, B, C, D, E分别取值为：0,0,1,1,0或1,1,0,0,1时 P为真，即应派孙李去或派赵钱周去。

27. 张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三、李四都在说谎。问张三、李四和王五三个人，到底谁在说真话，谁在说假话。

解 设P：张三在说谎；Q：李四在说谎：R：王五在说谎，则根据题意可得：P↔¬Q；Q↔¬R；(R↔¬(P∧Q)，即

(P↔¬Q)∧(Q↔¬R)∧(R↔¬(P∧Q)) ⟺1

记S=(P↔¬Q)∧(Q↔¬R)∧(R↔¬(P∧Q))，S的真值表如下：

P	Q	R	P↔¬Q	Q↔¬R	R↔¬(P∧Q)	S
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

由S的真值表求得其主析取范式为P∧¬Q∧R

从而(P↔¬Q)∧(Q↔¬R)∧(R↔¬(P∧Q))= P∧¬Q∧R=1

即P，¬Q，R的真值均为1。故张三在说谎，李四没说谎，王五在说谎。

28. 符号化下列论断,并用演绎法验证论断是否正确。

（1）或者明天下午是天晴,或者是下雨；如果明天下午是天晴,则我将去看电影；如果我

去看电影，我就不看书。如果我看书，则天在下雨；

证明（1）设 P：明天下午天晴；Q：明天下午下雨；R：明天下午去看电影；S：明天下午看书，则上述句子(1)可符号化为：

$$P\overline{\vee}Q，P\rightarrow R，R\rightarrow\neg S\Rightarrow S\rightarrow Q。$$

证明	（1）S	P(附加前提)
	（2）$R\rightarrow\neg S$	P
	（3）$\neg R$	T，（1），（2），I
	（4）$P\rightarrow R$	P
	（5）$\neg P$	T，（3），（4），I
	（6）$P\overline{\vee}Q$	P
	（7）Q	T，（4），（7），I

（2）若下午气温超过 30 度，则小汪必须去游泳。若他去游泳，他就不去看电影了。所以，若小汪没有去看电影，下午的气温必须超过了 30 度。

【解】 设P: T > 30℃ Q: 去游泳 R: 看电影

由题：$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow\neg R)\wedge\neg R\rightarrow P$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee\neg R)\wedge\neg R)\vee P$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)\vee R)\vee P$

$\Leftrightarrow(P\vee P)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(R\vee R)\wedge(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow P\wedge(P\vee\neg Q)\wedge R\wedge(Q\wedge R)$

可满足式，故推理不正确

（3）如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

解 令 P：马会飞； R：母鸡是飞鸟； S：烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句为：$P\vee Q\rightarrow R，R\rightarrow S，\neg S\Rightarrow\neg Q$

⑴	$\neg S$	P
⑵	$R\rightarrow S$	P
⑶	$\neg R$	T,⑴,⑵,I
⑷	$P\vee Q\rightarrow R$	P
⑸	$\neg(P\vee Q)$	T,⑶,⑷,I
⑹	$\neg P\wedge\neg Q$	T,⑸,E
⑺	$\neg Q$	T,⑹,I

（4）如果他是计算机系本科生或者是计算机系研究生，那么他一定学过 DELPHI 语言而且学过 C++语言。只要他学过 DELPHI 语言或者 C++语言，那么他就会编程序。因此如果他是计算机系本科生，那么他就会编程序。

解 设 p：他是计算机系本科生

Q：他是计算机系研究生

R：他学过 DELPHI 语言

S:他学过 C++语言

T:他会编程序

前提：$(p\vee Q)\rightarrow(R\wedge S),(R\vee S)\rightarrow T$

结论：$p\rightarrow T$

证①p	P(附加前提)
②$p\vee Q$	T①I

③$(p\vee Q)\to(R\wedge S)$ P(前提引入)

④$R\wedge S$ T②③I

⑤R T④I

⑥$R\vee S$ T⑤I

⑦$(R\vee S)\to T$ P(前提引入)

⑧T T⑤⑥I

（5）如果 6 是偶数，则 2 不能整除 7；或者 5 不是素数，或者 2 整除 7；5 是素数。所以 6 是奇数。

解 设P：6 是偶数；Q：2 整除 7；R：5 是素数，则上述句子(3)可符号化为：$P\to\neg Q$，$\neg R\vee Q$，$R\Rightarrow\neg P$。

① $\neg(\neg P)$ P（附加前提）

② P T,①,E

③ $P\to\neg Q$ P

④ $\neg Q$ T,②,③,I

⑤ $\neg R\vee Q$ P

⑥ $\neg R$ T,④,⑤,I

⑦ R P

⑧ $\neg R\wedge R$ T,⑥,⑦,I

（6）如果 A 地发生了交通事故，则小李的通行会发生困难；如果小李按指定的时间到达了，则他的通行没有发生困难；小李按指定的时间到达了。所以 A 地没有发生交通事故。

解 设P：A 地发生了交通事故；Q：小李的通行会发生问题；R：小李按指定的时间到达，则上述句子(4)可符号化为：$P\to Q$，$R\to\neg Q$，$R\Rightarrow\neg P$。

① $R\to\neg Q$ P

② R P

③ $\neg Q$ T,①,②,I

④ $P\to Q$ P

⑤ $\neg P$ T,③,④,I

（7）若今天是星期二，那么我要考计算机科学或经济学；若经济学教授病了，就不考经济学；今天是星期二，并且经济学教授病了。所以我要考计算机科学。

解 设P：今天是星期二；Q：要考计算机科学；R：我要考经济学；

S：经济学教授病了，则上述句子可符号化为：$P\to(Q\vee R)$，$S\to\neg R$，$P\wedge S\Rightarrow Q$。

① $P\wedge S$ P

② S T,①,I

③ $S\to\neg R$ P

④ $\neg R$ T,②,③,I

⑤ $P\to(Q\vee R)$ P

⑥ P T,①,I

⑦ $Q\vee R$ T,⑤,⑥,I

⑧ Q T,④,⑦,I

（8）如果他认真，他就能写得好；如果他方法对，他就能写得快；他或者写得不好或者写得不快，所以他或者不认真，或者方法不对。

解 设 P：他认真；Q：他写得好；R：他方法对；S：他写得快，则上述句子可符号化为：P→Q，R→S，┐Q∨┐S ⇒┐P∨┐R。

①┐Q∨┐S　　P
② Q→┐S　　T,①,E
③ P→Q　　P
④ P→┐S　　T,②,③,I
⑤ S→┐P　　T, ④,E
⑥ R→S　　P
⑦ R→┐P　　T,⑤,⑥,I
⑧ ┐P∨┐R　　T,⑦,E

2.4 应用实践

29.程序设计：输入 P 和 Q 的逻辑表达式，输出其真值表。

30.应用实践：编写一段程序，测试 P 和 Q 的两个逻辑表达式是否逻辑等价。

16。参考思路

一、程序通过编译，并实现两个命题的各种逻辑运算

二、任意输入字符串 P 和 Q 逻辑表达式的合法性检查

三、利用真值表方法验证他们的等价性

一、算法分析

①求任意一个命题公式的真值表，，根据真值表验证他们的等价性

C 语言算法：

首先是输入一个合理的式子，然后从式子中查找出变量的个数，开辟一个二进制函数，用来生成真值表，然后用函数运算，输出结果，并根据结果归类给范式，再根据范式验证等价性。

函数部分，主要是 3 个函数，一个为真值表递加函数，通过二进制的加法原理递进产生，一个为分级运算函数，这个函数是通过判断括号，选出最内级括号的内容执行运算函数，这样一级一级向外运算，最后得出最终结果，剩下一个为主运算函数，按照运算符号的优先级按顺序进行运算，如先将所有非运算运算完，再执行与运算。如此运算。

16 参考代码：

1。分级运算函数

```
/**分级运算函数**/
int CR(char sz[N],char ccu[N],int icu[N],int h0)
{
        int i,j,h,s,kh = 0,wz[N],a;
        char xs1[N],ckh[N];              //xs1 用来保存括号内的字符 ckh 用来保存括号。
        s = strlen(sz);
        for(i = 0; i < s; i++)
             if(sz[i] == '(' || sz[i] == ')'){      //判断括号
                     wz[kh] = i;                    //存储括号位置
                     ckh[kh] = sz[i];               //存储括号类型
                     kh++;
```

```
        }
    if(kh == 0)
        return MAP(sz,ccu,icu,h0); //如果无括号，直接运行
    else{
        for(i = 0; i < kh; i++)
            if(ckh[i] == ')')                //找到第一个”）”
                break;
        for(j = wz[i-1]+1,h=0; j < wz[i]; j++,h++) //存储最内级括号中的内容
            xs1[h] = sz[j];
        xs1[h] = '\0';
        a = MAP(xs1,ccu,icu,h0);            //运行最内级括号的式子，得到结果
        if(a == 1)                          //判断并存储结果
          sz[wz[i-1]] = 1;
        else
          sz[wz[i-1]] = -2;
        for(j = wz[i-1]+1; j < s+wz[i-1] - wz[i]; j++)//将括号后内容前移
          sz[j] = sz[j + wz[i] - wz[i-1]];
        sz[j] = '\0';
        return CR(sz,ccu,icu,h0);//循环执行
    }
}
```

2。二进制赋值函数

```
void BVA(int b[N],int f){
    int i;
    i = f;
    if(b[f] == 0)   //加 1
        b[f] = 1;
    else                //进位
    {
        b[f] = 0;
        BVA(b,--i);
    }
}
```

3。 求任意一个命题公式的真值表

```
void Matrice(){
    int i2,d=1,icu[N],kh=0,jg,j=0,h0; //icu[N]用于存放变量值,kh 括号计数,jg 存放结果
    int bj=0,x=0,xq[N];    //hq[N]存放合取结果 xq[N]存放析取结果
    char sz[N],ccu[N],sz0[N];    //sz[N]存放式子,ccu[N]存放变量,sz0[N]也是用于存放式子
    hq[0]=-1;
    xq[0]=-1;
  sg:
     gets(sz);
    strcpy(sz0,sz);
    for(i1 = 0; (size_t)i1 < strlen(sz); i1++){
  if(sz[i1] =='!' || sz[i1] == '&' || sz[i1] == '|' || sz[i1] == '^' || sz[i1] == '~' ||
sz[i1] == '(' || sz[i1] == ')' || sz[i1] >= 'a' && sz[i1] <= 'z' || sz[i1] >= 'A' &&
sz[i1] <= 'Z'){
            if(sz[i1] == ')' || sz[i1] == '(')//存储括号数量
```

```
                kh++;
            if(sz[i1] >= 'a' && sz[i1] <= 'z' || sz[i1] >= 'A' && sz[i1] <= 'Z') {
                    if(sz[i1+1] >= 'a' && sz[i1+1] <= 'z' || sz[i1+1] >= 'A' && sz[i1+1]
<= 'Z'){
 goto sg;
                        }
                for(i2 = 0; i2 < j; i2++) //判断并储存变量。
                    if(ccu[i2] == sz[i1])//去除重复变量
                        d = 0;
                if(d == 1){
                    ccu[j] = sz[i1];
                    j++;
                }
                d = 1;
            }
        }
        else{
            goto sg;
        }
  }
//输出变量个数
    h0 = j;
//输出真值表表头
    for(i1 = 0; i1 < h0; i1++)
        printf(" %c ",ccu[i1]);
    printf(" ");
    printf("\t\t");
    puts(sz);
    printf("\n");
    for(i1 = 0; i1 < j; i1++) ///先将所有的变量赋值为零。
        icu[i1] = 0;
    printf("\t\t");
    for(i2 = 0; i2 < j; i2++)//输出真值表前项
        printf(" %d ",icu[i2]);
    jg = CR(sz,ccu,icu,h0); //用函数求结果
    if(jg == 0)
        hq[h++] = bj;
    printf("\t\t%d\n",jg);//输出运算结果
    strcpy(sz,sz0);
    for(i1 = 0; i1 < (int)pow(2,j)-1; i1++){
        ++bj;
        BVA(icu,j-1); //赋值变量
        jg = CR(sz,ccu,icu,h0);
        if(jg == 0)
```

```
        hq[h++] = bj;
      strcpy(sz,sz0); //恢复被修改的数组。
      printf("\t\t");
      for(i2 = 0; i2 < j; i2++)
        printf(" %d ",icu[i2]);//输出真值表前项
      printf("\t\t%d\n",jg);//输出运算结果
  }
  printf("\n");}
```

16 完整参考代码链接：
https://blog.csdn.net/tim_tsang/article/details/24579291

3.6 习题

1．用谓词和量词,将下列命题符号化.

（1）每个学生都爱学习。

（2）所有的狗身上都有跳蚤。

（3）不是每个大学生都学过计算机导论。

（4）不是所有的命题公式都是永真公式。

（5）有一匹马会做加法。

（6）会叫的狗未必会咬人。

（7）没有兔子会微积分。

（8）不存在十全十美的人。

解（1）设 $P(x)$：x 是学生；$Q(x)$：x 爱学习，则

上述句子(1)可符号化为：$\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$.

（2）设 $R(x)$：x 是狗；$S(x)$：x 身上都有跳蚤，则

上述句子(2)可符号化为：$\forall x(R(x)\rightarrow S(x))$.

（3）设 $P(x)$：x 是大学生；$Q(x)$：x 学过计算机导论，则

上述句子(3)可符号化为：$\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

（4）设 $P(x)$：x 是命题公式；$Q(x)$：x 是永真公式，则

上述句子(4)可符号化为：$\neg\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$.

（5）设 $P(x)$：x 是马；$Q(x)$：x 会做加法，则

上述句子(5)可符号化为：$\exists x\,(P(x)\wedge Q(x))$

（6）设 $D(x)$：x 是会叫的狗；$R(x)$：x 是会咬人的狗，则

上述句子(5)可符号化为：$\exists x\,(D(x)\wedge\neg R(x))$.

（7）设 $P(x)$：x 是兔子；$Q(x)$：x 会微积分，则

上述句子(7)可符号化为：$\neg\exists x\,(P(x)\wedge Q(x))$

（8）设 $D(x)$：x 是人；$R(x)$：x 是十全十美的，则

上述句子(8)可符号化为：$\exists x\,(D(x)\wedge\neg R(x))$.

考点：全称量词和存在量词的符号化规则，形如"不……"类型的语句谓词符号化，一元谓词符号化。

提示：对全称量词刻划的特性谓词,将作为蕴涵式的前件加入；对存在量词刻划的特性谓词,将作为合取式的合取项加入. 一元谓词刻画的是某客体的某种特性.

2．用谓词和量词,将下列命题符号化。

（1）每个人的外祖母都是他母亲的母亲。

（2）任何自然数的后继数必大于零。

（3）有些液体能溶解任何金属。

（4）任何金属均可溶解于某种液体之中。

解（1）设 $H(x)$：x 是人；$G(x, y)$：x 是 y 的外祖母；$M(x, y)$：x 是 y 的母亲，

则上述句子(1)可符号化为：

$$\forall x\forall y\,(H(x)\wedge H(y)\wedge G(x, y)\rightarrow\exists z\,(H(z)\wedge M(x, z)\wedge M(z, y)))。$$

（2）设 $N(x)$：x 是的自然数；$L(x, y)$：x 大于 y，则

上述句子(2)可符号化为：$\forall x\,(N(x)\rightarrow L(x+1，0))$。

（3）设 $P(x)$：x 是液体；$G(x)$：x 是金属；$L(x，y)$：x 溶解 y，则

上述句子(3)可符号化为：$\exists x\,(P(x)\wedge\forall y\,(G(y)\rightarrow L(x, y)))$。

（4）设 $P(x)$：x 是液体；$G(x)$：x 是金属；$R(x，y)$：x 溶解 y，则

上述句子(4)可符号化为：$\forall x\,(G(x)\rightarrow\exists y\,(P(y)\wedge L(x, y)))$。

考点：全称量词和存在量词的符号化规则，二元谓词符号化。

提示：对全称量词刻划的特性谓词,将作为蕴涵式的前件加入；对存在量词刻划的特性谓词,将作为合取式的合取项加入.n 元谓词刻画的是 n 个客体间的关系.

3．分别以大学生和所有人为论域，用谓词和量词,将下列命题符号化.

（1）有的大学生不喜欢骑自行车。

（2）存在不会游泳的大学生。

（3）每个喜欢步行的大学生都不喜欢坐汽车。

（4）每个大学生或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车。

（5）大学生都有移动电话。

（6）不是每个大学生都喜欢离散数学。

解　首先以人为论域

（1）设 $H(x)$：x 是大学生，$Q(x)$：x 喜欢骑自行车，则

上述句子(5)可符号化为：$\exists x(H(x)\wedge\neg Q(x))$.

（2）设 $P(x)$：x 是大学生, $Q(x)$：x 会游泳，则

上述句子(2)可符号化为：$\exists x\,(P(x)\wedge\neg Q(x))$.

（3）设 $H(x)$：x 是大学生，$P(x)$：x 喜欢步行，$R(x)$：x 喜欢坐汽车，则

上述句子(3)可符号化为：$\forall x\,(H(x)\wedge P(x)\rightarrow\neg R(x))$.

（4）设 $H(x)$：x 是大学生，$P(x)$：x 喜欢坐汽车, $Q(x)$：x 喜欢骑自行车，则

上述句子(4)可符号化为：$\forall x\,(H(x)\rightarrow P(x)\vee Q(x))$.

（5）设 $P(x)$：x 是大学生, $Q(x)$：x 有移动电话，则

上述句子(1)可符号化为：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

（6）设 $P(x)$：x 是大学生, $Q(x)$：x 喜欢离散数学，则

上述句子(1)可符号化为：$\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

考点：不同论域情形下谓词符号化。

提示：论域不同，谓词符号化的结果不同.

4．假设 $P(x)$：x 是有理数, $Q(x)$：x 是无理数，$R(x)$：x 是偶数，$N(x,y)$：x 整除 y. 将下列命题转换为自然语言，并给出其真值。

（1）$P(\sqrt{2})\wedge Q(\sqrt{2})$。

（2）$\exists x\,(R(x)\wedge N(x, 6))$。

（3）$\forall x\,(N(2, x)\rightarrow R(x))$。

（4）$\forall x(R(x)\rightarrow\forall y(N(x, y)\rightarrow R(y)))$。

（5）$\forall x\,(P(x)\rightarrow\exists y\,(Q(y)\wedge N(y, x)))$。

（6）$\forall x(Q(x)\rightarrow\exists y(R(y)\wedge\neg N(y,x)))$。

解　（1）$\sqrt{2}$既是有理数也是无理数，真值为 0。

（2）存在一个整除 6 的偶数，真值为 1。

（3）对任意 x, 如果 2 整除 x，那么 x 是偶数，真值为 1。

（4）对任意 x，如果 x 是偶数，那么对任意 y，若 x 整除 y，则 y 一定是偶数；或对任意的两个数 x，y，如果 x 是偶数且 x 整除 y，则 y 一定是偶数，真值为 1。

（5）对任意 x，如果 x 是有理数，那么存在 y, y 是无理数且 y 整除 x, 真值为 0。

（6）对任意 x，如果 x 是无理数，那么存在 y, y 是偶数且 y 不整除 x, 真值为 0。

考点：符号语言转换为自然语言。

提示：多个量词可按从外到内的顺序翻译。

5．试判断下列符号串是否为谓词公式。

（1）$P(a)\wedge(Q(x,y)\vee R(f(x))$。

（2）$(\neg P(x,y) \rightarrow \forall x\, Q(x,y)$。

（3）$\forall x(P(x,y)\rightarrow \neg P(x)\wedge \exists x\, Q(x,y)$。.

（4）$\forall x\, (P(x,y)\neg P(x)\wedge \exists x\, Q(x,y))$。

（5）$\forall x\, (P(x,y)\wedge \exists x\, Q(x,y))\wedge \ldots$。

（6）$\forall x\, (P(x,y)+\exists y Q(y))$。

解　（1）是谓词公式，其他都不是。

6．指出下列谓词公式中量词的辖域及变元的类型。

（1）$\exists x\, P(x)\vee R\, (x, y)$。

（2）$\forall x\, (P(x)\leftrightarrow Q(x))\wedge \exists x\, R(x)\vee S(x)$。

（3）$\exists x\, P(x)\wedge (\forall y)Q(x,y)$。

（4）$\exists x\, \forall y(P(x, y)\vee Q(y, z))\wedge \forall y R(x, y)$。

（5）$\forall x\, (P(x)\wedge Q(x))\rightarrow \forall x\, P(x)\wedge Q(x)$。

（6）$\forall x\, (P(x, y)\rightarrow R(x))\wedge \exists y\, Q(x, y, z)$。

解（1）$\exists x$ 的辖域为 $P(x)$,因此 $P(x)$中的 x 是约束变元. $R(x,y)$中的 x 和 y 都是自由变元。

（2）$\forall x$ 的辖域为$(P(x)\leftrightarrow Q(x))$，$P(x)$，$Q(x)$中的 x 是约束变元, $\exists x$ 的辖域为 $R(x)$，$R(x)$中的 x 是约束变元,$S(x)$中的 x 是自由变元。

（3）$\exists x$ 的辖域为 $P(x)$，$P(x)$中的 x 是约束变元；$\forall y$ 的辖域为 $Q(x，y)$，$Q(x，y)$中的 y 是约束变元, x 是自由变元。

（4）$\exists x$ 的辖域为$\forall y(P(x, y)\vee Q(y, z))$，$P(x, y)$，$Q(y, z)$中的 x 是约束变元，y 和 z 是自由变元；$\forall y$ 的辖域为 $R(x, y)$，$R(x, y)$中的 y 是约束变元 x 是自由变元。

（5）第一个$\forall x$ 的辖域为 $P(x)\wedge Q(x)$，$P(x)$，$Q(x)$中的 x 是约束变元；第二个$\forall x$ 的辖域为 $P(x)$，$P(x)$中的 x 是约束变元；第二个 $Q(x)$中的 x 是自由变元。

（6）$\forall x$ 的辖域为 $P(x,y)\rightarrow R(x)$，$P(x,y)$和 $R(x)$中的 x 是约束变元,$P(x,y)$中的 y 是自由变元；$\exists y$ 的辖域为 $Q(x, y，z)$，$Q(x, y，z)$中的 y 是约束变元；x 和 z 是自由变元。

考点：辖域、自由变元和约束变元的定义。

提示：$\forall x\, F(x)$, $\exists x F(x)$中的 $F(x)$称为全称量词和存在量词的辖域；在辖域内约束出现的变元是约束变元，自由出现的变元 x 称为自由变元。

7．对下列公式中的变元进行代换，使得任何变元不能既是约束变元又是自由变元。

（1）$\forall x\exists y(P(x,y)\vee Q(x,y,z)$。

（2）$\forall x P(x,y)\leftrightarrow \exists z R(x,y,z)$。

（3）$\forall x\exists y((P(x,y)\wedge Q(y,z))\rightarrow \forall x R(x,y,z)$。

（4）$\forall x\exists z(P(x,y)\rightarrow R(x,z))\wedge Q(x,y,z)$。

解　（1）因为公式$(P(x,y)$中的 x 和 y 是约束变元，$Q(x,y,z)$中的 x，y，z 是自由变元，则

利用规则 1 对 x，y 进行改名，可得$\forall s\exists t(P(s,t)\vee Q(x,y,z)$;

利用规则 2 对 x，y 进行代入，可得$\forall x\exists y(P(x,y)\vee Q(r,s,t)$。

（2）因为公式 $P(x,y)$中的 x 是约束变元，y 是自由变元，$R(x,y,z)$中的 x，y 是自由变元，z 是约束变元，则

利用规则 1 对 $P(x,y)$中的 x 进行改名，可得$\forall s P(s,y)\leftrightarrow \exists z R(x,y,z)$;

利用规则 2 对 $R(x,y,z)$中的 x 进行代入，可得$\forall x P(x,y)\leftrightarrow \exists z R(s,y,z)$。

（3）因为公式 $P(x,y)$和 $Q(y,z)$中的 y 是约束变元，$R(x,y,z)$中的 y 是自由变元，又 $P(x,y)$

和 $R(x,y,z)$的 x 分别在不同的辖域，则

利用规则 1 对约束变元 y 和不同辖域中的的 x 进行改名，可得

$$\forall s\exists t((P(s,t)\wedge Q(t,z))\rightarrow\forall xR(x,y,z)\ ;$$

利用规则 2 对 $R(x,y,z)$中的 y 进行代入，可得$\forall s\exists y((P(s,y)\wedge Qy,z))\rightarrow\forall xR(x,s,z)$。

（4）因为公式 $P(x,y)$和 $R(x,z)$中的 x 和 z 是约束变元，$Q(x,y,z)$中的 x 和 z 是自由变元，则

利用规则 1 对约束变元 x 和 z 进行改名，可得$\forall s\exists t(P(s,y)\rightarrow R(s,t))\wedge Q(x, y, z)$。

利用规则 2 对 $Q(x,y,z)$中的 x 和 z 进行代入，可得$\forall x\exists z(P(x,y)\rightarrow R(x,z))\wedge Q(s, y, t)$。

考点：约束变元的改名规则，自由变元的代入规则。

提示：对约束变元，将量词辖域内与作用变元相同的约束变元都用新的个体变元替换；新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变量.对自由变元，将公式中出现某个自由变元的每一处都用新的个体变元替换；新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。

8. 设下面所有谓词的个体域都是 A={a,b}，试将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等价的命题公式。

（1）$\forall xP(x)\wedge\exists xR(x)$。

（2）$\forall x(\neg P(x)\rightarrow Q(x))$。

（3）$\forall x\exists yP(x,y)$。

（4）$\exists y\forall x(\neg P(x,y)\vee Q(x))$。

解 （1）$\forall xP(x)\wedge\exists xR(x)=(P(a)\wedge P(b))\wedge(R(a)\vee R(b))$。

（2）$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))=(\neg P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(\neg P(b)\rightarrow Q(b))$。

（3）$\forall x\exists yP(x,y)=\forall x(P(x,a)\vee P(x,b))=(P(a,a)\vee P(a,b))\wedge(P(b,a)\vee P(b,b))$。

（4）$\exists y\forall x(\neg P(x,y)\vee Q(x))=\exists y(\neg P(a,y)\vee Q(a))\wedge\exists y\neg P(b,y)\vee Q(b))$

$= ((\neg P(a, a)\vee Q(a))\vee(\neg P(a, b)\vee Q(a)))\wedge((\neg P(b, a)\vee Q(b))\vee(\neg P(b, b)\vee Q(b)))$

$= (\neg P(a, a)\vee\neg P(a, b)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b, a)\vee\neg P(b, b)\vee Q(b))$。

考点：对可数个体域去掉量词的规则。

提示：对全称量词，去掉量词后，用合取联结词联结；对存在量词，用析取联结词联结。

9. 设解释 I 为：D={a,b}；P(a,a)=1；P(b,b)=0；P(a,b)=0；P(b,a)=1，f(a)=b，f(b)=a。试确定下列谓词公式在 I 下的真值。

（1）$\forall x\exists yP(x,y)$。

（2）$\exists x\forall yP(f(x),y)$。

（3）$\forall x\forall yP(x,f(y))$

（4）$\exists x\exists y(P(x,y)\rightarrow\neg P(y,x))$。

解 (1) $\forall x\exists yP(x, y)=\forall x(P(x,a)\vee P(x,b))=(P(a,a)\vee P(a,b))\wedge(P(b,a)\vee P(b,b))$

$= (1\vee 0)\wedge(1\vee 0)=1.$（先去存在量词，再去全称量词）

或者 $\forall x\exists yP(x, y)= (\exists yP(a,y)\wedge\exists yP(b,y))= (P(a,a)\vee P(a,b))\wedge(P(b,a)\vee P(b,b))$

$= (1\vee 0)\wedge(1\vee 0)=1.$（先去全称量词，再去存在量词）

（2）$\exists x\forall yP(f(x), y) = \exists x(P(f(x), a)\wedge P(f(x),b))$

$= (P(f(a), a)\wedge P(f(a),b))\vee (P(f(b), a)\wedge P(f(b),b))$

$= (P(b, a)\wedge P(b,b))\vee (P(a, a)\wedge P(a,b))$

$= (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)=0.$（先去全称量词，再去存在量词）

或者$\exists x\forall yP(f(x), y) =\forall yP(f(a), y)\vee\forall yP(f(a), y)$

$= (P(f(a), a)\wedge P(f(a),b))\vee (P(f(b), a)\wedge P(f(b),b))$

$= (P(b, a)\wedge P(b,b))\vee (P(a, a)\wedge P(a,b))$

$= (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)=0.$（先去存在量词，再去全称量词）

（3）$\forall x\forall yP(x, f(y)) =\forall yP(a, f(y))\wedge\forall yP(b, f(y))$

$= (P(a, f(a))\wedge P(a, f(b))\wedge\ (P(b, f(a))\wedge P(b, f(b)))$

$= (P(a,b)\wedge P(a,a))\ \wedge\ (P(b, b)\wedge P(b,a))$

$= (0\wedge 1)\ \wedge(0\wedge 1)=0.$（先去$(\forall x)$，再去$(\forall y)$）

（4）$\exists x\exists y(P(x, y)\to\neg P(y, x))= \exists y(P(a, y)\to\neg P(y, a))\ \vee\exists y(P(b, y)\to\neg P(y, b))$

$=(P(a,a)\to\neg P(a,a))\vee(P(a,b)\to\neg P(b,a))\vee(P(b, a)\to\neg P(a, b))\vee(P(b,b)\to\neg P(b, b))$

$=(1\to\neg 1)\vee(0\to\neg 1)\vee(1\to\neg 0)\vee(0\to\neg 0)=1$（先去$(\exists x)$，再去$(\exists y)$）

考点：对可数个体域去掉量词的规则，去掉多个量词的方法。

提示：去掉公式中多个量词时，可以按照从外到内进行，也可以从内到外进行。

10．计算下列各式的真值，其中 D 为论域。

（1）$\forall x(P(x)\vee Q(x))\wedge R$（2），解释：$D=\{1,2,3\}$，$P(x)$：$2x+1 =3$；$Q(x)$：x 是奇数，$R(x)$：$x<3$。

（2）$\forall x(P\to Q(x))\vee R(a)$。解释：$D=\{-2,3,6\}$，P：$2>1$；$Q(x)$：$x\le 3$；$R(x)$：$x\ge 6$；$a =3$。

（3）$\exists x(P(x)\to Q(x))\wedge 1$。解释：$D=\{1,2\}$，$P(x)$：$x>2$；$Q(x)$：$x =0$。

解　（1）$\forall x (P(x)\vee Q(x))\wedge R(2)=(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2)\wedge(P(3)\vee Q(3))\wedge R(2)$

$=((1\vee 1)\wedge(0\vee 0)\wedge(0\vee 1))\wedge 1=0$。

（2）$\forall x (P\to Q(x))\vee R(a) = ((1\to Q(3))\wedge(1\to Q(-2))\wedge(1\to Q(6)))\vee R(5)$

$= ((1\to 1)\wedge(1\to 1)\wedge(1\to 0))\vee 0=0$。

（3）$\exists x (P(x)\to Q(x))\wedge 1=((P(1)\to Q(1))\vee(P(2)\to Q(2)))\wedge 1$

$=((0\to 0)\vee(0\to 0))\wedge 1=1$。

考点：有命题和谓词的混合求值。

提示：无论是谓词公式求值还是命题公式求值，最终归结为 0 和 1 在各种联结词下的求值。

11．设 $G = \exists xP(x)\to\forall xP(x)$。

（1）若解释 I 的个体域 D 是单元素集, 则计算 G 在 I 下的真值。

（2）设 $D = \{a, b\}$,试找出一个 D 上的解释 I,使得 G 在 I 下取值为“假”。

（3）设 $D = \{a, b\}$,试找出一个 D 上的解释 I,使得 G 在 I 下取值为“真”。

解　（1）因为 D 是单元素集，所以$(\exists x)P(x)=(\forall x)P(x)$，从而无论 $P(x)$为何值，G 的取值都为“真”;

（2）令 $P(a)=1$，$P(b)=0$ 时，G 的取值为“假”。

（3）令 $P(a)=1$，$P(b)=1$ 时，G 的取值为“真”。

考点：合适公式求值。

提示：先去掉量词。

12．判断下列证明的正确性，如果不正确，请改正。

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$　　（第一步）

$=\forall x\neg(P(x)\wedge\neg Q(x))$　　（第二步）

$=\neg\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$　　（第三步）

$=\neg(\exists xP(x)\wedge\exists x\neg Q(x))$　　（第四步）

$=\neg\exists xP(x)\vee\forall xQ(x))$　　（第五步）

$=\exists xP(x)\to\forall xQ(x))$　　（第六步）

解　证明过程中第四步出错，因为$(\exists x)$对$\wedge$不满足分配律。

正确的证明过程如下：

$\forall x(P(x)\to Q(x))= \forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$= \forall x \neg (P(x) \wedge \neg Q(x))$

$= \neg \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

（2）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$= \neg \forall x(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$　　（第一步）

$= \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$　　（第二步）

$= (\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$　　（第三步）

$= (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vee \exists x \neg P(x)) \wedge (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vee \exists x \neg Q(x))$　　（第四步）

$= (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vee \neg \forall x P(x)) \wedge (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vee \neg \forall x Q(x))$　　（第五步）

$= 1 \wedge 1 = 1$　　（第六步）

解 证明过程中第三步出错，因为$(\exists x)$对$\wedge$不满足分配律。

正确的证明过程如下：

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee (\forall y) Q(y))$

$= \neg \forall x(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$= (\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

（3）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$= \neg \forall x(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$　　（第一步）

$= \neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$　　（第二步）

$= \neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$　　（第三步）

$= 1$　　（第四步）

解 证明过程中第三步出错，因为$(\forall x)$对$\vee$不满足分配律。

正确的证明过程如下：

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$= \neg \forall x(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$= (\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

（4）$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$

$= \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$　　（第一步）

$= \forall x(\neg (P(x) \vee \neg Q(x)) \vee \forall x(P(x) \wedge Q(x))$　　（第二步）

$= \forall x((\neg (P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$　　（第三步）

$= \forall x(\neg (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$　　（第四步）

$= 1$　　（第五步）

解 证明过程中第二步出错，因为$(\forall x)$对$\vee$不满足分配律。

正确的证明过程如下：

$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$

$= \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$

$= \forall x(\neg (P(x) \vee \neg Q(x)) \vee \forall x(P(x) \wedge Q(x)$

考点：基本等价关系，存在量词只对析取满足分配律，全称量词只对合取满足分配律。

提示：存在、全称量词与合取、析取的分配性。

13．试判断下列合式公式的类型.

（1）$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$。

（2）$\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$。

（3）$\neg (P(x) \rightarrow \forall y(G(x,y) \rightarrow P(x)))$。

（4）$\neg \forall x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \wedge \forall y Q(y)$。

（5）$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$。

（6）$\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$。

解 （1）$\forall xP(x)\rightarrow\exists xP(x)=\neg\forall xP(x)\lor\exists xP(x)=\exists x(\neg P(x)\lor P(x))=1$

即（1）是有效式.

（2）$\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall y\exists xP(x,y)=\neg\exists x\forall yP(x,y)\lor\forall y\exists xP(x,y)$

$=\forall x\exists y\neg P(x,y)\lor\forall y\exists xP(x,y)$

$=\forall x\exists s\neg P(x,s)\lor\forall y\exists tP(t,y)$

$=\forall x\forall y(\exists s\neg P(x,s)\lor\exists sP(s,y))$---辖域的扩张(任意)，改名(存在)

$=\forall x\forall y\exists s(\neg P(x,s)\lor P(s,y))$

$=1$

即（2）是有效式.

（3）$\neg(P(x)\rightarrow\forall y(G(x,y)\rightarrow P(x)))=\neg(\neg P(x)\lor\forall y(\neg G(x,y)\lor P(x)))$

$=P(x)\land\exists y(G(x,y)\land\neg P(x))$

$=P(x)\land\neg P(x)\land\exists yG(x,y)=0$

即（3）是矛盾式.

（4）$\neg\forall x(P(x)\rightarrow\forall yQ(y))\land\forall yQ(y)=\neg\forall x(\neg P(x)\lor\forall yQ(y))\land\forall yQ(y)$

$=\exists x((P(x)\land\neg\forall yQ(y))\land\forall yQ(y)$

$=\exists xP(x)\land\neg\forall yQ(y)\land\forall yQ(y)=0$

即（4）是矛盾式.

（5）$\exists x P(x)\rightarrow\forall xP(x)=\neg\exists x P(x)\lor\forall xP(x)=\forall x\neg P(x)\lor\forall xP(x)$

即（5）是可满足式.

（6）$\forall x\exists y(x,y)\rightarrow\exists x\forall yP(x,y)=\neg(\forall x)(\exists y)P(x,y)\lor\exists x(\forall y)P(x,y)$

$=\exists x\forall y\neg P(x,y)\lor\exists x\forall yP(x,y)$

$=\exists x(\forall y\neg P(x,y)\lor\forall yP(x,y))$

即（6）是可满足式.

考点：基本等价关系，公式的分类。

提示：合式公式分为有效式、矛盾式和可满足式。

14．证明下列等价关系。

（1）$\forall x\forall y(P(x)\lor Q(y))=\forall xP(x)\lor\forall yQ(y)$。

（2）$\exists x\exists y(P(x)\land Q(y))=\exists xP(x)\land\exists yQ(y)$。

（3）$\neg\exists y\forall x P(x,y)=\forall y\exists x\neg P(x,y)$。

（4）$\neg\exists x(P(x)\land Q(x))=\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$。

（5）$\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))=\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$。

（6）$\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))=\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$。

证明：

(1) 左边$=\forall x\forall y(P(x)\lor Q(y))=\forall x(P(x)\lor\forall yQ(y))$

$=\forall xP(x)\lor\forall yQ(y)=$右边 —量词辖域的收缩

（2）右边$=\exists xP(x)\land\exists yQ(y)=\exists x(P(x)\land\exists yQ(y))$

$=\exists x\exists y(P(x)\land Q(y))=$左边 —量词辖域的扩张

（3）左边$=\neg\exists y\forall xP(x,y)=\forall y\neg\forall xP(x,y)=\forall y\exists x\neg P(x,y)=$右边 —量词转换律

（4）左边$=\neg\exists xP(x)\land Q(x))=\forall x\neg(P(x)\land Q(x))$ —量词转换律

$=\forall x(\neg P(x)\lor\neg Q(x))$ —德摩根律

$=\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))=$右边 —蕴含式

（5）右边$=\neg\forall xP(x)\lor(\exists y)Q(y)$ —蕴含式

$=\exists x\neg P(x)\lor\exists yQ(y)$ —量词转换律

$=\exists x\exists y(\neg P(x)\lor Q(y))=$左边 —量词辖域的扩张

(6) 右边$=\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$ —蕴含式

$=\forall x\neg P(x)\vee\forall yQ(y)$ —量词转换律

$=\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))$ —量词辖域的扩张

$=\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))$ —蕴含式

考点：基本等价关系。

提示：充分利用命题和谓词的基本等价关系。

15．化简下列谓词公式。

（1）$\forall x(P(x)\to Q(x))\to\exists y(P(y)\to\neg Q(y))$。

（2）$\exists x(P(x)\to Q(x))\leftrightarrow\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$。

（3）$\forall x\forall y(P(x,y)\wedge Q(x,y)\to P(x,y))$。

（4）$\neg(\exists xP(x)\wedge\forall yQ(y))\to(\neg\exists xP(x)\vee(\exists xP(x)\to\forall yQ(y)))$。

解：（1）原式$=\neg\forall x(P(x)\to Q(x))\vee\exists y(P(y)\to\neg Q(y))$ —蕴含式

$=\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\vee\exists y(\neg P(y)\vee\neg Q(y))$ —蕴含式

$=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$ —量词转换律

$=\exists x((P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\neg P(x)\vee\neg Q(x))$ —量词分配律

$=\exists x((P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\neg Q(x)\vee\neg P(x))$ —交换律

$=\exists x(\neg Q(x)\vee\neg P(x))$ — 吸收律

(2) 原式$=\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow(\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$ —蕴含式

$=\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow(\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x))$ —量词转换律

$=\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$ —量词分配律

$=1$ —等价联结词真值规定

(3) 原式$=\forall x\forall y(\neg(P(x,y)\wedge Q(x,y))\vee P(x,y))$ —蕴含式

$=\forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee\neg Q(x,y)\vee P(x,y))$ —德摩根律

$=1$

(4) 原式$=(\exists xP(x)\wedge\forall yQ(y))\vee(\neg\exists xP(x)\vee(\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y))$ —蕴含式

$=(\exists xP(x)\wedge(\forall y)Q(y))\vee\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$ —幂等律

$=\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$ —吸收律

考点：基本等价关系。

提示：充分利用命题和谓词的基本等价关系。

16．求下述谓词公式的前束范式和 Skolem 范式。

（1）$\forall x P(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$。

（2）$\forall xP(x)\vee\neg\exists xQ(x)$。

（3）$\forall x(P(x)\to Q(x,y))\to(\exists yR(y)\to\exists zS(y,z))$。

（4）$\forall y(P(x)\to\exists yQ(x,y))$。

（5）$\forall x(P(x)\to\exists yQ(x,y))\vee\forall xR(x,y)$。

（6）$\forall xP(x,y)\to\exists yQ(x,y)$。

解：(1) $\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$

$=\forall xP(x)\wedge\neg\exists yQ(y)$ —换名规则

$=\forall xP(x)\wedge\forall y\neg Q(y)$ —量词转换律

$=\forall x\forall y(P(x)\wedge\neg Q(y))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$\Rightarrow P(x)\wedge\neg Q(y)$ ——Skolem 范式

或者

$\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$

$=\forall xP(x)\wedge\forall x\neg Q(x)$ —量词转换律

$= \forall x(P(x)\wedge\neg Q(x))$ —全称量词对合取的分配律(前束范式)

$\Rightarrow\ P(x)\wedge\neg Q(x)$ ——Skolem 范式

(2) $\forall xP(x)\vee\neg\exists xQ(x)$

$= \forall xP(x)\vee\forall x\,\neg Q(x)$ —量词转换律

$= \forall xP(x)\vee\forall y\,\neg Q(y)$ —换名规则

$= \forall x\forall y(P(x)\vee\neg Q(y))$ —量词辖域的扩张

$= \forall x\forall y(P(x)\vee\neg Q(y))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$\Rightarrow\ P(x)\vee\neg Q(y)$ ——Skolem 范式

（3）$\forall x(P(x)\to Q(x, y))\to(\exists yR(y)\to\exists zS(y,z))$

$=\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x, y))\vee(\neg\exists yR(y)\vee\exists zS(y,z))$ —蕴含式

$=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x, y))\vee(\forall y\,\neg R(y)\vee\exists zS(y,z))$ —量词转换律

$=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x, s))\vee\forall y\neg R(y)\vee\exists zS(s,z)$ —自由变元的代入规则

$=\exists x\forall y\exists z(((P(x)\wedge\neg Q(x, s))\vee\neg R(y)\vee S(s,z))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$\Rightarrow((P(a)\wedge\neg Q(a, s))\vee\neg R(y)\vee S(s,f(y))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

（4）$\forall x(P(x)\to\exists yQ(x, y))$

$= \forall x(\neg P(x)\vee\exists yQ(x, y))$ —蕴含式

$= \forall x\exists y\,(\neg P(x)\vee Q(x, y))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$\Rightarrow\ \neg P(x)\vee Q(x, y)$ ——Skolem 范式

$= \forall x\exists y\,(P(x)\to Q(x, y))$ —蕴含式(前束范式)

$\Rightarrow\ P(x)\to Q(x, f(x))$ ——Skolem 范式

（5）$\forall x(P(x)\to\exists yQ(x, y))\vee\forall xR(x,y)$

$= \forall x(\neg P(x)\vee\exists yQ(x, y))\vee\forall xR(x,y)$ —蕴含式

$= \forall x\exists y(\neg P(x)\vee Q(x, y))\vee\forall xR(x,y)$ —量词辖域的扩张

$= \forall x\exists y(\neg P(x)\vee Q(x, y))\vee\forall zR(z,t)$ —改名规则，换名规则

$= \forall x\exists y\forall z(\neg P(x)\vee Q(x, y)\vee R(z,t))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$\Rightarrow\ \neg P(x)\vee Q(x, f(x))\vee R(z,t)$

$=\forall x\exists y\forall z((P(x)\to Q(x, y))\vee R(z,t))$ —蕴含式(前束范式)

$\Rightarrow(P(x)\to Q(x, f(x))\vee R(z,t)$ ——Skolem 范式

(6) $\forall xP(x,y)\to\exists yQ(x, y)$.

$=\neg\forall xP(x,y)\vee\exists yQ(x, y)$ —蕴含式

$=\exists x\neg P(x,y)\vee\exists yQ(x, y)$ —量词转换律

$=\exists x\neg P(x,s)\vee\exists yQ(t, y)$ —自由变元的代入规则

$=\exists x\exists y(\neg P(x,s)\vee Q(t, y))$ —量词辖域的扩张(前束范式)

$=\exists x\neg P(x,s)\vee\exists xQ(t, x)$ —约束变元的改名规则(前束范式)

$=\exists x(\neg P(x,s)\vee Q(t, x))$

$\Rightarrow\neg P(x,s)\vee Q(t, x)$ ——Skolem 范式

考点：前束范式和 Skolem 范式定义及求解方法。

提示：前束范式是不惟一的。

17．指出下面的演绎中的错误,并给出正确的推导过程。

（1）①$P(x)\to Q(c)$ P

②$\exists x(P(x)\to Q(x))$ EG

解 在第①步中 x 是以自由变元的身份出现，所以在对个体常量加入量词时，该量词的变元符号不能在原公式中以自由变元的身份出现。正确的推导可为：

① $P(x)\to Q(c)$ P

② $\exists y\,(P(x)\to Q(y))$ EG，①

（2）① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ P

② $P(c)\to Q(c)$ UI，①

③ $\exists x\neg Q(x)$ P

④ $\neg Q(c)$ EI，③

⑤ $\neg P(c)$ T，②，④

⑥ $\neg\forall x\, P(x)$ UG，⑤

解：第④步出错，因为第②步中的c是任意给定的个体常量，不一定满足$\neg Q(c)=1$的要求；第⑥步出错，是EG规则。

正确的推导过程如下：

① $\exists x\neg Q(x)$ P

② $\neg Q(c)$ ES，①

③ $\forall x(P(x)\to Q(x))$P

④ $P(c)\to Q(c)$ US，③

⑤ $\neg P(c)$ T，②，④

⑥ $\neg\forall xP(x)$ EG，⑤

（3）① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ P

② $P(c)\to Q(c)$ UI，①

③ $\exists xP(x)$ P

④ $P(d)$ EI，③

⑤ $Q(c)$ T，②，④

⑥ $\exists xQ(x)$ UG，⑤

解：第⑤步出错，因为第④步不是第②步的前件。

正确的推导过程如下：

① $\exists xP(x)$ P

② $P(c)$ EI，①

③ $\forall x(P(x)\to Q(x))$ P

④ $P(c)\to Q(c)$ UI，③

⑤ $Q(c)$ T，②，④

⑥ $\exists xQ(x)$ UG，⑤

（4）① $\exists xQ(x)$ P

② $Q(c)$ EI，①

③ $\forall x\, P(x)$ P

④ $P(c)$ UI，③

⑤ $P(c)\wedge Q(c)$ T，②，④

⑥ $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ UG，⑤

解：第⑥步出错，因为第②步中的c是EI得到的，添加量词时只能使用EG规则。

正确的推导过程如下：

① $\exists xQ(x)$ P

② $Q(c)$ EI，①

③ $\forall x\, P(x)$ P

④ $P(c)$ UI，③

⑤ $P(c)\wedge Q(c)$ T，②，④

⑥ $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ EG，⑤

18．设论域 D={1，2，3}，验证下列推理定律成立。

（1）$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$。

（2）$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$。

解：（1）$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)=(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\vee(Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c))$

$=(P(a)\vee Q(a))\wedge(P(a)\vee Q(b))\wedge(P(a)\vee Q(c))\wedge$

$(P(b)\vee Q(a))\wedge(P(b)\vee Q(b))\wedge(P(b)\vee Q(c))\wedge$

$(P(v)\vee Q(a))\wedge(P(v)\vee Q(b))\wedge(P(c)\vee Q(c))\wedge$

$=(P(a)\vee Q(a))\wedge(P(a)\vee Q(b))\wedge(P(a)\vee Q(c))\wedge$

$(P(b)\vee Q(a))\wedge(P(b)\vee Q(b))\wedge(P(b)\vee Q(c))\wedge$

$(P(v)\vee Q(a))\wedge(P(v)\vee Q(b))\wedge(P(c)\vee Q(c))$

$\Rightarrow (P(a)\vee Q(a))\wedge(P(b)\vee Q(b))\wedge(P(c)\vee Q(c))$

$=\forall x(P(x)\vee Q(x))$

（2）$\exists x(P(x)\wedge Q(x)) =(P(a)\wedge Q(a))\vee(P(b)\wedge Q(b))\vee(P(c)\wedge Q(c))$

$=(P(a)\vee P(b)\vee P(c))\wedge(P(a)\vee P(b)\vee Q(c))\wedge(P(a)\vee Q(b)\vee P(c))\wedge(P(a)\vee Q(b)\vee Q(c))\wedge$

$(Q(a)\vee P(b)\vee P(c))\wedge(Q(a)\vee P(b)\vee Q(c))\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee P(c))\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

$\Rightarrow(P(a)\vee P(b)\vee P(c))\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

考点：可数集上量词消去方法，“$\wedge$”对“$\vee$”的分配律，“$\vee$”对“$\wedge$”的分配律，简化规则I_1。

19．构造下列推理的证明。

（1）$\forall x(\neg P(x)\rightarrow Q(x))$，$\forall x\neg Q(x)\Rightarrow\exists xP(x)$。

（2）$\neg(\exists xP(x)\wedge Q(c))\Rightarrow\exists xP(x)\rightarrow\neg Q(c)$。

（3）$\exists xP(x)\rightarrow\forall y((P(y)\vee Q(y))\rightarrow R(y))$，$\exists xP(x)\Rightarrow\exists xR(x)$。

（4）$\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\wedge R(x)))$，$\exists xP(x)\Rightarrow\exists x(P(x)\wedge R(x))$。

证明：（1）

① $\forall x\neg Q(x)$　　P

② $\neg Q(c)$　　US，①

③ $\forall x(\neg P(x)\rightarrow Q(x))$　　P

④ $\neg P(c)\rightarrow Q(c)$　　US，③

⑤ $\neg(\neg P(c))$　　T，②，④，I

⑥ $P(c)$　　T，⑤，I

⑦ $\exists xP(x)$　　EG，⑥

考点：量词的消去和添加规则。

提示：EG，UG 消去的量词，可以用 UG，也可以用 EG 添加量词。

（2）① $\neg(\exists xP(x)\rightarrow\neg Q(c))$　　P(附加前提)

② $\neg(\neg\exists xP(x)\vee\neg Q(c))$　　T, ①, E

③ $\exists xP(x)\wedge Q(c)$　　T, ②, E

④ $(\exists x)P(x)$　　T, ③, I

⑤ $Q(c)$　　T, ③, I

⑥ $\neg(\exists xP(x)\wedge Q(c))$　　P

⑦ $\neg\exists xP(x)\vee\neg Q(c))$　　T, ⑥, E

⑧ $\neg\exists xP(x)$　　T, ⑤, ⑦，E

⑨ $\exists xP(x)\wedge\neg(\exists x)P(x)$　　T, ④, ⑧，E

（3）① $\exists xP(x)$　　P

② $\exists xP(x)\rightarrow\forall y((P(y)\vee Q(y))\rightarrow R(y))$　　P

③ $\forall y((P(y)\vee Q(y))\to R(y))$ T, ①, ②, I

④ $P(c)$ ES, ①

⑤ $(P(c)\vee Q(c))\to R(c)$ US, ③

⑥ $P(c)\vee Q(c)$ T，④，I

⑦ $R(c)$ T，⑤，⑥，I

⑧ $\exists xP(x)$ EG，⑦

（4）① $\exists xP(x)$ P

② $P(c)$ ES, ①

③ $\forall x(P(x)\to(Q(x)\wedge R(x)))$ P

④ $P(c)\to(Q(c)\wedge R(c))$ US, ③

⑤ $Q(c)\wedge R(c)$ T, ②, ④，I

⑥ $R(c)$ T，⑤，I

⑦ $P(c)\wedge R(c)$ T，②，⑥，I

⑧ $\exists x(P(x)\wedge R(x))$ EG，⑦

20．先计算下列蕴涵式的 Skolem 范式，然后用消解原理证明其正确性。

（1）$\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall x(\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\to\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))$。

（2）$\exists xP(x)\to\forall x((P(x)\vee Q(x))\to R(x))$，$\exists xP(x)$，$\exists xQ(x)\Rightarrow\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y))$。

解：（1）$\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\neg(\forall x(\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\to\exists y(Q(y)\wedge R(x,y))))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge\neg(\forall x(\neg\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\vee\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\exists x(\exists y(P(y)\wedge R(x,y))\wedge\forall y(\neg Q(y)\vee\neg R(x,y)))))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\exists z(\exists y(P(y)\wedge R(z,y))\wedge\forall t(\neg Q(t)\vee\neg R(z,t)))))$

$=\forall x\exists z\exists y\forall t\ ((\neg P(x)\vee Q(x))\wedge P(y)\wedge R(z,y)\wedge(\neg Q(t)\vee\neg R(z,t))$

$\Rightarrow\forall x\forall t\ ((\neg P(x)\vee Q(x))\wedge P(g(x))\wedge R(f(x), g(x))\wedge(\neg Q(t)\vee\neg R(f(x),t))$

由 Skolem 范式得到子句集：

A={$\neg P(x)\vee Q(x)$, $P(g(x))$, $R(f(x), g(x))$, $\neg Q(t)\vee\neg R(f(x),t)$**}**

然后，对集合 A 应用消解原理。

① $P(g(x))$ P

② $\neg P(x)\vee Q(x)$ P

③ $Q(g(x))$ T，①，②，消解原理，代换$\{g(x)/x\}$

④ $\neg Q(t)\vee\neg R(f(x),t)$ P

⑤ $\neg R(f(x),g(x))$ T，③，④，消解原理，代换$\{g(x)/t\}$

⑥ $R(f(x), g(x))$ P

⑦ $\neg R(f(x),g(x))\wedge R(f(x), g(x))$ T，⑤，⑥

（2）$(\exists xP(x)\to\forall x((P(x)\vee Q(x))\to R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\wedge\neg(\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y)))$

$=(\neg\exists xP(x)\vee\forall x(\neg(P(x)\vee Q(x))\vee R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\wedge\neg(\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y)))$

$=(\forall x\neg P(x)\vee\forall x((\neg P(x)\wedge\neg Q(x))\vee R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\wedge\forall x\forall y(\neg R(x)\vee\neg R(y))$

$=(\forall x\neg P(x)\vee\forall x((\neg P(x)\vee R(x))\wedge(\neg Q(x)\vee R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$
$\wedge\forall x\forall y(\neg R(x)\vee\neg R(y))$

$=(\forall x\neg P(x)\vee(\forall x(\neg P(x)\vee R(x))\wedge\forall x(\neg Q(x)\vee R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$
$\wedge\forall x\forall y(\neg R(x)\vee\neg R(y))$

$=(\forall x\neg P(x)\vee\forall x(\neg P(x)\vee R(x)))\wedge(\forall x\neg P(x)\vee\forall x(\neg Q(x)\vee R(x)))\wedge\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$
$\wedge\forall x\forall y(\neg R(x)\vee\neg R(y))$

$=\exists uP(u)\land\exists vQ(v)\land(\forall x\neg P(x)\lor\forall y(\neg P(y)\lor R(y)))\land(\forall s\neg P(s)\lor\forall t(\neg Q(t)\lor R(t)))$
$\land\forall p\forall q(\neg R(p)\lor\neg R(q))$

$=\exists u\exists v\forall x\forall y\forall s\forall t\forall p\forall q\ P(u)\land Q(v)\land(\neg P(x)\lor\neg P(y)\lor R(y)\land(\neg P(s)\lor\neg Q(t)\lor R(t))\land$
$(\neg R(p)\lor\neg R(q))$

$\Rightarrow\forall x\forall y\forall s\forall t\forall p\forall qP(a)\land Q(b)\land(\neg P(x)\lor\neg P(y)\lor R(y)\land(\neg P(s)\lor\neg Q(t)\lor R(t))\land$
$(\neg R(p)\lor\neg R(q))$

由 Skolem 范式得到子句集：

A={ $P(a), Q(b),\neg P(x)\lor\neg P(y)\lor R(y),\neg P(s)\lor\neg Q(t)\lor R(t), \neg R(p)\lor\neg R(q)$**}**

然后，对集合 A 应用消解原理。

① $P(a)$	P
② $\neg P(x)\lor\neg P(y)\lor R(y)$	P
③ $R(a)$	T，①，②，消解原理，代换{a/x},代换{a/y}
④ $Q(b)$	P
⑤ $\neg P(s)\lor\neg Q(t)\lor R(t)$	P
⑥ $R(b)$	T，④，⑤, 消解原理，代换{b/t}，代换{a/s}
⑦ $\neg R(p)\lor\neg R(q)$	P
⑧$\neg R(a)\lor\neg R(b)$	T，⑦, 消解原理，代换{a/p}，代换{b/q}
⑨ $\neg R(a)$	T, ⑥, ⑧
⑩$R(a)\land\neg R(a)$	T, ③, ⑨

21．将下列命题符号化,并用演绎法证明其论证是否正确。

（1）每个在学校读书的人都获得知识。所以如果没有人获得知识就没有人在学校读书。

解：设：个体域 D={人}，P(x)：x 是在学校读书的；Q(x)：x 获得知识，则上述句子(2)可符号为：

$\forall x (P(x)\to Q(x)) \Rightarrow \neg\exists xQ(x)\to\neg\exists xP(x)$。

证明：

① $\neg\exists xQ(x)$	P(附加前提)
② $\forall x\neg Q(x)$	T，①，E
③ $\neg Q(x)$	US，②
④ $\forall x (P(x)\to Q(x))$	P
⑤ $P(x)\to Q(x)$	US，④
⑥ $\neg P(x)$	T, ③，⑤，I
⑦ $\forall x\neg P(x)$	UG，⑥
⑧ $\neg\exists xP(x)$	T，⑦，E

（2）每一个实数不是无理数就是有理数;实数是无理数当且仅当它是无限不循环小数，并不是所有的实数都是无限不循环小数。因此，有的实数是有理数。

解：设 P(x)：x 是实数； Q(x)：x 是无理数；R(x)：x 是有理数；S(x)： x 是无限不循环小数，则上述句子(3)可符号为：

$\forall x (P(x)\to(Q(x)\lor R(x)))$，$\forall x (P(x)\to(Q(x)\leftrightarrow S(x))$, $\neg\forall x (P(x)\to S(x))$
$\Rightarrow \exists x (P(x)\land R(x))$，

① $\neg\forall x (P(x)\to S(x))$	P
② $\exists x \neg (P(x)\to S(x))$	T, ①, E
③ $\neg (P(a)\to S(a))$	US, ②
④ $P(a)\land\neg S(a)$	T, ③, E
⑤ $P(a)$	T，④，I

⑥ $\neg S(a)$ T，④，I

⑦ $\forall x\,(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x)))$ P

⑧ $P(a)\rightarrow(Q(a)\vee R(a))$ US, ⑦

⑨ $Q(a)\vee R(a)$ T，⑤，⑧，I

⑩ $\forall x\,(P(x)\rightarrow(Q(x)\leftrightarrow S(x))$ P

⑾ $P(a)\rightarrow(Q(a)\leftrightarrow S(a))$ US，⑩

⑿ $Q(a)\leftrightarrow S(a)$ T，⑤，⑾，I

⒀ $Q(a)\rightarrow S(a)$ T，⑿，I

⒁ $\neg Q(a)$ T，⑥，⒀，I

⒂ $R(a)$ T，⑨，⒁, I

⒃ $P(a)\wedge R(a)$ T，⑤，⒂，I

⒄ $\exists x\,(P(x)\wedge R(x))$ EG, ⒃

（3）每个懂得人性本质的作家都很高明；不能刻画人们内心世界的诗人都不是诗人；莎士比亚创作了哈姆雷特；没有一个不懂得人性本质的作家能够刻画人们的内心世界。只有诗人才能创作哈姆雷特。因此，莎士比亚是一个高明的作家。

解： 设 P(x)：x 是作家，Q(x)：x 懂得人性本质；R(x)：x 是高明的，U(x)：x 能刻画人们内心世界，V(x)：x 是诗人；S(x,y)：x 创作了 y，a：莎士比亚，b：哈姆雷特。

则上述句子(4)可符号为：

$\forall x((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow R(x)), \forall x(V(x)\rightarrow U(x)), S(a,b), \neg\exists x\,(\neg\,(P(x)\wedge Q(x))\wedge U(x)),$

$\forall x(\,S(x,b)\rightarrow V(x))\ \Rightarrow\ R(a)\wedge P(a)$。

证明 ① $\forall x\,(\,S(x,b)\rightarrow V(x))$ P

② $S(a,b)\rightarrow V(a)$ US，①

③ $S(a,b)$ P

④ $V(a)$ T，②,③，I

⑤ $\forall x\,(V(x)\rightarrow U(x))$ P

⑥ $V(a)\rightarrow U(a)$ US，⑤

⑦ $U(a)$ T，⑤，⑥，I

⑧ $\neg\exists x\,(\neg\,(P(x)\wedge Q(x))\wedge U(x))$ P

⑨ $\forall x\,((P(x)\wedge Q(x))\vee\neg U(x))$ T，⑧，E

⑩ $(P(a)\wedge Q(a))\vee\neg U(a)$ US，⑨

⑾ $P(a)\wedge Q(a)$ T，⑦，⑩，I

⑿ $\forall x\,((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow R(x))$ P

⒀ $(P(a)\wedge Q(a))\rightarrow R(a)$ US，⑿

⒁ $R(a)$ T，⑾，⒀，I

⒂ $P(a)$ T，⑾，I

⒃ $R(a)\wedge P(a)$ T，⒁，⒂，I

（4）每个大学生都是刻苦学习的；每个刻苦学习并且聪明的大学生在都能取得好成绩；有的大学生是聪明的；所以有的大学生能够取得好成绩。

解： 设个体域是 D={大学生}， Q(x)：x 是刻苦学习的；R(x)：x 是聪明的；S(x)：x 能取得好成绩，则上述句子(4)可符号为：

$\forall x\,Q(x)，\forall x\,((Q(x)\wedge R(x))\rightarrow S(x)), \exists x R(x)\ \Rightarrow\ \exists x\,S(x)$，

① $\exists x R(x)$ P

② $R(a)$ ES, ①

③ $\forall x\, Q(x)$　　P

④ $Q(a)$　　US, ③

⑤ $Q(a) \wedge R(a)$　　T，②, ④，I

⑥ $\forall x\, ((Q(x) \wedge R(x)) \rightarrow S(x))$　　P

⑦ $(Q(a) \wedge R(a)) \rightarrow S(a)$　　US, ⑥

⑧ $S(a))$　　T, ⑤，⑦，I

⑨ $\exists x\, S(x)$　　EG，⑧

（5）每个选择离散数学课程的大学生都喜欢证明；有的大学生选择离散数学课程但不做微积分题目。有的人喜欢证明但从来不做微积分题目。

解：设 $P(x)$：x 选择离散数学课程； $Q(x)$：x 是大学生；$R(x)$：x 喜欢证明；$S(x)$：x 做微积分题目，则上述句子(5)可符号为：

$\forall x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$，$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg S(x))$

$\Rightarrow \exists x\, (R(x) \wedge \neg S(x))$，

① $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg S(x))$　　P

② $P(a) \wedge Q(a) \wedge \neg S(a)$　　ES, ①

③ $P(a) \wedge Q(a)$　　T, ②, I

④ $\neg S(a)$　　T, ②, I

⑤ $\forall x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$　　P

⑥ $(P(a) \wedge Q(a)) \rightarrow R(a)$　　US, ⑤

⑦ $R(a)$　　T，③，⑥，I

⑧ $R(a) \wedge \neg S(a)$　　T，④，⑦，I

⑨ $\exists x\, (R(x) \wedge \neg S(x))$　　EG，⑧

（6）每位资深名士或是中科院院士或是国务院参事；所有的资深名士都是政协委员；张大为是资深名士，但他不是中科院院士。因此有的政协委员是国务院参事。

解：设 $P(x)$：x 是资深名士； $Q(x)$：x 是中科院院士；$R(x)$：x 是国务院参事；$S(x)$：x 是政协委员，张大为：a，则上述句子(6)可符号为：

$\forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$，$\forall x\, (P(x) \rightarrow S(x))$，$P(a) \wedge \neg Q(a)$

$\Rightarrow \exists x\, (S(x) \wedge R(x))$，

① $P(a) \wedge \neg Q(a)$　　P

② $P(a)$　　T, ①, I

③ $\neg Q(a)$　　T, ①, I

④ $\forall x\, (P(x) \rightarrow S(x))$　　P

⑤ $P(a) \rightarrow S(a)$　　UI, ④

⑥ $S(a)$　　T, ②, ⑤, I

⑦ $\forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$　　P

⑧ $P(a) \rightarrow (Q(a) \vee R(a))$　　UI，⑦

⑨ $Q(a) \vee R(a)$　　T, ②, ⑧, I

⑩ $R(a)$　　T, ③, ⑨, I

(11) $S(a) \wedge R(a)$　　T, ⑥, ⑩, I

(12) $\exists x\, (S(x) \wedge R(x))$　　EG,(11)

22．设 $P(x)$是定义在论域 $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$上的命题函数，试设计程序判断下列合式公式的真值。

（1）$\forall x P(x)$。

（2）$\exists x P(x)$。

23．设 $P(x,y)$是定义在论域 $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$上的命题函数，试设计程序判断下列合式公式的真值。

（1）$\forall x \forall y P(x,y)$。

（2）$\exists x \forall y P(x,y)$。

第 4 章　二元关系

4.4 习题解析

1. 已知 $A=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，求 $A\times P(A)$。

　　解：$P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

　　$A\times P(A)=\{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\varnothing, \{\varnothing\}\rangle, \langle\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\rangle, \langle\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \varnothing\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\rangle\}$

2. 试证明定理 4.1(2), (3), (4)。

证明 定理 4.1（2）

　　$\forall\langle x, y\rangle$

　　$\langle x, y\rangle\in(B\cup C)\times A$

　　$\Leftrightarrow x\in B\cup C\wedge y\in A$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow (x\in B\vee x\in C)\wedge y\in A$　　（并运算的定义）

　　$\Leftrightarrow (x\in B\wedge y\in A)\vee(x\in C\wedge y\in A)$　　（分配律）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in B\times A\vee\langle x, y\rangle\in C\times A$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(B\times A)\cup(C\times A)$　　（并运算的定义）

　　于是有$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$。

定理 4.1（3）

　　$\forall\langle x, y\rangle$

　　$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cap C)$

　　$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$　　（交运算的定义）

　　$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$　　（分配律）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in A\times B\wedge\langle x, y\rangle\in A\times C$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$　　（交运算的定义）

　　于是有 $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$。

定理 4.1（4）

　　$\forall\langle x, y\rangle$

　　$\langle x, y\rangle\in(B\cap C)\times A$

　　$\Leftrightarrow x\in B\cap C\wedge y\in A$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow (x\in B\wedge x\in C)\wedge y\in A$　　（交运算的定义）

　　$\Leftrightarrow (x\in B\wedge y\in A)\wedge(x\in C\wedge y\in A)$　　（分配律）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in B\times A\wedge\langle x, y\rangle\in C\times A$　　（笛卡儿积的定义）

　　$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(B\times A)\cap(C\times A)$　　（交运算的定义）

　　于是有$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。

3. 对任意集合 A，B，C，若 $A\times B\subseteq A\times C$，是否一定有 $B\subseteq C$ 成立？为什么？

　　解 一定有。

　　对任意 $x\in A$，$y\in B$，由笛卡儿积的定义知，$\langle x, y\rangle\in A\times B$。因为 $A\times B\subseteq A\times C$，所以$\langle x, y\rangle\in A\times C$。从而，$x\in A$，$y\in C$。由集合包含的定义知，$B\subseteq C$。

4. 设 A，B，C 和 D 是任意四个集合，试判断下述结论是否正确？如果一定正确，请证明；

如果一定错误也请一定证明；如果不一定正确，请举反例。

（1）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

（2）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

（3）$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

（4）若 $A\times A=B\times B$，则一定有 $A=B$

（1）证明 $\forall<x, y>, x\in A, y\in B$

$<x,y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\land\ y\in C\cap D$ （笛卡儿积的定义）

$\Leftrightarrow x\in A\land x\in B\land y\in C\land y\in D$ （交运算的定义）

$\Leftrightarrow x\in A\land y\in C\land x\in B\land y\in D$ （交换律）

$\Leftrightarrow<x,y>\in A\times C\land<x,y>\in B\times D$ （笛卡儿积的定义）

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times C)\cap(B\times D)$ （并运算的定义）

于是，根据定理 1.2，有$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

（2）不一定正确。反例如下：

假设 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{2, 3\}$，$D=\{3, 4\}$，则 $A\cup B=\{1, 2\}$，$C\cup D=\{2, 3, 4\}$。从而

$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>\}$，

$(A\times C)\cup(B\times D)= \{<1, 2>, <1, 3>\}\cup\{<2, 3>, <2, 4>\}=\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <2, 4>\}$。

即$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

（3）不一定正确。反例如下：

假设 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{2, 3\}$，$D=\{3, 4\}$，则 $A-B=\{1\}$，$C-D=\{2\}$。从而

$(A-B)\times(C-D)=\{<1, 2>\}$，

$(A\times C)-(B\times D)= \{<1, 2>, <1, 3>\}-\{<2, 3>, <2, 4>\}=\{<1, 2>, <1, 3>\}$。

即$(A-B)\times(C-D)\neq(A\times C)-(B\times D)$。

（4）证明 $\forall x$

$x\in A\Leftrightarrow<x,x>\in A\times A$ （笛卡儿积的定义）

$A\times A=B\times B$

$\Leftrightarrow<x,x>\in B\times B$

$\Leftrightarrow x\in B$ （笛卡儿积的定义）

$\Leftrightarrow A=B$

5. 设集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3, 4\}$，试列出 A 到 B 的所有关系。

解 $A\times B=\{<1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>\}$。因为 A 到 B 的所有关系即是 $A\times B$ 的所有子集，所以 A 到 B 的所有关系为：$\varnothing$，$\{<1, 3>\}$，$\{<1, 4>\}$，$\{<2, 3>\}$，$\{<2, 4>\}$，$\{<1, 3>, <1, 4>\}$，$\{<1, 3>, <2, 3>\}$，$\{<1, 3>, <2, 4>\}$，$\{<1, 4>, <2, 3>\}$，$\{<1, 4>, <2, 4>\}$，$\{<2, 3>, <2, 4>\}$，$\{<1, 3>, <1, 4>, <2, 3>\}$，$\{<1, 3>, <1, 4>, <2, 4>\}$，$\{<1, 3>, <2, 3>, <2, 4>\}$，$\{<1, 4>, <2, 3>, <2, 4>\}$，$\{<1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>\}$。

6. 假设 $A=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$，$R$ 是 A 上的包含关系，试列出 R 中的元素。

解 设 A 上的包含关系为 R，则 $R=\{<\varnothing, \varnothing>, <\{\varnothing\}, \{\varnothing\}>, <\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}>, <\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}>, <\varnothing, \{\varnothing\}>, <\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}>, <\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}>, <\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}>, <\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}>, <\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}>\}$。

7. 假设$|A|=3$，$|B|=4$，问从 A 到 B 有多少个不同的关系。

解 由题意知，$A\times B$ 共有 12（$12=|A|\times|B|$）个元素，从而 $A\times B$ 共有 2^{12} 个不同的子集。根据定义 4.5，A 到 B 的不同关系共有 2^{12} 个。

8. 设 A 为 n 个元素的集合。

（1）证明：A 上有 2^n 个一元关系。

（2）证明：A 上有 2^{n^2} 个二元关系。

（3）A 上有多少个三元关系。

证明（1）A 的任何一个子集都是 A 上的一元关系，根据组合的意义知：A• 上的不同子集共有：$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ 。

所以，共有 2^n 个一元关系。

（2）$A\times A$ 的任何一个子集都是 A 上的二元关系， 根据组合的意义知：• A• 上的不同子集共有：$C_{n\times n}^0 + C_{n\times n}^1 + \cdots + C_{n\times n}^{n\times n} = 2^{n\times n}$ 。

（3）A 上的三元关系共有：$2^{n\times n\times n}$ 。

9. 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，$|A| = n$，则存在 $0\le s<t\le 2^{n\times n}$，使得 $R^s = R^t$。

证明　由于 A 上的不同二元关系共有 $2^{n\times n}$ 个，根据鸽笼原理，由 R 产生的 $2^{n\times n}+1$ 个幂集关系：

$$R^0,\ R^1,\ R^2,\ \ldots,\ R^{n\times n}$$

中，必至少存在相同的关系。因此存在 $0\le s\le 2^{n\times n}$，$0\le t\le 2^{n\times n}$，$s\ne t$, 使得 $R^s = R^t$。

10. 设集合 A={1, 2, 3}，试列出集合 A 上的下列关系，并用关系图和关系矩阵表示。

（1）A 上的全关系。

（2）A 上的恒等关系。

（3）A 上的大于关系。

解（1）A 上的全关系 R={<1, 1>, <2, 2><3, 3>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <2, 3>, <3, 2>}。

（2）A 上的恒等关系 S={<1, 1>, <2, 2><3, 3>}。

（3）A 上的大于关系 T={<2, 1>, <3, 1>, <3, 2>}。

对应的关系图见图 4.1。

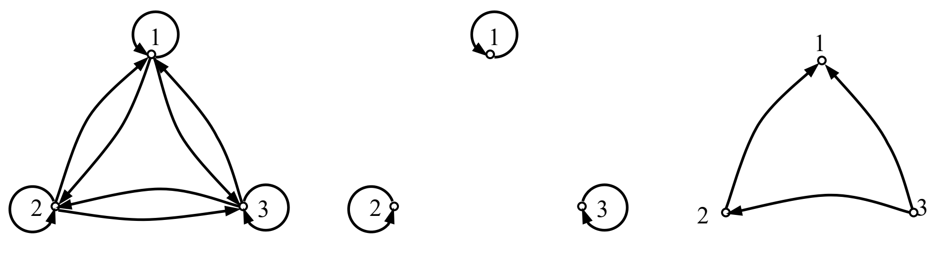


图 4.1

关系矩阵分别为 M_R, M_S, M_T。其中，

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. 设 A={1，2，3，4}，B={0，1，4，9，12}，R 是 A 到 B 上的关系，试分别写出满足条件的关系 R，并用关系图和关系矩阵表示。

（1）$<x, y>\in R$ 当且仅当 $x|y$。

（2）$<x, y>\in R$ 当且仅当 $x\equiv y(mod\ 3)$。

（3）$<x, y>\in R$ 当且仅当 $x\le y$。

解 (1) R={<1, 0>, <1, 1>, <1, 4>, <1, 9>, <1, 12>, <2, 0>, <2, 4><2, 12>, <3, 0>, <3, 9>,

<3, 12>, <4, 0>, <4, 4>, <4, 12>}。

(2) R={<1, 1>, <4, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <3, 0>, <3, 9>, <3, 12>}。

(3) R={<1, 1>, <1, 4>, <1, 9>, <1, 12>, <2, 4>, <2, 9>, <2, 12>, <3, 4>, <3, 9>, <3, 12>, <4, 4>, <4, 9>, <4, 12>}。

（1），（2）和（3）的关系矩阵依次如下：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\qquad M_R=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

（1），（2）和（3）的关系图依次为图 4.2(a)，图 4.2(b)和图 4.2(c)。

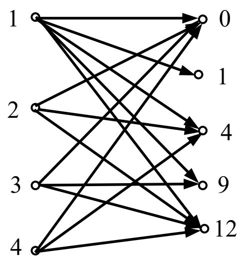


图 4.2 (a)

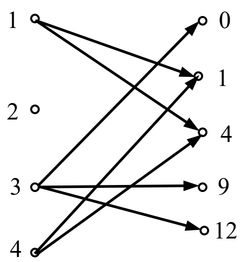


图 4.2 (b)

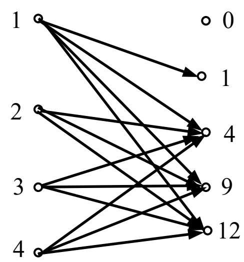


图 4.2 (c)

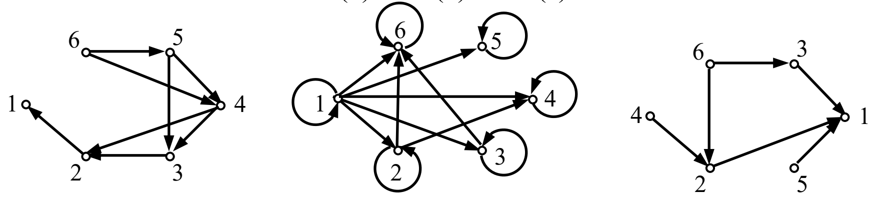
12. 设 A = {1，2，3，4，5，6}，A 上的二元关系可定义为：R = {<x，y>|(x-y)^2 ∈A}；S = {<x，y>|y 是 x 倍数}；T = {<x，y>| x / y 是素数}。写出 R，S，T 的元素，并画出 R，S，T 的关系图。

解 (1) R={<2, 1>, <3, 2>, <4, 3>, <5, 4>, <6, 5>, <4, 2>, <5, 3>, <6, 4>}；

S={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <1, 6>, <2, 4>, <2, 6>, <3, 6>}；

T={<2, 1>, <3, 1>, <5, 1>, <4, 2>, <6, 2>, <6, 3>}。

(2) R，S，T 的关系图分别见图 4.3(a)，4.3(b)和 4.3(c)。



(a) (b) (c)

图 4.3

13. 设 A = {<1，2>，<2，4>，<3，3>}，B = {<1，3>，<2，4>，<4，2>}。

(1) 求 $domA$，ranA，fldA；

(2) 求 $domB$，ranB，fldB。

解 (1) $domA$={1, 2, 3}，ranA={2, 3, 4}， fldA={1, 2, 3, 4}；

(2) $domB$={1, 2, 4}，ranB={2, 3, 4}， fldB={1, 2, 3, 4}。

14. 设关系 R、S 和 T 的关系矩阵分别为 M_R, M_S 和 M_T。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\qquad M_S=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_T=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

试计算（1）$M_R\vee M_S$；　　**（2）**$M_R\wedge M_S$；　　**（3）**$M_R\odot M_T$

解　（1）$M_R\vee M_S=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}$　　（2）$M_R\wedge M_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$

（3）$M_R\odot M_T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

15. 证明定理 4.3 中的结合律。

证明　设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$都是 $n\times n$ 矩阵。

（1）证明$(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$成立。

假设左边=$(a_{ij}\vee b_{ij})\vee c_{ij}$ ，右边=$(a_{ij}\vee b_{ij})\vee c_{ij}$,

根据布尔并“∨”的定义， 若 a_{ij}，b_{ij}，c_{ij} 至少有一个 1，则左边=右边=1；若 a_{ij}，b_{ij}，c_{ij} 全部为 0，则左边=右边=0。所以结论成立。

（2）证明$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$成立。

假设左边=$(a_{ij}\wedge b_{ij})\wedge c_{ij}$ ，右边=$(a_{ij}\wedge b_{ij})\wedge c_{ij}$,

根据布尔交“∧”的定义， 若 a_{ij}，b_{ij}，c_{ij} 至少有一个 0，则左边=右边=0；若 a_{ij}，b_{ij}，c_{ij} 全部为 1，则左边=右边=1。所以结论成立。

（3）证明$(A\odot B)\odot C=A\odot(B\odot C)$成立。

假设 $A\odot B=(d_{ij})$, $B\odot C=(e_{ij})$, $(A\odot B)\odot C=(f_{ij})$, $A\odot(B\odot C)=(k_{ij})$

则

$$d_{ij}=\mathop{\vee}_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge b_{kj}\right),\qquad f_{ij}=\mathop{\vee}_{k=1}^{n}\left(d_{ik}\wedge c_{kj}\right)$$

$$e_{ij}=\mathop{\vee}_{k=1}^{n}\left(b_{ik}\wedge c_{kj}\right),\qquad k_{ij}=\mathop{\vee}_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge e_{kj}\right)$$

对 k=1，…, n, 若至少存在一个 k_0，使得 a_{ik0}, b_{k0j}, c_{k0j} 全部为 1, 则 $f_{ij}=k_{ij}=1$，结论成立；若不存在这样的一个 k_0, 即对任意的 k, 都有 a_{ik}, b_{kj}, c_{kj} 中至少有一个为 0, 不妨假设 $a_{ik}=0$，则 $f_{ij}=k_{ij}=0$, 结论成立。

16. 证明定理 4.3 中的分配律。

证明　设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$都是 $n\times n$ 矩阵。

（1）证明 $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$成立。

假设左边=$(a_{ij}\wedge(b_{ij}\vee c_{ij})$ ，右边=$(a_{ij}\wedge b_{ij})\vee(a_{ij}\wedge c_{ij})$,

根据布尔并“∨”和布尔交“∧”的定义，

若 $a_{ij}=1$，b_{ij}，c_{ij} 至少有一个 1，则左边=右边=1；

若 $a_{ij}=1$，b_{ij}，c_{ij} 都为 0，则左边=右边=0；

若 a_{ij}=0，则不管 b_{ij}，c_{ij} 如何取值，左边=右边=0；
从而结论成立。
（2）证明 $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$成立。
假设左边=$a_{ij}\vee(b_{ij}\wedge c_{ij})$ ，右边=$(a_{ij}\vee b_{ij})\wedge(a_{ij}\vee c_{ij})$，
根据布尔并"∨"和布尔交"∧"的定义，
若 a_{ij}=0，b_{ij}，c_{ij} 至少有一个 0，则左边=右边=0；
若 a_{ij}=0，b_{ij}，c_{ij} 都为 1，则左边=右边=1；
若 a_{ij}=1，则不管 b_{ij}，c_{ij} 如何取值，左边=右边=1；
从而结论成立。

17. 设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{1, 2\}$，A 到 B 上的关系 R 和 S 定义如下：
$R=\{<a, 1>, <b, 2>, <c, 1>\}$，$S=\{<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>\}$
求 $R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，$S-R$，R^c，S^c。

解 $R\cup S=\{<a, 1>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>\}$。
$R\cap S=\{<a, 1>, <c, 1>\}$。
$R-S=\{<b, 2>\}$。
$S-R=\{<b, 1>\}$。
$R^c=A\times B-R=\{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>, <c, 2>\}-\{<a, 1>, <b, 2>, <c, 1>\}=\{<a, 2>, <b, 1>, <c, 2>\}$。
$S^c=A\times B-S=\{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>, <c, 2>\}-\{<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>\}=\{<a, 2>, <b, 2>, <c, 2>\}$。

18. $A=\{1, 2, 3, 6\}$，用 L 表示"小于等于"关系，D 表示"整除"关系，即
$L=\{<a, b>|(a\le b)\wedge(a, b\in A)\}$；$D=\{<a, b>|(a \text{ 整除 } b)\wedge(a, b\in A)\}$
用枚举法列出 L 和 D 的元素，并求 $L\cap D$，$L\circ D$。

解 $L=\{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <6, 6>\}$。
$D=\{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 2>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <6, 6>\}$。
$L\cap D=D$。
$L\circ D=L$。

19. 证明定理 4.5。
（1）证明 $R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$
$\forall<a, c>$
$<a, c>\in R\circ(S_1\cup S_2)$
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge<a, b>\in R\wedge<b, c>\in S_1\cup S_2)$ （"∘"的定义）
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge<a, b>\in R\wedge(<b, c>\in S_1\vee<b, c>\in S_2))$ （并运算的定义）
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge((<a, b>\in R\wedge<b, c>\in S_1)\vee(<a, b>\in R\wedge<b, c>\in S_2)))$ （分配律）
$\Leftrightarrow<a, c>\in R\circ S_1\vee<a, c>\in R\circ S_2$ （"∘"的定义）
$\Leftrightarrow<a, c>\in(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$ （并运算的定义）
于是有 $R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$。
（2）证明 $(S_1\cup S_2)\circ T=(S_1\circ T)\cup(S_2\circ T)$
$\forall<a, c>$
$<a, c>\in(S_1\cup S_2)\circ T$
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge<a, b>\in S_1\cup S_2\wedge<b, c>\in T)$ （"∘"的定义）
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge((<a, b>\in S_1\vee<a, b>\in S_2)\wedge<b, c>\in T)$ （并运算的定义）
$\Leftrightarrow \exists b\ (b\in B\wedge((<a, b>\in S_1\wedge<b, c>\in T)\vee(<a, b>\in S_2\wedge<b, c>\in T)))$ （分配律）
$\Leftrightarrow<a, c>\in S_1\circ T\vee<a, c>\in S_2\circ T$ （"∘"的定义）

$\Leftrightarrow <a, c> \in (S_1 \text{o} T) \cup (S_2 \text{o} T)$ （并运算的定义）

于是有$(S_1 \cup S_2) \text{o} T = (S_1 \text{o} T) \cup (S_2 \text{o} T)$。

（3）证明 $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$

$\forall <a, c>$,

$<a, c> \in R \circ (S_1 \cap S_2)$

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge <a, b> \in R \wedge <b, c> \in S_1 \cap S_2)$ （“∘”的定义）

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge <a, b> \in R \wedge <b, c> \in S_1 \wedge <b, c> \in S_2)$ （交运算的定义）

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge (<a, b> \in R \wedge <b, c> \in S_1) \wedge (<a, b> \in R \wedge <b, c> \in S_2))$ （幂等律）

$\Rightarrow <a, c> \in R \text{o} S_1 \wedge <a, c> \in R \text{o} S_2$ （“∘”的定义）

$\Rightarrow <a, c> \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$ （交运算的定义）

于是有 $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

（4）证明$(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

$\forall <a, c>$

$<a, c> \in (S_1 \cap S_2) \circ T$

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge <a, b> \in S_1 \cap S_2 \wedge <b, c> \in T)$ （“∘”的定义）

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge <a, b> \in S_1 \wedge <a, b> \in S_2 \wedge <b, c> \in T)$ （交运算的定义）

$\Rightarrow \exists b \ (b \in B \wedge ((<a, b> \in S_1 \wedge <b, c> \in T) \wedge (<a, b> \in S_2 \wedge <b, c> \in T)))$ （幂等律）

$\Rightarrow <a, c> \in S_1 \text{o} T \wedge <a, c> \in S_2 \text{o} T$ （“∘”的定义）

$\Rightarrow <a, c> \in (S_1 \text{o} T) \cap (S_2 \text{o} T)$ （交运算的定义）

$S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

20. 试判断下列关系是否是两个关系的复合，如果是，请指出对应的两个关系。

（1）爷爷和孙子构成的“爷孙”关系。

（2）舅舅和外甥构成的“舅甥”关系。

（3）哥哥和妹妹构成的“兄妹”关系。

解 （1）“爷孙”关系是“父子”关系和“父子”关系的复合。

（2）“舅甥”关系是“兄妹”关系和“母子”关系的复合。

（3）不是某两个关系的复合。

21. 设 R 和 S 是定义在 P 上的二元关系，P 是所有人的集合，其中 $R = \{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 父亲$)\}$；$S = \{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 母亲$)\}$ 。试说明下述关系的意义。

（1）$R \circ R$。

（2）$S^{-1} \circ R$。

（3）$S \circ R^{-1}$。

（4）$\{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 的外祖母$)\}$。

（5）$\{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 的祖母$)\}$。

解 （1）$R \circ R = \{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 祖父$)\}$。

（2）$S^{-1} \circ R = \varnothing$ 。

（3）$S \circ R^{-1} = \{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (x$ 是 y 妻子$)\}$。

（4）$\{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (y$ 是 x 的外祖母$)\}$可表示为$=S \circ S$。

（5）$\{<x, y>|(x, y \in P) \wedge (y$ 是 x 的祖母$)\}$可表示为$=S \circ R$。

22. 设 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, R 和 S 是 A 上的二元关系，$R = \{<i, j>|(j = i+1)$或$\left(\mathrm{j} = \mathrm{i}/2\right)\}$；$S = \{<i, j>|(i = j+2)\}$

（1）用关系矩阵法求 $R \circ S$;

（2）用关系图法求 $S \circ R$;

（3）用任意方法求 $R \circ S \circ R$, R^3, S^3。

解 由已知得 $R=\{<0, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <0, 0>, <2, 1>\}$，$S=\{<2, 0>, <3, 1>\}$，于是有

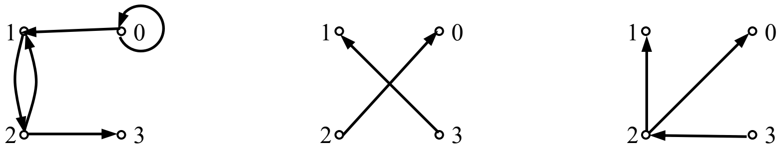
（1） 因为 $\mathrm{M_R}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\mathrm{M_S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，所以

$$\mathrm{M_{R\circ S}}=\mathrm{M_R}\odot\mathrm{M_S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

从而，$R\circ S=\{<1, 0>, <2, 1>\}$。

（2） R, S, $S\circ R$ 的关系图分别见图 4.4(a)，4.4 (b)和 4.4 (c)，则

$S\circ R=\{<2, 0>, <2, 1>, <3, 2>\}$。



(a) (b) (c)

图 4.4

（3）$R\circ S\circ R=\{<1, 1>, <1, 0>, <2, 2>\}$

$R^3=\{<0, 3>, <0, 1>, <1, 2>, <0, 2>, <0, 0>, <2, 3>, <2, 1>\}$

$S^3=\varnothing$

23. 设 R, S, T 是集合 A 上的关系，证明：

（1）$R\subseteq S\Rightarrow R\circ T\subseteq S\circ T$

（2）$R\subseteq S\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

（3）$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

（4）$R\subseteq S\Rightarrow S^c\subseteq R^c$

（5）$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

证明（1）对$\forall<a, c>$，$a, c\in A$

$<a, c>\in R\circ T\Rightarrow\exists b\,(b\in A\wedge<a,b>\in R\wedge<b,c>\in T)$ （“∘”的定义）

$R\subseteq S\Rightarrow<a,b>\in S$ （集合包含的定义）

$\Rightarrow\exists b\,(b\in A\wedge<a,b>\in S\wedge<b,c>\in T)$

$\Rightarrow<a, c>\in S\mathrm{o}T$ （“∘”的定义）

$\Rightarrow R\circ T\subseteq S\circ T$ （集合包含的定义）

（2）对$\forall<a, c>$，$a, c\in A$

$<a, c>\in R^{-1}\Rightarrow<c, a>\in R$ （逆运算的定义）

$R\subseteq S\Rightarrow<c, a>\in S$, （集合包含的定义）

$\Rightarrow<a, c>\in S^{-1}$ （逆运算的定义）

$\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$ （集合包含的定义）

（3）对$\forall<y, x>, x, y\in A$

$<y, x>\in(R\cap S)^{-1}\Leftrightarrow<x, y>\in R\cap S$ （逆运算的定义）

$\Leftrightarrow<x, y>\in R\wedge<x, y>\in S$ （交运算的定义）

$\Leftrightarrow\ <y, x>\in R^{-1}\wedge <y, x>\in S^{-1}$ （逆运算的定义）

$\Leftrightarrow\ <y, x>\in R^{-1}\cap S^{-1}$ （交运算的定义）

即$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

（4）对$\forall <x, y>, x, y\in A$

$<x, y>\in\ S^{c}\Rightarrow <x, y>\notin S$

$R\subseteq S\Rightarrow <x, y>\notin R$

$\Rightarrow <x, y>\in R^{c}$

$\Rightarrow S^{c}\subseteq R^{c}$

（5）证明 $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

对$\forall <x, z>$，$x, z\in A$

$<x, z>\in(R\cup S)\circ T\Rightarrow\exists z(z\in A\wedge <x, y>\in R\cup S\wedge <y, z>\in T)$

$\Leftrightarrow\ \exists z(z\in A\wedge(<x, y>\in R\vee <x, y>\in S)\wedge <y, z>\in T)$

$\Leftrightarrow\ \exists z(z\in A\wedge(<x, y>\in R\wedge <y, z>\in T)\vee(<x, y>\in S\wedge <y, z>\in T))$

$\Leftrightarrow <x, z>\in S\circ T\cup(S\circ T)$。

即$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

24. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，定义在 A 上的关系 R 如下：

$R=\{<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 4>\}$

（1）画出 R 的关系图，并写出 R 的关系矩阵；

（2）求 R^2，R^3，R^4。

解（1）R 的关系图见图 4.5，

R 的关系矩阵为：$\mathrm{M_R}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

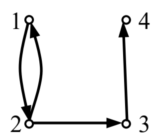


图 4.5

（2）$R^2=\{<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>\}$

$R^3=\{<1, 2>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 3>\}$

$R^4=\{<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>\}$

25. 设 $A=\{a, b, c\}$，A 上的关系 R_i 定义如下：

（1）$R_1=\{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <c, c>\}$

（2）$R_2=\{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

（3）$R_3=\{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <b, c>\}$

（4）$R_4=\varnothing$

（5）$R_5=A\times A$

判断 A 上的上述关系具备哪些性质。

解 （1）R_1 是反对称的、传递的；

（2）R_2 是自反的、对称的、传递的；

（3）R_3 是反对称的；

（4）R_4 是反自反的、对称的、反对称的、斜对称的、传递的；

（5）R_5 是自反的、对称的、传递的。

26. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，在图 4.6 中给出了 12 种 A 上的关系。对于每一个关系图，写出相应的关系表达式和关系矩阵，并说明它们具备什么性质。

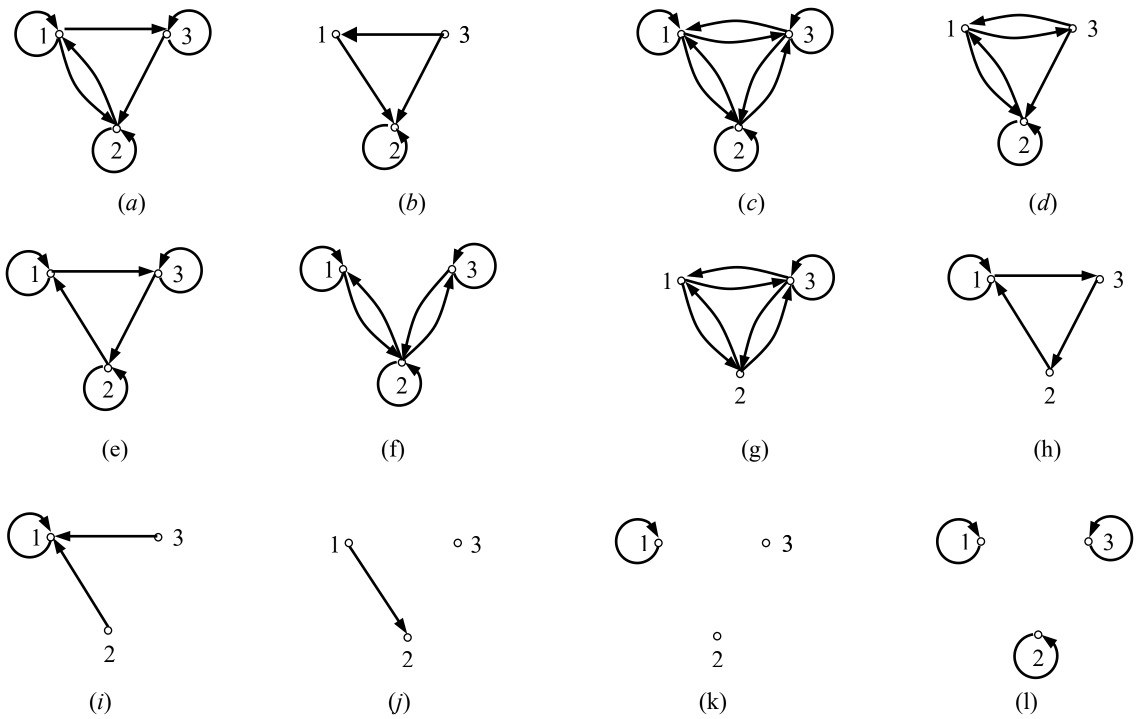


图 4.6

解 （1）R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<1,3>,<3,2>,<3,3>}，是自反的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

（2）R={<2,2>,<1,2>,<1,3>,<3,2>}，是反对称和传递的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

（3）R={<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>}，是自反、对称和传递的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

（4）R={<1,2>,<2,1>,<2,2>,<1,3>,<3,1>,<3,2>}，R 不具备任何性质。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$

（5）R={<1,1>,<2,1>,<2,2>,<1,3>,<3,2>,<3,3>}，是自反和反对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

（6）R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}，是自反和对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

（7）R={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>}，是对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

（8）R={<1,1>,<2,1>,<1,3>,<3,2>}，是反对称的。

关系矩阵为： $M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

（9）R={<1,1>,<2,1>,<3,1>}，是传递和反对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(10）R={<1,2>}，R 是反自反、反对称和传递的。

关系矩阵为： $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

（11）R={<1,1>}，是传递和反对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

（12）R={<1,1>,<2,2>,<3,3>}，是自反、对称、传递和反对称的。

关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

27. 证明定理 4.9 的（1），（3）。

证明 （1） “$\Rightarrow$” (必要性)

对任意$<a,\ a>\in I_A$, 因为 R 是自反的, 所以$<a,\ a>\in R$, 即 $I_A\subseteq R$。

“$\Leftarrow$” (充分性)

对任意 $a\in A$, 有$<a,\ a>\in I_A$。因为 $I_A\subseteq R$, 所以$<a,\ a>\in R$。由自反性的定义知, R 是自反

的。

（3）“$\Rightarrow$”(必要性)

对$\forall a$，$b\in A$，若$<a, b>\in R$，则因为R是对称的，所以有$<b, a>\in R$，即$<a, b>\in R^{-1}$。从而有$R\subseteq R^{-1}$。

另一方面，对$\forall a$，$b\in A$，若$<a, b>\in R^{-1}$，根据逆运算定义有，$<b, a>\in R$。又因为R是对称的，所以有$<a, b>\in R$。从而有$R^{-1}\subseteq R$。

于是有$R=R^{-1}$成立。

“$\Leftarrow$”(充分性)

对$\forall a$，$b\in A$，若$<a, b>\in R$，根据逆运算定义有$<b, a>\in R^{-1}$。因为$R=R^{-1}$，所以$<b, a>\in R$。根据对称性的定义可知，R是对称的。

28. 设R, S是集合A上的关系，试证明或否定以下断言。

（1）若R, S是自反的，则$R\circ S$是自反的。

（2）若R, S是反自反的，则$R\circ S$是反自反的。

（3）若R, S是对称的，则$R\circ S$是对称的。

（4）若R, S是反对称的，则$R\circ S$是反对称的。

（5）若R, S是传递的，则$R\circ S$是传递的。

解（1）是正确的。

对任意的$x\in A$，因为R, S是自反的，所以$<x, x>\in R$, $<x, x>\in S$。由“$\circ$”知：$<x, x>\in R\circ S$。所以，$R\circ S$是自反的；

（2）不一定正确。

如$R=\{<a, b>\}$，$S=\{<b, a>\}$。则R，S都是反自反的，但$R\circ S=\{<a, a>\}$不是反自反的；

（3）不一定正确。

如$R=\{<a, b>, <b, a>\}$，$S=\{<b, c>, <c, b>\}$。则R，S都是对称的，但$R\circ S=\{<a, c>\}$不是对称的。

（4）不一定正确。

如$R=\{<a, b>, <b, c>\}$，$S=\{<b, b>, <c, a>\}$。则R，S都是反对称的，但$R\circ S=\{<b, a>, <a, b>\}$不是反对称的。

（5）不一定正确。

如$R=\{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$，$S=\{<b, b>, <c, a>\}$。则$R$，$S$都是传递的，但$R\circ S=\{<a, b>, <b, a>, <a, a>\}$不是传递的。

29. 设R是A上的关系，若R是自反的和传递的，则$R\circ R=R$。其逆命题也对吗？

证明（1）① 对$\forall<x, z>$，$x, z\in A$

$<x, z>\in R\circ R\Rightarrow\exists y$（$y\in A\wedge<x, y>\in R\wedge<y, z>\in R$）

$\Rightarrow<x, z>\in R$　　　　（R是传递的）

$\Rightarrow R\circ R\subseteq R$

② 对$\forall<x, y>$，$x, y\in A$，$<x, y>\in R$

因为R是自反的，所以有$<x, x>\in R$，由“$\circ$”的定义知$<x, y>\in R\circ R$。所以$R\subseteq R\circ R$。

由①, ②知：$R\circ R=R$。

（2）其逆命题有传递性成立，自反性不一定成立。

① 对任意$x, y, z\in A$，若$<x, y>\in R$并且$<y, z>\in R$，则有$<x, z>\in R\circ R$，又$R\circ R=R$, 所以$<x, z>\in R$。所以R是传递的。

② 设$R=\{<1, 2>, <2, 2>\}$, 则R满足$R\circ R=R$，但R并不是自反的。

30. 证明：非空的对称传递关系不可能是反自反的。

证明 设 R 是非空的对称传递关系，所以必存在 $<x, y>\in R$。

① 若 $x=y$，显然 R 不是反自反的。

② 若 $x\neq y$，由 R 的对称性，有 $<y, x>\in R$，由 R 的传递性，有：$<x, x>\in R$。 所以 R 也不是自反的。

31. 设如图 4.7 给出的六个关系，都是 $A = \{1，2，3，4\}$上的关系。求这些关系的 r(R), s(R), t(R)，并画出对应的关系图。

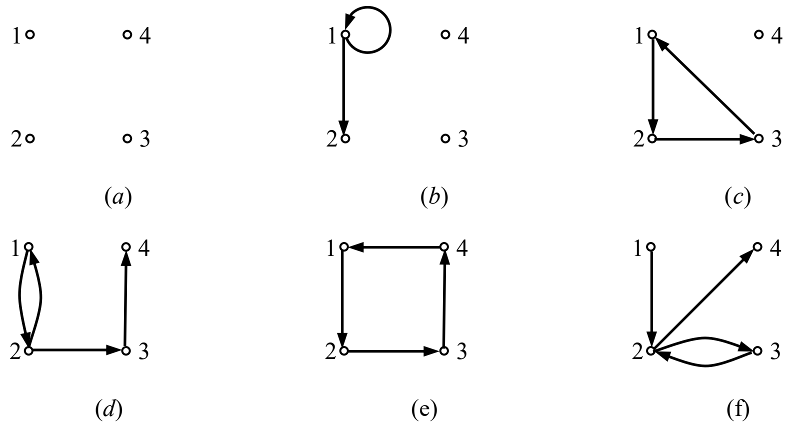


图 4.7

解 （1）r(R)={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>}

s(R)=R

t(R)=R

r(R), s(R), t(R)的关系图分别见图 4.8(a)，4.8 (b)和 4.8 (c)。

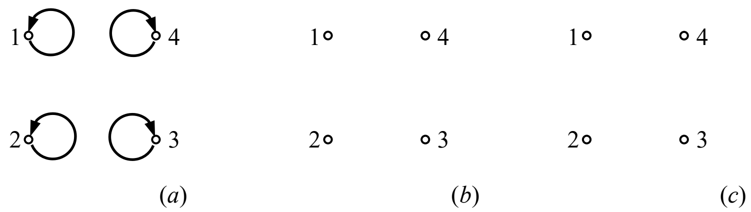


图 4.8

（2）r(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>}

s(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>}

t(R)={<1, 1>, <1, 2>}

r(R), s(R), t(R)的关系图分别见图 4.9 (a)，4.9 (b)和 4.9 (c)。

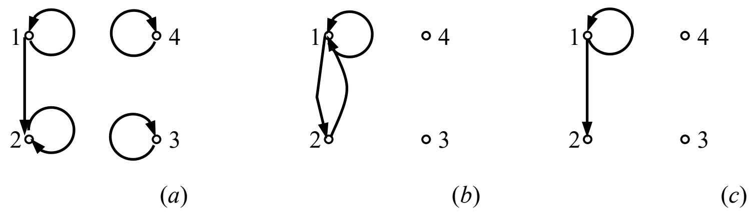


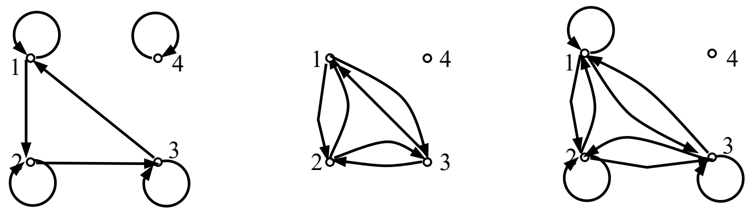
图 4.9

（3）r(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 4>}

s(R)={<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 1>, <1, 3>}

t(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>}

r(R), s(R), t(R)的关系图分别见 4.10(a)，4.10 (b)和 4.10 (c)。



(*a*) (*b*) (*c*)

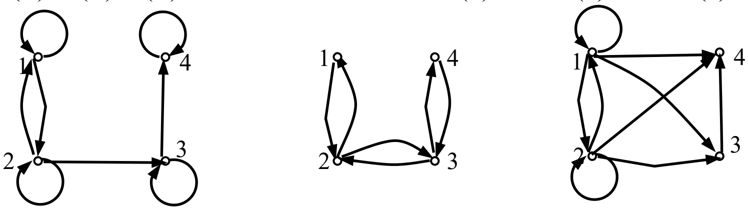
图 4.10

（4）$\mathrm{r}(R)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$\mathrm{s}(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$

$\mathrm{t}(R)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle\}$

$\mathrm{r}(R)$, $\mathrm{s}(R)$, $\mathrm{t}(R)$的关系图分别见图 4.11(*a*)，4.11 (*b*)和 4.11 (*c*)。



(*a*) (*b*) (*c*)

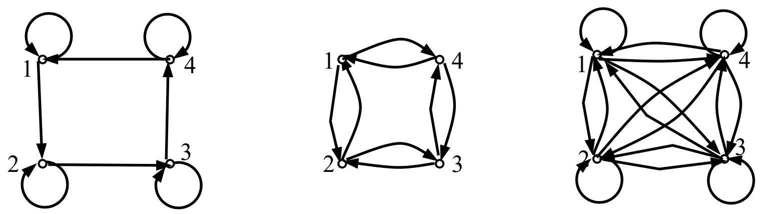
图 4.11

（5）$\mathrm{r}(R)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$\mathrm{s}(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

$\mathrm{t}(R)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle,$
$\langle 4, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$\mathrm{r}(R)$, $\mathrm{s}(R)$, $\mathrm{t}(R)$的关系图分别见图 4.12(*a*)，4.12 (*b*)和 4.12 (*c*)。



(*a*) (*b*) (*c*)

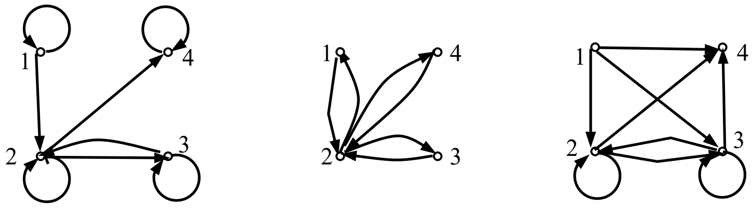
图 4.12

（6）$\mathrm{r}(R)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$；

$\mathrm{s}(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$；

$\mathrm{t}(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$。

$\mathrm{r}(R)$, $\mathrm{s}(R)$, $\mathrm{t}(R)$的关系图分别见图 4.13(*a*)，4.13 (*b*)和 4.13 (*c*)。



(*a*) (*b*) (*c*)

图 4.13

32. 设 R 是集合 A 上的关系，证明或否定下述论断。

（1）若 R 是自反的，则 $s(R)$, $t(R)$是自反的；

（2）若 R 是对称的，则 $r(R)$, $t(R)$是对称的；

（3）若 R 是传递的，则 $r(R)$, $s(R)$是传递的；

（4）若 R 是反对称的，则 $t(R)$是反对称的。

证明（1）① 对任意 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以$<x, x>\in R$。又因为 $R\subseteq \mathrm{s}(R)$，所以$<x, x>\in \mathrm{s}(R)$。即 $\mathrm{s}(R)$是自反的。

② 对任意 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以$<x, x>\in R$。又因为 $R\subseteq \mathrm{t}(R)$，所以$<x, x>\in \mathrm{t}(R)$。即 $\mathrm{t}(R)$是自反的。

（2） ①对任意 $x, y\in A$，若$<x, y>\in \mathrm{r}(R)=R\cup I_A$，则有$<x, y>\in R$ 或$<x, y>\in I_A$。

若$<x, y>\in R$，则由 R 是对称的，所以$<y, x>\in R$。又因为 $R\subseteq \mathrm{r}(R)$，所以$<y, x>\in \mathrm{r}(R)$。

若$<x, y>\in I_A$，则 $x=y$，即$<y, x>\in I_A$。又因为 $I_A\subseteq \mathrm{r}(R)$，所以$<y, x>\in \mathrm{r}(R)$。

无论是那一种情况，都有$<y, x>\in \mathrm{r}(R)$。即 $\mathrm{r}(R)$是对称的。

② 对任意 $x, y\in A$，若$<x, y>\in \mathrm{t}(R)$，则有存在 $i\in\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$，使得$<x, y>\in R^i$。由“$\circ$”的定义知：存在 c_1, c_2, c_3, 。。。c_{i-1}，使得$<x, c_1>\in R$，$<c_1, c_2>\in R$，$<c_2, c_3>\in R$，…，$<c_{i-1}, y>\in R$。因为 R 是对称的，所以有：$<y, c_{i-1}>\in R$，$<c_{i-2}, c_{i-3}>\in R$，$<c_{i-3}, c_{i-4}>\in R$，…，$<c_1, x>\in R$。 由“$\circ$”的定义知：$<y, x>\in R^i$，即有：$<y, x>\in \mathrm{t}(R)$。所以 $\mathrm{t}(R)$是对称的。

（3）① 对任意 $x, y, z\in A$，若$<x, y>\in \mathrm{r}(R)=R\cup I_A$，$<y, z>\in \mathrm{r}(R)=R\cup I_A$，则有($<x, y>\in R$ 或$<x, y>\in I_A$)并且($<y, z>\in R$ 或$<y, z>\in I_A$)。

若$<x, y>\in R$ 且$<y, z>\in R$，则由 R 是传递的，所以$<x, z>\in R$。又因为 $R\subseteq \mathrm{r}(R)$，所以$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$。

若$<x, y>\in I_A$ 或$<y, z>\in I_A$ 则有 $x=y$ 或 $y=z$。又因为 $I_A\subseteq \mathrm{r}(R)$，则

由$<x, x>\in \mathrm{r}(R)$及$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$, 有$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$。

由$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$及$<z, z>\in \mathrm{r}(R)$, 有$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$。

所以$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$。

无论是那一种情况，都有$<x, z>\in \mathrm{r}(R)$。即 $\mathrm{r}(R)$是传递的。

② 结论不一定成立。

如 $R=\{<1, 2>\}$，则 R 可传递，但 $\mathrm{s}(R)=\{<1, 2>, <2, 1>\}$不可传递。

（4）结论不一定成立。

若 $R=\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>\}$，则 R 是反对称的，但 $\mathrm{t}(R)=\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 3>, <1, 1>, <2, 1>, <3, 2>, <2, 2>, <1, 3>\}$则不是反对称的。

第 5 章 特殊关系

5.4 习题解析

1． 设 R 是 A 上的二元关系，试证明 $S=I_A\cup R\cup R^{-1}$ 是 A 上的相容关系。

证明 (1)自反性

因为 $S=I_A\cup R\cup R^{-1}$， 所以 $I_A\subseteq S$。 从而, 根据定理 4. 9, 有 S 是自反的。

（2）对称性

因为 $S^{-1}=(I_A\cup R\cup R^{-1})^{-1}= I_A^{-1}\cup R^{-1}\cup (R^{-1})^{-1}= I_A\cup R^{-1}\cup R=S$。根据定理 4. 9, 有 S 是对称的。

综上所述, S 是相容关系。

2． 设 R 和 S 是 A 上的相容关系。

（1）复合关系 $R o S$ 是 A 上的相容关系吗？

（2） $R\bigcup S$ 是 A 上的相容关系吗？

（3） $R\bigcap S$ 是 A 上的相容关系吗？

解： （1）$R o S$ 不一定是 A 上的相容关系。例如设 $A=\{1, 2, 3\}$，$R=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>\}$，$S=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 3>, <3, 1>\}$是 A 上的相容关系。 则 $R o S$ $=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 3>\}$不具有对称性， 即 $R o S$ 不是相容关系。

（2） $R\bigcup S$ 是 A 上的相容关系。

因为 R 和 S 是 A 上的相容关系, 所以 R 和 S 都具有自反性和对称性。根据定理 2。10, $R\bigcup S$ 也是自反和对称的， 因此 $R\bigcup S$ 是 A 上的相容关系。

（3） $R\bigcap S$ 是 A 上的相容关系。

因为 R 和 S 是 A 上的相容关系, 所以 R 和 S 都具有自反性和对称性。根据定理 2。10, $R\bigcap S$ 也是自反和对称的， 因此 $R\bigcup S$ 是 A 上的相容关系。

3． 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上有关系， $R=\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$。令 $S=I_A\cup R\cup R^{-1}$, 试找出与 S 对应的两个不同的覆盖。

解： 因为 $S=I_A\cup R\cup R^{-1}=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <2, 4>, <4, 2>, <3, 4>, <4, 3>\}$

所以 S 对应的覆盖可以是 $S_1=\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$， 也可以是 $S_2=\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$。

4． 设集合 $A=\{a, b, c\}$, 下列关系中哪些不是 A 上的等价关系？为什么？

（1） $R=\{<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, a>\}$

（2） $S=\{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <b, c>\}$

（3） $T=\{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, b>\}$

（4） $V=\{<a, a>, <b, b>, <c, c>\}$

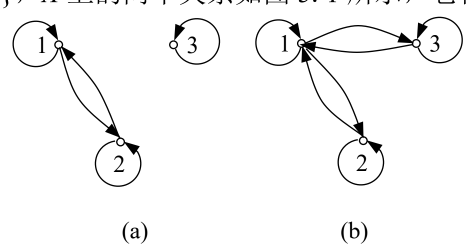
解： (1) R 不是 A 上等价关系，因为 R 不具有自反性。

(2) S 不是 A 上等价关系，因为 R 不具有对称性。

(3) T 不是 A 上等价关系，因为 R 不具有传递性。

(4) V 是 A 上等价关系。

5． 令 $A=\{1, 2, 3\}$，A 上的两个关系如图 5. 1 所示，它们是否是等价关系。



(a) (b)

解 图 5.1(a)的关系是自反、对称和传递的，所以图 5. 1 (a)是等价关系；

图 5. 1 (b)的关系不具有传递性，所以图 5. 1 (b)不是等价关系。

6．试指出下面证明的错误。

设 R 是 A 上的对称和传递关系，因为 R 是对称的，如果$<x, y>\in R$，则有$<y, x>\in R$。又因为 R 是传递的，由$<x, y>\in R$ 且$<y, x>\in R$，得$<x, x>\in R$。所以 R 是自反的。因此，R 是 A 上的等价关系。

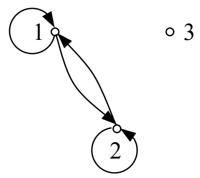


图 5.2

解 上述证明中仅考虑了元素 x 和 y 之间有两条边的情形。当 x 和 y 之间没有边时，R 仍然是对称的，此时就不能得出$<x, x>\in R$ 的结论。换句话说，上面的证明过程无法说明$<x, x>\in R$ 中的 x 是 A 上的任意元素。如图 5. 2 所示，关系 R 是对称的、传递的，但并不是自反的。

7．设 R, S 是非空集合 A 上的等价关系，试确定下列各式，哪些是 A 上的等价关系？如果是或不是, 请给出说明;如果不一定是, 请给出反例。

（1）$\mathrm{r}(S\text{-}R)$ （2）$R\cup S$

（3）$R\cap S$ （4）R^{-1}

解：（1）$\mathrm{r}(S\text{-}R)$不一定是等价关系。

例如, 设 $A=\{a, b, \mathrm{c}\}$,

$R=\{<a, a>, <b, b>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>, <a, b>, <b, a>, <b, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, b>, <a, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, a>\}$,

$S=\{<a, a>, <b, b>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>, <b, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, b>\}$是 A 上的等价关系，则

$\mathrm{r}(S\text{-}R)=\{<a, a>, <b, b>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>, <a, b>, <b, a>, <a, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, a>\}$。

显然, $\mathrm{r}(S\text{-}R)$不具有传递性, 此时 $\mathrm{r}(S\text{-}R)$不是 A 上的等价关系。即 $\mathrm{r}(S\text{-}R)$不一定是等价关系。

（2）$R\cup S$ 不一定 A 上的是等价关系等价关系。

例如, 设 $A=\{a, b, \mathrm{c}\}$,

$R=\{<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, a>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>\}$,

$S=\{<a, a>, <b, b>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>, <b, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, b>\}$是 A 上的等价关系，则

$R\cup S=\{<a, a>, <b, b>, <\mathrm{c}, \mathrm{c}>, <a, b>, <b, a>, <a, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, a>\}$。

（3）$R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

因为 R, S 是 A 上的等价关系, 所以 R, S 在 A 上都是自反的、对称的和传递的。

于是, 根据定理 4.10, $R\cap S$ 在 A 上也是自反的、对称的和传递的。从而 $R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

（4）R^{-1} 是 A 上的等价关系。

因为 R 是 A 上的等价关系, 所以 R 在 A 上都是自反的、对称的和传递的。

于是, 根据定理 4.10, R^{-1} 在 A 上也是自反的、对称的和传递的。从而 R^{-1} 是 A 上的等价关系。

8．设集合 $A=\{a+bi\mid a\neq 0\}$, A 上的关系 R 定义为：$<a+bi,c+di>\in R\Leftrightarrow ac>0$。试证明 R 是 A 上的等价关系。

证明（1）自反性

对 $\forall a+bi\in A$, 有 $a\neq 0$, 从而有 $a\times a>0$。由 R 的定义可得 $<a+bi,a+bi>\in R$。即 R 是自

反的。

（2）对称性

对 $\forall a+bi, c+di \in A$, 如果 $<a+bi, c+di> \in R$, 根据 R 的定义, 有 $ac>0$。从而 $ca>0$, 于是有 $<c+di, a+bi> \in R$。即 R 是对称的。

（3）传递性

对 $\forall a+bi, c+di, e+fi \in A$, 如果 $<a+bi, c+di> \in R$, $<c+di, e+fi> \in R$, 则根据 R 的定义, 有 $ac>0$, $ce>0$, 即 a, c, e 是同号的, 从而有 $ae>0$, 于是有 $<a+bi, e+fi> \in R$。即 R 是传递的。

综上所述, R 是 A 上的等价关系。

9．设 $A=\{<x,y> \mid x,y \in Z^{+}\}$, A 上的关系 R 定义为：$<<x,y>,<u,v>> \in R \Leftrightarrow x-u=y-v$。试证明 R 是 A 上的等价关系。

证明（1）自反性

对任意 $<x, y> \in A$，有 x-x=y-y。根据 R 的定义, 有 $<<x,y>,<x,y>> \in R$, 即 R 是自反的；

（2）对称性

对任意 $<x, y>$, $<u$, v$>\in A$，如果 $<<x,y>,<u,v>> \in R$, 则根据 R 的定义, 有 $x-u=y-v$, 从而有 $y-v=x-u$, 即有 $<<u,v>,<x,y>> \in R$。从而 R 是对称的。

（3）传递性

对任意 $<x, y>$, $<u$, v$>$, $<$w, $t> \in A$，假设 $<<x,y>,<u,v>> \in R$ 且 $<<u,v>,<w,t>> \in R$，则根据 R 的定义, 有 $x-u=y-v$ 和 $u-w=v-t$。从而有 $x-w=x-u+u-w=y-v+v-t=y-t$。于是由 R 的定义, 可得 $<<x,y>,<w,t>> \in R$。即 R 是传递的。

综上所述, R 是 A 上的等价关系。

10．设 R 是集合 A 上的一个关系, 对 $\forall a, b$, c$\in A$, 若 $<a, b> \in R$ 并且 $<a$, c$> \in R$, 则有 $<b$, c$> \in R$, 那么称 R 为 A 上的循环关系。试证明 R 是 A 上的一个等价关系的充要条件是 R 是循环关系和自反关系。

证明 必要性“$\Rightarrow$”

若 R 是等价关系, 则由等价关系的定义可以得出 R 是自反的, 对称的和传递的。于是, 对 $\forall a, b$, c$\in A$, 若 $<a, b> \in R$, $<a$, c$> \in R$, 因为 R 是对称的, 所以 $<b, a> \in R$。由于 R 是传递的, 因此 $<b$, c$> \in R$, 即 R 是循环关系。

充分性“$\Leftarrow$”

因为 R 是自反和循环的, 所以

（1）自反性　显然。

（2）对称性

对 $\forall a, b \in A$, 若 $<a, b> \in R$, 则由 R 是自反的, 得 $<a, a> \in R$, 因 R 是循环的, 所以由 $<a, b> \in R$ 并且 $<a, a> \in R$ 得 $<b, a> \in R$, 即 R 是对称的。

（3）传递性

对 $\forall a, b$, c$\in A$, 若 $<a, b> \in R$, $<b$, c$> \in R$, 则由 R 是对称的, 得 $<b, a> \in R$。由于 R 是循环的, 所以由 $<b, a> \in R$ 并且 $<b$, c$> \in R$ 得 $<a$, c$> \in R$, 即 R 是传递的。

于是由(1), (2)和(3)知, R 是 A 上的等价关系。

11．设 R 是 A 上的等价关系, 试证明 $R \circ R=R$。

证明　（1）对 $\forall <a$, c$>$, a, c$\in A$

$<a$, c$> \in R\mathrm{o}R \Rightarrow \exists b(b \in A \wedge <a, b> \in R \wedge <b$, c$> \in R)$　　（“o”的定义)

$\Rightarrow <a$, c$> \in R$　　（R 是传递的）

$\Rightarrow R\mathrm{o}R \subseteq R$　　（集合包含的定义）

(2) 对 $\forall <a$, c$>$, a, c$\in A$，且 $<a$, c$> \in R$。

$\Rightarrow <a, a> \in R$ （R 是自反的）

$\Rightarrow <a, c> \in R \circ R$ （R 是传递的）

由(1)和(2)可得 $R \circ R = R$。

12．设 R 和 S 是 A 上的等价关系，证明：$R \circ S$ 是 A 上的等价关系 $\Leftrightarrow R \circ S = S \circ R$。

证明（1）设 $R \circ S$ 是 A 上的等价关系。

(a) 对 $\forall <x, y>$，$x, y \in A$

$<x, y> \in R \circ S \Rightarrow <y, x> \in R \circ S$ （$R \circ S$ 是对称的）

$\Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <y, z> \in R \wedge <z, x> \in S$ （“o”的定义)

$\Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <z, y> \in R \wedge <x, z> \in S$ (R 和 S 是对称的)

$\Rightarrow <x, y> S \circ R$ （“o”的定义)

即有 $R \circ S \subseteq S \circ R$。

(b) 对 $\forall <x, y>$，$x, y \in A$

$<x, y> \in S \circ R \Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <x, z> \in S \wedge <z, y> \in R)$ （“o”的定义)

$\Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <z, x> \in S \wedge <y, z> \in R)$ (R 和 S 是对称的)

$\Rightarrow <y, x> \in R \circ S$ （“o”的定义)

$\Rightarrow <x, y> \in R \circ S$ （$R \circ S$ 是对称的）

即有 $S \circ R \subseteq R \circ S$;

由(a), (b)知 $R \circ S = S \circ R$。

（2）设 $R \circ S = S \circ R$。

(a) 自反性

对 $\forall x$

$x \in A \Rightarrow <x, x> \in R$ 且 $<x, x> \in S$ （R, S 是自反的）

$\Rightarrow <x, x> \in R \circ S$ （“o”的定义)

即 $R \circ S$ 是自反的。

(b) 对称性

对 $\forall <x, y>, x, y \in A$

$<x, y> \in R \circ S \Rightarrow <x, y> \in S \circ R$ （$R \circ S = S \circ R$）

$\Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <x, z> \in S \wedge <z, y> \in R)$ （“o”的定义)

$\Rightarrow \exists z(z \in A \wedge <z, x> \in S \wedge <y, z> \in R)$ (R 和 S 是对称的)

$\Rightarrow <y, x> \in R \circ S$ （“o”的定义)

即 $R \circ S$ 是对称的。

(c)传递性

对 $\forall <x, y>, <y, z>, x, y, z \in A$

$<x, y> \in R \circ S \wedge <y, z> \in R \circ S \Rightarrow <x, y> \in R \circ S \wedge <y, z> \in S \circ R$ （$R \circ S = S \circ R$）

$\Rightarrow \exists z \exists t\, (z \in A \wedge t \in A \wedge <x, w> \in R \wedge <w, y> \in S \wedge <y, t> \in S \wedge <t, z> \in R)$ （“o”的定义)

$\Rightarrow \exists z \exists t\, (z \in A \wedge t \in A \wedge <w, x> \in R \wedge <y, w> \in S \wedge <t, y> \in S \wedge <z, t> \in R)$ (R 和 S 是对称的)

$\Rightarrow <z, x> \in R \circ S \circ S \circ R$ （“o”的定义)

$\Rightarrow <z, x> \in R \circ S \circ R$ (第 11 题的结论)

$\Rightarrow <z, x> \in R \circ R \circ S$ ($R \circ S = S \circ R$)

$\Rightarrow <z, x> \in R \circ S$ (第 11 题的结论)

$\Rightarrow <x, z> \in R \circ S$ ($R \circ S$ 是对称的)

即 $R \circ S$ 是传递的。

由(a), (b), (c)知：$R \circ S$ 是等价关系。

13．设集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，试判定下列集合是否为 A 的划分。

（1）S_1={{1, 2, 4}, {3, 5}}　　　　　　（2）S_2={{1, 2, 4, 5}, {3, 5, 6}}

（3）S_3={∅, {1, 2, 3}, {4, 5, 6}}　　　　（4）S_4={{1, 2, 4}, {3}, {5, 6}}

解：(4)是 A 的划分。

(1)不是 A 的划分, 因为$\{1, 2, 4\}\cup\{3, 5\}\neq A$。

(2)不是 A 的划分, 因为$\{1, 2, 4, 5\}\cap\{3, 5, 6\}\neq\varnothing$。

(3)不是 A 的划分, 因为∅不是 A 的非空子集。

14．设 $A=\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$是集合 A 的划分，若 $A_i\cap B\neq\varnothing$ $(1\leq i\leq n)$，问：

$$\{A_1\cap B, A_2\cap B, A_3\cap B, \ldots, A_n\cap B\}$$

是集合 $A\cap B$ 的划分吗？

解$\{A_1\cap B, A_2\cap B, A_3\cap B, \ldots, A_n\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分。因为

（1）对任意 $A_i\cap B$, $A_j\cap B$, 当 $i\neq j$ 时，有：

$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=A_i\cap A_j\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$。

（2）$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)=(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cap B=A\cap B$。

由(1), (2)知：$\{A_1\cap B, A_2\cap B, A_3\cap B, \ldots, A_n\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分。

15．对任意非空集合 A，$P(A)$-{∅}是 A 的非空集合族，$P(A)$-{∅}是否可构成 A 的划分？

解当$|A|=1$ 时，$P(A)$-{∅}= {A} 是 A 的一个划分；

当$|A|>1$ 时，$P(A)$-{∅}= $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^n-2}, A\}$，其中：

$A_i\subseteq A(i=1, 2, 3, \ldots, 2^n-2)$, $A_i\neq\varnothing$, $A_i\cap A=A_i\neq\varnothing$,

所以，$P(A)$-{∅}不可能是 A 的一个划分。

16．设集合 A＝{1, 2, 3, 4, 5, 8}, R 为 A 上以 3 为模的同余关系。求 A/R。

解　因为 A 上以 3 为模的同余关系 R 是等价关系。

又因为$[1]_R$＝{1, 4}＝$[4]_R$, $[2]_R$＝$[5]_R$＝$[8]_R$＝{2, 5, 8}, $[3]_R$＝{3}, 所以根据商集的定义, A/R＝{$[1]_R$, $[2]_R$, $[3]_R$}＝{{1, 4}, {2, 5, 8}, {3}}。

17．设 A={a, b, c, d}，A 上的等价关系 R 如下：

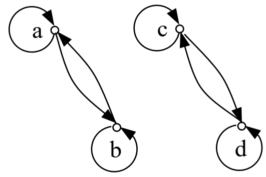


图 5.3

R={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <a, b>, <b, a>, <c, d>, <d, c>}。

画出 R 的关系图，并找出 A 的各元素的等价类和 A 的商集 A/R。

解此 R 的关系图如图 5. 3。A 中各元素的等价类和 A 的商集 A/R 分别为：

$$[a]_R=\{a, b\}=[b]_R \qquad [c]_R=\{c, d\}=[d]_R$$

$$A/R=\{[a]_R, [b]_R\}=\{\{a, b\}, \{c, d\}\}。$$

18．设集合 A 中的元素是长度为 4 的二进制串。现定义 A 上的关系 R 为：

$$<x, y>\in R\Leftrightarrow x, y \text{ 中 0 的个数相同}$$

试证明 R 是 A 上的等价关系, 并求出所有的等价类。

证明（1）自反性

对$\forall a\in A$, 显然, a 与 a 中 0 的个数相同, 根据已知条件, 有<a, a>∈R, 故 R 是自反的。

（2）**对称性**

对$\forall a, b\in A$, 若<a, b>∈R, 则由已知条件知, a 与 b 中 0 的个数相同, 从而 b 与 a 中 0 的个数也相同, 根据条件(3。3。2), 有<b, a>∈R, 即 R 是对称的。

（3）**传递性**

对 $\forall a, b, c\in A$, 若 $<a, b>\in R$, $<b, c>\in R$, 根据已知条件, 有 a 与 b 中 0 的个数相同, b 与 c 中 0 的个数相同, 从而 a 与 c 中 0 的个数相同。再根据条件(3。3。2), 得 $<a, c>\in R$, 即 R 是传递的。

由(1), (2)和(3)知, R 是 A 上的一个等价关系。

因为 R 是 A 上的等价关系, 所以其对应的等价类为：

不含 0 的等价类：{1111}。

含 1 个 0 的等价类：{0111, 1011, 1101, 1110}。

含 2 个 0 的等价类：{0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100}。

含 3 个 0 的等价类：{1000, 0001, 0100, 0010}。

含 4 个 0 的等价类：{0000}。

19．给定集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 找出 A 上的等价关系 R, 并画出 R 的关系图。其中, 关系 R 对应的划分如下：

（1）$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$。

（2）$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$。

解（1）$R=\{1, 2\}\times\{1, 2\}\cup\{3\}\times\{3\}\cup\{4, 5\}\times\{4, 5\}$

$=\{<1, 1>, <2, 2>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <4, 5>, <5, 4>\}$。

关系图如图 5. 4(a)所示。

（2）$R=\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\}\cup\{4\}\times\{4\}\cup\{5\}\times\{5\}$

$=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <4, 4>, <5, 5>\}$。

关系图如图 5.4(b)所示。

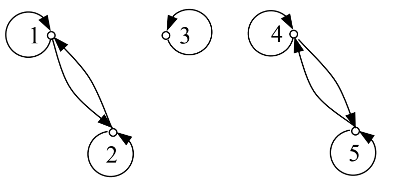


图 5.4（a）

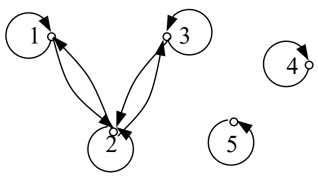


图 5.4 (b)

20．设 R 是自然数集 N 上的关系，对 $\forall x, y\in N$，$<x, y>\in R\Leftrightarrow 2\,|\,(x+y)$，试确定 R 导致的 N 的划分。

解 因为整除关系是等价关系，所以 $2|(x+y)$ 是等价关系。$<x, y>\in R\Leftrightarrow 2\,|\,(x+y)$，所以 x 和 y 是同奇偶的，即 R 有两个等价类，分别为 $[0]_R=\{2k|k\in N\}$ 和 $[1]_R=\{2k+1|k\in N\}$。从而 R 导致的划分为 $\{\{2k\}, \{2k+1\}\}$，其中 $K\in N$。

21．设集合 A＝{1, 2, 3, 4}，试计算 A 上有多少个不同的等价关系，并直接给出它们对应的商集。

解 A 上不同的等价关系有 8 个，它们对应的商集分别为：

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$；$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$；$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$；$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$；

$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$；$\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$；$\{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$；$\{\{1, 2, 3, 4\}\}$。

22．判断下列关系是否为拟序集？

（1）$<N, <>$　　　　（2）$<N, \leq>$

（3）$<P(N), \subset>$　　　　（4）$<P(\varnothing), \subseteq>$

解（1）$<N, <>$ 是拟序集。

（2）$<N, \leq>$ 不是拟序集。

（3）$<P(N), \subset>$ 是拟序集。

（4）$<P(\varnothing), \subseteq>$ 不是拟序集。

23．若 R 是 A 上的偏序关系，试证明 $R\text{-}I_A$ 是拟序关系。

证明：（1）证明 $R\text{-}I_A$ 是反自反的。

因为 R 是自反的，根据定理 4.9(1)，有 $I_A\subseteq R$，从而（$R\text{-}I_A$）$\bigcap I_A=\phi$。于是根据定理 4.9(2) 可得 $R\text{-}I_A$ 是反自反的。

（或者，对 $\forall a\in A$，因为 $<a,a>\in R$，所以 $<a,a>\notin R-I_A$，即-I_A 是反自反的。）

（2）证明 $R\text{-}I_A$ 是传递的。

对 $\forall a,b,c\in A$，若 $<a,b>\in R-I_A$，$<b,c>\in R-I_A$，则有，$<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$，$<a,b>\notin I_A,<b,c>\notin I_A$，即可得 $a\neq b\neq c$。又因为 R 是传递的，所以有 $<a,c>\in R$ 且 $<a,c>\notin I_A$，即 $<a,c>\in R-I_A$，即 $R\text{-}I_A$ 是传递的。

从而 $R\text{-}I_A$ 是拟序关系。

24．若 R 是 A 上的拟序关系，试证明 $R\cup I_A$ 是偏序关系。

证明：（1）证明 $R\cup I_A$ 是自反的。

因为 $I_A\subseteq R\cup I_A$，所以根据定理 4.9(1)，$R\cup I_A$ 是自反的；

（2）证明 $R\cup I_A$ 是反对称的。

对 $\forall a,b\in A$，若 $<a,b>\in R\cup I_A$，$<b,a>\in R\cup I_A$，则必有 $<a,b>\in R$ 或 $<a,b>\in I_A$ 和 $<b,a>\in R$ 或 $<b,a>\in I_A$。若 $<a,b>\in I_A$ 或 $<b,a>\in I_A$，根据 I_A 的定义，有 $a=b$, 此时 $R\cup I_A$ 是反对称的；若 $<a,b>\in R$ 或 $<b,a>\in R$，则因为 R 是反对称的，此时也必有 $a=b$ 成立。即 $R\cup I_A$ 是反对称的。

（3）证明 $R\cup I_A$ 是传递的。

对 $\forall a,b,c\in A$，因为 $<a,b>\in R\cup I_A$，$<b,c>\in R\cup I_A$，则有 $<a,b>\in R$ 或 $<a,b>\in I_A$ 和 $<b,c>\in R$ 或 $<b,c>\in I_A$。若有 $<a,b>\in I_A$ 和 $<b,c>\in I_A$，根据 I_A 的定义，有 $a=b$，此时显然传递性成立。若有 $<a,b>\in R$ 和 $<b,c>\in R$，根据 R 的传递性，显然有 $<a,c>\in R$, 从而有 $<a,c>\in R\cup I_A$ 即可得 $R\cup I_A$ 是传递的.

综上所述，$R\cup I_A$ 是偏序关系。

25．设 X 是所有 4 位二进制串的集合, 在 X 上定义关系 R: 如果 s_1 的某个长度为 2 的子串等于 s_2 的某个长度为 2 的子串, 则 $<s_1, s_2>\in R$, 例如因为二进制串 0111 和 1010 中都含有子串 01, 所以 $<0111,1010>\in R$。试判断 R 是否是一个偏序关系。

解　对 $\forall s, t\in$ X, 如果 $<s, t>\in R$, 则 s 的某个长度为 2 的子串等于 t 的某个长度为 2 的子串, 也可以说 t 的某个长度为 2 的子串等于 s 的某个长度为 2 的子串, 即有 $<t, s>\in R$, 从而 R 是对称的。根据对称性, 存在 0111, 1010$\in$X, 有 $<0111, 1010>\in R$ 且 $<1010, 0111>\in R$, 但是 0111≠1010, 从而 R 不是反对称的。根据偏序关系的定义, R 不是偏序关系。

26．设 R 是 A 上的自反和传递的关系，证明 A 上存在一个等价关系 S，且在 A/S 上存在偏序关系 T，使得

$$\langle [x]_S, [y]_S\rangle\in T \text{ 当且仅当 } \langle x,y\rangle\in R \qquad (5.1)$$

证明（1）证明 A 上存在一个等价关系 S。

1) 定义 A 上的关系 S 为：

$$\langle x,y\rangle\in S \text{ 当且仅当 } \langle x,y\rangle\in R \text{ 且 } \langle y,x\rangle\in R \qquad (*)$$

2) 证明 S 是 A 是的等价关系

① **自反性**

对 $\forall a\in A$, 因 R 是自反的, 所以 $<a, a>\in R$, 由 $<a, a>\in R$ 并且 $<a, a>\in R$, 可得 $<a, a>\in S$, 即 S 是自反的。

② **对称性**

对$\forall a, b\in A$, 若$<a, b>\in S$, 则由(*)可得$<a, b>\in R$ 并且$<b, a>\in R$, 即有$<b, a>\in R$ 并且$<a, b>\in R$, 所以有$<b, a>\in S$, 即 S 是对称的。

③ **传递性**

对$\forall a, b, \mathrm{c}\in A$, 若$<a, b>\in S$, $<b, \mathrm{c}>\in S$, 则由(*)得$<a, b>\in R$ 并且$<b, a>\in R$ 和$<b, \mathrm{c}>\in R$ 并且$<\mathrm{c}, b>\in R$。因为 R 是传递的, 所以由$<a, b>\in R$ 并且$<b, \mathrm{c}>\in R$ 得$<a, \mathrm{c}>\in R$；由$<\mathrm{c}, b>\in R$ 并且$<b, a>\in R$ 得$<\mathrm{c}, a>\in R$。从而$<a, \mathrm{c}>\in S$, 即 S 是传递的。

综上所述, S 是 A 上的一个等价关系。

（2）证明 A/S 上存在偏序关系 T, 且满足式(5. 1)。

① **自反性**

对任意$[x]_S\in A/S$, 有$x\in A$。因为 R 是自反的, 所以有$\langle x,x\rangle\in R$。从而, 根据式(5.1)可得, $\langle [x]_S,[x]_S\rangle\in T$。即 T 是自反的。

② **反对称性**

对任意$[x]_S,[y]_S\in A/S$, 如果$\langle [x]_S,[y]_S\rangle\in T$ 且$\langle [y]_S,[x]_S\rangle\in T$, 则根据式(5.1)可得$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle y,x\rangle\in R$。根据(*)可得, $\langle x,y\rangle\in S$。又因为 S 是等价关系, 所以有$[x]_S=[y]_S$, 从而可得 T 是反对称的。

② **传递性**

对任意$[x]_S,[y]_S,[z]_S\in A/S$, 如果$\langle [x]_S,[y]_S\rangle\in T$, $\langle [y]_S,[z]_S\rangle\in T$, 则根据式(5.1)可得$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle y,z\rangle\in R$。又因为 R 是传递的, 所以有$\langle x,z\rangle\in R$。从而再根据式(5.1)可得$\langle [x]_S,[z]_S\rangle\in T$。即 T 是传递的。

综上所述, S 是 A 上的一个偏序关系。

27．设集合 $A=\{3, 5, 15\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 12\}$, $C=\{3, 9, 27, 54\}$。分别在 A, B, C 上定义整除关系，试写出这些关系的表达式，画出其哈斯图，并指出哪些是全序关系。

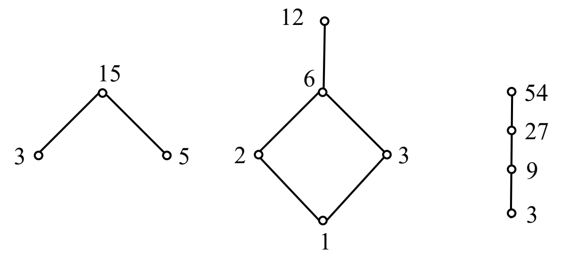
解 设$\leq_A, \leq_B, \leq_C$ 分别为 A，B，C 上的偏序关系（整除关系）。

$\leq_A=\{<3, 3>, <5, 5>, <15, 15>, <3, 15>, <5, 15>\}$。

$\leq_B=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <12, 12>, <1, 2>, <1, 3>,$
$<1, 6>, <1, 12>, <2, 6><2, 12>, <3, 6>, <3, 12>, <6, 12>\}$。

$\leq_C=\{<3, 3>, <9, 9>, <27, 27>, <54, 54>, <3, 9>, <3, 27>, <3, 54>,$
$<9, 27>, <9, 54>, <27, 54>\}$。

$\leq_A, \leq_B, \leq_C$ 的哈斯图如图 5.5。



$\leq_A$　　$\leq_B$　　$\leq_C$

图 5.5

28．对于下列集合上的整除关系画出其哈斯图。

（1）$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$；

（2）$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

解　集合 A 和 B 上的整除关系的哈斯图分别为 5.6(a)和 5.6(b)。

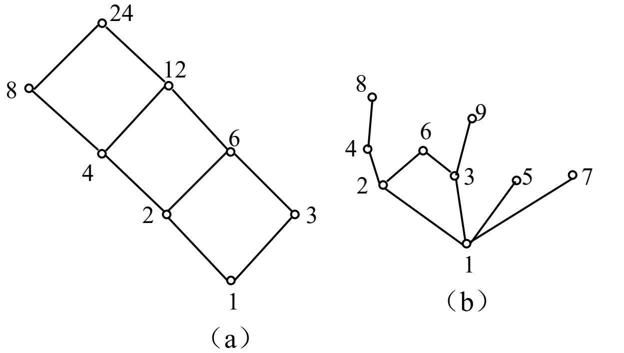


图 5.6

29．设集合 $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, 对应的哈斯图见图 5.7。令 $B_1=\{a, b\}$, $B_2=\{c, d, e\}$。　(a)　(b)　(c)　(d)
求出 B_1, B_2 的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界。

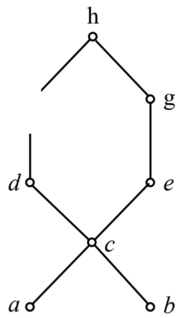


图 5.7

解 B_1 和 B_2 的各种特殊元素如表 5. 1。

表 5. 1

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	无	无	a, b	a, b	c, d, e, f, g, h	无	c	无
B_2	无	c	d, e	c	h	c, a, b	h	c

30．设集合 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的偏序关系如图 5.8 所示, 求 X 的最大元、最小元、极大元、极小元。求子集 $X_1=\{x_2, x_3, x_4\}$, $X_2=\{x_3, x_4, x_5\}$, $X_3=\{x_1, x_3, x_5\}$的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元和极小元。

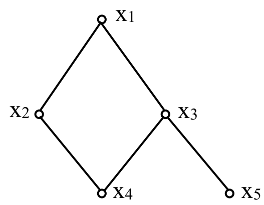


图 5.8

解　X_1, X_2 和 X_3 各种特殊元如表 5.2。

表 5.2

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
X_1	无	x_4	x_2, x_3	x_4	x_1	x_4	x_1	x_4
X_2	x_3	无	x_3	x_4, x_5	x_1, x_3	无	x_3	无
X_3	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5

31．如图 5.9 所示是四个偏序集$\langle A, R_{\leq}\rangle$哈斯图，分别写出集合 A 和偏序关系 $R_{\leq}$的表达式。

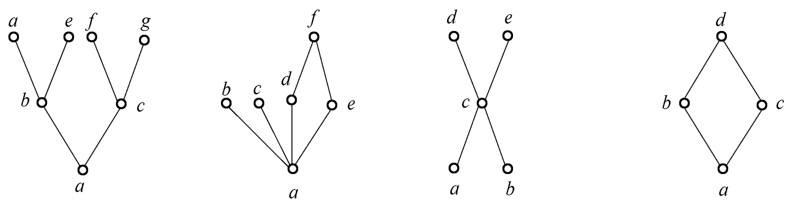


图 5.9

解（1）$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$,

$R_{\le}=\{<a, b>, <a, d>, <a, e>, <b, d>, <b, e>, <a, \mathrm{c}>, <a, f>, <a, g>, <\mathrm{c}, f>, <\mathrm{c}, g>\}\cup I_A$；

（2）$A=\{a, b, \mathrm{c}, d, e, f, g\}$，

$R_{\le}=\{<a, b>, <a, d>, <a, \mathrm{c}>, <a, f>, <a, g>, <d, f>, <e, f>\}\cup I_A$；

（3）$A=\{a, b, \mathrm{c}, d, e\}$，

$R_{\le}=\{<a, d>, <a, e>, <b, d>, <b, e>, <a, \mathrm{c}>, <b, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, d>, <\mathrm{c}, e>\}\cup I_A$；

（4）$A=\{a, b, \mathrm{c}, d\}$，

$R_{\le}=\{<a, b>, <a, d>, <b, d>, <a, \mathrm{c}>, <\mathrm{c}, d>\}\cup I_A$。

32．分别画出下列各偏序集$<A, R_{\le}>$哈斯图，并找出 A 的极小元、极大元、最大元、最小元。

（1）$A=\{a, b, \mathrm{c}, d, e\}$，$R_{\le}=\{<a, d>, <a, \mathrm{c}>, <a, b>, <a, e>, <b, e>, <\mathrm{c}, e>, <d, e>\}\cup I_A$。

（2）$A=\{a, b, \mathrm{c}, d, e\}$，$R_{\le}=\{<\mathrm{c}, d>\}\cup I_A$。

解（1）哈斯图为 5. 10。A 之极大元和最大元为 e，极小元和最小元为 a。

（2）哈斯图为 5. 11。A 之极大元为 a, b, d, e，极小元为 a, b, c, d。无最大元和最小元。

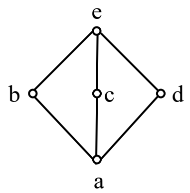


图 5.10

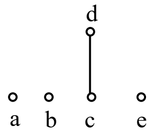


图 5.11

33．设集合 $A=\{\varnothing, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$。证明 A 上的包含关系“$\subseteq$”是全序关系，并画出其哈斯图。

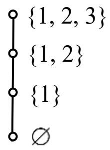


图 5.12

证明　显然$<A, \subseteq>$是偏序集。

又因为$\varnothing\subseteq\{1\}\subseteq\{1, 2\}\subseteq\{1, 2, 3\}$，所以，$A$ 中任何的 x, y，都有 $x\subseteq y$ 或 $y\subseteq x$，所以，"$\subseteq$"是一个全序关系。哈斯图如图 5.12。

34．设$<P, \le>$是正整数集关于整除关系作成的偏序集，P 的子集 $T=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，求 T 的上界、下界、最小上界、最大下界。

解 T 的上界为：60，120，180，240，…；最小上界为：60；

下界为：1；最大下界为：1。

35．设 A 是非空集合，B 是 A 上的一切二元关系的集合。任取 R_1，$R_2\in B$，如果对 $x, y\in A$，有 $xR_1y\Rightarrow xR_2y$。那么就规定 $R_1\le R_2$。证明$<B, \le>$是一个偏序集。

证明（1）对任意 $R\in B$，对任意 $x, y\in A$，有 $xRy\Rightarrow xRy$。所以，$R\le R$。即“$\le$”是自反的；

（2）对任意 R_1，$R_2\in B$，如果有 $R_1\le R_2$ 并且 $R_2\le R_1$，则对任意 $x, y\in A$，有 $xR_1y\Rightarrow xR_2y$ 并且 $xR_2y\Rightarrow xR_1y$。即有：$R_1\subseteq R_2$，$R_2\subseteq R_1$。所以，$R1=R2$。即“$\le$”是对称的；

（3）对任意 R_1，R_2，$R_3\in B$，如果有 $R_1\le R_2$ 并且 $R_2\le R_3$，则对任意 $x, y\in A$，有：$xR_1y\Rightarrow xR_2y$ 并且 $xR_2y\Rightarrow xR_3y$。即有：$R_1\subseteq R_2$，$R_2\subseteq R_3$。所以，$R_1\subseteq R_3$。即：$R_1\le R_3$。即“$\le$”是传递的。

由(1)，(2)，(3)知即“$\le$”是偏序关系，即$<B, \le>$是偏序集。

36．判断下列次序集是偏序集、全序集、良序集还是拟序集？

（1）$<N, <>$　（2）$<N, \le>$　（3）$<\mathrm{Z}, \le>$

（4）$<P(N), \subset>$　（5）$<P(\{a\}), \subseteq>$　（6）$<P(\varnothing), \subseteq>$

解（1）$<N, <>$是拟序集。

（2）$<N, \le>$是偏序集、全序集、良序集。

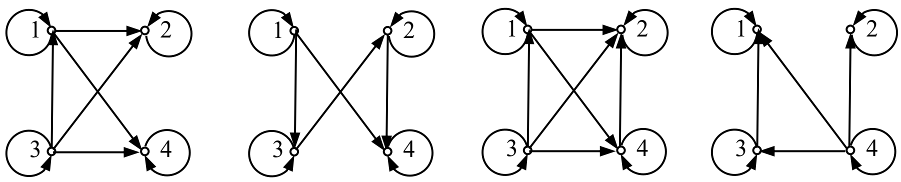
（3）$<\mathrm{Z}, \le>$是偏序集、全序集。

（4）$<P(N), \subset>$是拟序集。

（5）$<P(\{a\}), \subseteq>$是偏序集、全序集、良序集。

（6）$<P(\varnothing), \subseteq>$是偏序集、全序集、良序集。

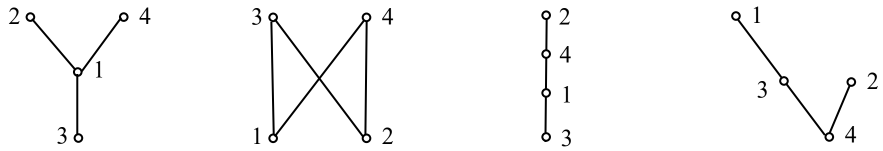
37．给出集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的四个偏序关系图如图 5.12 所示，画出它们的哈斯图。并说明哪一个是全序关系，哪一个是良序关系。



（a）　（b）　（c）　（d）

图 5.12

解 图 5.12(a), (b), (c), (d)的哈斯图分别为图 5.13 的(a), (b), (c), (d)。



(a)　(b)　(c)　(d)

图 5.13

38．设 R 是集合 S 上的关系，S_1 是 S 的子集，定义 S_1 上的关系 R_1 如下：

$$R_1=R\cap(S_1\times S_1)。$$

确定下述每一断言是真还是假。

（1）若 R 在 S 上是传递的，则 R_1 在 S_1 上是传递的。

（2）若 R 在 S 上是偏序关系，则 R_1 在 S_1 上是偏序关系。

（3）若 R 在 S 上是拟序关系，则 R_1 在 S_1 上是拟序关系。

（4）若 R 在 S 上是全序关系，则 R_1 在 S_1 上是全序关系。

（5）若 R 在 S 上是良序关系，则 R_1 在 S_1 上是良序关系。

解（1）断言成立。若 R 是 S 上的传递关系，则对任意 $x, y, z\in S_1$，

若$<x, y>\in R_1$ 且$<y, z>\in R_1$, 则有：

$$(<x, y>\in R \text{ 且} <y, z>\in R)\text{以及}(<x, y>\in S_1\times S_1 \text{ 且} <y, z>\in S_1\times S_1)。$$

因为 $S_1\subseteq S$, 所以 $x, y, z\in S$。

由 R 在 S 上是传递的且 $S_1\times S_1$ 也是传递的知：

$<x, z>\in R$ 且$<x, z>\in S_1\times S_1$，所以，$<x, z>\in R_1$，即 R_1 是传递的；

（2）断言成立。若 R 是 S 上的偏序关系，则 R 是自反、反对称和传递的。则

①对任意 $x\in S_1$, 因为 $S_1\subseteq S$, 所以 $x\in S$。又因为 R 和 $S_1\times S_1$ 是自反的，所以$<x, x>\in R$ 且$<x, x>\in S_1\times S_1$, 则有：$<x, x>\in R\cap S_1\times S_1$。即 R_1 是自反的。

②对任意 $x, y\in S_1$，若$<x, y>\in R_1$ 且$<y, x>\in R_1$, 则有

$$(<x, y>\in R \text{ 且} <y, x>\in R)\text{以及}(<x, y>\in S_1\times S_1 \text{ 且} <y, x>\in S_1\times S_1)$$

因为 $S_1\subseteq S$, 所以 $x, y\in S$，由 R 在 S 是对称的，且 $S_1\times S_1$ 也是对称的知 $x=y$，所以 R_1 是反对称的。

③由题(1)知 R_1 是传递的。

由①, ②, ③知：R_1是偏序关系；

（3）断言成立。若R是S上的拟序关系，则R是反自反、反对称和传递的，则

①对任意$x\in S_1$, 因为$S_1\subseteq S$, 所以，$x\in S$，因为R是反自反的，所以，$\langle x, x\rangle\notin R$则有：$\langle x, x\rangle\notin R\cap S_1\times S_1$。即$R_1$是反自反的；

②由题(2)的②知R_1是反对称的；

③由题(1)知R_1是传递的；

由①, ②, ③知R_1是拟序关系。

（4）断言成立。若R是S上的全序关系，即R是偏序关系且对任意$x, y\in S$，有xRy且yRx。

①由(2)知R_1是偏序关系。

②对任意$x, y\in S_1$, 则有$(x, y\in S)$且$(\langle x, y\rangle\in R$或$\langle y, x\rangle\in R)$。

又$(\langle x, y\rangle\in S_1\times S_1$且$\langle y, x\rangle\in S_1\times S_1)$，所以

$(\langle x, y\rangle\in R\cap S_1\times S_1)$或$(\langle y, x\rangle\in R\cap S_1\times S_1)$

即$\langle x, y\rangle\in R_1$或$\langle y, x\rangle\in R_1$。

由①, ②知R_1是全序关系。

（5）断言定成立。若R是S上的良序关系，即S的任意非空子集都有最小元。

①因良序关系一定是全序关系，由(4)知R_1是全序关系；

②对S_1的任意非空子集T，显然T是S的非空子集，因此T中存在关于关系R的最小元，即存在$a\in T$，使得对任意$x\in T$，都有$\langle a, x\rangle\in R$。

又$\langle a, x\rangle\in S_1\times S_1$，所以$\langle a, x\rangle\in R\cap S_1\times S_1$，即$\langle a, x\rangle\in R_1$，故$a$是$T$中存在关于关系$R_1$的最小元；

由①, ②知R_1是良序关系。

39．下列关系中哪些能构成函数？

（1）$\{\langle x, y\rangle|(x, y\in N)\wedge(x+y=10)\}$

（2）$\{\langle x, y\rangle|(x, y\in R)\wedge(y=x^2)\}$

（3）$\{\langle x, y\rangle|(x, y\in R)\wedge(y^2=x)\}$

（4）$\{\langle |x|, x\rangle|(x\in R)\}$

解 仅有(2)能构成函数，(1)，(3), (4)都不能构成函数。

40．设$A=\{1, 2\}, B=\{3, 4, 5\}$。写出$A$到$B$的所有函数和它们的像集, 并指出哪些是单射、满射、双射。

解 $f_1=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}, f_2=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle\}, f_3=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$,

$f_4=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, f_5=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle\}, f_6=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$,

$f_7=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, f_8=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle\}, f_9=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$。

$f_1(A)=\{3, 4\}, f_2(A)=\{3, 5\}, f_3(A)=\{3\}, f_4(A)=\{3, 4\}, f_5(A)=\{4\}$,

$f_6(A)=\{4, 5\}, f_7(A)=\{3, 5\}, f_8(A)=\{4, 5\}, f_9(A)=\{5\}$。

其中$f_1, f_2, f_4, f_6, f_7, f_8$为单射。

因为$|A|<|B|$, 所以不存在满射和双射。

41．说明以下函数是否是单射、满射、双射。如果是双射, 给出它们的逆函数。

（1）f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=x^2-2x-15$　　（2）f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{E}, f(x)=2x$

（3）f: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}, f(n)=\langle n, n+1\rangle$　　（4）f: $\mathbf{Z}\to\boldsymbol{N}, f(x)=|2x|+1$

解（1）此f只是函数。

（2）此f为双射函数，其逆函数为$f^{-1}=\{\langle x, \frac{x}{2}\rangle|x\in \mathrm{E}\}$。

（3）此f为单射函数。

（4）此 f 只是函数。

42．设 f, g 是函数, 且 $f \cap g \neq \varnothing$, 则 $f \cap g, f \cup g$ 是函数吗？如果是, 证明你的结论。如果不是, 请举一反例。

解 $f \cap g$，$f \cup g$ 都不一定是函数。

设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b, c\}$，f，g 是从 A 到 B 的函数：

$f=\{<1, a>, <2, b>, <3, c>\}$，$g=\{<1, a>, <2, c>, <3, b>\}$。

$f \cap g=\{<1, a>\} \neq \varnothing$, 但 $f \cap g$ 并不是函数；

$f \cup g=\{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <2, b>, <3, c>\}$，则 $f \cup g$ 也不是函数。

43．设 $|A|=n, |B|=m$。

（1）从 A 到 B 有多少个不同的函数？

（2）当 n, m 满足什么条件时, 存在双射, 且有多少个不同的双射？

（3）当 n, m 满足什么条件时, 存在满射, 且有多少个不同的满射？

（4）当 n, m 满足什么条件时, 存在单射, 且有多少个不同的单射？

解（1）从 A 到 B 有 m^n 个不同的函数。

（2）当 $n=m$，存在双射，且有 $n!$ 个不同的双射。

（3）当 $n \geq m$，存在满射，且有 $C_m^m m^n - C_m^{m-1}(m-1)^n - C_m^{m-2}(m-2)^n - \ldots - C_m^1 1^n$ 个不同的满射。

（4）当 $n \leq m$，存在单射，且有 $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)=m!/(m-n)!$ 个不同的单射。

44．设 f, g, h 是实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的函数, 对 $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $f(x)=2x+1$, $g(x)=5+x$, $h(x)=\dfrac{x}{2}$。

求：$f \circ g, g \circ f, h \circ f, f \circ (h \circ g), g \circ (h \circ f)$。

解 $f \circ g(x)=g(f(x))=g(2x+1)=5+2x+1=2x+6$

$g \circ f(x)=f(g(x))=f(x+5)=2(x+5)+1=2x+11$

$h \circ f(x)=f(h(x))=f(x/2)=2(x/2)+1=x+1$

$f \circ (h \circ g)(x)=(h \circ g)(f(x))=(h \circ g)(2x+1)=g(h(2x+1))$

$=g(\dfrac{2x+1}{2})=5+\dfrac{2x+1}{2}=x+5.5$

$g \circ (h \circ f)(x)=(h \circ f)(g(x))=(h \circ f)(x+5)=f(h(x+5))$

$=f(\dfrac{x+5}{2})=2\times\dfrac{x+5}{2}+1=x+6$

45．设置换 $s=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$, $t=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$, 求 $s^2, t^2, s \circ t, t \circ s, s^{-1}, t^{-1}$。

解 $s^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$，$t^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix}$

$st=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix}$，$ts=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix}$

$s^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&2&4\end{pmatrix}$，$t^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$

第 6 章　图

6.4　习题解析

1.　画出邻接矩阵为 A 的无向图 G 的图形，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

解　邻接矩阵为 A 的无向图 G 的图形如图 6.1 所示。

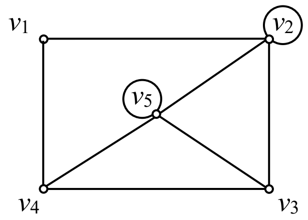


图 6.1

2.　画出下列各图的图形，并判断是有向图、无向图、混合图、多重图、线图还是简单图。

（1）G_1＝<{a, b, c, d, e}, {(a, b), (a, c), (d, e), (d, d), (b, c), (a, d), (b, a)}>。

（2）G_2＝<{a, b, c, d, e}, {<a, b>, <b, c>, <a, c>, <d, a>, <d, e>, <d, d>, <a, e>}>。

（3）G_3＝<{a, b, c, d, e}, {(a, b), (a, c), <d, e>, <b, e>, <e, d>, <b, c>}>。

解　（1）G_1 为无向多重图，它的图形如图 6.2(a)所示。

（2）G_2 为无向线图，它的图形如图 6.2(b)所示。

（3）G_3 为混合简单图，它的图形如图 6.2(c)所示。

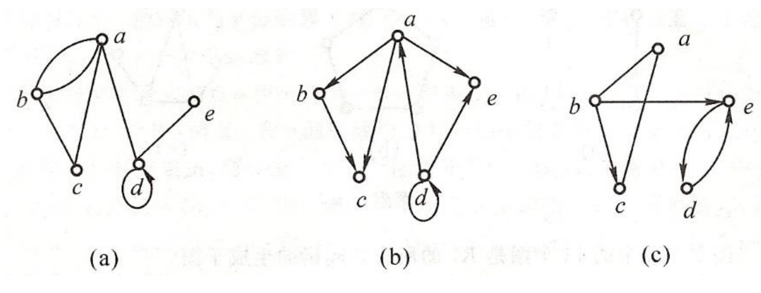


图 6.2

3.　设有向图 G＝< V, E>，　V＝{$v_1, v_2, \ldots, v_n$}，$\boldsymbol{A}$＝$(a_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵。

（1）如何利用 $\boldsymbol{A}$ 计算 G 中结点的出度、入度和度数？

（2）如何利用 $\boldsymbol{A}$ 计算 G 中所有结点的出度之和、入度之和和度数之和？

（3）如何利用 $\boldsymbol{A}$ 求 G 中长度为 1 的通路（含长度为 1 的回路）数？

解　（1）G 中结点 vi 的出度、入度和度数分别由下列式子计算

$$\deg^{+}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,,\qquad \deg^{-}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\,,\qquad \deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})\,;$$

（2）G 中所有结点的出度之和、入度之和和度数之和分别由下列式子计算

$$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,,\qquad \sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,,$$

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$$

（3）G 中长度为 1 的通路（含长度为 1 的回路）数也就是 G 中的边数，有握手定理得

$$|E|=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\deg(v)=\frac{1}{2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$$

4. 设无向图 G 有 12 条边，已知 G 中度数为 3 的结点有 6 个，其余结点的度数均小于 3。问 G 中至少有多少个结点？为什么？

解 由握手定理可知，G 中所有结点的度数之和为 24，去掉 6 个度数为 3 的结点的度数 18 后，还有 6 度。而其余结点的度数均小于 3，即其余结点的度数可为 0、1、2，若其余结点的度数均为 2，则需 3 个结点来占用 6 度，所以 G 中至少有 9 个结点。

5. 设 G 为 9 个结点的无向图，每个结点的度数不是 5 就是 6。试证明 G 中至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

证明 由握手定理的推论可知，G 中度数为 5 的结点只能是 0、2、4、6、8 个五种情况，此时度数为 6 的结点分别为 9、7、5、3、1 个。以上五种情况都满足至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

6. 证明在具有 n 个结点的简单无向图 G 中，至少有 2 个结点的度数相同（$n\geqslant 2$）。

证明 因为 G 是简单图，因此 G 中每个结点的度数均小于等于 n-1，若 G 中所有结点的度数均不相同，则 n 个结点的度数分别为 0、1、2、3、…、n-2、n-1。去掉 G 中孤立结点得 G 的子图 G_1，则 G_1 是具有 n-1 个结点的简单无向图，其 n-1 个结点的度数分别为 1、2、3、…、n-2、n-1，即 G_1 中有一个结点关联 n-1 条边，而中只有 n-1 个结点，从而这 n-1 条至少有两条为平行边或至少有一条为自回路，故 G_1 不是简单图，矛盾。

7. 下面各图中有多少个结点？

（1）16 条边，每个结点的度数均为 2。

（2）21 条边，3 个度数为 4 的结点，其余结点的度数均为 3。

（3）24 条边，每个结点的度数均相同。

解 设该图的结点数为 x，则由握手定理可知

（1）2×x＝2×16，x＝16，故该图有 16 个结点；

（2）3×4+3×(x-3)＝2×21，x＝13，故该有 13 个结点；

（3）假设每个结点的度数均为 y，则有 xy＝2×24，它的正整数解(x,y)以下几个（1,48）,(48,1) (2,24)，(24,2)，(3,16)，(16,3)，(4,12)，(12,4)，(6,8)，(8,6)，故该图有

a). 2 个（度数为 24）结点； *b*). 24 个（度数为 2）结点；

c). 3 个（度数为 16）结点； *d*). 16 个（度数为 3）结点；

e). 4 个（度数为 12）结点； *f*). 12 个（度数为 4）结点；

g). 6 个（度数为 8）结点； h). 8 个（度数为 6）结点。

i). 1 个（度数为 48）结点；　　　　　　j). 48 个（度数为 1）结点。

8. 画出图 6.3 所示的图的补图。

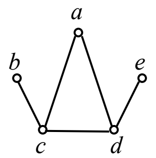


图 6.3

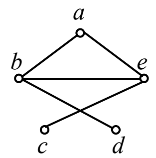


图 6.4

解 图 6.3 所示的图的补图如图 6.4 所示。

9. 试证明图 6.5 中的两个有向图是同构的。

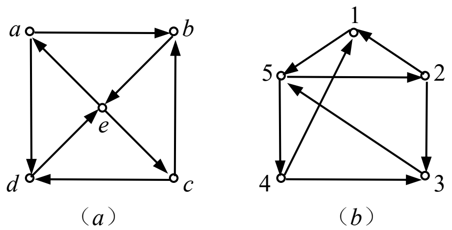


图 6.5

证明 作{*a*,*b*,c,*d*,*e*}到{1,2,3,4,5}的映射 *f* 为 *f*(*a*)＝2，*f*(*b*)＝3，*f*(c)＝4，*f*(*d*)＝1，*f*(*e*)＝5。显然 *f* 是双射，并且满足对任意 x,y，当<x,y>是(*a*)中的边当且仅当<*f*(x),*F*(y)>是(*b*)中的边，它们的重数也相同。

10. 试证明图 6.6 中的两个图不是同构的。

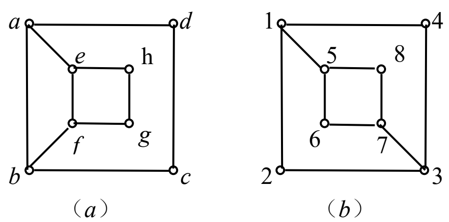


图 6.6

证明 (*a*)中的 4 个度数为 3 的结点中的每一个均与另外两个度数为 3 的结点相邻，而(*b*)中每个度数为 3 的结点只与另外一个度数为 3 的结点相邻，故它们不是同构的。

11. 一个无向图如果同构于它的补图，则称该图为自补图。

（1）给出所有具有 4 个结点的自补图。

（2）给出所有具有 5 个结点的自补图。

（3）证明一个自补图一定有 4*k* 或 4*k*＋1（$k\in \boldsymbol{N}$）个结点。

解 （1）图 6.7(*a*)与它的补图同构，所以它是具有 4 个结点的自补图，此外再也没有与它不同构的具有 4 个结点的自补图了；

（2）具有 5 个结点的非同构的自补图只有两个，它们分别是图 6.7(*b*)和 6.7(c);

（3）若具有 n 个结点无向图 G 是自补图，则因 $G \cong G^c$，因而 G 与 G^c 边数相同，设它们的边数为 m。又因为 G 与 G^c 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{1}{2}n(n\text{-}1)$，所以 $\frac{1}{2}n(n\text{-}1)=2m$，即 $n(n\text{-}1)=4m$，因而 n 为 4 的倍数，即 $n=4k$，或者 $n\text{-}1$ 为 4 的倍数，即 $n=4k+1$。

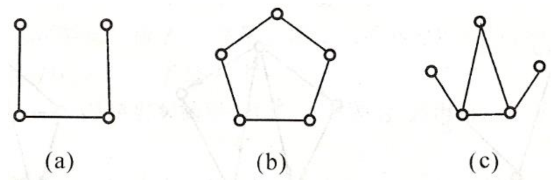


图 6.7

12. 求完全图 K_4 的所有非同构的生成子图。

解 图 6.8 中的 11 个图是的所有非同构的生成子图。

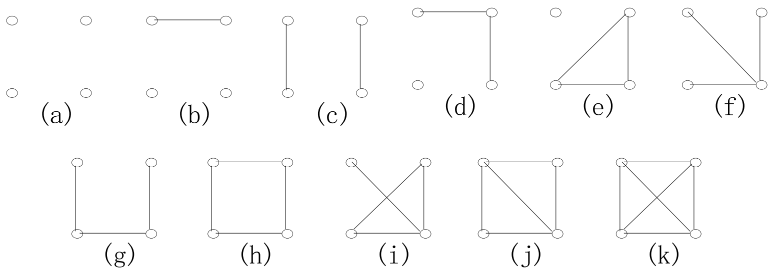


图 6.8

13. 设无向图 $G=(n, m)$中每个结点的度数均为 3，且满足 $2n - 3=m$，问在同构的意义下 G 是唯一的吗？

解 G 中每个结点的度数均为 3，由握手定理可知，$2m=3n$，将 $2n\text{-}3=m$ 代入得方程 $3n=4m\text{-}6$，于是得到 $n=6$，$m=9$。在同构的意义下，G 不是唯一的。因为 6 个结点 9 条边的图可以有若干个非同构的图。例如图 6.9 所示的两个图均有 6 个结点 9 条边，但它们不同构。

图 6.9

14. 给定图 G 如图 6.10 所示，求

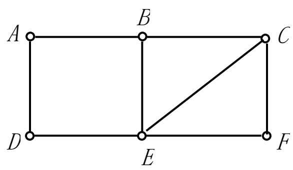


图 6.10

（1）从 A 到 F 的所有简单通路；
（2）从 A 到 F 的所有基本通路；
（3）从 A 到 F 的所有短程线和距离；
（4）G 中的所有基本回路。

解 （1）从 A 到 F 的所有简单通路有 *ABEF*，*ABECF*，*ABCF*，*ABCEF*，*ADEF*，*ADECF*，*ADEBCF*，*ADECBEF*，*ADEBCEF*；
（2）从 A 到 F 的所有基本通路有 *ABEF*，*ABECF*，*ABCF*，*ABCEF*，*ADEF*，*ADECF*，*ADEB*C*F*；
（3）从 A 到 F 的所有短程线有 *ABCF*，*ABEF*，*ADEF*；从 A 到 F 的距离为 3；
（4）G 中的所有基本回路有 *ABCFEDA*，*ABCEDA*，*ABEDA*，*BCEB*，*BCFEB*，C*EFC*。

15. 求图 6.11 所示的有向图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$，找出从 v_1 到 v_4 长度为 2、3 和 4 的所有通路，用计算 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$ 和 $\boldsymbol{A}^4$ 来验证结论。

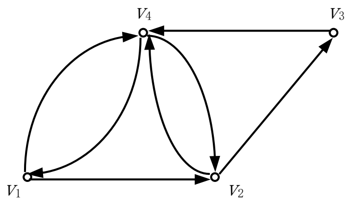


图 6.11

解 G 中从 v_1 到 v_4 长度为 2 的通路有 $v_1v_1v_4$；$v_1v_3v_4$ 共 2 条。
G 中从 v_1 到 v_4 长度为 3 的通路有 $v_1v_1v_1v_4$；$v_1v_1v_3v_4$；$v_1v_4v_1v_4$；$v_1v_3v_1v_4$ 共 4 条。
G 中从 v_1 到 v_4 长度为 4 的通路有 $v_1v_1v_1v_1v_4$；$v_1v_1v_1v_3v_4$；$v_1v_1v_4v_1v_4$；$v_1v_1v_3v_1v_4$；$v_1v_3v_4v_1v_4$；$v_1v_3v_1v_1v_4$；$v_1v_3v_1v_3v_4$；$v_1v_4v_1v_3v_4$；$v_1v_4v_1v_1v_4$；$v_1v_4v_1v_3v_4$ 共 10 条。
将 G 中结点按 $v_1v_2v_3v_4$ 排序，则 G 的邻接矩阵为

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix},$$

从而

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}^3=\begin{pmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}^4=\begin{pmatrix}16&4&7&10\\7&2&3&4\\11&3&5&7\\10&3&4&6\end{pmatrix}。$$

因此，$a_{14}^{(2)}=2$，$a_{14}^{(3)}=4$，$a_{14}^{(4)}=10$，所以 G 中从 v_1 到 v_4 长度为 2、3 和 4 的通路分别有 2 条、4 条和 10 条。

16. （1）若无向图 G 中只有两个奇度数结点，则这两个结点一定是相互可达的吗？
（2）若有向图 G 中只有两个奇度数结点，则它们一定一个可达另一个或相互可达吗？

解 （1）设 G 中的两个奇度数结点分别为 u 和 v，若 u 与 v 不是相互可达的，即它们之间无任何通路，则 G 至少有两个连通分支 G_1, G_2，使得 u 与 v 分别属于 G_1 和 G_2，于是 G_1

和 G_2 中各含有 1 个奇度数结点，这与握手定理的推论矛盾，因而 u 与 v 一定是相互可达的。

（2）有向图 G 中只有两个奇度数结点 u 和 v，u 与 v 不一定相互可达，也不一定一个可达另一个。例如 $G=<\{u,v,w\}，\{<u,w>，<v,w>\}>$中，结点 u 和 v 的度数均为 1，w 的是为 2，但 u 不可达 v，v 也不可达 u。

17. 分别用 *Dijk*stra 算法和 *F*loyd 算法求图 6.12 所示无向赋权图中 v_1 到 v_9 的最短通路。

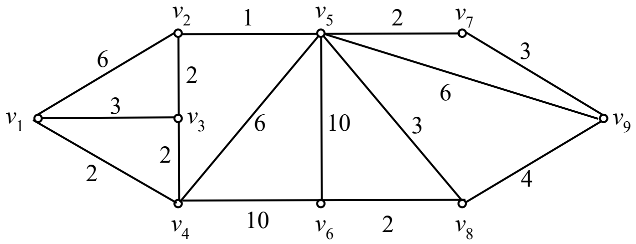
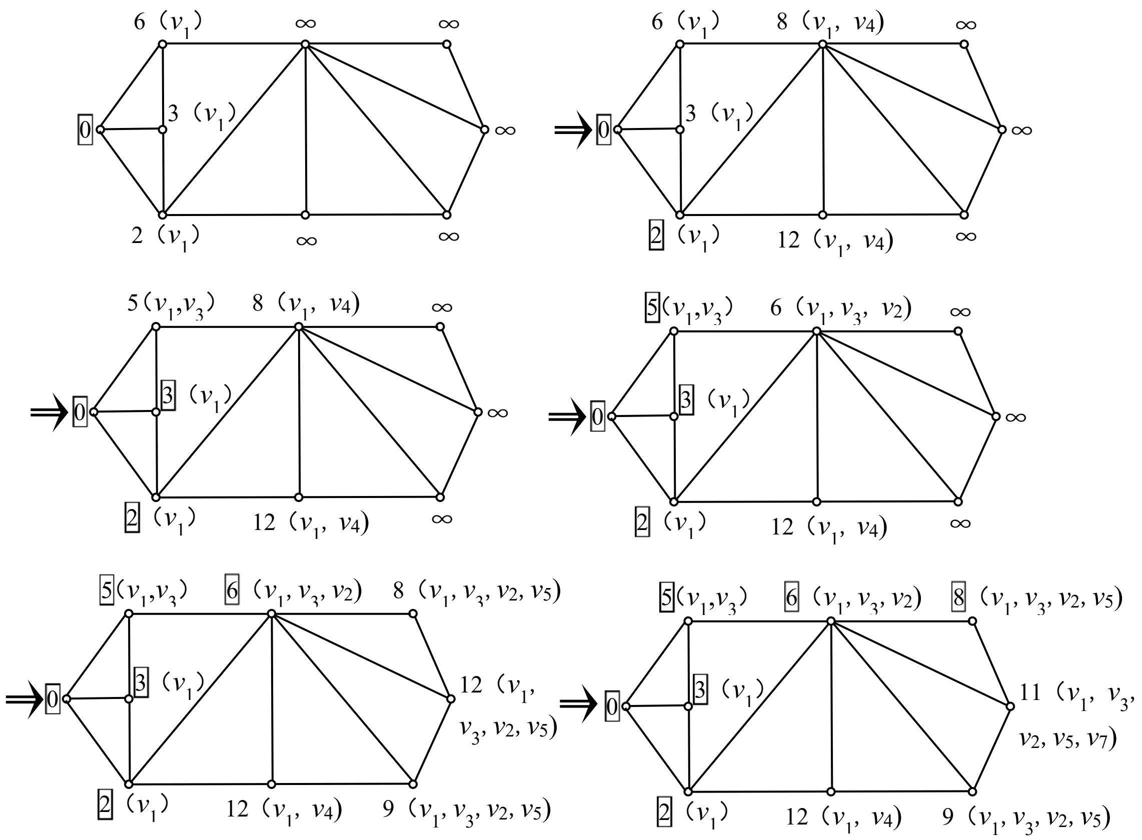


图 6.12

解 根据 *Dijkstra* 算法，有如图 6.13 所示的求解过程。故 v_1 到 v_9 的最短通路为 $v_1v_3v_2v_5v_7v_9$，其长度为 11。实际上，也求出了 v_1 到所有结点的最短通路，例如，v_1 到 v_5 的最短通路为 $v_1v_3v_2v_5$，其长度为 6，等等。



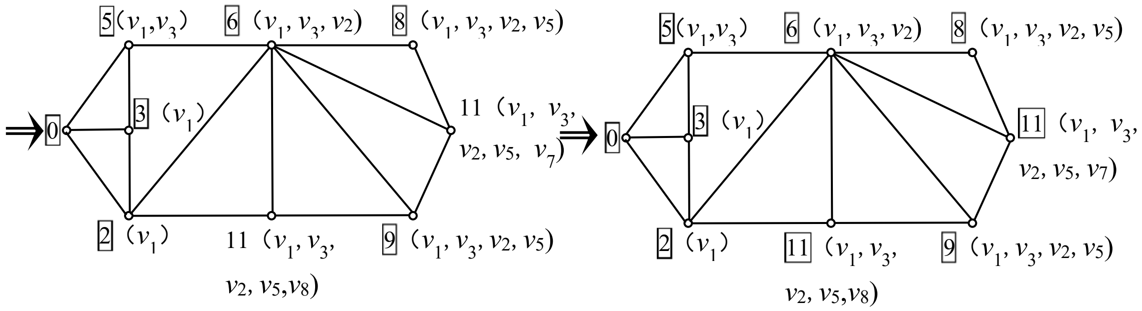


图 6.13

根据 *Floyd* 算法，有

$$
\boldsymbol{D}^{(0)}=\begin{pmatrix}
0 & 6 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & 0 & 2 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & 0 & 6 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 1 & \infty & 6 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6 \\
\infty & \infty & \infty & 10 & 10 & 0 & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{D}^{(1)}=\begin{pmatrix}
0 & 6 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & 0 & 2 & 8 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 2 & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & 8 & 2 & 0 & 6 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 1 & \infty & 6 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6 \\
\infty & \infty & \infty & 10 & 10 & 0 & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(2)}=\begin{pmatrix}
0 & 6 & 3 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
6 & 0 & 2 & 8 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & 8 & 2 & 0 & 6 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
7 & 1 & 3 & 6 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6 \\
\infty & \infty & \infty & 10 & 10 & 0 & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{D}^{(3)}=\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 2 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
5 & 0 & 2 & 4 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6 \\
\infty & \infty & \infty & 10 & 10 & 0 & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(4)}=\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 2 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty \\
5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 14 & \infty & \infty & \infty \\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & 12 & \infty & \infty & \infty \\
2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & \infty & \infty & \infty \\
6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6 \\
12 & 14 & 12 & 10 & 10 & 0 & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(5)}=\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 2 & 6 & 12 & 8 & 9 & 12\\
5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 11 & 3 & 4 & 7\\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & 12 & 5 & 6 & 9\\
2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & 7 & 8 & 11\\
6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 10 & 2 & 3 & 6\\
12 & 11 & 12 & 10 & 10 & 0 & 12 & 2 & 16\\
8 & 3 & 5 & 7 & 2 & 12 & 0 & 5 & 3\\
9 & 4 & 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 0 & 4\\
12 & 7 & 9 & 11 & 6 & 16 & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(6)}=\boldsymbol{D}^{(5)},\quad
\boldsymbol{D}^{(7)}=\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 2 & 6 & 12 & 8 & 9 & 11\\
5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 11 & 3 & 4 & 6\\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & 12 & 5 & 6 & 8\\
2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & 7 & 8 & 10\\
6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 10 & 2 & 3 & 5\\
12 & 11 & 12 & 10 & 10 & 0 & 12 & 2 & 15\\
8 & 3 & 5 & 7 & 2 & 12 & 0 & 5 & 3\\
9 & 4 & 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 0 & 4\\
11 & 6 & 8 & 10 & 5 & 15 & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(8)}=\begin{pmatrix}
0 & 5 & 3 & 2 & 6 & 11 & 8 & 9 & 11\\
5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6\\
3 & 2 & 0 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 8\\
2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 10 & 7 & 8 & 10\\
6 & 1 & 3 & 5 & 0 & 5 & 2 & 3 & 5\\
11 & 6 & 8 & 10 & 5 & 0 & 7 & 2 & 6\\
8 & 3 & 5 & 7 & 2 & 7 & 0 & 5 & 3\\
9 & 4 & 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 0 & 4\\
11 & 6 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}^{(9)}=\boldsymbol{D}^{(8)}
$$

故 v_1 到 v_9 的长度为 11，其最短通路为 $v_1v_3v_2v_5v_7v_9$，其余类似。

18. 设 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对结点的度数之和均大于等于 n-1，那么 G 是连通图。

证明 假设 G 不是连通图，则 G 至少有两个连通分支 G_1, G_2，设连通分支 G_1 中有 n_1 个结点，G_2 中 n_2 有个结点，$n_1 + n_2 \le n$。分别从 G_1 和 G_2 中任取的一个结点 u 和 v，由于 G 简单图，从而 G_1 和 G_2 也是简单图，所以 $deg(u) \le n_1 - 1$，$deg(v) \le n_2 - 1$，故 $deg(u) + deg(v) \le n_1 - 1 + n_2 - 1 \le n - 2$，与 G 中每对结点的度数之和大于等于 $n - 1$ 矛盾。

19. n 个城市由 k 条公路连接（一条公路定义为两个城市间的一条道路，不能经过任何中间城市）。证明 如果有

$$k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

则人们总能通过连接城市的公路在任何两个城市之间旅行。

证明 将城市作为结点，将连接两个城市的公路作为边，则该问题等价于证明具有 n 个结点 k 条边的简单无向图 G 是连通图。当 $n=2$ 时，结论显然成立，下证 $n>2$ 时结论也成立。

假设 G 不连通，则可将 G 中的结点集 V 分为两个子集 V_1 和 V_2，满足 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varphi$，并且 V_1 中的任何结点与 V_2 中的任何结点均不连通。设由 V_1 生成的 G 的子图 G_1 中有 n_1 个结点 k_1 条边，由 V_2 生成的 G 的子图 G_2 中 n_2 有个结点 k_2 条边，则 $n_1+n_2=n$，$k_1+k_2=k$。由于 G 是简单无向图，因此 G_1 和 G_2 也是简单无向图，从而有 $k_1\le \frac{1}{2}n_1(n_1-1)$，$k_2\le\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$，于是

$$k=k_1+k_2=\le\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1) \qquad (1)$$

又由于

$$k>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{2}(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2) \qquad (2)$$

由于 $n>2$，因此 n_1 和 n_2 至少有一个大于等于 2，不妨设 $n_1\ge 2$，由(2)得

$$k>\frac{1}{2}(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)=\frac{1}{2}n_1(n_1+n_2-2)+\frac{1}{2}(n_2-1)(n_1+n_2-2)$$

$$\ge\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$$

这与(1)式矛盾，故 G 是连通图。

20. 设 u、w 是无向连通图 G 中的任意两个结点，试证明 若 $d(u,w)\geqslant 2$，则存在结点 v，使得 $d(u,v)+d(v,w)=d(u,w)$。

证明 由于 G 是连通图，u,w 之间必存在短程线 $P=uv_1v_2\ldots v_{k-1}w$，$k\ge 2$，则 $d(u,w)=k$，取 v 为 P 上除 u,w 外的任意一个结点 $v_i(1\le i\le k-1)$，都有

$$d(u,v_i)+d(v_i,w)=d(u,w)=k。$$

事实上，u,v_i 之间的短程线为 $P_1=uv_1v_2\ldots v_i$，否则，若 u,v_i 之间存在比 P_1 短的短程线 $P'_1=uu_1u_2\ldots v_i$，则 $P'=uu_1u_2\ldots v_iv_{i+1}\ldots v_{k-1}w$ 比 P 短，这与 P 为 u,w 之间的短程线矛盾。同理可证 $P_2=v_iv_{i+1}\ldots v_{k-1}w$ 为 v_i 与 w 之间的短程线，因而 $d(u,v_i)+d(v_i,w)$为 P_1 的长度加上 P_2 的长度，而 P_1 的长度加上 P_2 的长度为 P 的长度，即为 k，所以 $d(u,v_i)+d(v_i,w)=k=d(u,w)$。

21. 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|\geqslant 3$，G 是连通的简单图但不是完全图，则 G 中存在三个不同的结点 u、v、w，使得$(u,v)\in E$，$(v,w)\in E$，而$(u,w)\notin E$。

证明 由于 G 是连通的简单图但不是完全图，因此 G 中存在一个结点 x,y，使得 $d(\mathrm{x,y})\ge 2$（若对任意 $\mathrm{x,y}\in E$，都有 $d(\mathrm{x,y})=1$，则 G 为完全图），设 $d(\mathrm{x,y})=k$，x,y 之间的短程线为 $P=\mathrm{x}v_1v_2\ldots v_{k-1}\mathrm{y}$。下面证明 x,$v_2$ 之间的短程线为$=\mathrm{x}v_1v_2$ 若不然，假设 x,v_2 之间存在比 P_1 短的短程线 $P'_1=\mathrm{x}v_2$，则 $P'=\mathrm{x}v_2v_3\ldots v_{k-1}\mathrm{y}$ 比 P 短，这与 P 为 x,y 之间的短程线矛盾。所以有$(\mathrm{x},v_1)\in E$，$(v_1,v_2)\in E$，而$(\mathrm{x},v_2)\overline{\in} E$。由于 x,$v_1$,$v_2$ 是短程线上的结点，显然它们互不相同。

22. 设 e 为无向图 $G=<V,E>$中的一条边，$p(G)$为 G 的连通分支数，$G-e$ 为从 G 中删除边 e 后得到的图。试证明 $p(G)\leqslant p(G-e)\leqslant p(G)+1$。

证明 设 e 属于 G 的第 i 个连通分支 G_i（若 G 是连通图，则 G_i 为 G），$e=(u,v)$。若 e 是 G_i 中的某条基本回路 $uv\cdots u$ 中的边，则删除 e 不会影响 G_i 的连通性，因而 G 的连通分支数无变化，即 $p(G)=p(G-e)$。若 e 不是 Gi 中的任何基本回路中的边，则删除 e 后，u 与 v 便不连通了，但原来与 u 之间存在不经过 e 的通路的结点之间仍然是连通的，原来与 v 之间存在不经过 e 的通路的结点之间仍然是连通的，即 Gi-e 有且仅有两个连通分支，因而 G-e 比 G 多一个连通分支，即 $p(G-e)=p(G)+1$。故有 $p(G)\leqslant p(G-e)\leqslant p(G)+1$。

23. 设有 a、b、c、d、e、f、g 七个人，他们分别会讲如下语言 a 会讲英语；b 会讲汉语和英语；c 会讲英语、西班牙语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和西班牙语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。试问 这七个人中，是否任意两个都能交谈（必要时可借助于其余五人组成的译员链）？

解 我们分别用结点表示将七个人和七种语言，若某人会讲某种语言，则用一条无向边将它们连接起来，则上述问题就转化为判断图 6.14 所示的无向图是否为连通图。显然，该为连通图，故他们七个人中任意两个都能交谈。

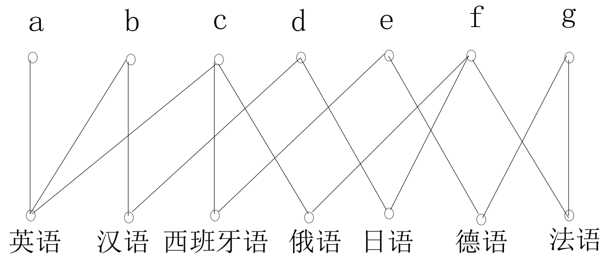


图 6.14

24. 在图 $G=<V,E>$中，对给定结点 v，若 S⊆ V 中的每个结点都从 v 可达，而 V - S 中的每个结点都从 v 不可达，则称 S 为**结点 v 的可达集**，记为 $R(v)$＝S。集合 $T=\bigcup\limits_{v\in V'}R(v)$ 称为**集合 V'的可达集**，记为 $R(V')=T$，这里 $V'\subseteq V$。对 $V'\subseteq V$，如果 $R(V')=V$，并且对任意 $V_1\subset V'$，都有 $R(V_1)\neq V$，则称 V'为图 G 的**结点基**。在图 6.15 中求 $R(v_1)$、$R(v_4)$、$R(v_8)$、$R(\{v_1,v_8\})$、$R(\{v_7,v_9\})$、$R(\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\})$和该图的结点基。

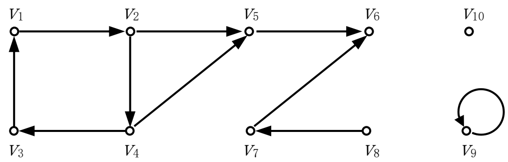


图 6.15

解 $R(v_1)=R(v_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，

$R(v_8)=\{v_6,v_7,v_8\}$，

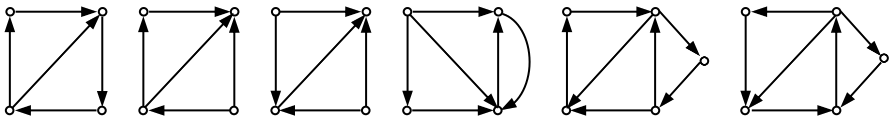
$R(\{v_1,v_8\})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$，

$R(\{v_7,v_9\})=\{v_6,v_7,v_9\}$，

$R(\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$，

该图的结点基为 $\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_2,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_3,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_4,v_8,v_9,v_{10}\}$。

25. 图 6.16 所示的 6 个图中，哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是连通图（弱连通图）？



（a）（b）（c）（d）（e）（f）

图 6.16

解 图 6.16 所示的六个图中，(a)、(e)、(f)是强连通图；(a)、(b)、(d)、(e)、(f)是单向连通图；(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)都是弱连通图。

26. 给图 6.17 所示的彼得森图的边加方向，使其

（1）成为强连通图；

（2）成为单向连通图，但不是强连通图。

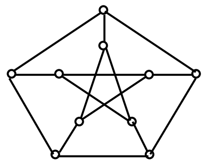


图 6.17

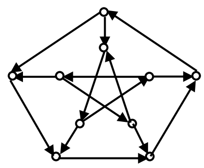


图 6.18

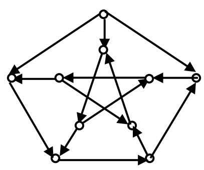


图 6.19

解 （1）给图 6.17 加方向如图 6.18 所示便成为强连通图，事实上，图 6.18 中存在一条回路 1,2,3,4,5,1,6,8,10,7,9,4,5,1，该回路经过图中每个结点至少一次；

（2）给图 6.17 加方向如图 6.19 所示便成为单向连通图，但不是强连通图，事实上，图 6.19 中的结点 2,3,4,5,6,7,8,9,10 相互可达（有回路 2,3,4,5,10,7,9,6,8,10,7,2），结点 1 可达其它所有结点，而其它所有结点都不可达 1。

27. 求图 6.20 所示有向图的所有强连通分支、单向连通分支和弱连通分支。

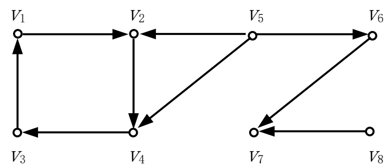


图 6.20

解 由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$、$\{v_5\}$、$\{v_6\}$、$\{v_7\}$、$\{v_8\}$导出的子图为该图的所有强连通分支；由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$、$\{v_5,v_6,v_7\}$、$\{v_7,v_8\}$导出的子图为该图的所有单向连通分支；由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$导出的子图（即该图自身）为该图的弱连通分支。

28. 有向图 G 如图 6.21 所示。

（1）写出 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$。

（2）G 中长度为 4 的通路有多少条？其中有几条为回路？

（3）利用布尔矩阵的运算求该图的可达性矩阵 $\boldsymbol{P}$，并根据 $\boldsymbol{P}$ 来判断该图是否为强连通图或单向连通图。

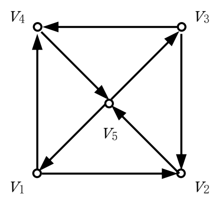


图 6.21

解 （1）将 G 中结点按 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 排序，则 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

（2）为了求 G 中长度为 4 的连通数目，就要计算 A^4，为此先计算 A^2 和 A^3，

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix},\quad A^4=\begin{pmatrix}0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\end{pmatrix}$$

因$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(4)}=32$，故 G 中长度为 4 的通路有 32 条。因 A^4 的主对角元素均为 0，G 中无长度为 4 的回路。

（3）因为

$$A^{(2)}=A\wedge A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad A^{(3)}=A\wedge A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{(4)}=A\wedge A^{(3)}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

所以 G 的可达性矩阵

$$P=I\vee A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

由于 P 中每个元素均为 1，所以 G 是强连通图，当然也是单向连通图。

29. 试利用矩阵方法判断图 6.22 所示的三个有向图的连通性。

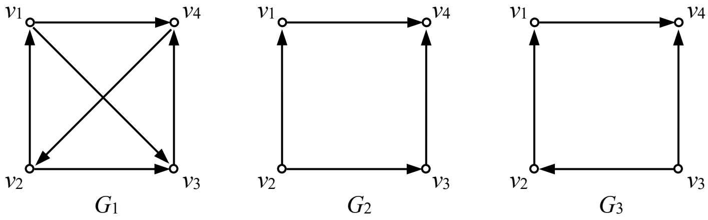


图 6.22

解 以下写邻接矩阵和可达性矩阵时均将结点按 v_1,v_2,v_3,v_4 排序。

（1）写出图 7.9.20 中图 G_1 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}，\quad \mathrm{P}=\mathrm{I}\vee\mathrm{A}\vee\mathrm{A}^{(2)}\vee\mathrm{A}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

由于 P 中每个元素均为 1，所以图 G_1 是强连通图，当然也是单向连通图和弱连通图。

（2）写出图 7.9.20 中图 G_2 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\quad \mathrm{P}=\mathrm{I}\vee\mathrm{A}\vee\mathrm{A}^{(2)}\vee\mathrm{A}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由于 P 中不是每个元素均为 1，所以图 G_2 不是强连通图。又因为

$$\mathrm{P}'=\mathrm{P}\vee\mathrm{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

中不是所有元素均为 1，所以图 G_2 不是单向连通图。下面计算

$$\mathrm{A}'=\mathrm{A}\vee\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

及

$$\mathrm{P}''=\mathrm{I}\vee\mathrm{A}'\vee\mathrm{A}'^{(2)}\vee\mathrm{A}'^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}。$$

由于 P''中每个元素均为 1，所以图 G_2 是弱连通图。

（3）写出图 7.9.20 中图 G_3 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad P=I\vee A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由于 P 中不是每个元素均为 1，所以图 G_3 不是强连通图。又因为

$$P'=P\vee P^{T}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

中所有元素均为 1，所以图 G_3 是单向连通图。

第 7 章　特殊图

7.4　习题解析

1. 一棵树有 n_i 个度数为 i 的结点，i＝2, 3, 4, ⋯, k，问 它有多少个度数为 1 的结点？

解　设该树有 x 个度数为 1 的结点，则 $\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{i=2}^{k} i\times n_i+x$。再设该树有 m 条边，由定理 7.1 可知 $m=\sum_{i=2}^{k} n_i+x-1$。利用握手定理得，$\sum_{i=2}^{k} i\times n_i+x=2\cdot(\sum_{i=2}^{k} n_i+x-1)$，故 $x=\sum_{i=3}^{k}(i-2)\times n_i+2$。

2. 证明 若无向图 G 是森林，则 G 中无回路并且 $m=n-p$。这里 m、n、p 分别是 G 中的结点数、边数和连通分支数。

证明　由于 G 的每个连通分支都是树，所以 G 中无回路。假设 G 的每个连通分支的结点数和边数分别为 n_i 和 m_i，i＝1,2,…,p，那么 $n=\sum_{i=1}^{p} n_i$，$m=\sum_{i=1}^{p} m_i$。又由于 G 的每个连通分支都是树，由定理 7.1 可知 $m_i=n_i-1$，i＝1,2,…,p，故 $m=\sum_{i=1}^{p} m_i=\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{p} n_i-p=n-p$。

3. 证明 正整数序列(d_1, d_2, ⋯, d_n)是一棵树中结点的度数序列的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$$

证明　**必要性** 设($d_1,d_2,\ldots,d_n$)是一棵树中结点的度数序列，并设边数为 m，由定理 10.2.1 可知 $m=n-1$，从而有握手定理可得 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2m=2(n-1)$。

充分性 方法一　设($d_1,d_2,\ldots,d_n$)满足关系式 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$，显然($d_1,d_2,\ldots,d_n$)可以作为某个图 G 中结点的度数序列。由握手定理可知，G 中的边数 $m=n-1$。假设 G 是这个结点度数序列的图中连通分支最少的一个图，下面证明 G 是连通图 若 G 不连通，即 $p(G)\geq 2$，G 至少有一个连通分支 G_1 中含有回路 C，否则，G 是森林，从而导致 $m=n-p(G)<n-1$ 的矛盾。我们从回路 C 中任取一条边 $e_1=(u_1,v_1)$，并在 G 的另一个连通

分支各种任取一条边 $e_2=(u_2,v_2)$，然后作图 $G'=(G-\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\})\cup\{(u_1,v_2),(u_2,v_1)\}$（即在 G 中删除边(u_1,v_1)和(u_2,v_2)，然后连两条新边(u_1,v_2)和(u_2,v_1)），显然，G'中结点的度数序列仍然是$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，但 $p(G')=p(G)-1$，这就与 G 的假设矛盾。故 G 是连通的，由定理 10.2.1 可知 G 是一棵树。因此，$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$是一棵树的结点度数序列。

方法二 设$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足关系式$\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$，则 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中至少有两个为 1。若不然，最多有一个为 1，则$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n-1$，这与$\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$矛盾。当 $n>2$ 时，$d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中至少有一个大于等于 2，若不然也会得出矛盾。下面对 n 进行归纳。

1）当 $n=2$ 时，有 $d_1+d_2=2(2-1)=2$，只能是 $d_1=d_2=1$，存在 K_2 为一棵树。

2）假设 $n=k$ 时结论成立，下证 $n=k+1$ 时结论也成立。

由于 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中存在为 1 的数，不妨设 $d_{k+1}=1$。又由于 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中存在大于等于 2 的数，不妨设 $d_k\geq 2$。

先考虑 $d_1,d_2,\ldots,d_{k-1},dk-1$ 这 k 个数。因

$d_1+d_2+\ldots+d_{k-1}+d_k-1=d_1+d_2+\ldots+d_{k-1}+d_k+d_{k+1}-d_{k+1}-1=2(k+1-1)-1-1=2(k-1)$，

由归纳假设可知，存在树 T_1，其结点为 $v_1,v_2,\ldots,v_k$，并且满足$\sum_{i=1}^{k}\deg(v_i)=d_1+d_2+\ldots+d_{k-1}+d_k-1=2(k-1)$。从 T_1 中的结点 v_k 连一条边到 v_{k+1}，如图 7.1，得树 T，则

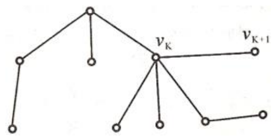


图 7.1

$$\sum_{i=1}^{k+1}\deg(v_i)=\sum_{i=1}^{k}\deg(v_i)+deg(vk+1)$$

$$=2(k-1)+1+1=2(k+1-1)。$$

方法三 设$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足关系式$\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$，则 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中至少有两个为 1。若不然，最多有一个为 1，则$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n-1$，这与$\sum_{i=1}^{n} d_i=2(n-1)$矛盾。当 $n>2$ 时，$d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中至少有一个大于等于 2，若不然也会得出矛盾。下面构造一棵树。

若 $n=2$，则 $d_1=d_2=1$，所构造的树为 K_2。下面设 $n>2$。由于 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 中至少有两个为 1，设有 m（$m\leq n-2$）个大于 1，即有 $d'_1,d'_2,\ldots,d'_m$ 大于 1，则有 $n-m$ 个为 1。作星形图 G_1，G_2，…，G_m，v_i 为 G_i 中度数最大的结点，且 $deg(v_i)=d'_i$，$i=1,2,\ldots,m$，示意图如图 7.2(a)。设 v_{i1} 为 G_i 中的任意一个度数为 1 的结点，删除 v_{i1}（$i=1,2,\ldots,m$），分别添加边(v_1,v_2)，(v_2,v_3)，…，(v_{m-1},v_m)，得树 T 即为所求，示意图如图 7.2(b)。

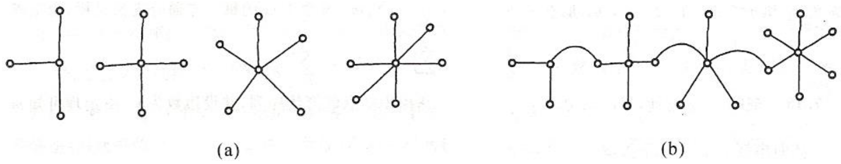


图 7.2

T 中的结点数为

$$m+\left[\sum_{i=1}^{m} d_{i}-2(m-1)\right]$$

$$=m+\left[\sum_{i=1}^{m} d_{i}+(n-m)-2(m-1)-(n-m)\right]$$

$=m+[2(n-1)-2(m-1)-(n-m)]=n$，

T 中各结点的总度数为

$$\sum_{i=1}^{m} d_{i}+(n-m)=\sum_{i=1}^{n} d_{i}=2(n-1),$$

所以 T 为所求的树。

在以上的构造方法中，若改变星形图的位置可以得出若干棵非同构的无向树。

4. 画出具有 7 个结点的所有非同构的树。

解 七个结点的树具有六条边，因而所有 7 个结点的度数之和为 12。由于每个结点的度数均大于等于 1，因而可产生以下七种度数序列$(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7)$

1）(1，1，1，1，1，1，6)；　2）(1，1，1，1，1，2，5)；

3）(1，1，1，1，1，3，4)；　4）(1，1，1，1，2，2，4)；

5）(1，1，1，1，2，3，3)；　6）(1，1，1，2，2，2，3)；

7）(1，1，2，2，2，2，2)。

在 1)中只有一个星形图，因而只能产生一棵树 T_1（方法见第 3 题）；在 2)、3)中有两个星形图，因而也只能各产生一棵非同构的树，分别设为 T_2 和 T_3；在 4)、5)中有三个星形图，但三个星形图中各有两个是同构的，因而各可产生两棵非同构的树，分别设为 T_{41}、T_{42} 和 T_{52}、T_{51}；在 6)中有四个星形图，有三个是同构的，考虑到不同的排列情况，共可产生三棵非同构的树，设为 T_{61}、T_{62}、T_{63}；在 7)中有五个星形图，但都是同构的，因而可产生一棵树，设为 T_7。因此共有 11 棵非同构的树，他们的图形如图 7.3 所示。

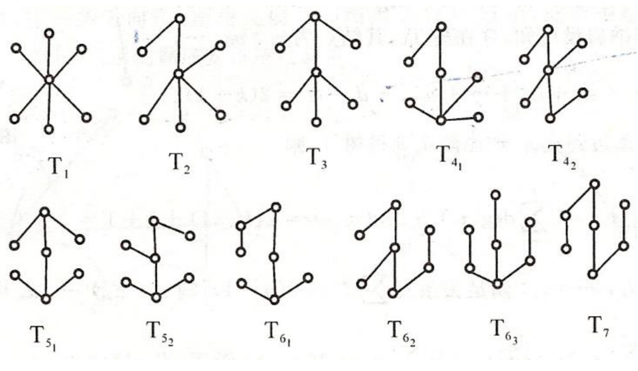
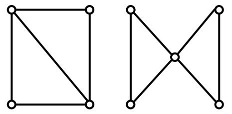


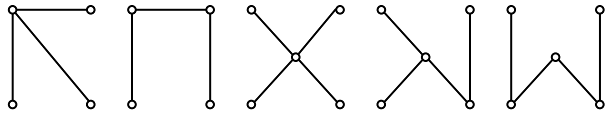
图 7.3

5. 图 7.4（a）、图 7.4（b）所示的连通图 G_1、 G_2 中各有几棵非同构的生成树？



(a)　(b)

图 7.4



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

图 7.5

解　（*a*）中图 G_1 共有两棵生成树，形成生成树的结点度数序列分别为(1,1,2,2)和(1,1,1,3)，每个序列只对应一棵生成树，如图 7.5(*a*)、(*b*)所示。

（*b*）中图 G_2 共有三棵生成树，形成生成树的结点度数序列分别为(1,1,1,1,4)、(1,1,1,2,3)和(1,1,2,2,2)，每个序列只对应一棵生成树，如图 7.5 (*c*)、(*d*)和(*e*)所示。

6. 对任意一个图 $G=<V,E>$，设$|V|=n$，$|E|=m$，$p(G)=p$，试证明 G 中至少包含 m-n+p 条不同的回路。

解　当 G 是连通图（即 $p(G)=1$）时，由定理 10.2.3 可知，G 中有生成树 T，设集合 B 为 T 的补，由定理 10.2.1 可知，对任意 $e\in$B，T+e（在 T 中增加一条边 e）中有唯一一条回路，且该回路包含 e，记为 C(e)。显然，当 $e'\neq e$ 且 $e'\in$B 时，C(e')与 C(e)是两条不同的回路。由定理 10.2.1 可知，T 中有且仅有 n-1 条边，所以 T 的补 B 中有 m-n+1 条边，故 G 中至少包含 m-n+1 条不同的回路。

当 G 不是连通图时，$p(G)=p$。设 G 的 p 个连通分支分别为 G_i（$i=1,2,\ldots,p$），且的边数和结点数分别为 m_i 和 n_i，由以上证明可知，在每个连通分支中至少包含 m_i-n_i+1 条不同的回路，因此 G 中至少包含的不同回路条数为$\sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i+1)=\sum_{i=1}^{p}m_i$ - $\sum_{i=1}^{p}n_i$ +$p=m$-n+p。

7. 设 T_1 和 T_2 是连通图 G 的两棵生成树，边 a 在 T_1 中但不在 T_2 中，证明存在只在 T_2 中而不在 T_1 中的边 b，使得$(T_1$-$\{a\})\cup\{b\}$和$(T_2$-$\{b\})\cup\{a\}$都是 G 的生成树。

证明　从 T_1 中删除边 a，得树 T_{11} 和 T_{12}，我们用 V_1、V_2 分别表示 T_{11} 和 T_{12} 的结点集合，设

$$S_a=\{e \mid e\text{ 的两个端点分别属于 }V_1\text{ 和 }V_2\text{ 中}\}。$$

显然 $a\in S_a$。因边 a 不在 T_2 中，所以 a 是 T_2 的弦，设 C(a)为在 T_2 中增加边 a 后所得到的基本回路，则在 C(a)中必存在 T_2 的树枝 b 不在 T_1 中但在 S_a 中。否则，C(a)上的 T_2 的所有树枝均在 T_1 中或均不在 S_a 中。若 C(a)上的 T_2 的所有树枝均在 T_1 中，则 C(a)上的所有边均在 T_1 中，这与 T_1 是树矛盾。若 C(a)上的 T_2 的所有树枝均不在 S_a 中，则 C(a)中除 a 外所有边的端点均在 V_1 中或均在 V_2 中，这与 C(a)是基本回路矛盾。所以 C(a)中必存在不在 T_1 中但在 S_a 中的 T_2 的树枝，设 b 为其中的一条。则$(T_1$-$\{a\})\cup\{b\}$连通无回路又是 G 的生成子图，所以它是 G 的生成树。同理$(T_2$-$\{b\})\cup\{a\}$也是 G 的生成树。

8. 试证明 简单连通无向图 G 的任何一条边，都是 G 的某一棵生成树的边。

证明　假设 G 中有一条边(u,v)不是 G 的任何一棵生成树的边，设 T 是 G 的一棵生成树，则边(u,v)不在 T 中。由定理 10.2.1 可知，$T\cup\{(u,v)\}$中存在唯一一条回路 C，假设边(s,t)是 C 上不同于(u,v)的边，则从 $T\cup\{(u,v)\}$中删除边(s,t)后便没有回路并且是连通的，即

$(T\cup\{(u,v)\})-\{(s,t)\}$是一棵树，从而是 G 的生成树，故边(u,v)在 G 的一棵生成树中，矛盾。

9. 证明或否定断言 简单连通无向图 G 的任何一条边，都是 G 的某一棵生成树的弦。

解 该断言是错误的，即有些简单连通无向图 G 的某些边不是 G 的任何生成树的弦。例如图 7.6 所示的简单连通无向图 G 中的边(u,v)就不是 G 的任何生成树的弦，因为从 G 中删除边(u,v)后便不连通了。

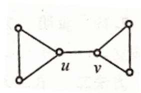


图 7.6

10. 用 *Kruskal* 算法求图 7.7 所示图的一棵最小生成树。

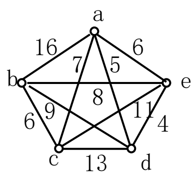
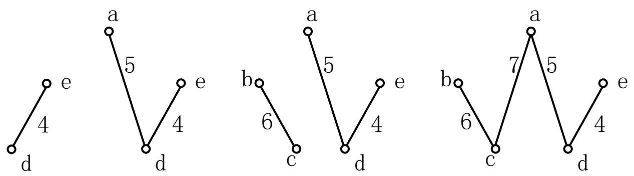


图 7. 7



(a) (b) (c) (d)

图 7. 8

解 因为图 7.7 中有 5 个结点，因此要选取 4 条边。其过程见图 7.8 (*a*)至(*d*)，$w(T)=22$。

11. 用 *Prim* 算法求图 7.9 所示图的一棵最小生成树。

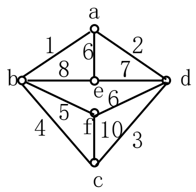
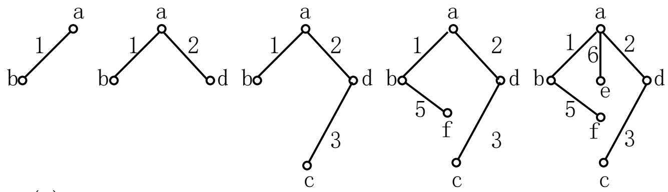


图 7. 9



(a) (b) (c) (d) (e)

图 7. 10

解 因为图 7.9 中有 6 个结点，因此要选取 5 条边。其过程见图 7.10 (*a*)至(*e*)，$w(T)=17$。

12. 一个有向图 G，仅有一个结点入度为 0，其余所有结点的入度均为 1， G 一定是根树吗？

解 仅有一个结点入度为 0 其余所有结点的入度均为 1 的有向图 G 不一定是根树。图 7.11 中的两个图都满足条件，但它们都不是根树。

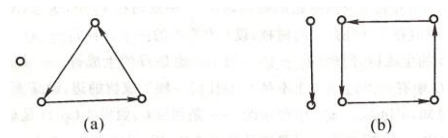


图 7.11

13. 证明 2 元树的第 i 层上至多有 2^i 个结点；高为 k 的 2 元树中至多含 $2^{k+1}-1$ 个结点。

证明 用数学归纳法证明 2 元树的第 i 层上至多有 2^i 个结点。

当 $i=0$ 时，第 0 层只有一个根结点，即 $2^i=2^0=1$，结论成立。

当 $i=1$ 时，由于 2 元树的每个分支点最多有 2 个儿子，故第 1 层至多有 2 个结点，即 $2^i=2^1=2$，结论成立。

假定 $i=k$（$1\leqslant k<i$）时结论成立，即第 k 层上至多有 2^k 个结点， 则 $i=k+1$ 时，因为第 k+1 层上的结点是第 k 层上结点的儿子，而 2 元树中每个分支点最多有 2 个儿子，故在第 k+1 层上最大结点个数为第 k 层上的最大结点个数的二倍，即 $2\times2^k=2^{k+1}$，结论成立.。

高为 k 的 2 元树中的最多结点数 $=\sum_{i=0}^{k}$(第 i 层上的最多结点数)$=\sum_{i=0}^{k}2^{i}=2^{k+1}-1$。

14. 若完全 2 元树 T 有 k 个分支点，且各分支点的层数之和为 I，各叶的层数之和为 L，试证明 $L=I+2k$。

证明 对分支点 k 用归纳法。

$k=1$ 时，$I=0$，$L=2$，所以 $L=I+2k$ 成立。设 $k=n$ 时结论成立，下面证明 $k=n+1$ 时结论也成立。设 T 的高度为 h，因而存在结点 v_i，它的层数为 h。因为 T 是完全 2 元树，所以 v_i 的兄弟 v_j 的层数也为 h。设 vi 与 vj 的父亲为 v，删除结点 vi、vj 得根树 T'，这时 v 为 T'的一片树叶。设 T'的分支点数为 k'，各分支点的层数之和为 I'，各树叶的层数之和为 L'，则有

$$k'=k-1,\ I'=I-(h-1),\ L'=L-2h+(h-1)=L-h+1。$$

由归纳假设可知，在 T'中有下面等式成立

$$L'=I'+2k'$$

即

$$L-h+1=I-(h-1)+2(k-1),$$

故

$$L=I+2k。$$

15. 设完全 2 元树 T 的结点数为 n，证明 n 必为奇数，且该完全 2 元树的叶结点数 $t=\frac{n+1}{2}$。

证明 因为在完全 2 元树 T 中，根的度数为 2，分支点的度数为 3，树叶的度数为 1。因此，在 T 中除一个根是偶度数结点外，其余结点都是奇度数结点，即奇度数结点的个数为 $n-1$，由握手定理的推论可知，$n-1$ 为偶数，从而 n 为奇数。

因为在具有 n 个结点的树中共有 $n-1$ 条边，由握手定理可知，

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=t+3(n-1-t)+2=2(n-1),$$

由此解得 $t=\frac{1}{2}(n+1)$。

16. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，三局两胜。用一棵 2 元树表示比赛可能进行的各种情况。

解 图 7.12 中表示了比赛可能出现的各种情况，图中标甲的表示甲胜，标乙的表示乙胜，这是一棵二元完全树。

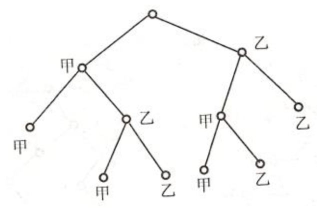


图 7.12

17. 用有序树表示代数表达式$\frac{(3x-5y^2)^5}{a(b^3-4c)}$，其中加、减、乘、除、乘方运算分别用符号“＋”“－”“×”“÷”“↑”表示。

解 所求的根树如图 7.13 所示。

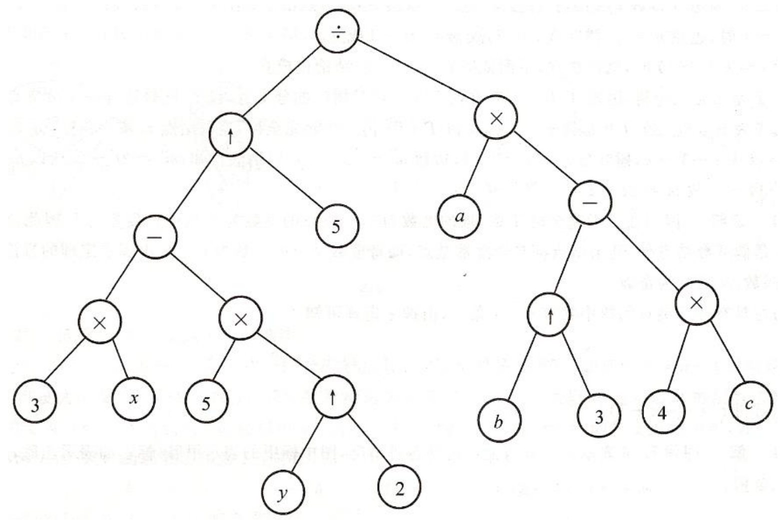


图 7.13

18. 分别写出按先根次序遍历法、中根次序遍历法、后根次序遍历法对图 7.14 所示的有序 2 元树中结点进行访问的顺序。

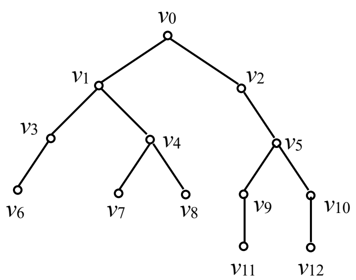


图 7.14

解 按先根次序遍历法访问的顺序为

$v_0v_1v_3v_6v_4v_7v_8v_2v_5v_9v_{11}v_{10}v_{12}$；

按中根次序遍历法访问的顺序为

$v_6v_3v_1v_7v_4v_8v_0v_{11}v_9v_5v_{12}v_1 0v_2$；

按后根次序遍历法访问的顺序为

$v_6v_3v_7v_8v_4v_1v_{11}v_9v_{12}v_{10}v_5v_2v_0$。

19. 用一棵有序 2 元树表示图 7.15 所示的有序树。

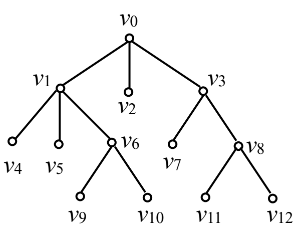
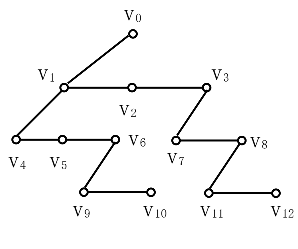
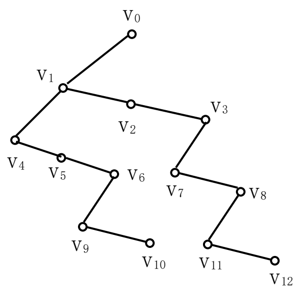


图 7.15



(a)



(b)

图 7. 16

解 从根开始，保留每个父亲同其最左边儿子的连线，撤销与别的儿子的连线；兄弟间用从左到右的的有向边连接；得图 7.16(*a*)；直接位于给定结点下面的结点，作为该结点的左儿子，对于同一水平线上与给定结点右邻的结点，作为该结点的右儿子，得图 7.16(*b*)。图 7.16(*b*)的二元树即为所求。

20. 求带权 2、3、5、7、8、11 的最优树。

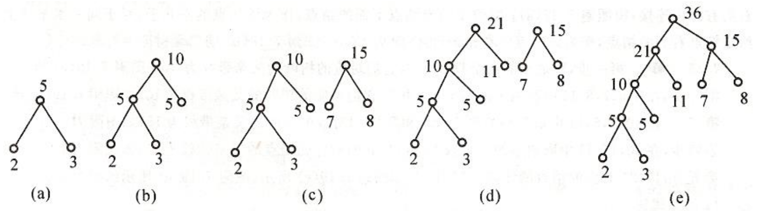


图 7.17

解 第一步，取最小的两个权 2 和 3，它们对应的树叶的父亲带权为 5，如图 7.17(*a*)所示；

第二步，在 5、5、7、8、11 中取最小的两个权 5 和 5，它们对应的树叶的父亲带权为 10，如图 7.17(*b*)所示；

第三步，在 10、7、8、11 中取最小的两个权 7 和 8，它们对应的树叶的父亲带权为 15，如图 7.17(*c*)所示；

第四步，在 10、15、11 中取最小的两个权 10 和 11，它们对应的结点的父亲带权为 21，如图 7.17(*d*)所示；

第五步，15、21 对应的结点的父亲带权为 36，如图 7.17(*e*)所示。

图 7.17(*e*)所示的树为带权 2、3、5、7、8、11 的最优树 T，

$$W(T)=2\times4+3\times4+5\times3+7\times2+8\times2+11\times2=87。$$

其实，$W(T)$等于 T 的各分支点的权之和，即 $W(T)=5+10+21+15+36=87$。

21. 判断图 7.18 所示的四个图是否能一笔画出。

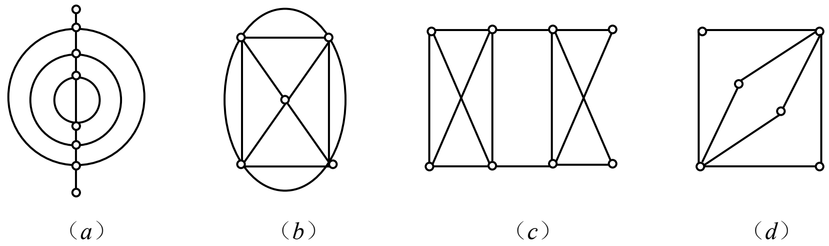


图 7.18

解 (*a*)中有两个度数为 1 的结点，两个度数为 3 的结点，因此奇度数结点的个数大于 2 个，故该图不存在欧拉通路，所以不能一笔画；(*b*)中有四个度数为 5 的结点，因此奇度数结点的个数大于 2 个，故该图不存在欧拉通路，所以不能一笔画；(*c*)中只有两个度数为 3 的结点，其余结点的度数均为偶数，故该图存在欧拉通路，所以能够一笔画；(*d*)中所有结点的度数均为偶数，故该图存在欧拉回路，所以能够一笔画。

22. n 为何值时，无向完全图 K_n 是欧拉图？n 为何值时，无向完全图 K_n 中仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路？

解 由于 K_n 的所有结点的度数均为 n-1，要使 n-1 为偶数，n 必须为奇数，故当 $n\geq1$ 且为奇数时，无向完全图 K_n 是欧拉图。图中仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路就必须使图中有且仅有两个奇度数结点，其它均偶度数结点，由于 K_n 的所有结点的度数均为 n-1，因此中只能有两个奇度数结点，当 $n=2$ 时，K_2 中只有两个奇度数结点，故 K_2 中仅有欧拉通路而无欧拉回路。

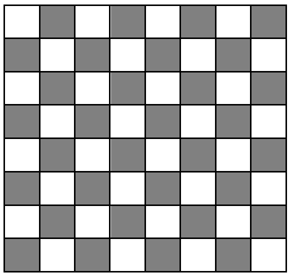
23. 设 G 是具有 k 个奇度数结点的无向连通图，那么，最少要在 G 中添加多少条边才能使 G 具有欧拉回路？

解 由握手定理可知，k 为偶数。要使 G 中具有欧拉回路，必须使 G 中每个结点的度数均为偶数，也就是说每个奇度数结点至少要增加一条邻接边，我们将 k 个奇度数结点中的每两个结点一组，在它们之间连一条边，则所有结点的度数均成为偶数了，因此，最少要在 G 中添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使 G 具有欧拉回路。

24. n（$n\geqslant 2$）个结点的有向完全图中，哪些是欧拉图？为什么？

解 n（$n\geq 2$）个结点的有向完全图都是欧拉图。因为有向完全图中每个结点和其它 n-1 个结点之间都有两个方向相反的有向边，因此每个结点的出度和入度都等于 n-1，所有有向完全图都是有向欧拉图。

25. 在 8×8 黑白相间的棋盘上跳动一只马，不论跳动方向如何，要使这只马完成每一种可能的跳动恰好一次，问 这样的跳动是否可能？（一只马跳动一次是指从 2×3 黑白方格组成的长方形的一个对角跳到另一个对角上。）



(a)

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

(b)

图 7.19

解 图图 7.19(a)给出了一张 8×8 黑白方格的棋盘，将棋盘上的一个方格对应一个结点，两个结点之间有边当且仅当马可从一个结点跳到另一个结点，可得一张跳马图 G，将 G 中各结点的度数写在对应的方格中，如图 7.19(b)所示。可见，图 G 中有八个结点的度数为 3，其余都是偶度数结点。因此 G 中既无欧拉回路，也无欧拉通路。也就是说，要使马在 8×8 棋盘上完成所有可能的跳动仅一次是不可能的。

26. 如图 7.20 所示，四个村庄下面各有一个防空洞甲、乙、丙、丁，相邻的两个防空洞之间有地道相通，并且每个防空洞各有一条地道与地面相通，能否每条地道恰好走过一次，既无重复也无遗漏？

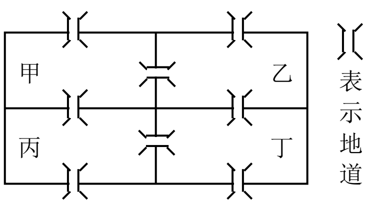


图 7.20

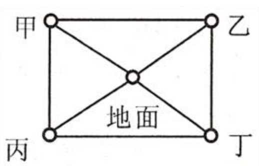


图 7.21

解 用结点表示图 7.20 中的甲、乙、丙、丁四个防空洞及地面，用连接结点的边表示防空洞之间以及防空洞与地面之间的地道，则将该问题转化为判断图 7.21 所示的图中是否存在欧拉通路的问题。图 7.21 中甲、乙、丙、丁四个结点的度数均为 3，因此该图不存在欧拉通路，故不能每条地道恰好走过一次，既无重复也无遗漏。

27. （1）画一个有欧拉回路和哈密顿回路的图。

（2）画一个有欧拉回路，但没有哈密顿回路的图。

（3）画一个没有欧拉回路，但有哈密顿回路的图。

（4）画一个既没有欧拉回路，也没有哈密顿回路的图。

解 所要的图分别如图 7.22(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)所示。（读者还可给出多种答案。）

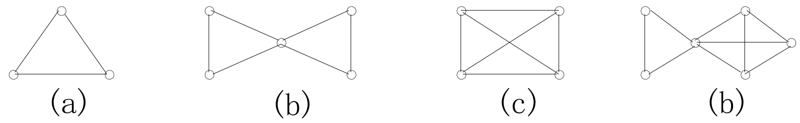


图 7.22

28. 证明图 7.23 所示的图不是哈密顿图。

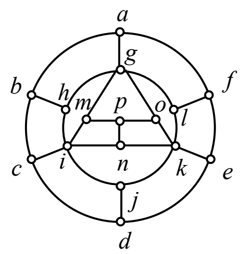


图 7.23

证明　方法一 设 V_1＝{b，d，f，g，i，k，p}，有 $p(G-V_1)$＝9＞7＝$|V_1|$，由定理 7.7 知，该图不是哈密顿图。

方法二 该图中有 16 个结点，27 条边，若图中存在哈密顿回路，在回路上需要且仅需要 16 条边，但图中提供的可供选择的边数不足 16 条。在结点 g、i、k 处各只能选择两条边，于是有三条边不能被选择；在结点 b、d、f 处也至少各有一条边不能被选择；在结点 p 处也至少有一条边不能被选择。这样一来，可供选择的边数小于等于

$$27-(3\times3+3+1)=14$$

条，故该图中不存在哈密顿回路，因而它不是哈密顿图。

29. 在图 7.24 所示的图中，哪些有哈密顿回路？哪些图中有哈密顿通路？

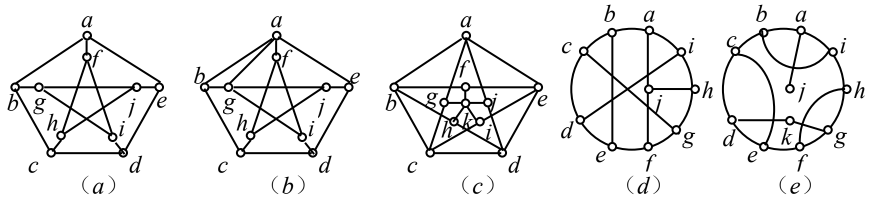


图 7.24

解 在图 7.24 中，(*b*)、(*c*)、(*d*)有哈密顿回路，(*a*)、(*e*)只有哈密顿通路而无哈密顿回路。(*a*)中的哈密顿通路为 *abcdejhfig*；(*b*)中的哈密顿回路为 *afidejhcbga*；(*c*)中的哈密顿回路为 *agkfeicbhdja*；(*d*)中的哈密顿回路为 *abefgcdihja*；(*e*)中的哈密顿通路为 *jabihfgkdec*。

30. （1）设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，证明 G 是哈

密顿图。（2）再给出一个图 G，它具有 n 个结点，$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边，证明 G 不是哈密顿图。

证明 首先证明 G 任何两个不相邻的结点的度数之和均大于等于 n。否则存在两个结点 u,v 不相邻，且 $d(u)+d(v)\le n\text{-}1$。令 $V_1=\{u,v\}$， $G_1= G\text{-} V$，则 G_1 是具有 n-2 个结点的简单图，它的边数 $m'\ge\frac{1}{2}(n\text{-}1)(n\text{-}2)+2\text{-}(n\text{-}1)$，可得 $m'\ge\frac{1}{2}(n\text{-}2)(n\text{-}3)+1$，这与 G_1 为 n-2 个结点简单图矛盾，因而 G 中任何两个不相邻的结点的度数之和均大于等于 n。由推论 7.4 可知 G 是哈密顿图。

图 7.25 中所示的两个图，结点数 n 和边数 m 之间均满足 $m=\frac{1}{2}(n\text{-}1)(n\text{-}2)+1$，可它们不是哈密顿图。

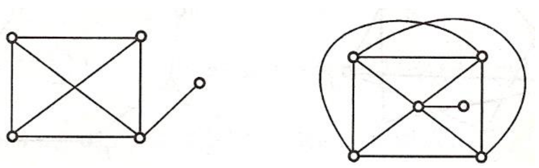


图 7.25

31. 无向完全图 K_n 中有多少条没有公共边的哈密顿回路？

解 先设 $n=2k+1$，将 n 个结点边编号为 0，1，2，3，…，$2k$，并作图如图 7.11.10 所示。

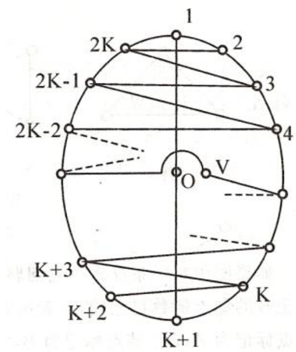


图 7.26

在图 7.26 中先取一条哈密顿回路为 0, 1, 2, $2k$, 3, $2k$-1, 4, …, k+3, k, k+2, k+1, 0，然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置，就可由图 7.11.10 取得另一条哈密顿回路为 0, 2, 3, 1, 4, $2k$, 5, …, k+4, k+1, k+3, k+2, 0，显然，这两条哈密顿回路是没有公共边的。继续这样做下去，共可产生 $k=\frac{n-1}{2}$ 条无公共边的哈密顿回路。

若 $n=2k+2$，那么只要在中间加一个结点 v，就同样地可得到 $k=\frac{n-1}{2}$ 条无公共边的哈密顿回路。

32. 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐，并且希望每次午餐时每个学生两旁所坐的人都不相同，问 这 11 个人共进午餐最多能有多少天？

解 将 11 个学生分别用结点表示，由于任意两个学生都可能是邻座，因此每两个结点之间都连一条边，得到无向完全图 K_{11}，每次午餐时学生都按一条哈密顿回路沿桌而坐，若两条哈密顿回路有公共边，则公共边端点上的两个学生是相邻的，从而上述问题转化为求 K_{11} 有多少条无公共边的哈密顿回路问题。由第 12 题知，K_{11} 中无公共边的哈密顿回路共有 $\frac{11-1}{2}=5$ 条，故这 11 个人共进午餐最多能有 5 天。

33. 今有 n（$n\geqslant 3$）个人，已知他们中的任何两个人合起来认识其余 n-2 个人。证明这 n 个人可以排成一行，使得除排头和排尾外，其余每个人均认识他两旁的人；当 $n\geqslant 4$ 时，这 n 个人可以排成一个圆圈，使得每个人都认识他两旁的人。

解 设 n 个人分别为 $v_1,v_2,\ldots,v_n$，以 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为结点集，若 v_i 与 v_j 认识，就在代表他们的结点之间连一条无向边，得边集 E。于是得无向简单图 $G=<V,E>$。

对任意 v_i，$v_j\in V$，假设 v_i 与 v_j 不相邻（即 v_i，v_j 代表的人不认识），则对任意的 v_k（$k\neq i$，$k\neq j$）必与 v_i 或 v_j 相邻，否则与已知条件矛盾。不妨假设 v_k 与 v_i 相邻，而不与 v_j 相邻，那么 v_k 与 v_i 所代表的两个人都不认识 v_j 所代表的人，这与已知矛盾。所以 v_k 既与 v_i 相邻，也与 v_j 相邻。因此 v_i 与 v_j 都与其余 n-2 个结点相邻，从而 $deg(v_i)+deg(v_j)=n-2+n-2=2n-4$，由于 $n\geq 3$，所以 $2n-4\geq n-1$，由定理 11.3.2 可知 G 中存在哈密顿通路。当 $n\geqslant 4$，所以 $2n-4\geqslant n$，由推论 11.3.2 可知 G 是哈密顿图。因此，所证明结论成立。

34. 设有 a、b、c、d、e、f、g 七个人，它们分别会讲如下各种语言 a 会讲英语；b 会讲汉语和英语；c 会讲英语、西班牙语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和西班牙语；f 会将法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他身边的人交谈？

解 我们分别用 a,b,c,d,e,f,g7 个结点表示七个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的结点之间连一条无向边，所得无向图如图 7.27(a)所示。此图中存在一条哈密顿回路 $abdfgeca$，于是按图 7.27(b)所示的顺序安排座位即可。

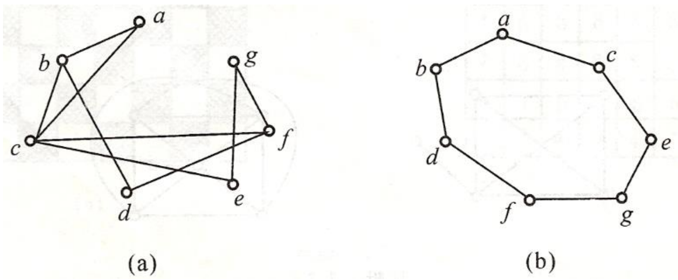


图 7.27

35. 在图 7.28 所示的四个图中，哪几个是偶图？哪几个不是偶图？是偶图的请给出互补结点子集，不是的，请说明理由。

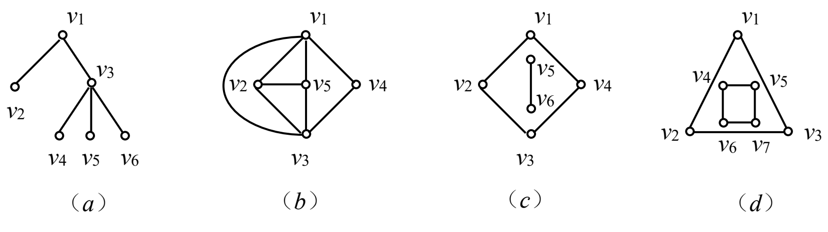


图 7.28

解 图中(a)、(c)是偶图，(b)、(d)不是偶图。(a)中的互补结点子集为 $V_1=\{v_1,v_4,v_5,v_6\}$，$V_2=\{v_2,v_3,v_7\}$；(c)中的互补结点子集为 $V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$，$V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$；(b)中存在一个长度为 3 的回路 $v_1v_3v_4v_1$；(d)中存在一个长度为 3 的回路 $v_1v_2v_3v_1$。

36. 证明 如果简单图 G 是偶图，它有 n 个结点 m 条边，则 $m\leqslant\dfrac{n^2}{4}$。

证明　设 G 的互补结点子集为 V_1、 V_2。由于 G 中边的端点都是一个在 V_1 中而另一个在 V_2 中，所以 $\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)=\sum\limits_{v\in V_2}\deg(v)$，且对任意 $v\in V_1$，$deg(v)\le|V_2|$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=2\sum_{v\in V_1}\deg(v)\ \le 2|V_1|\cdot|V_2|,$$

因$|V_1|+|V_2|=n$，故

$$m\le|V_1|\cdot(n-|V_1|)=\frac{1}{4}n^2-(\frac{1}{2}n-|V_1|)^2\le\ \frac{1}{4}n^2。$$

37. 证明 树是一个偶图。

证明　设 $G=<V,E>$是一棵树，任选 $v_0\in V$，定义 V 的两个子集如下

$$V_1=\{v\mid d(v,v_0)为偶数\},\quad V_2=V-V_1。$$

现证明 V_1 中任二结点之间无边存在。若存在一条边$(u,v)\in E$，$u,v\in V_1$，由于树中任意两个结点之间仅存在唯一一条基本通路，故这条基本通路就是它们之间的短程线，设 $v0$ 到 u 的短程线为 $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k,u$，则 $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k,u$ 的长度 $k+1$ 为偶数，因$(u,v)\in E$，所以 $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k,u,v$ 是 $v0$ 到 v 的一条通路，且该通路的长度 $k+2$ 为奇数，从而 $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k,u,v$ 不是基本通路，因此 v 必与某个 v_i（$i=0,1,2,\ldots,k$）相同，从而 $v,v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_k,u,v$ 是 G 中的一条基本回路，这与 G 是树矛盾。

同理可证， V_2 中任二结点之间无边存在。

故 G 中的每条边$(u,v)\in E$，必有 $u\in V_1$、$v\in V_2$ 或 $u\in V_2$、$v\in V_1$，因此 G 是具有互补结点子集 V_1 和 V_2 的偶图。

38. 一次舞会，共有 n 位男士和 n 位女士参加，已知每位男士至少认识两位女士，而每位女士至多认识两位男士。问 能否将男士和女士分配为 n 对，使得每对中的男士和女士彼此相识？

解　将 n 位男士和 n 位女士分别用结点表示，若某位男士认识某位女士，则在代表他们的结点之间连一条线，得到一个偶图 G，假设它的互补结点子集 V_1、 V_2 分别表示 n 位男士和 n 位女士，由题意可知 V_1 中的每个结点度数至少为 2，而 V_2 中的每个结点度数至多为 2，从而它满足 t 条件（$t=2$），因此存在从 V_1 到 V_2 的匹配，故可分配。

39. 今有赵、钱、孙、李、周五位教师，要承担语文、数学、物理、化学、英语五门课程。已知赵熟悉数学、物理、化学三门课程，钱熟悉语文、数学、物理、英语四门课程，孙、李、周三人都只熟悉数学和物理两门课程。问能否安排他们五人每人只上一门自己所熟悉的课程，使得每门课都有人教。说明理由。

解　不能。用结点表示五位教师和五门课，在教师和他熟悉的课程之间连一条线，得到如图 7.29 的偶图，在该图中， V_1 中的孙、李、周三个结点只与 V_2 中的数学、物理两个结点相邻接，故不满足相异性条件，因此不存在从 V_1 到 V_2 的匹配，故不能安排。

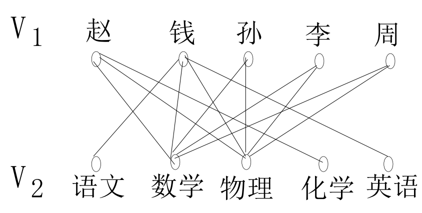


图 7.29

40. 证明图 7.30 所示的四个图均为平面图。

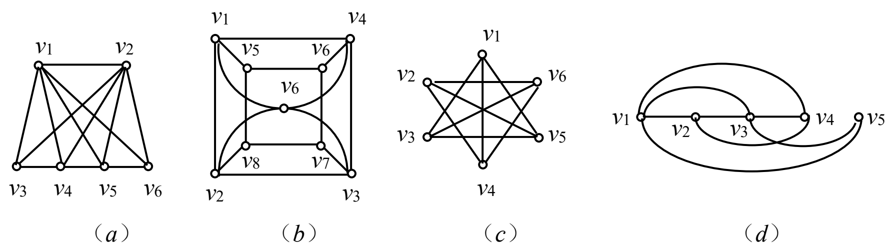


图 7.30

证明 只要找出它们各自的一种画法，使得任何两边除在结点处相交外，无其它交叉点即可。图 7.31 中分别给出了对应于图 7.30 中四个图的一种画法。故它们都是平面图。

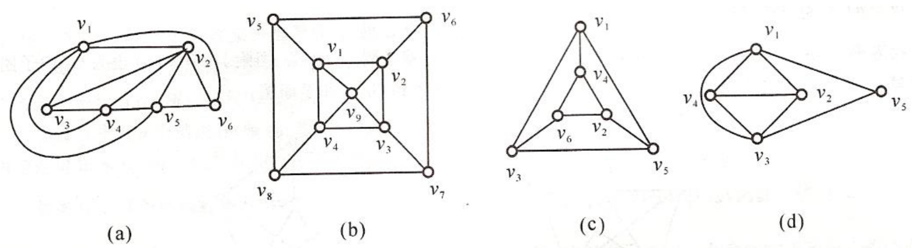


图 7.31

41. 指出图 7.32 所示的两个图各有几个面，写出每个面的边界及次数。

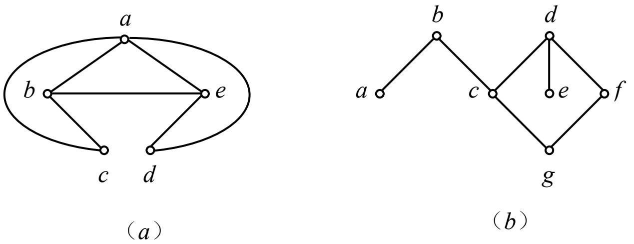


图 7.32

解 在图 7.32(a)中共有五个面，四个有限面 r_1、r_2、r_3 和 r_4，一个无限面 r_0，如图 7.33(a)所示；r_1 的边界为 $abca$，次数为 3；r_2 的边界为 $abea$，次数为 3；r_3 的边界为 $bdeb$，次数为 3；r_4 的边界为 $adea$，次数为 3；r_0 的边界为 $acbda$，次数为 4。

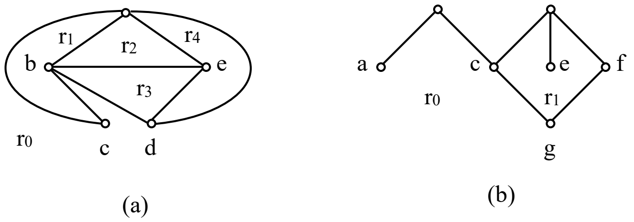


图 7.33

在图 7.32(b)中共有两个面，一个有限面 r_1，一个无限面 r_0，如图 7.33(b)所示；r_1 的边界为 $cdedfgc$，次数为 6；r_0 的边界为 $abcdfgcba$，次数为 8。

42. 试证明 在有 6 个结点、12 条边的连通简单平面图中，每个面均由 3 条边围成。

证明 设该连通简单平面图的面数为 r，由欧拉公式可得，$6-12+r=2$，所以 $r=8$，其 8 个面分别设为 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$。因是简单图，故每个面至少由 3 条边围成。只要有一

个面是由多于 3 条边所围成的，那就有所有面的次数之和$\sum_{i=1}^{8} D(r_i)$＞3×8＝24。但是，

由定理 7.13 知，$\sum_{i=1}^{8} D(r_i)$＝2m＝2×12＝24。因此每个面只能由 3 条边围成。

43. 设 G 是具有 k（k≥2）个连通分支的平面图，证明

$$n-m+r=k+1$$

其中 n、m、r 分别是 G 的结点数、边数和面数。（本题所证的结论是欧拉公式的推广）

证明 设 G 的 k 个连通分支分别为 G_1, G_2, …, G_k，G_i 中的结点数、边数和面数分别为 n_i、m_i 和 r_i，i＝1,2,…k，由欧拉公式有

$$n_i - m_i + r_i = 2,\ i=1, 2, \dots, k, \qquad (1)$$

对(1)式的两边求和得

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} r_i = 2k。 \qquad (2)$$

而

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ \sum_{i=1}^{k} m_i = m,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = r + k - 1。 \qquad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$n - m + r + k - 1 = 2k。 \qquad (4)$$

由(4)可得

$$n - m + r = k + 1。$$

44. 设 G 是具有 n 个结点、m 条边、p（p≥2）个连通分支的平面图，G 的每个面均至少由 k（k≥3）条边围成，则 $m \leqslant \frac{k(n-p-1)}{k-2}$。

证明 设 G 的面数为 r，各面的次数之和为 T，由定理 7.13 可知 T＝2m。又因为 G 的每个面均至少由 k 条边围成，所以 $k \cdot r \le T=2m$。由欧拉公式的推广（见第 24 题）得，

r＝p+1+m-n，从而有 $k\cdot(p+1+m-n) \le 2m$，整理得 $m \le \frac{k(n-p-1)}{k-2}$。

45. 试证明图 7.34 所示的两个图均为非平面图。

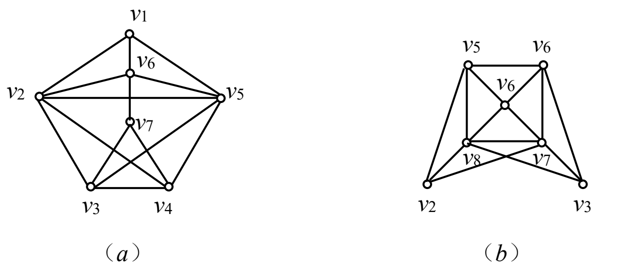


图 7.34

解 图 7.35(a)为图 7.34(a)的子图，将结点 v_7 缩减到 v_6 得 K_5；图 7.35(b)也为 7.34(a)的子图，它就是 $K_{3,3}$。利用库拉托夫斯基定理由以上两种方法均可得到 7.34(a)是非平面图。

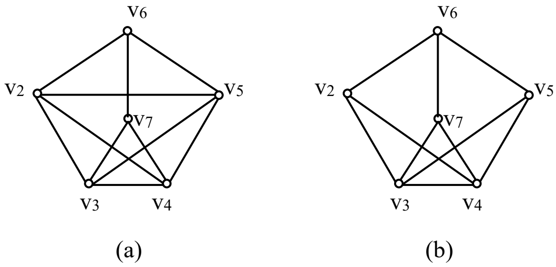


图 7.35

图 7.36(a)为图 7.34(b)的子图，将结点 v_1 缩减到 v_6，用 w 代替，得图 7.36(b)，它与 $K_{3,3}$ 同构；图 7.36(c)也为图 7.34(b)的子图，将结点 v_6 缩减到 v_3，用 u 代替，将结点 v_7 缩减到 v_4，用 w 代替，得图 7.36(d)，它与 K_5 同构。利用库拉托夫斯基定理由以上两种方法均可得到图 7.34(b)是非平面图。

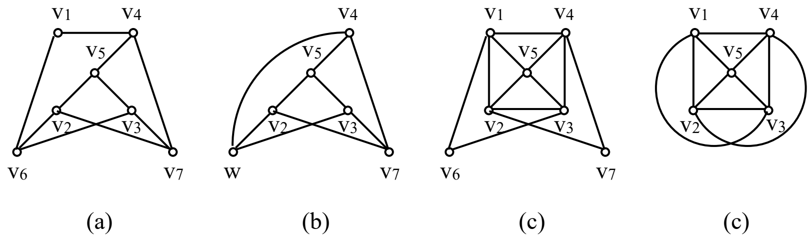


图 7.11.19

46. 证明在简单平面图 G 中，至少有一个度数小于等于 5 的结点。

证明 若 G 中无回路，则 G 为森林，结论显然成立。若 G 中有回路，假设 G 中有 n 个结点、m 条边，并假设 G 的所有连通分支为 $G_1, G_2,\ldots, G_k$，每个 G_i 有 n_i 个结点、m_i 条边，则有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n，\ \sum_{i=1}^{k} m_i = m。$$

由于 G 是简单图，所以 G_i 也是简单图，由推论 7.6 可知，$m_i \le 3n_i-6$，$i=1,2,\ldots,k$。从而有

$$m=\sum_{i=1}^{k} m_i \le \sum_{i=1}^{k}(3n_i-6) = 3\sum_{i=1}^{k} n_i -6k = 3n-6k \le 3n-6,$$

所以 $m\le 3n-6$，下面用反证法证明我们的结论。

如果 G 中每个结点的度数均大于等于 6，由握手定理可知 $2m=\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) \ge 6n$，

因此 $n\le \frac{1}{3}m$，代入 $m\le 3n-6$ 得 $m\le m-6$，这显然是矛盾的。故 G 中 G 中至少有一个度数小于等于 5 的结点。

47. 证明小于 30 条边的简单平面图 G 中至少有一个度数小于等于 4 的结点。

证明 不妨设 G 是连通图，否则因它的每个连通分支的边数都应小于等于 30，因此可对它的每个连通分支进行讨论，所以可设 G 是连通图。

假设 G 中有 n 个结点、m 条边。若 G 中无回路，则 G 为树，结论显然成立。若 G 中有回路，由于 G 是简单图，由推论 11.5.1 可知 $m \le 3n-6$。下面用反证法证明我们的结论。

如果 G 中每个结点的度数均大于等于 5，由握手定理可知 $2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \ge 5n$，

因此 $n \le \dfrac{2}{5}m$，代入 $m \le 3n-6$ 得 $m \le \dfrac{6}{5}m-6$，从而 $m \ge 30$。这与已知的 $m<30$ 矛盾。

故 G 中 G 中至少有一个度数小于等于 4 的结点。

48. 证明在简单平面图中，有 $r \leqslant 2n-4$。这里 r、n 分别为该图的面数和结点数（$n \geqslant 3$）。

证明 假设该图的边数为 m，由于简单图中的每个面都至少由 3 条边围成，由定理 7.13 可得，$3r \le 2m$。将欧拉公式 $n-m+r=2$ 解出 $m=n+r-2$，代入 $3r \le 2m$ 得到 $3r \le 2(n+r-2)$，整理得，$r \le 2n-4$。

49. 设 G 是一个简单图，证明 若结点数 $n<8$，则 G 与 G^C 中至少有一个是平面图。

证明 假设 G 不是平面图，则由库拉托夫斯基定理可知，G 中必有子图可缩减为 K_5 或 $K_{3,3}$。若 G 中有子图可缩减为 K_5，则 G^C 中必有 5 个结点互不相邻，因为 $n<8$，所以 G^C 中最多还有另外两个结点，即使这两个结点在 G^C 中相邻，并且这两个结点在 G^C 中分别与上述 5 个结点均相邻，这时，G^C 仍是一个平面图。若 G 中有子图可缩减为 $K_{3,3}$，则 G^C 中必有两个三角形，且这两个三角形的结点是不相邻的，因为 $n<8$，所以 G^C 中最多还有另外一个结点，即使这个结点在 G^C 中与上述两个三角形的六个结点均相邻，这时，G^C 仍是一个平面图。

50. 设 G 是一个简单图，证明 若结点数 $n \geqslant 11$，则 G 与 G^C 中至少有一个是非平面图。

证明 **方法一** 首先考虑 $n=11$ 的情况。此时 $G \cup G^C = K_{11}$，K_{11} 的边数为 $\dfrac{11\times 10}{2}=55$，因而必有 G 或者 G^C 的边数大于等于 28。不妨设 G 的边数 $m \ge 28$，设 G 有 k 个连通分支，则 G 中必有回路，若不然，G 为 k 棵树的森林，应有 $28 \le m = n-k = 11-k$，从而 $28 \le 11-k$，这显然是矛盾的。下面用反证法证明 G 为非平面图。如果 G 是平面图，由于 G 中有回路并且 G 为简单图，因而回路的长度大于等于 3。于是 G 的每个面至少由 3 条边围成，由第 25 题可知

$$28 \le m \le \frac{3\times(11-\mathrm{k}-1)}{3-2} \le 3\times 11-6$$，从而得到 $28 \le 27$，这是矛盾的，所以 G 为非平面图。

当 $n>11$ 时，考虑 G 的具有 11 个结点的子图 G'，则 G' 与 G'^C 必有一个是非平面图。若 G' 是非平面图，显然 G 为非平面图；若 G'^C 为非平面图，则 G^C 为非平面图。

方法二 1） G 和 G^C 的边数都大于 1 时，设 G 的边数为 m，则 G^C 的边数为

$\frac{1}{2}n(n\text{-}1)\text{-}m$。假设 G 和 G^C 都是简单平面图， G 和 G^C 的连通分支数分别为 p 和 p'，由第 44 题可知，

$$m \le \frac{3(n-p-1)}{3-2} \le 3n\text{-}6, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}n(n\text{-}1)\text{-}m \le \frac{3(n-p-1)}{3-2} \le 3n\text{-}6。 \tag{2}$$

由(2)得

$$\frac{1}{2}n(n\text{-}1)\text{-}3n\text{+}6 \le m。 \tag{3}$$

由(1)、(3)得

$$\frac{1}{2}n(n\text{-}1)\text{-}3n\text{+}6 \le 3n\text{-}6。$$

即 $n^2\text{-}13n\text{+}24 \le 0$，而当 $n \ge 11$ 时显然有 $n^2\text{-}13n\text{+}24 > 0$，矛盾。故 G 与 G^C 中至少有一个是非平面图。

2） G 或者 G^C 的边数等于 1 时，不妨设 G 中仅有一条边，假设该边的两个端点为 u,v，则 G^C 的子图 $G^C\text{-}\{u,v\}$是一个结点数大于等于 9 的完全图，在 $G^C\text{-}\{u,v\}$中任取 5 个结点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5，则$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$所生成的 G^C 的子图就是 K_5。由库拉托夫斯基定理可知， G^C 是非平面图。

3） G 或者 G^C 是零图时，不妨设 G 是零图，则 G^C 是完全图， G^C 中任意 5 个结点生成的子图都是 K_5，由库拉托夫斯基定理可知， G^C 是非平面图。