练习题

一、填空题

1. 函数 $f(X)=2x_1^2+3x_2^2$ 在 $X=(0,1)^T$ 处的牛顿方向为 ____________.

2. $S=\{X \mid AX\geq b, X\geq 0\}$，$X^0\in S$ 处的可行方向为____________.

3. 设 $f(X)=X^TQX+b^TX+c$，且 $Q=Q^T$，$X\in R^n$，$b\in R^n$，$c\in R$，考虑问题 $\min_{t>0} f(X^k+tP^k)$，则 X^k 在方向 P^k 上的最优步长 $t^*=$__________.

4. 判断下面的函数是否为凸函数：

   $f_1(X)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$，$f_2(X)=e^{x_1+x_2}$，$f_3(X)=f_1(X)+f_2(X)$，

   $f_4(X)=3f(X)$

5. 若线性规划 $\max\ 3x_1+4x_2+x_3;\ s.t.\ x_1+2x_2+x_3\leq 10; 2x_1+2x_2+x_3\leq 16;$ $x_i\geq 0, i=1\sim 3.$ 的最优解 $X^*=(6,2,0)^T$，那么其对偶线性规划的最优解为_________.

6. 在两阶段（单纯形）法中，若辅助线性规划的最优值不为零，那么原线性规划的最优解情况为_____________.

7. 若目标函数 $f(X)$ 一次连续可微，那么在迭代点 X^k 处沿下降方向 P^k 进行精确一维搜索后，$\nabla f(X^{k+1})^TP^k=$____________.

8. 写出二种具有二次收敛性的算法：_____________.

9. 设 $f(x)=(x-3/2)^2$，若用黄金分割法求解此问题，设初始搜索区间为 $[0,2]$，则第一次迭代后得到的搜索区间为____________.

10. 若算法得到的迭代点列为 $\{a^{2^k}\}$，$0<a<1$，则其收敛速度为_________.

11. 考虑约束优化 $\min\ -x_2\ \ s.t.\ (3-x_1)^3-(x_2-2)\geq 0; 3x_1+x_2\geq 9.$ 其 KT 点为 ____________.

二、单纯形法：

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_1-5x_2\\
s.t.\ &\\
&x_1\leq 4\\
&x_2\leq 6\\
&3x_1+2x_2\leq 18\\
&x_j\geq 0, i=1,2.
\end{aligned}
$$

三、考虑线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min f(X) = x_1 + \beta x_2 \\
s.t.\ & \\
&-x_1 + x_2 \le 1 \\
&-x_1 + 2x_2 \le 4 \\
&x_i \ge 0, i = 1,2.
\end{aligned}
$$

试用图解法讨论，当β取何值时，（1）以$(2,3)^T$为唯一最优解；（2）具有无穷多个最优解；（3）不存在有界的最优解。

四、两阶段法：

$$
\begin{aligned}
&\min -x_1 + 2x_2 + x_3 \\
s.t.\ & \\
&2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
&x_1 + 2x_2 = 6 \\
&x_j \ge 0, i = 1,\cdots,4.
\end{aligned}
$$

五、已知用单纯形方法求解某一线性规划的初始单纯形表：

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	b
b	c	d	1	0	6
−1	3	e	0	1	1
a	−1	2	0	0	

和最终单纯形表

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	b
g	2	−1	1/2	0	f
h	i	1	1/2	1	4
0	−7	j	k	1	

试求$a \sim l$.

六、试用外点法求解如下约束优化问题

$$
\begin{aligned}
&\min f(X) = x_1^2 + x_2^2 \\
&s.t.\ \ 2x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\
&\qquad x_1 \ge 0 \\
&\qquad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

七、已知下面线性规划的对偶规划的最优解为$(5/3, 7/3)^T$，试利用对偶理论求下面问题的最优解.

$$
\begin{aligned}
&\min\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\
s.t.\ & \\
&x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 2 \\
&x_i \ge 0, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

八、试叙述惩罚函数法的基本思想及其优缺点；并用外部惩罚函数法求解下面的优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\min\ \ x_1^2 + x_2^2 \\
s.t.\ \ &2x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_2 \ge 1
\end{aligned}
$$

九、***Fletcher - Reeves*** 共轭梯度法：这里$X^0 = (5,5)^T$.

$$\min\ \ x_1^2 + 2x_2^2$$

十、写出***Rosen***梯度投影法：这里$X^0 = (2,0)^T$.

(1)
$$
\begin{aligned}
&\min\ \ f(X) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \\
s.t.\ & \\
&x_1 - 2x_2 \ge 0 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&\min\ \ f(X) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2 \\
s.t.\ & \\
&2x_1 + x_2 \ge 4 \\
&x_j \ge 0, j = 1,2.
\end{aligned}
$$

十一、求出下面问题的***KT***点.

（1）
$$
\begin{aligned}
&\min -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 \\
s.t.\ & \\
&-x_1 - x_2 + 2 \ge 0; \\
&-x_1 - 2x_2 + 3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

（2）
$$
\begin{aligned}
&\min -x_2 \\
s.t.\ & \\
&(3 - x_1)^2 - (x_2 - 2) \ge 0; \\
&3x_1 + x_2 \ge 9.
\end{aligned}
$$