电子科技大学 2019-2020 学年第 1 学期期中考试

考试科目：概率论与数理统计　考试形式：闭卷　考试日期：2019 年 11 月 9 日

一、简答题（每小题 10 分，共 40 分）

1、（1）叙述：如何判断一个一元函数是一维随机变量的分布函数；

（2）已知二维随机变量（X,Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & x\geq 0, y\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：边缘分布函数 $F_X(x)$和$F_Y(y)$，并判断随机变量 X 的类型（离散？连续？）

2、甲乙两人独立地对同一目标进行射击，命中率分别为 0.5 和 0.4，求

（1）二人均命中目标的概率；（2）至少有一人命中目标的概率；（3）恰有一人命中目标的概率

3、（1）叙述随机变量相互独立的定义，并说明随机变量相互独立于两两独立的关系。

（2）将一枚均匀硬币连续抛两次，令

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次出现正面}\\ 0 & \text{第一次出现反面}\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1 & \text{第二次出现正面}\\ 0 & \text{第二次出现反面}\end{cases}$$

问：X 与 Y 是否相互独立？

4、 某次考试有40道单选题（四选一），一个同学完全靠猜来答题，请问他能全部猜对和全部猜错这两种情况，哪种情况发生的可能性更大？

二、计算题（共15分）

某同学从宿舍到主楼，现有两条路线可供选择，走第一条线路所需时间为X分钟，$X \sim N(10,10^2)$；

走第二条线路所需时间为Y分钟，$Y \sim N(15,5^2)$。为及时赶到主楼，问：

（1）若要在20分钟内赶到主楼，应选择哪一条线路更有把握？

（2）若走第二条线路，并以95%的概率保证能及时到达主楼，至少需要提前多少分钟从宿舍出发？

（$\Phi(1)=0.8413, \Phi(1.65)=0.95$）

三、计算题（共15分）

已知一批商品中96%是合格品，用某检验方法辨认出合格品为合格品的概率是0.98；误认次品为合格品的概率是0.05，求：检查合格的一件商品确系合格的概率是多少？

四、计算题（共15分）

二维随机变量(X,Y)在区域$G=\{(x,y):0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2(1-x)\}$上服从均匀分布，求：

（1）X与Y是否相互独立？ （2）$f_{Y|X}(y|x)$。

五、计算题（共 15 分）

已知随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim U(0,1), Y \sim U(0,1)$ 求：

（1）$Z = X + Y$ 的概率密度函数；

（2）从结果中判断均匀分布是否具有可加性？

（3）列举至少 2 个具有可加性的随机变量类型。

电子科技大学 2019-2020 学年第 1 学期期中考试参考答案

一、简答题（每小题 10 分，共 40 分）

1、（1）要有界性，非负性，右连续性。

（2）$F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$，$F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

因为 X 的分布函数是连续的，判断 X 是连续型随机变量。

2、答：A={甲命中}，B={乙命中}，由题意，$P(A)=0.5, P(B)=0.4$，且 A 与 B 独立。

（1）$P(AB) = P(A)P(B) = 0.2$;　　（2）$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7$;

（3）$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0.5$

3、答：（1）相互独立定义：联合分布函数=边缘分布函数的乘积。相互独立能推出两两独立，两两独立不一定推出相互独立。

（2）因为 $P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j), i=0,1; j=0,1.$ 所以 X 与 Y 相互独立。

4、答：X 表示答对题的个数，$X \sim B(40, 1/4)$，全部答对的概率为 $p_1 = P\{X=40\} = C_{40}^{40}(1/4)^{40}$

全部答错的概率为 $p_2 = P\{X=0\} = C_{40}^{0}(3/4)^{40}, p_2 > p_1$，所以答错的概率更大。

二、计算题（共 15 分）

答：（1）$P(0<X<20)=\Phi\left(\frac{20-10}{10}\right)-\Phi\left(\frac{0-10}{10}\right)=2\Phi(1)-1=0.68$

$P(0<Y<20)=\Phi\left(\frac{20-15}{5}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{5}\right)\approx\Phi(1)=0.8413$，所以第二条路更有把握。

（2）设需要提前 y 分钟出发，有 $0.95\le P(0<Y\le y)\approx\Phi\left(\frac{y-15}{5}\right)$，得 $\frac{y-15}{5}\ge 1.65$，求解得

$y\ge 23.25$。所以至少提前 23.25 分钟。

三、计算题（共 15 分）

答：A={商品确实是合格品}，B={检查为合格品}，由题意

$P(A)=0.96,P(B\,|\,A)=0.98,P(B\,|\,\overline{A})=0.05$，由贝叶斯公式，所求问题为

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(A)P(B\,|\,A)+P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})}=0.998$$

四、计算题（共 15 分）

答：$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}, f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}dy=2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}dy=1-\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，$\therefore$ 在区域 G 上，X 与 Y 不独立。

当 $0<x<1$，条件概率密度存在，$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2(1-x)} & 0<y<2(1-x)\\ 0 & else\end{cases}$

五、计算题（共 15 分）

答：（1）随机变量相互独立，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$,

在 xoz 平面，作区域 $G=\{(x,z)\,|\,0\le x\le 1,0\le z-x\le 1\}$

$$f_x(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}1, & (x,z)\in G\\ 0, & (x,z)\notin G\end{cases}, f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 1dx=z & 0\le z\le 1\\ \int_{z-1}^1 1dx=2-z & 1<z\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）结果判断，不具有可加性。

（3）例：正态分布，泊松分布，二项分布。