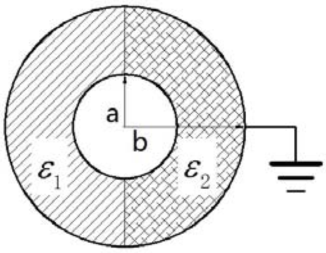
## 三、计算题 （共 70 分）

1、（20 分）已知一个球形电容器，其内外导体半径分别为 a 和 b。电容器内填充有介电常数分别为 $\varepsilon_1$ 、$\varepsilon_2$ 电介质。假设内导体带电荷 q，外球接地，如下图所示，求电容器两球壳间的①电场分布；②电位分布；③电容；④电场能量




解：（ 1）电容器两球壳间的电场分布：
由高斯定理：

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = 2\pi r^2\left(\vec{D}_1+\vec{D}_2\right)=q$$ 4 分

由 $\vec{D}_1=\varepsilon_1\vec{E}_1$ 、$\vec{D}_2=\varepsilon_2\vec{E}_2$ 以及 $\vec{E}_1=\vec{E}_2=\vec{E}$， 3 分

可得两球壳间的电场强度为

$$\vec{E}(r)=\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r^2}$$ 3 分

（2）电容器两球壳间的电位分布为：

$$\varphi\left(r\right)=\int_r^b\vec{E}(r)\cdot d\vec{r}=\frac{q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\int_r^b\frac{1}{r^2}dr=\frac{q\left(b-r\right)}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)br}$$ 2 分

内外导体间的电位差为：

$$U=\int_a^b\vec{E}(r)\cdot d\vec{r}=\frac{q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\int_a^b\frac{1}{r^2}dr=\frac{q\left(b-a\right)}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)ba}$$ 2 分

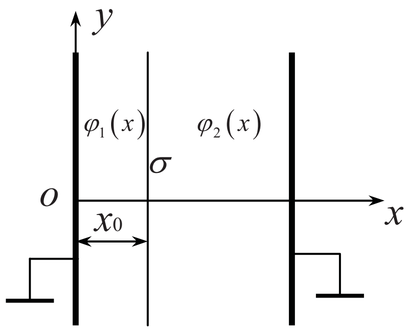
（3）电容器两球壳间的电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)ba}{\left(b-a\right)}$$ 3 分

（4）电容器两球壳间的电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{q^2\left(b-a\right)}{4\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)ba}$$ 3 分

4、（15 分）已知两块无限大接地导体板分别置于 $x$=0 和 $x$=$a$ 处，如下图所示，其中，在 $x$=$x$0 处有一面密度为 $\sigma$ C/m² 的均匀电荷分布。求两导体板间的电场和电位分布。




解：$\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}x^2}=0 \qquad (0<x<x_0);$ 3 分

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}x^2}=0 \qquad (x_0<x<a)$$ 3 分

得 $\varphi_1(x)=C_1x+D_1 \qquad (0<x<x_0);$

$$\varphi_2(x)=C_2x+D_2 \qquad (x_0<x<a)$$

$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$满足得边界条件为

$$\varphi_1(0)=0,\quad \varphi_2(a)=0;\quad \varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0),\quad \left[\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right]\bigg|_{x=x_0}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ 4 分

解得 $C_1=-\dfrac{\sigma(x_0-a)}{\varepsilon_0 a},\qquad D_1=0,\qquad C_2=-\dfrac{\sigma x_0}{\varepsilon_0 a},\qquad D_2=\dfrac{\sigma x_0}{\varepsilon_0}$ 1 分

所以 $\varphi_1(x)=\dfrac{\sigma(a-x_0)}{\varepsilon_0 a}x \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0),$ 1 分

$$\varphi_2(x)=\frac{\sigma x_0(a-x)}{\varepsilon_0 a} \qquad (x_0\leqslant x\leqslant a)$$ 1 分

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1(x)=-\boldsymbol{e}_x\frac{\mathrm{d}\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x}=-\boldsymbol{e}_x\frac{\sigma(a-x_0)}{\varepsilon_0 a} \qquad (0<x<x_0)$$ 1 分

$$\boldsymbol{E}_2=-\nabla\varphi_2(x)=-\boldsymbol{e}_x\frac{\mathrm{d}\varphi_2(x)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{e}_x\frac{\sigma x_0}{\varepsilon_0 a} \qquad (x_0<x<a)$$ 1 分