练习一

题目：讨论随机相位正弦随机过程的广义平稳条件

正弦随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中随机变量A的均值为m和方差为$\sigma^2$，服从特征函数为$\phi(v)$的某种分布，$\Theta$与A统计独立。讨论$\phi(v)$ 在什么条件下$X(t)$是广义平稳性的。

练习一

解： $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$

$$E\left[X(t)\right]=\frac{m_A}{2}\left\{e^{j\omega_0 t}\Phi_\Theta(1)+e^{-j\omega_0 t}\Phi_\Theta^*(1)\right\}$$

$$E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\frac{E(A^2)}{2}E\begin{bmatrix}\cos\omega_0(t_1-t_2)+\\ \frac{1}{2}\left\{e^{j\omega_0(t_1+t_2)}\Phi_\Theta(2)+e^{-j\omega_0(t_1+t_2)}\Phi_\Theta^*(2)\right\}\end{bmatrix}$$

广义平稳的充要条件是 $\boxed{\phi_\Theta(1)=\phi_\Theta(2)=0}$

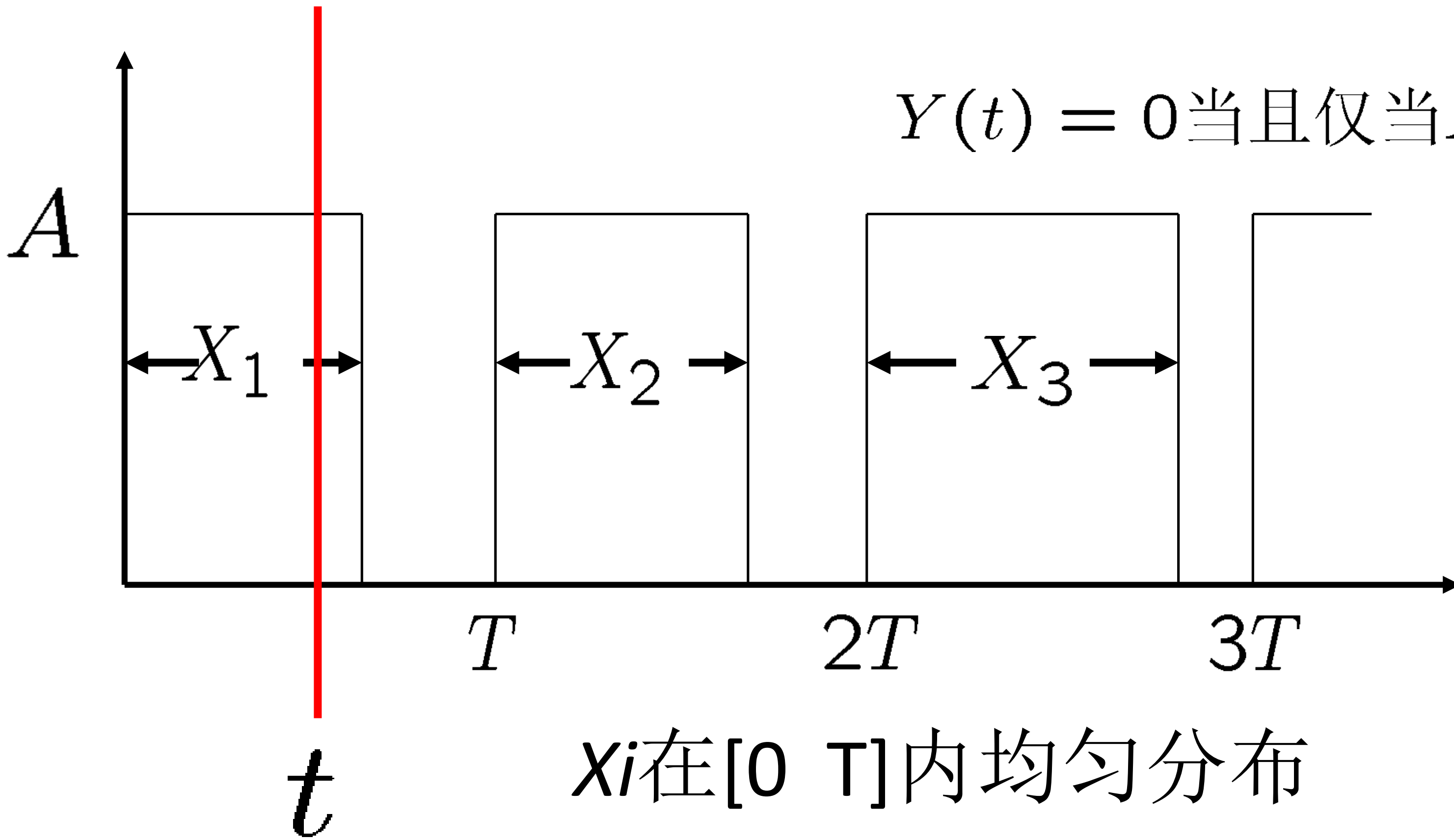
当Θ服从均匀分布 $U(-\pi,\pi)$ $\phi_\Theta(v)=\dfrac{\sin\pi v}{\pi v}$ 满足条件

练习四：题目

求 $f_Y(y;t)$

$Y(t) = A$当且仅当$X_1 > t$;

$Y(t) = 0$当且仅当$X_1 \le t$



X_i在[0 T]内均匀分布

练习四：解答

$$P[Y(t)=A]=P[X_1\ge t]=\int_t^T \frac{1}{T}dt=\frac{T-t}{T}\quad,\quad t\in[0\quad T]$$

$$P[Y(t)=0]=P[X_1<t]=\int_0^t \frac{1}{T}dt=\frac{t}{T}\quad,\quad t\in[0\quad T]$$

$$f_Y(y;t)=\frac{T-t}{T}\delta(y-A)+\frac{t}{T}\delta(y)\quad,\quad t\in[0\quad T]$$

对任意的t，有：

$$f_Y(y;t)=\frac{T-\left(t-\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\delta(y-A)+\frac{\left(t-\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\delta(y)\quad,\quad t\in[0\quad +\infty)$$

$$E[Y(t)]=\frac{T-\left(t-\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\times A+\frac{t-\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor T}{T}\times 0=\frac{T-\left(t-\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\times A$$

布朗运动的有限维联合密度函数

设{B(t), t≥}是标准布朗运动，对任意的 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，且i<j时有，$t_i<t_j$，证明（$B(t_1), B(t_2), \cdots, B(t_n)$）的联合概率密度函数为：其中$x_0=0$；

$$f_B\left(b_1,b_2,\cdots,b_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_i-t_{i-1}\right)}}e^{-\frac{\left(b_i-b_{i-1}\right)^2}{2\left(t_i-t_{i-1}\right)}}\right]$$

提示：运用标准布朗运动的平稳独立增量特性

令$X_1=B(t_1)$, $X_i = B(t_i)-B(t_{i-1})$, $2\le i\le n$, 则X1, X2, … , Xn之间统计独立，且 $X_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, 故有：

$$\boxed{f_X\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_i-t_{i-1}\right)}}e^{-\frac{x_i^2}{2\left(t_i-t_{i-1}\right)}}\right]}$$

因为： $B(t_i)=\sum_{j=1}^{i}X(t_j)$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

雅克比为

$$J=\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f_B\left(b_1,b_2,\cdots,b_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right) \\ & = f_X\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)|J| \\ & = f_X\left(b_1,b_2-b_1,\cdots,b_n-b_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_n\right)|J| \\ & = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t_i-t_{i-1}\right)}}e^{-\frac{\left(b_i-b_{i-1}\right)^2}{2\left(t_i-t_{i-1}\right)}}\right] \end{aligned}}$$

练习六：题目关于布朗运动

设B(t)是标准布朗运动，a为常数，令

$$\left\{v(t)=e^{-at}\ B\left(e^{2at}\right),t\geq 0\right\}$$

求v(t)的概率密度函数

$$\boxed{B(t)\sim N(0,t)} \quad \boxed{E\left[B\left(e^{2at}\right)\right]=0} \quad \boxed{D\left[B\left(e^{2at}\right)\right]=e^{2at}}$$

$$\boxed{E[v(t)]=E\left[e^{-at}\ B\left(e^{2at}\right)\right]=e^{-at}\ E\left[\ B\left(e^{2at}\right)\right]=0}$$

$$\boxed{D[v(t)]=D\left[e^{-at}\ B\left(e^{2at}\right)\right]=e^{-2at}\ D\left[\ B\left(e^{2at}\right)\right]=1}$$

$$\boxed{f_v(v;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}\quad,\quad t\geq 0} \quad \boxed{v(t)\sim N(0,1)}$$