

1. (0, -1)

考点	牛顿方向
优化类型	无约束优化问题
思路	二次函数近似目标函数，求近似最优值。（对负梯度方向进行旋转） $\nabla^2 f(X^k)P^k = -g^k$

2.  $\{P \mid A'P \geq 0\}$

考点	可行方向
问题定义	存在 $\delta \geq 0$ 对于 $\lambda \in (0, \delta)$ ，满足 $X^{k+1} = X^k + \lambda P^k$ 在可行域内
思路	保证可行方向与 <b>积极约束</b> 的梯度夹角小于 90 度

3.  $-\frac{\nabla f(X^k)^T P^k}{2 \cdot (P^k)^T Q P^k}$

考点	最优步长
问题定义	对一元函数 $\varphi(t) = f(X^k + tP^k)$ 沿方向 $P^k$ 求极小值的问题（一维搜索或直线搜索）
思路	最优质在梯度为 0 的地方取得

4.都是

考点	凸函数（凸函数和严格凸函数）
问题定义	函数任意两点的连线在对应曲线的上方
思路	对应 Hesse 矩阵为正定矩阵，为严格凸函数；半正定为凸函数

5.  $(1,1)^T$ .

考点	对偶线性规划 松弛定理
思路	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ 对偶规划有最优解的充要条件：两者都有可行解</li> <li>➤ <math>C^T X = b^T W</math>，则 X 与 W 为两个优化问题的最优解</li> <li>➤ 一个规划有最优解，则另一个必有最优解，且相等</li> <li>➤ 松弛定理，X,W 是可行解，则是最优解的充要条件： <math display="block">(A^T W - C)^T X = 0</math> <math display="block">W^T (AX - b) = 0</math> </li> </ul>

➤ 无最优解

考点	两阶段法
思路	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ 构造辅助线性规划，求原规划初始可行解</li> <li>➤ 单纯型法求原规划可行解</li> </ul>

## 7.0 一维搜索

8. newton 共轭梯度 DPF Powell SR1

考点	二次收敛性（二次终止性）,不同于二次收敛速度
定义	在有限步数内达到最优解
算法	牛顿法：对于二次凸函数，一步达到 共轭方向系列算法：共轭梯度法，DFP, SR1, Powell, n 个 共轭梯度向量组，最多 n 次达到最优解

9.  $[3 - \sqrt{5}, 2]$ .

考点	黄金分割法
优化类型	无约束优化问题，精确一维搜索 适用于单峰函数 且函数要求不连续 $\begin{cases} \varphi(t_1) > \varphi(t_2) & \text{if } t_2 \leq t^* \\ \varphi(t_1) < \varphi(t_2) & \text{if } t_1 \geq t^* \end{cases}, t_1 < t_2$
思路	在可行域[a,b]内插入两点，比较对应处函数值，每次迭代删除相同比例的区域。

10 二阶收敛

考点	收敛速度
问题定义	对于迭代点构成的序列 $\{X^k\}$ 收敛到最优点的速度
思路	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ X^{k+1} - X^*\ }{\ X^k - X^*\ ^p} = \beta$ $\begin{cases} p = 1, \beta = 0 & \text{超线性收敛} \\ p = 1, \beta = 1 & \text{次线性收敛} \\ p = 1, 0 < \beta < 1 & \text{线性收敛} \\ p > 1 & p\text{阶收敛，必为超线性收敛} \end{cases}$

11. [3,2]

考点	KTT 点（优化问题）
问题定义	一阶必要条件， 潜在的最优解
思路	$\begin{cases} \text{线性组合} & \nabla f(X^*) = \sum_{i \in I(X^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(X^*) + \sum_j \mu_j^* \nabla h_j(X^*) \\ \text{非负性} & \lambda_i^* \geq 0 \\ \text{互不松弛性} & \lambda_i^* g_i(X^*) = 0 \end{cases}$

涉及几种算法的解题步骤

算法	优化类型	思路	解题步骤
外点法（罚函数的一种）	约束优化问题 (可包含等式约束和不等式约束)	利用罚因子将约束优化问题转化为非约束优化问题	1. 构建罚函数 2. 分情况讨论确定非约束优化问题，并进行舍去讨论 3. 计算惩罚因子 $m$ 构成的通项
Fletcher-Reeves 共轭梯度法	无约束优化问题	构造共轭方向，沿共轭方向搜索求最优解	1. 确定迭代点 $X^{k+1}$ 处的共轭方向 $P^{k+1} = -g^{k+1} + \alpha P^k$ $P^0 = -g^0$ 2. 沿共轭方向进行一维搜索，求下一个迭代点： $X^{k+1} = X^k + tP^k$ 终止条件判断： $\ g^{k+1}\  < \varepsilon$
Rosen 梯度投影法	约束优化问题 线性约束对应的非线性优化问题	构造投影矩阵，将不在可行域内的负梯度方向投影到约束条件的交线上，然后沿投影方向进行一维搜索，重复该过程。	1. 构建投影矩阵， $Q = I - N^T(MN^T)^{-1}N$ 2. 求 $X^k$ 处梯度 $g^k$ ，和投影向量 $P^k = -Qg^k$ （该方向如果为 0，判断当前点是否为 KKT 点，如果不是，构造新的投影矩阵 $\bar{Q}$ ，重新构建投影向量）           3. 沿 $P^k$ 进行一维搜索 $\min_{0 \leq t_k \leq t_k} f(X^k + tP^k)$ 得到下一个迭代点 $X^{k+1}$

二、

$$\begin{aligned}
 & \min -3x_1 - 5x_2 \\
 & s.t. \\
 & x_1 + x_3 = 4 \\
 & x_2 + x_4 = 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 5.
 \end{aligned}$$

P1	P2	P3	P4	P5	
1	0	1	0	0	4
0	(1)	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18
3	5	0	0	0	0

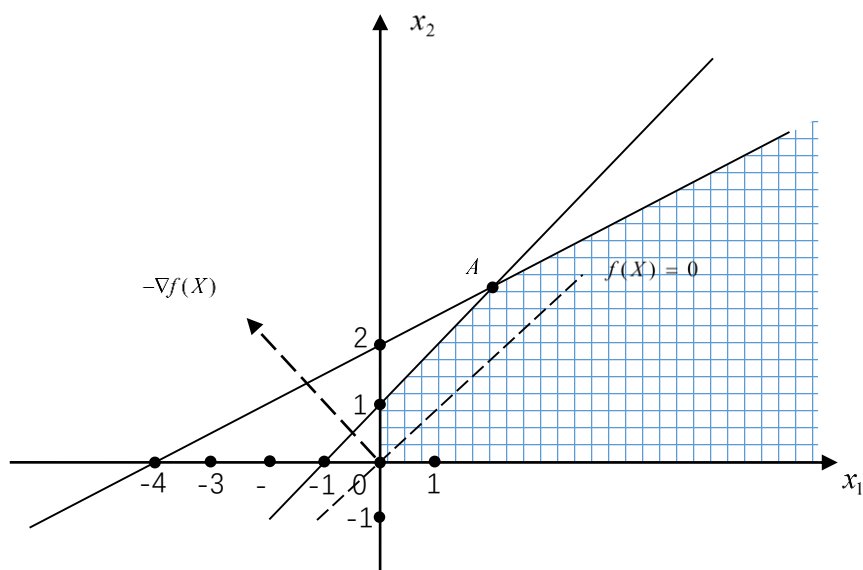
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	6
(3)	0	0	-2	1	6
3	0	0	-5	0	-30

0	0	1	2/3	-1/3	2
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2
0	0	0	-3	-1	-36

三、参考：如下图所示，阴影部分为可行区域。当 $\beta = 0$ 时，显然点 $\mathbf{A} = (2, 3)^T$ 为最

优解；当 $\beta \neq 0$ 时，因为 $-1, -\beta \left(1, -\frac{1}{\beta}\right)^T = 0$ ，所以直线 $f(\mathbf{X}) = 0$ 与梯度

$-\nabla f(\mathbf{X})$ 垂直。



(1) 要以  $(2, 3)^T$  为唯一最优解，则直线  $f(X) = x_1 + \beta x_2 = 0 - x_1 + 2x_2 = 4$

的斜率  $k = -\frac{1}{\beta}$  必须小于直线  $-x_1 + x_2 = 1$  的斜率  $k_1 = 1$ ，大于直线的斜率

$k_2 = \frac{1}{2}$ ，即  $\frac{1}{2} < -\frac{1}{\beta} < 1$ ，所以有， $-2 < \beta < -1$ 。

(2) 显然除了  $\beta = 0$  外， $k = 1$  或  $\frac{1}{2}$  时，问题取得无穷多个最优解，即

$\beta = 0, -1, -2$ 。

(3) 不存在有界最优解，就要  $-\frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}$ ，即  $\beta < -2$

四、解：第一阶段：引入人工变量  $x_5$ ，构造辅助线性规划，

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

用单纯形法求解，

$P1_i$	$P2$	$P3$	$P4$	$P5$	b
-2	1	-1	1	0	4
(1)	2	0	0	1	6

1	2	0	0	0	6
0	5	-1	1	2	16
1	2	0	0	1	6
0	0	0	0	-1	0

第二阶段:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	0	-1	0	-6
0	5	-1	1	16
1	2	0	0	6

所以最优解为  $\boldsymbol{X}^* = (6,0,0,16)^T$  ,  $f(\boldsymbol{X}^*) = -6$  。