一、选择题

1. 关于矢量场的旋度的描述哪一条是错误的（ B ）。

A.旋度不等于0 的点表示存在涡旋源，也称旋度源，该矢量场称有旋场。

B.旋度的量纲是环量体密度，表示单位体积的环量。

C.矢量场的旋度是一个矢量场。

D.旋度等于 0 的点不存在涡旋源；旋度处处为零的矢量场称为无旋场或保守场。

2. 关于有限区域内的矢量场的亥姆霍兹定理，下列说法中正确的是（ D ）。

A.任意矢量场可以由其散度和旋度唯一地确定；

B.任意矢量场可以由其散度和边界条件唯一地确定；

C. 任意矢量场可以由其旋度和边界条件唯一地确定；

D. 任意矢量场可以由其散度、旋度和边界条件唯一地确定。

3. 一个有限区域内定义的矢量场，如果在该区域内沿任意闭合曲线的积分都是零，那么该矢量场是（ B ）。

A. 无散场 B. 无旋场 C.有散有旋场 D. 无法判断

4.如果一个矢量场能表示为一个标量函数的梯度，则该矢量场是（ B ）。

A. 无散场 B. 无旋场 C.有散有旋场 D. 无法判断

5. 若 $\vec{A}$ 是任意的矢量场，则下列等式一定成立的是（ A ）。

A. $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$ B. $\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=0$ C. $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=0$

6. 在无界空间中，任意矢量场可表示为如下形式（ C ）。

A. $\vec{F}(\vec{r})=\nabla\bullet\vec{A}(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$ B. $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla u(\vec{r})+\nabla\bullet\vec{A}(\vec{r})$

C. $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla u(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$

二、填空题

1. 在不同坐标系下单位矢量有的为常矢量，有的为变矢量，在直角坐标系的单位矢量为（ 常 ）矢量，圆柱坐标的单位矢量 $\vec{e}_\rho$ 和 $\vec{e}_\varphi$ 为（ 变 ）矢量，球坐标系的单位矢量均为（ 变 ）矢量。

2. 标量场的梯度是一个（ 矢 ）量，矢量场的散度是一个（ 标 ）量，矢量场的旋度是一个（ 矢 ）量，空间某点标量场的梯度与该点方向导数的关系是（ $\nabla u\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{\partial u}{\partial l}$ 或梯度沿该方向的投影就是该方向的方向导数 ）。

3. 若 φ 和 $\vec{A}$ 分别为标量场和矢量场，则 $\nabla\times(\nabla\varphi)+\nabla\bullet(\nabla\times\vec{A})=$ <u>0</u>。

4. 在有限的区域 V 内，任一矢量场由它的<u>散度</u>、<u>旋度</u>和<u>边界条件</u>（即限定区域 V 的闭合面 S 上的矢量场的分布）惟一地确定。

三、判断题

1. 在球坐标中有一电场矢量 $\vec{E}=C\vec{e}_r+4\vec{e}_\varphi$（其中$C$为常数），则 $\vec{E}$ 是常矢量。（ × ）

2. 空间某点梯度的大小是该点的最大的方向导数，方向是该点等值面的法线方向。（ √ ）

课堂练习题：

1. 设一个标量场表达式为$u(\rho,\phi,z)=\rho^2 z+\rho\phi^2$ ，试求：该标量场 u 在 $P(2,\pi,2)$ 点处，沿$\vec{e}_x$方向的方向导数。

解：在圆柱坐标系下

$$\nabla u=\vec{e}_\rho(2\rho z+\varphi^2)+\vec{e}_\phi 2\varphi+\vec{e}_z\rho^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\nabla u\cdot\vec{e}_x=\left[\vec{e}_\rho(2\rho z+\varphi^2)+\vec{e}_\phi 2\varphi+\vec{e}_z\rho^2\right]\cdot\left(\vec{e}_\rho\cos\varphi-\vec{e}_\phi\sin\varphi\right)$$
$$=(2\rho z+\varphi^2)\cos\varphi-2\varphi\sin\varphi$$

对于给定的 P 点，上述方向导数在该点取值为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=-8-\pi^2$$

2. 设直角坐标系下的一个矢量场表达式为 $\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{e}}_x(x^2+axz)+\vec{\boldsymbol{e}}_y(xy^2+by)+\vec{\boldsymbol{e}}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，其中 a,b,c 为常数，如果该矢量场满足散度为零，那么常数 a,b,c 的值分别是多少？

解：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial(x^2+axz)}{\partial x}+\frac{\partial(xy^2+by)}{\partial y}+\frac{\partial(z-z^2+czx-2xyz)}{\partial z}$$
$$=0$$

因此，$\left(2+c\right)x+(a-2)z+b+1=0$

最终得， $a=2,b=-1,c=-2$ 。

3. 设圆柱坐标系下的一个矢量场表达式为$\vec{F}\left(\rho,\varphi,z\right)=\vec{e}_\varphi\rho\varphi+\vec{e}_z z\rho$，求该矢量场的旋度。

解：

$$\nabla\times\vec{F}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \rho^2\varphi & z\rho\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\vec{e}_\rho 0+\left(-\rho\vec{e}_\varphi\right)\cdot z+\vec{e}_z 2\rho\varphi\right]$$

$$=-z\vec{e}_\varphi+2\varphi\vec{e}_z$$

4. 设直角坐标系下的一个矢量场表达式为 $\vec{F}(x,y,z)=\vec{e}_x\left(Axy^2-z^2\right)+\vec{e}_z Bxz$，试求常数 A 和 B 使矢量场 $\vec{F}$ 为无旋场。

解：

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Axy^2-z^2 & 0 & Bxz\end{vmatrix}$$

$$=-\vec{e}_y\left(Bz+2z\right)-\vec{e}_z 2Axy$$

$$=0$$

因此，A=0，B= -2。