第1章　　随机事件及其概率

（1）排列组合公式

$P_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$　　从 m 个人中挑出 n 个人进行排列的可能数。

$C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$　　从 m 个人中挑出 n 个人进行组合的可能数。

（2）加法原理和乘法原理

加法原理（两种方法均能完成此事）：$m+n$

某件事由两种方法来完成，第一种方法可由 m 种方法完成，第二种方法可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m+n$ 种方法来完成。

乘法原理（两个步骤分别不能完成这件事）：$m\times n$

某件事由两个步骤来完成，第一个步骤可由 m 种方法完成，第二个步骤可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m\times n$ 种方法来完成。

（3）一些常见排列

重复排列和非重复排列（有序）；对立事件（至少有一个）；圆排列；顺序问题

（4）随机试验和随机事件

如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为随机试验。

试验的可能结果称为随机事件。

（5）基本事件、样本空间和事件

在一个试验下，不管事件有多少个，总可以从其中找出这样一组事件，它具有如下性质：

① 每进行一次试验，必须发生且只能发生这一组中的一个事件；

② 任何事件，都是由这一组中的部分事件组成的。

这样一组事件中的每一个事件称为基本事件，用｛ω｝来表示。

基本事件的全体，称为试验的样本空间，用 Ω 表示。

一个事件就是由 Ω 中的部分点（样本点 ω）组成的集合。通常用大写字母 A，B，C，… 表示事件，它们是 Ω 的子集。

Ω 为必然事件，Ø 为不可能事件。

不可能事件（Ø）的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件（Ω）的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

（6）事件的关系与运算

①关系：

如果事件 A 的组成部分也是事件 B 的组成部分，（A 发生必有事件 B 发生），记为 $A \subset B$

如果同时有 $A \subset B$，$B \supset A$，则称事件 A 与事件 B 等价，或称 A 等于 B，记为 $A=B$。

A、B 中至少有一个发生的事件，记为 $A \bigcup B$，或者 $A+B$。

属于 A 而不属于 B 的部分所构成的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，也可表示为 $A-AB$ 或者 $A\overline{B}$，它表示 A 发生而 B 不发生的事件。

A、B 同时发生：$A \bigcap B$，或者 AB。$A \bigcap B$=Ø，则表示 A 与 B 不可能同时发生，称事件 A 与事件 B 互不相容或者互斥。基本事件是互不相容的。

$\Omega - A$ 称为事件 A 的逆事件，或称 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$。它表示 A 不发生的事件。互斥未必对立。

②运算：

结合率：$A(BC)=(AB)C \quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

分配率：$(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \quad (A\cup B)\cap C=(AC)\cup(BC)$

德摩根率：$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i} \qquad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（7）概率的公理化定义

设Ω为样本空间，A为事件，对每一个事件A都有一个实数$P(A)$，若满足下列三个条件：

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，

2° $P(\Omega)=1$

3° 对于两两互不相容的事件A_1，A_2，…，有可列（完全）可加性：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

（8）古典概型

1° $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\cdots\omega_n\}$，

2° $P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots P\{\omega_n\}=\frac{1}{n}$。

设任一事件A，它是由$\omega_1,\omega_2\cdots\omega_m$组成的，则有

$$P(A)=P\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

（9）几何概型

若随机试验的结果为无限不可数并且每个结果出现的可能性均匀，同时样本空间中的每一个基本事件可以使用一个有界区域来描述，则称此随机试验为几何概型。对任一事件A，$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$。其中$L$为几何度量（长度、面积、体积）。

（10）加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

当$P(AB)=0$时，$P(A+B)=P(A)+P(B)$

（11）概率的单调性

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

当$B\subset A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$

当$A=\Omega$时，$P(\overline{B})=1-P(B)$

（12）条件概率

定义 设A、B是两个事件，且$P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生条件下，事件B发生的条件概率。

条件概率是概率的一种，所有概率的性质都适合于条件概率。例如

$$P(\Omega|B)=1\Rightarrow P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

（13）乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

更一般地，对事件A_1，A_2，…A_n，若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$。

（14）独立性

①两个事件的独立性

设事件A、B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A、B是相互独立的。

若事件A、B相互独立，且$P(A)>0$，则有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

若事件 A、B 相互独立，则可得到 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立。

必然事件 Ω 和不可能事件 Ø 与任何事件都相互独立。

Ø 与任何事件都互斥。

②多个事件的独立性

设 ABC 是三个事件，如果满足两两独立的条件，

P(AB)=P(A)P(B)；P(BC)=P(B)P(C)；P(CA)=P(C)P(A)

并且同时满足 P(ABC)=P(A)P(B)P(C)。那么 A、B、C 相互独立。

对于 n 个事件类似。

（15）全概率公式

设事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足

1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，

2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，

则有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)。$$

（16）贝叶斯公式

设事件组 B_1，B_2，…，B_n 及 A 满足

1° B_1，B_2，…，B_n 两两互不相容，$P(B_i)>0$，$i=1$，2，…，n，

2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$P(A)>0$，

则

$$P(B|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}，i=1，2，\cdots，n。$$

此公式即为贝叶斯公式。

$P(B_i)$，（i=1，2，…，n），通常叫先验概率。$P(B_i|A)$，（i=1，2，…，n），通常称为后验概率。贝叶斯公式反映了“因果”的概率规律，并作出了“由果朔因”的推断。

（17）

用 p 表示每次试验 A 发生的概率，则 $\overline{A}$ 发生的概率为 $1-p=q$，用 $P_n(k)$ 表示 n 重伯努利试验中 A 出现 $k(0\le k\le n)$ 次的概率，

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}，k=0,1,2,\cdots,n。$$

第二章　随机变量及其分布

（1）离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的可能取值为 $X_k(k=1,2,\cdots)$ 且取各个值的概率，即事件 $(X=X_k)$ 的概率为

$$P(X=x_k)=p_k，k=1,2,\cdots，$$

则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。有时也用分布列的形式给出：

$$\frac{X}{P(X=x_k)}\left|\frac{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots}{p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots}\right.。$$

显然分布律应满足下列条件：

（1）$p_k \ge 0$，$k=1,2,\cdots$，　（2）$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$。

（2）连续型随机变量的分布密度

设$F(x)$是随机变量X的分布函数，若存在非负函数$f(x)$，对任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

则称X为连续型随机变量。$f(x)$称为X的概率密度函数或密度函数，简称概率密度。密度函数具有下面 2 个性质：

$$1^\circ \quad f(x)\ge 0。\quad 2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1。$$

（3）离散与连续型随机变量的关系

$$P\{X=x\} \approx P(x<X\le x+dx) \approx f(x)dx$$

积分微元$f(x)dx$在连续型随机变量理论中所起的作用与$P(X=x_k)=p_k$在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。

（4）分布函数

设X为随机变量，x是任意实数，则函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为随机变量 X 的分布函数，本质上是一个累积函数。

$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$　可以得到 X 落入区间$(a,b]$的概率。分布函数$F(x)$表示随机变量落入区间（－∞，x]内的概率。

分布函数具有如下性质：

1°　$0\le F(x)\le 1,\quad -\infty<x<+\infty$；

2°　$F(x)$是单调不减的函数，即$x_1<x_2$时，有 $F(x_1)\le F(x_2)$；

3°　$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，　$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$；

4°　$F(x+0)=F(x)$，即$F(x)$是右连续的；

5°　$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$。

对于离散型随机变量，$F(x)=\sum_{x_k\le x} p_k$；

对于连续型随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$　。

（5）八大分布

0-1 分布 （贝努利试验）	P$\{X=1\}=p$，P$\{X=0\}=q$ $p+q=1$

二项分布 (伯努利概型: n 次独立重复进行的贝努利试验，即：①每次试验中 A 发生的概率每次均一样；②每次试验是独立的，也即每次试验 A 发生与否与其他次试验 A 发生与否是互不影响的。 这种试验称为伯努利概型，或称为 n 重伯努利试验。)	在 n 重贝努里试验中，设事件 A 发生的概率为 p 。事件 A 发生的次数是随机变量设为 X ，则 X 可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$ 。 X 的分布律为 $$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$ 其中 $q=1-p, 0<p<1, k=0,1,2,\cdots,n$ ， 则称随机变量 X 服从参数为 n ， p 的二项分布。记为 $$X\sim B(n,p)。$$ 当 $n=1$ 时， $P\{X=k\}=p^k q^{1-k}$ ， $k=0.1$ ，这就是（0-1）分布，所以（0-1）分布是二项分布的特例。 当 n 很大，p 很小时，二项分布的极限分布可近似泊松分布 $P(\lambda)$ （$np=\lambda$，$n\to\infty$）。 当 n 很大，由中心极限定可以，二项分布的极限分布可近似正态分布 $N(np,npq)$ 。
泊松分布	设随机变量 X 的分布律为 $$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}，\ \lambda>0，\ k=0,1,2\cdots,$$ 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$ 。
超几何分布	N 个球中有 M（$M<N$）个红球, 余下为白球, 从中任取 n（$n<N$）个球，n 个球中的红球数为 X,则 X 的分布律为 $$P\{X=k\}=\frac{C_M^k\bullet C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$ 其中 $k=0,1,2\cdots,l,\ l=\min(M,n)$ 也称随机变量 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布，记为 $H(n,N,M)$。
几何分布	n 重贝努里试验，事件 A 首次发生时的试验次数 X 的分布律为 $$P\{X=k\}=q^{k-1}p, k=1,2,3,\cdots,$$ 其中 $p\geqslant 0$，$q=1-p$。 随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，记为 $G(p)$。
均匀分布	设随机变量 X 的值只落在$[a，b]$内，其密度函数 $f(x)$ 为 $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$$ 则称随机变量 X 在$[a，b]$上服从均匀分布，记为 $X\sim U(a，b)$。 分布函数为 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{b-x}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$ 当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，X 落在区间（ x_1,x_2 ）内的概率为 $$P\{x_1<X<x_2\}=\frac{x_2-x_1}{b-a}。$$

指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & 0\le x\\ 0 & x<0\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布。 X 的分布函数为 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}1-e^{\lambda x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$ 记住积分公式： $$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!$$
正态分布	设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，　$-\infty<x<+\infty$， 其中 μ、$\sigma>0$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数为 μ、σ^2 的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。 $f(x)$ 具有如下性质： 1°　$f(x)$ 的图形是关于 $x=\mu$ 对称的； 2°　当 $x=\mu$ 时，$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$为最大值； 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的分布函数为 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$ 参数 $\mu=0$、$\sigma=1$ 时的正态分布称为标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，其密度函数记为 $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$，$-\infty<x<+\infty$， 分布函数为 $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$。 $\Phi(x)$ 是不可求积函数，其函数值，已编制成表可供查用。 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ 且 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$。 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。 $$P(x_1<X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$。

（6）分位数

下侧分位数：$P\{X\le\mu_\alpha\}=\alpha$；

上侧分位数：$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$。

第三章　二维随机变量及其分布

（1）联合分布

<table>
<tr><td>离散型</td><td>
如果二维随机向量ξ=(X, Y)的所有可能取值为至多可列个有序对(x,y)，则称ξ为离散型随机量。
设ξ=（X，Y）的所有可能取值为$(x_i, y_j)(i, j=1,2,\cdots)$，且事件{$\xi$=$(x_i, y_j)$}的概率为$p_{ij}$,称
$$P\{(X,Y)=(x_i, y_j)\}=p_{ij}(i, j=1,2,\cdots)$$
为ξ=（X，Y）的分布律或称为（X，Y）的联合分布律。
联合分布有时也用下面的概率分布表来表示：
<table>
<tr><td>Y / X</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>…</td><td>y_j</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>p_{11}</td><td>p_{12}</td><td>…</td><td>p_{1j}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>p_{21}</td><td>p_{22}</td><td>…</td><td>p_{2j}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td></td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>p_{i1}</td><td></td><td>…</td><td>p_{ij}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td></td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>
这里p_{ij}具有下面两个性质：
（1）$p_{ij}\geq 0$（i, j=1,2,…）；　　（2）$\sum_i \sum_j p_{ij}=1.$
</td></tr>
<tr><td>连续型</td><td>
对于二维随机向量$\xi=(X,Y)$，如果存在非负函数$f(x,y)(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，使对任意一个其邻边分别平行于坐标轴的矩形区域D，即D={$(X,Y)|a<x<b,c<y<d$}有
$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,$$
则称ξ为连续型随机向量；并称$f(x,y)$为ξ=(X, Y)的分布密度或称为(X,Y)的联合分布密度。
分布密度$f(x,y)$具有下面两个性质：
（1）　$f(x,y)\geq 0$;　　（2）　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$
</td></tr>
</table>

（2）二维随机变量的本质

$$\{X=x, Y=y\}=\{X=x\}\cap\{Y=y\}$$

（3）联合分布函数

设(X,Y)为二维随机变量，对于任意实数x,y, 二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$$

称为二维随机向量(X,Y)的联合分布函数。

联合分布函数$F(x,y)$是一个以全平面为其定义域，以事件$\{(\omega_1,\omega_2)|-\infty<X(\omega_1)\leq x, -\infty<Y(\omega_2)\leq y\}$的概率为函数值的一个实值函数。

分布函数$F(x,y)$具有以下的基本性质：

（1）$0\leq F(x,y)\leq 1;$

（2）$F(x,y)$分别对x和y是非减的，即

当$x_2>x_1$时，有$F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$；当$y_2>y_1$时，有$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$；

（3）$F(x,y)$分别对x和y是右连续的，即

$$F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0);$$

（4）$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1.$

（5）对于$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$F(x_2,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)-F(x_1,\ y_2)+F(x_1,\ y_1)\geq 0.$$

（4）离散型与连续型的关系

$$P\{X=x, Y=y\}\approx P\{x<X\le x+dx, y<Y\le y+dy\}\approx f(x, y)dxdy$$

（5）边缘分布

离散型	X 的边缘分布为 $P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$； Y 的边缘分布为 $P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$。
连续型	X 的边缘分布密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy;$ Y 的边缘分布密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$

（6）条件分布

离散型	在已知 $X=x_i$ 的条件下，Y 取值的条件分布为 $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}};$ 在已知 $Y=y_j$ 的条件下，X 取值的条件分布为 $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$
连续型	在已知 Y=y 的条件下，X 的条件分布密度为 $f(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$； 在已知 X=x 的条件下，Y 的条件分布密度为 $f(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

（7）独立性

一般型	$F(X,Y)=F_X(x)F_Y(y)$
离散型	$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ 有零不独立
连续型	$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 直接判断，充要条件： ①可分离变量 ②正概率密度区间为矩形
二维正态分布	$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$ $\rho=0$
随机变量的函数	若 $X_1,X_2,\ldots X_m, X_{m+1},\ldots,X_n$ 相互独立， h, g 为连续函数，则： $h(X_1，X_2,\ldots,X_m)$ 和 $g(X_{m+1},\ldots,X_n)$ 相互独立。 特例：若 X 与 Y 独立，则：$h(X)$和 $g(Y)$独立。 例如：若 X 与 Y 独立，则：$3X+1$ 和 $5Y-2$ 独立。

（8）二维均匀分布

设随机向量(X,Y)的分布密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积，则称 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$。例如图 3.1、图 3.2 和图 3.3。

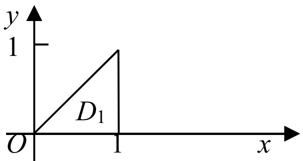

图 3.1

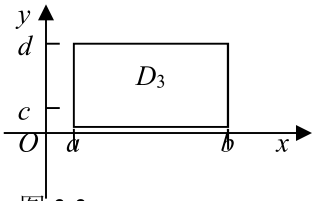

图 3.3

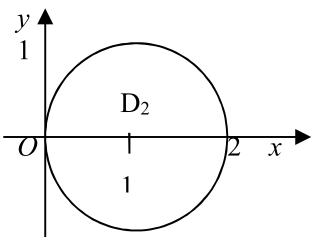

图 3.2

（9）二维正态分布

设随机向量 (X,Y) 的分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$ 是 5 个参数，则称 (X,Y) 服从二维正态分布，

记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

由边缘密度的计算公式，可以推出二维正态分布的两个边缘分布仍为正态分布，

即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

但是若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$(X,Y)$ 未必是二维正态分布。

（10）函数分布

一维随机变量的函数	离散型	已知 X 的分布列为 $\begin{array}{c\|c} X & x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \\ \hline P(X=x_i) & p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots\end{array}$， $Y=g(X)$ 的分布列（$y_i=g(x_i)$ 互不相等）如下： $\begin{array}{c\|c} Y & g(x_1),\ g(x_2),\ \cdots,\ g(x_n),\ \cdots \\ \hline P(Y=y_i) & p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots\end{array}$， 若有某些 $g(x_i)$ 相等，则应将对应的 p_i 相加作为 $g(x_i)$ 的概率。
	连续型	先利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 写出 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(g(X)\le y)=\int\limits_{g(x)\le y}f(x)dx$, 再利用变上下限积分的求导公式求出 $f_Y(y)$。

<table>
<tr><td rowspan="2">二维随机变量的函数</td><td>离散型</td><td>设随机变量(X，Y)是离散型随机变量，其分布律分别为
$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\qquad i，j=1,2,\ldots$$
Z=G(X，Y)是随机变量，则 Z 的分布律为
$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\},\quad k=1,2,\ldots$$
其中$T_k=\{(x_i,y_j)\mid G(x_i,y_j)=z_k\}$。</td></tr>
<tr><td>连续型</td><td>先求出 Z 的分布函数 $F_Z(z)$
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{G(X,Y)\le z\}=\iint_{\{(x,y):G(x,y)\le z\}}f(x,y)dxdy$$
对$F_Z(z)$微分得到 $f_Z(z)$。</td></tr>
<tr><td>Z=X+Y</td><td colspan="2">根据定义计算：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$
对于连续型，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$
两个独立的正态分布的和仍为正态分布（$\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$）。
n 个相互独立的正态分布的线性组合，仍服从正态分布。
$\mu=\sum_i C_i\mu_i$，$\sigma^2=\sum_i C_i^2\sigma_i^2$</td></tr>
<tr><td>Z=X/Y</td><td colspan="2">根据定义计算：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X/Y\le z)$
对于连续型，$f_z(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert y\rvert f(zy,y)\,dy$</td></tr>
<tr><td>$Z=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$和$Z=\min(X_1,X_2,\cdots X_n)$</td><td colspan="2">若$X_1,X_2\cdots X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_{x_1}(x)$，$F_{x_2}(x)\cdots F_{x_n}(x)$，则它们的分布函数分别为：
$$F_{\max}(x)=F_{x_1}(x)\bullet F_{x_2}(x)\cdots F_{x_n}(x)$$
$$F_{\min}(x)=1-[1-F_{x_1}(x)]\bullet[1-F_{x_2}(x)]\cdots[1-F_{x_n}(x)]$$</td></tr>
<tr><td>χ^2分布</td><td colspan="2">设 n 个随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且服从标准正态分布，可以证明它们的平方和
$$W=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$
的分布密度为
$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}} & u\ge 0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$
我们称随机变量 W 服从自由度为 n 的χ^2分布，记为 W～$\chi^2(n)$，其中
$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x}dx.$$
所谓自由度是指独立正态随机变量的个数，它是随机变量分布中的一个重要参数。
χ^2分布满足可加性：设$Y_i\sim\chi^2(n_i)$,则
$$Z=\sum_{i=1}^{k}Y_i\sim\chi^2\quad(n_1+n_2+\cdots+n_k).$$</td></tr>
</table>

t 分布	设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 可以证明函数 $$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$ 的概率密度为 $$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (-\infty<t<+\infty).$$ 我们称随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $T\sim t(n)$。 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
F 分布	设 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 独立，可以证明 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 的概率密度函数为 $$f(y)=\begin{cases}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, y\ge 0\\ 0, y<0\end{cases}$$ 我们称随机变量 F 服从第一个自由度为 n_1，第二个自由度为 n_2 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1, n_2)$. $$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

第四章 随机变量的数字特征

（1）一维随机变量的数字特征

	离散型	连续型
期望 期望就是平均值	设 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P(X=x_k)=p_k$，k=1,2,… $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ （要求绝对收敛）	设 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$， $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ （要求绝对收敛）
函数的期望	Y=g(X) $E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$	Y=g(X) $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
方差 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$， 标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ ，	$D(X)=\sum_k [x_k-E(X)]^2 p_k$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

矩	①对于正整数 k，称随机变量 X 的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶原点矩，记为 v_k,即 $v_k=E(X^k)=\sum_i x_i^k p_i$, k=1,2, …. ②对于正整数 k,称随机变量 X 与 $E(X)$ 差的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶中心矩，记为 μ_k，即 $\mu_k=E(X-E(X))^k$ $=\sum_i (x_i-E(X))^k p_i$， k=1,2, ….	①对于正整数 k，称随机变量 X 的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶原点矩，记为 v_k,即 $v_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, k=1,2, …. ②对于正整数 k，称随机变量 X 与 $E(X)$差的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶中心矩，记为 μ_k，即 $\mu_k=E[(X-E(X))^k]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k f(x)dx$, k=1,2, ….
切比雪夫不等式	设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，有下列切比雪夫不等式 $$P\{\lvert X-\mu\rvert\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$ 切比雪夫不等式给出了在未知 X 的分布的情况下，对概率 $$P\ \{\lvert X-\mu\rvert\ge\varepsilon\}$$ 的一种估计，它在理论上有重要意义。	

（2）期望的性质

一、$E(C)=C$

二、$E(CX)=CE(X)$

三、$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，$E(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i)$

四、$E(XY)=E(X)E(Y)$，充分条件：X 和 Y 独立； 充要条件：X 和 Y 不相关。

（3）方差的性质

一、$D(C)=0$；$E(C)=C$

二、$D(aX)=a^2D(X)$； $E(aX)=aE(X)$

三、$D(aX+b)=a^2D(X)$； $E(aX+b)=aE(X)+b$

四、$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

五、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$，充分条件：X 和 Y 独立；充要条件：X 和 Y 不相关。

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$，无条件成立。

而 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，无条件成立。

（4）常见分布的期望和方差

	期望	方差
0-1 分布 $B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

超几何分布 $H(n,M,N)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
χ^2分布	n	$2n$
t 分布	0	$\frac{n}{n-2}$（n>2）

（5）二维随机变量的数字特征

期望	$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\bullet}$ $E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\bullet j}$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx$ $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$
函数的期望	$E[G(X,Y)]=\sum_i\sum_j G(x_i,y_j)p_{ij}$	$E[G(X,Y)]=$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)dxdy$
方差	$D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2 p_{i\bullet}$ $D(Y)=\sum_j[x_j-E(Y)]^2 p_{\bullet j}$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f_X(x)dx$ $D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E(Y)]^2 f_Y(y)dy$
协方差	对于随机变量 X 与 Y，称它们的二阶混合中心矩 μ_{11} 为 X 与 Y 的协方差或相关矩，记为 σ_{XY} 或 $\operatorname{cov}(X,Y)$，即 $\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$ 与记号 σ_{XY} 相对应，X 与 Y 的方差 $D(X)$ 与 $D(Y)$ 也可分别记为 σ_{XX} 与 σ_{YY}。	

相关系数	对于随机变量 X 与 Y，如果 $D(X)>0, D(Y)>0$，则称 $$\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$ 为 X 与 Y 的相关系数，记作 ρ_{XY}（有时可简记为 ρ）。 $\|\rho\|\le 1$，当 $\|\rho\|=1$ 时，称 X 与 Y 完全相关：$P\{X=aY+b\}=1$ 完全相关 $\begin{cases}\text{正相关，当}\rho=1\text{时}(a>0),\\ \text{负相关，当}\rho=-1\text{时}(a<0),\end{cases}$ 而当 $\rho=0$ 时，称 X 与 Y 不相关。 以下五个命题是等价的： ① $\rho_{XY}=0$； ② $\operatorname{cov}(X,Y)=0$; ③ $E(XY)=E(X)E(Y)$; ④ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$; ⑤ $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.
协方差矩阵	$$\begin{pmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY}\\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}\end{pmatrix}$$
混合矩	对于随机变量 X 与 Y，如果有 $E(X^kY^l)$ 存在，则称之为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩，记为 ν_{kl}；$k+l$ 阶混合中心矩记为： $$u_{kl}=E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l].$$

（6）协方差的性质

一、$\operatorname{cov}(X, Y)=\operatorname{cov}(Y, X)$;

二、$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$;

三、$\operatorname{cov}(X_1+X_2, Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$;

四、$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

（7）独立和不相关

一、若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $\rho_{XY}=0$；反之不真。

二、若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 X 和 Y 不相关。

第五章　大数定律和中心极限定理

（1）大数定律

切比雪夫大数定律	设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，均具有有限方差，且被同一常数 C 所界：$D(X_i)<C(i=1,2,\ldots)$，则对于任意的正数 ε，有 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right\|<\varepsilon\right)=1.$$ 特殊情形：若 X_1，X_2，…具有相同的数学期望 $E(X_i)=\mu$，则上式成为 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right)=1.$$

伯努利大数定律	设 μ 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数 ε，有 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|<\varepsilon\right)=1.$$ 伯努利大数定律说明，当试验次数 n 很大时，事件 A 发生的频率与概率有较大判别的可能性很小，即 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|\geq\varepsilon\right)=0.$$ 这就以严格的数学形式描述了频率的稳定性。
辛钦大数定律	设 X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n)=\mu$，则对于任意的正数 ε 有 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right)=1.$$

（2）中心极限定理 $\overline{X}\to N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

列维－林德伯格定理	设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望和方差： $$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2\neq 0(k=1,2,\cdots),$$ 则随机变量序列 $$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$ 的分布函数 $F_n(x)$ 对任意的实数 x，有 $$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$ 此定理也称为**独立同分布**的中心极限定理。
棣莫弗－拉普拉斯定理	设随机变量 X_n 为具有参数 $n, p(0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意实数 x,有 $$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

（3）二项定理

若当 $N\to\infty$时$,\frac{M}{N}\to p(n,k$不变$)$，则

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\to C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (N\to\infty).$$

即超几何分布的极限分布为二项分布。

（4）泊松定理

若当 $n\to\infty$时$,np\to\lambda>0$，则

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (n\to\infty).$$

其中 k=0，1，2，…，n，…。

即二项分布的极限分布为泊松分布。

第六章 样本及抽样分布

（1）数理统计的基本概念

总体	在数理统计中，常把被考察对象的某一个（或多个）指标的全体称为总体（或母体）。我们总是把总体看成一个具有分布的随机变量（或随机向量）。

个体	总体中的每一个单元称为样品（或个体）。
样本	我们把从总体中抽取的部分样品 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 称为样本。样本中所含的样品数称为样本容量，一般用 n 表示。在一般情况下，总是把样本看成是 n 个相互独立的且与总体有相同分布的随机变量，这样的样本称为简单随机样本。在具体的一次抽取之后，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个具体的数值（样本值）。
样本函数和统计量	设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体的一个样本，称 $$\varphi = \varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$ 为样本函数，其中 φ 为一个连续函数。如果 φ 中不包含任何未知参数，则称 φ（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）为一个统计量。
常见统计量及其性质	样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$ 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$ 样本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$ 样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1,2,\cdots.$ 样本 k 阶中心矩 $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2,3,\cdots.$ $E(\overline{X}) = \mu$，$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$， $E(S^2) = \sigma^2$，$E(M_2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$，其中 $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 。

（2）正态总体下的四大分布

正态分布	设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数 $$u \stackrel{def}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$
t 分布	设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数 $$t \stackrel{def}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$ 其中 t(n-1)表示自由度为 n-1 的 t 分布。
χ^2分布	设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数 $$w \stackrel{def}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$ 其中 $\chi^2(n-1)$ 表示自由度为 n-1 的 χ^2 分布。

F 分布	设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本，而 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本，则样本函数 $$F\overset{def}{=}\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$ 其中 $$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\overline{y})^2;$$ $F(n_1-1,n_2-1)$ 表示第一自由度为 n_1-1，第二自由度为 n_2-1 的 F 分布。

（3）正态总体下分布的性质

单正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$	设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 是其样本均值，S^2 是其样本方差，则有 ① $\overline{X}$ 与 S^2 独立；　② $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$； ③ $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$；　④ $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 。　。
双正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$	设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本，而 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$，$\overline{Y}$ 是其样本均值，${S_1}^2$，${S_2}^2$ 是其样本方差，则 ① $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$； ② 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时， $$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$ 其中 $S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

第七章　参数估计

（1）点估计

矩估计	设总体 X 的分布中包含有未知数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，则其分布函数可以表成 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$. 它的 k 阶原点矩 $v_k=E(X^k)(k=1,2,\cdots,m)$ 中也包含了未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，即 $v_k=v_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$。又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的 n 个样本，其样本的 k 阶原点矩为 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \qquad (k=1,2,\cdots,m).$$ 这样，我们按照“当参数等于其估计量时，总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程，即有 $$\begin{cases} v_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \\ v_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_m(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^m. \end{cases}$$ 由上面的 m 个方程中，解出的 m 个未知参数 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 即为参数（$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$）的矩估计量。 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，$g(x)$ 为连续函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计。
极大似然估计	设总体 X 的一组样本为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。 当 X 为连续型总体时，设其概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 为未知参数。称 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$ 为样本的似然函数，简记为 L_n. 当 X 为离散型总体时，设其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，则称 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$ 为样本的似然函数。 若似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 在 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 处取到最大值，则称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的最大似然估计值，相应的统计量称为最大似然估计量。 称 $$\left.\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_i}\right\|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}=0, i=1,2,\cdots,m$$ 为似然方程组。 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计，$g(x)$ 为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计。

（2）估计量的评选标准

无偏性	设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为未知参数$\theta$的估计量。若$E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。 $E(\overline{X})=E(X)$， $E(S^2)=D(X)$
有效性	设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的两个无偏估计量。若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。
一致性	设$\hat{\theta}$ 是θ的一串估计量，如果对于任意的正数ε，都有 $$\lim_{n\to\infty}P(\lvert\hat{\theta}-\theta\rvert>\varepsilon)=0,$$ 则称$\hat{\theta}$ 为θ的一致估计量（或相合估计量）。 若$\hat{\theta}$ 为θ的无偏估计，且$D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$, 则$\hat{\theta}$为$\theta$的一致估计。

（3）区间估计

置信区间和置信度	设总体X含有一个待估的未知参数θ。如果我们从样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$出发，找出两个统计量$\theta_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$\theta_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(\theta_1<\theta_2)$，使得区间$[\theta_1,\theta_2]$以$1-\alpha(0<\alpha<1)$的概率包含这个待估参数θ，即 $$P\{\theta_1\le\theta\le\theta_2\}=1-\alpha,$$ 那么称区间$[\theta_1,\theta_2]$为θ的置信区间，$1-\alpha$为该区间的置信度（或置信水平）。
区间估计的枢轴变量法	设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为其一组样本值。在置信度为$1-\alpha$下，我们来确定参数θ置信区间$[\theta_1,\theta_2]$。具体步骤如下： （i）选取待估参数θ的估计量； 原则：优良性准则，常用：$\overline{X}\to\mu$， $S^2\to\sigma^2$， （ii）建立枢轴变量； 对选定的 θ 的估计量, 构造关于待估参数 θ 和样本的函数 $W(X_1, X_2, \ldots, X_n ,\theta)$，其中$W$不含任何其他未知参数。 （iii）确定$W$的分布 在一定条件下，$W$ 通常具有经典分布(主要有正态、χ^2 、T、F分布)。 （iv）根据W的分布，对置信水平 1－α 查上侧分位数,使 $$P\{w_{1-\alpha/2}\le W\le w_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$ 或类似的概率式成立。 （v）改写不等式得 $$P\{A\le\theta\le B\}=1-\alpha$$ 其中 A、B 是不含未知参数的统计量.。

（4）单正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的期望和方差的区间估计

估计均值μ	已知方差	（i）选择样本函数 $u=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$ (ii) 查表找分位数 $P\left(-u_{\alpha/2}\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha.$ （iii）导出置信区间 $\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$

	未知方差	（i）选择样本函数 $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$. (ii)查表找分位数 $P\left(-t_{\alpha/2}(n-1)\le\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$. （iii）导出置信区间 $\left[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
估计方差 σ^2	未知均值	（i）选择样本函数 $W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. （ii）查表找分位数 $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$. （iii）导出 σ^2 的置信区间 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$
	已知均值	（i）选择样本函数 $W=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$. （ii）查表找分位数 $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n)\right)=1-\alpha$. （iii）导出 σ^2 的置信区间 $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right]$

（5）双正态总体双正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的期望差和方差商的区间估计

估计 μ_1-μ_2	已知 σ_1^2，σ_2^2	（i）选择样本函数 $u=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$. (ii) 查表找分位数 $P\left(-u_{\alpha/2}\le\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\le u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$. （iii）导出置信区间 $\left[(\overline{X}-\overline{Y})-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ (\overline{X}-\overline{Y})+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
	未知 σ_1^2，σ_2^2 但相等	（i）选择样本函数 $T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$ (ii)查表找分位数 $P\left(-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\le\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\le t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)=1-\alpha$. （iii）导出置信区间 $\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$

估计 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	已知 μ_1，μ_2	（i）选择样本函数 $F=\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1,n_2).$ （ii）查表找分位数 $$P\left(F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)\le\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\le F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ 的置信区间 $$\left[\frac{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2),\frac{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right]$$
	未知 μ_1，μ_2	（i）选择样本函数 $D=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$ （ii）查表找分位数 $$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\le\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\le F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha.$$ （iii）导出 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ 的置信区间 $$\left[\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1),\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right]$$
	已知 μ_1 未知 μ_2	（i）选择样本函数 $D=\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2-1).$ （ii）查表找分位数 $$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2-1)\le\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{S_2^2/\sigma_2^2}\le F_{\alpha/2}(n_1,n_2-1)\right\}=1-\alpha.$$ （iii）导出 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ 的置信区间 $$\left[\frac{S_2^2}{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2-1),\frac{S_2^2}{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{\alpha/2}(n_1,n_2-1)\right]$$

	未知 μ_1 已知 μ_2	（i）选择样本函数 $D=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2).$ （ii）查表找分位数 $P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2)\le\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\le F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2)\right\}=1-\alpha.$ （iii）导出 $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ 的置信区间 $\left[\dfrac{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}{S_1^2}F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2),\dfrac{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}{S_1^2}F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2)\right]$

第八章　假设检验

基本思想	假设检验的统计思想是，概率很小的事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的，即小概率原理。 为了检验一个假设 H_0 是否成立。我们先假定 H_0 是成立的。如果根据这个假定导致了一个不合理的事件发生，那就表明原来的假定 H_0 是不正确的，我们拒绝接受 H_0；如果由此没有导出不合理的现象，则不能拒绝接受 H_0，我们称 H_0 是相容的。与 H_0 相对的假设称为备择假设，用 H_1 表示。 这里所说的小概率事件就是事件 $\{K\in R_\alpha\}$，其概率就是检验水平 α，通常我们取 α=0.05，有时也取 0.01 或 0.10。	
基本步骤	假设检验的基本步骤如下： (i)　提出零假设 H_0; (ii)　选择统计量 K; (iii)　对于检验水平α查表找分位数 λ; (iv)　由样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 计算统计量之值 $\hat{K}$； 将 $\hat{K}$ 与 λ 进行比较，作出判断：当 $\lvert\hat{K}\rvert>\lambda$ (或 $\hat{K}>\lambda$) 时否定 H_0，否则认为 H_0 相容。	
两类错误	第一类错误	当 H_0 为真时，而样本值却落入了否定域，按照我们规定的检验法则，应当否定 H_0。这时，我们把客观上 H_0 成立判为 H_0 为不成立（即否定了真实的假设），称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误，记 α 为犯此类错误的概率，即 P{否定 $H_0\|H_0$ 为真}=α； 此处的 α 恰好为检验水平。
	第二类错误	当 H_1 为真时，而样本值却落入了相容域，按照我们规定的检验法则，应当接受 H_0。这时，我们把客观上 H_0。不成立判为 H_0 成立（即接受了不真实的假设），称这种错误为“以假当真”的错误或第二类错误，记 β 为犯此类错误的概率，即 P{接受 $H_0\|H_1$ 为真}=β。

	两类错误的关系	人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小。但是，当容量 n 一定时，α 变小，则 β 变大；相反地，β 变小，则 α 变大。取定 α 要想使 β 变小，则必须增加样本容量。 在实际使用时，通常人们只能控制犯第一类错误的概率，即给定显著性水平 α。α 大小的选取应根据实际情况而定。当我们宁可“以假为真”、而不愿“以真当假”时，则应把 α 取得很小，如 0.01，甚至 0.001。反之，则应把 α 取得大些。

单正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的均值和方差的假设检验

条件	零假设	统计量	对应样本函数分布	否定域
已知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	N（0，1）	$\|u\|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$H_0:\mu\le\mu_0$			$u>u_\alpha$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$u<u_{1-\alpha}$
未知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\|t\|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\mu\le\mu_0$			$t>t_\alpha(n-1)$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$t<t_{1-\alpha}(n-1)$
未知 μ	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$w>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $w<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$w>\chi^2_\alpha(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$w<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
已知 μ	$H_0:\sigma^2=\sigma_0{}^2$	$W=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$w<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $w>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$w>\chi^2_\alpha(n)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$w<\chi^2_{1-\alpha}(n)$

双正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的均值和方差的假设检验

条件	零假设	统计量	对应样本	否定域

			函数分布	
已知 σ_1^2，σ_2^2	$H_0:\mu_1=\mu_2$	$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_1^2/n_2}}$	$N(0,1)$	$\lvert u\rvert>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$H_0:\mu_1\le\mu_2$			$u>u_\alpha$
	$H_0:\mu_1\ge\mu_2$			$u<u_{1-\alpha}$
未知 σ_1^2，σ_2^2 但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$H_0:\mu_1=\mu_2$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w/\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ $S_w=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\lvert t\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\le\mu_2$			$t>t_\alpha(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\ge\mu_2$			$t<t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
未知 μ_1,μ_2	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(n_1-1,n_2-1)$	$f<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或 $f>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$			$f>F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$			$f<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
已知 μ_1,μ_2	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$	$F(n_1,n_2)$	$f<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$或 $f>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$f>F_\alpha(n_1,n_2)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$f<F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$
已知 μ_1，未知 μ_2	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$	$F(n_1-1,n_2)$	$f<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2)$ 或 $f>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$f>F_\alpha(n_1-1,n_2)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$f<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2)$
未知 μ_1，已知 μ_2	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(n_1,n_2-1)$	$f<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2-1)$或 $f>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$f>F_\alpha(n_1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$f<F_{1-\alpha}(n_1,n_2-1)$

第九章　回归分析

（1）一元线性回归模型

$$Y=a+bx+\varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

其中 a、b、σ^2 为未知参数，称 a— 回归常数(又称截距)，b— 回归系数(又称斜率)，ε —随机误差（随机扰动项）。

（2）一元线性回归模型的参数估计

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{cases}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

（3）对 σ^2 的无偏估计为：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(l_{yy} - \hat{b}^2 l_{xx})$$

其中 $\quad l_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2$

（4）一元线性回归模型的显著性检验, 样本相关系数为

$$R = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{yy}}}$$