第 4 章 时变电磁场

4.1 证明：在无源的真空中，以下矢量函数满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$，其中 $c^2=\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$，$E_0$ 为常数。

（1）$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\cos(\omega t-\dfrac{\omega}{c}z)$；（2）$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\sin(\dfrac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)$；

（3）$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\cos(\omega t+\dfrac{\omega}{c}z)$

解 （1）$\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\nabla^2\cos(\omega t-\dfrac{\omega}{c}z)=\boldsymbol{e}_xE_0\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\cos(\omega t-\dfrac{\omega}{c}z)=$

$$-\boldsymbol{e}_x(\frac{\omega}{c})^2E_0\cos(\omega t-\frac{\omega}{c}z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t-\frac{\omega}{c}z)=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos(\omega t-\frac{\omega}{c}z)$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_x(\frac{\omega}{c})^2E_0\cos(\omega t-\frac{\omega}{c}z)-\frac{1}{c^2}[-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos(\omega t-\frac{\omega}{c}z)]=0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\cos(\omega t-\dfrac{\omega}{c}z)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$。

（2）$\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\nabla^2[\sin(\dfrac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)]=\boldsymbol{e}_xE_0\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[\sin(\dfrac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)]=$

$$-\boldsymbol{e}_x(\frac{\omega}{c})^2E_0\sin(\frac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\sin(\frac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)]=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0[\sin(\frac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)]$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_x(\frac{\omega}{c})^2E_0\sin(\frac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)-\frac{1}{c^2}[-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\sin(\frac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)]=0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\sin(\dfrac{\omega}{c}z)\cos(\omega t)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$。

（3）$\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\nabla^2\cos(\omega t+\dfrac{\omega}{c}z)=\boldsymbol{e}_yE_0\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\cos(\omega t+\dfrac{\omega}{c}z)=$

$$-\boldsymbol{e}_y(\frac{\omega}{c})^2E_0\cos(\omega t+\frac{\omega}{c}z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t+\frac{\omega}{c}z)=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos(\omega t+\frac{\omega}{c}z)$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_y(\frac{\omega}{c})^2E_0\cos(\omega t+\frac{\omega}{c}z)-\frac{1}{c^2}[-\boldsymbol{e}_y\omega^2E_0\cos(\omega t+\frac{\omega}{c}z)]=0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\cos(\omega t+\dfrac{\omega}{c}z)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$。

4.3 已知无源的空气中的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz) \quad \mathrm{A/m}$$

利用波动方程求常数 k 的值。

解 在无源的空气中的磁场强度满足波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

而

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_y \nabla^2 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz) =$$

$$\boldsymbol{e}_y[-(10\pi)^2 - k^2]0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(6\pi\times10^9 t - kz) =$$

$$-\boldsymbol{e}_y(6\pi\times10^9)^2 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz)$$

代入方程 $\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$，得

$$\boldsymbol{e}_y\{[-(10\pi)^2 - k^2] + \mu_0\varepsilon_0(6\pi\times10^9)^2\}0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t - kz) = 0$$

于是有

$$[-(10\pi)^2 - k^2] + \mu_0\varepsilon_0(6\pi\times10^9)^2 = 0$$

故得到

$$k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0(6\pi\times10^9)^2 - (10\pi)^2} = 10\sqrt{3}\pi$$

4.5 在应用电磁位时，如果不采用洛仑兹条件，而采用库仑规范 $\nabla \boldsymbol{A} = 0$，导出 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的微分方程。

解 将电磁矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的关系式

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

和电磁标量位 φ 的关系式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

代入麦克斯韦第一方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

得

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times A = \nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A = \mu J + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t})$$

（1）

又由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

得

$$\nabla\cdot(-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t})=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

即

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A)=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad （2）$$

按库仑规范，令$\nabla\cdot A=0$，将其代入式（1）和式（2）得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \qquad （3）$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad （4）$$

式（3）和式（4）就是采用库仑规范时，电磁位函数$\boldsymbol{A}$和φ所满足的微分方程。

4.8 自由空间中的电磁场为

$$E(z,t)=e_x 100\cos(\omega t-kz)\frac{V}{m}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 2.65\cos(\omega t-kz)\quad\frac{A}{m}$$

式中$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=0.42\,\mathrm{rad/m}$。求：

（1）瞬时坡印廷矢量；

（2）平均坡印廷矢量；

（3）任一时刻流入如题 4. 8 图（见教材 P222）所示的平行六面体（长$1\,\mathrm{m}$、横截面积为$0.25\,\mathrm{m}^2$）中的净功率。

解 （1）瞬时坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z 265\cos^2(\omega t-kz)\ \mathrm{W/m^2}$$

（2）平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{av}=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}265\cos^2(\omega t-kz)\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z 132.5\quad \mathrm{W/m^2}$$

（3）任一时刻流入如题 4.8 图所示的平行六面体中的净功率为

$$P=-\oint_S\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_n dS=-\left[\boldsymbol{S}\cdot(-\boldsymbol{e}_z)\big|_{z=0}+\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_z\big|_{z=1}\right]\times 0.25=$$

$$265\times0.25[\cos^2(\omega t)-\cos^2(\omega t-0.42)]=-27.02\sin(2\omega t-0.42)\ \mathrm{W}$$

4.9 已知某电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x jE_0\sin(k_0 z)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(k_0 z)\quad \mathrm{A/m}$$

式中$k_0=\dfrac{2\pi}{\lambda_0}=\dfrac{\omega}{c}$，$c$为真空中的光速，$\lambda_0$是波长。求：（1）$z=0$、$\dfrac{\lambda_0}{8}$、$\dfrac{\lambda_0}{4}$各点处的瞬时坡印廷矢量；（2）以上各点处的平均坡印廷矢量。

解 （1）$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x jE_0\sin(k_0 z)e^{j\omega t}]=-\boldsymbol{e}_x E_0\sin(k_0 z)\sin(\omega t)\ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(k_0 z)e^{j\omega t}]=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(k_0 z)\cos(\omega t)\quad \mathrm{A/m}$$

则瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}(z,t)=\boldsymbol{E}(z,t)\times\boldsymbol{H}(z,t)=-\boldsymbol{e}_z\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\cos(k_0z)\sin(k_0z)\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

故

$$\boldsymbol{S}(0,t)=0\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\boldsymbol{S}(\lambda_0/8,t)=-\boldsymbol{e}_z\frac{E^2}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sin(2\omega t)\quad \mathrm{W/m^2}$$

$$\boldsymbol{S}(\lambda_0/4,t)=0\quad \mathrm{W/m^2}$$

（2） $$\boldsymbol{S}_{av}(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=0\quad \mathrm{W/m^2}$$

4.10 在横截面为$a\times b$的矩形金属波导中，电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_y j\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})e^{-j\beta z}\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{e}_x j\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})+\boldsymbol{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})]e^{-j\beta z}\quad \mathrm{A/m}$$

式中H_0、ω、μ和β都是实常数。求：（1）瞬时坡印廷矢量；（2）平均坡印廷矢量。

解 （1） $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}(x,z,t)=\mathrm{Re}[-\boldsymbol{e}_y j\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})e^{-j\beta z}e^{j\omega t}]=$$

$$\boldsymbol{e}_y\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\omega t-\beta z)\qquad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(x,z,t)=\mathrm{Re}\{[\boldsymbol{e}_x j\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})+\boldsymbol{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})]e^{-j\beta z}e^{j\omega t}\}=$$

$$-\boldsymbol{e}_x\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\omega t-\beta z)$$

故瞬时坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}(x,z,t)=\boldsymbol{e}_z\omega\mu\beta(\frac{a}{\pi}H_0)^2\sin^2(\frac{\pi x}{a})\sin^2(\omega t-\beta z)+$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{a\omega\mu}{4\pi}H_0^2\sin(\frac{2\pi x}{a})\sin(2\omega t-2\beta z)\qquad \cancel{\mathrm{W/m^2}}$$

（2）平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{av}(x,z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(x,z)\times\boldsymbol{H}^*(x,z)]=\boldsymbol{e}_z\frac{\omega\mu\beta}{2}(\frac{a}{\pi}H_0)^2\sin^2(\frac{\pi x}{a})\quad \mathrm{W/m^2}$$

4.13 设电场强度和磁场强度分别为

$$E=E_0\cos(\omega t-\psi_e)$$
$$H=H_0\cos(\omega t-\psi_m)$$

证明其坡印廷矢量的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos(\psi_e-\psi_m)$$

解 坡印廷矢量的瞬时值为

$$S=E\times H=E_0\cos(\omega t-\psi_e)\times H_0\cos(\omega t-\psi_m)=$$
$$\frac{1}{2}E_0\times H_0[\cos(\omega t-\psi_e+\omega t-\psi_m)]+\cos[\omega t-\psi_e-\omega t+\psi_m]=$$

$$\frac{1}{2}E_0 \times H_0[cos(2\omega t - \psi_e - \psi_m) + cos(\psi_e - \psi_m)]$$

故平均坡印廷矢量为

$$S_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T Sdt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}E_0 \times H_0[cos(2\omega t - \psi_e - \psi_m) + cos(\psi_e - \psi_m)]\,d\,t =$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0 \cos(\psi_e - \psi_m)$$

4.14 在半径为a、电导率为σ的无限长直圆柱导线中，沿轴向通以均匀分布的恒定电流I，且导线表面上有均匀分布的电荷面密度ρ_S。

（1）导线表面外侧的坡印廷矢量$\boldsymbol{S}$；

（2）证明：由导线表面进入其内部的功率等于导线内的焦耳热损耗功率。

解：（1）当导线的电导率σ为有限值时，导线内部存在沿电流方向的电场

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \boldsymbol{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

根据边界条件，在导线表面上电场的切向分量连续，即$E_{iz} = E_{oz}$。因此，在导线表面外侧的电场的切向分量为

$$E_{oz}\big|_{\rho=a} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

又利用高斯定理，容易求得导线表面外侧的电场的法向分量为

$$E_{o\rho}\big|_{\rho=a} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$$

故导线表面外侧的电场为

$$\boldsymbol{E}_o\big|_{\rho=a} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} + \boldsymbol{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

利用安培环路定理，可求得导线表面外侧的磁场为

$$\boldsymbol{H}_o\big|_{\rho=a} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{I}{2\pi a}$$

故导线表面外侧的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_o\big|_{\rho=a} = (\boldsymbol{E}_o \times \boldsymbol{H}_o)\big|_{\rho=a} = -\boldsymbol{e}_\rho \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} + \boldsymbol{e}_z \frac{\rho_S I}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad \mathrm{W/m^2}$$

由内导体表面每单位长度进入其内部的功率

$$P = -\int_S \boldsymbol{S}_o\Big|_{\rho=a} \cdot \boldsymbol{e}_\rho dS = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \times 2\pi a = RI^2$$

式中$R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$是内导体单位长度的电阻。由此可见，由导线表面进入其内部的功率等于导体内的焦耳热损耗功率。