练习一

一、填空题

（1）函数 $f(X)=e^{x_1x_2}\sin x_2$ 在 $X=(0,\pi/2)^T$ 处的最速下降方向为________，X 在该方向上的方向导数为________。

（2）若 $f(X)=X^TQX+b^TX+c$，且 $Q=Q^T, Q>0, b\in R^n, c\in R$，则 $\nabla f(X)=$ _______；若在 X^k 处沿下降方向 P^k 进行精确一维搜索，那么 $\nabla f(X^{k+1})^T P^k=$ _________，最优步长 $t_k=$ _____；又若某种算法能够在有限步长之内找到此 $f(X)$ 的最优解 $\mathbf{X}^*$，则称此算法具有_________性。

（3）设 A, B 为凸集，则在 $A\bigcup B, A\bigcap B, A+B$ 中，不是凸集的是________。

（4）$f(X)=\alpha x_1(x_1+2x_2)-\beta x_2^2$ 是凸函数的充要条件是__________。

（5）线性规划 $\min f(X);\ s.t.\, 2x_1-x_2=1;\ x_1+x_3=1;\ x_i\ge 0,\ i=1\sim 3.$ 的可行区域的一个顶点为________。

（6）在两阶段（单纯形）法中，若辅助线性规划的最优值不为零，那么原线性规划的最优解情况为______________。

（7）若用三点二次插值法求解 $\min_{x\ge 0}\ f(x)=x^3-3x$，初始三个点分别取 $t_1=0$、$t_2=1$、$t_3=2$，则第一次迭代后 t_1, t_2, t_3 分别为__________。

（8）设 $f(x)=(x-3/2)^2$，若用黄金分割法求解此问题，设初始搜索区间为 $[0,2]$，则第一次迭代后得到的搜索区间为___________。

（9）设 $\{X^k\}=k^{-k}, \{Y^k\}=a^{2^k}, 0<a<1$，分别为 A, B 两种算法得到的迭代点列，则收敛速度最快的算法为_____________。

二、求下面函数的梯度

（1）$f(X)=\dfrac{1}{2}X^TAX+b^TX$；（2）$f(X)=\|X\|_2^2$；（3）$f(X)=\|X\|_2$

三、判定下面函数是否为凸函数

（1）$f(X)=-x_1^2+2x_1x_2-5x_2^2+10x_1-10x_2$

（2）$f(X)=x_1e^{-(x_1+x_2)}$；

（3）$f(X)=\ln(e^{x_1}+\ldots+e^{x_n})$；

（4）$f(X)=\|AX-b\|_2^2$

（5）$f(x)=\int_{-\infty}^{x}F(y)\,dy$，这里 $F(y)$ 是连续型随机变量 Y 的分布函数

四、利用最优性条件求下面函数的最优解

（1）$f(X)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1^3+x_1^4$

五、判定下面迭代序列的收敛速度

（1）$\{X^k\}=k^{-\ln k}$；（2）$\{X^k\}=(k!)^{-2}$

六、线性规划及对偶

（1）单纯形法求解

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+3x_2+4x_3 \\ s.t.\ & 2x_1+x_2-2x_3\le 2 \\ & x_2+x_3\le 4 \\ & x_1+x_3\ge -3 \\ & x_i\ge 0,\ i=1\sim 3 \end{aligned}$$

（2）两阶段法、大 M 法求解：

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1+3x_2+x_3 \\ s.t.\ & x_1+4x_2+2x_3\ge 8 \\ & 3x_1+2x_2\ge 6 \\ & x_i\ge 0,\ i=1\sim 3 \end{aligned}$$

（3）已知

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1+b_1x_3 \\ s.t.\ & x_1-x_2+6x_3\ge b_1 \\ & x_1+x_2+2x_3\ge 2b_2 \\ & x_i\ge 0,\ i=1\sim 3 \end{aligned}$$

的最优解 $X^*=(1,0,1)^T, b_1>0, b_2>0$，写出其对偶规划，并求出对偶规划最优解。

七、若 $X^0=(0,0)^T$，分别牛顿法、FR 共轭梯度法求解 $x_1^2+2x_2^2+4x_1+4x_2$；若用最速下降法，验证迭代点 $X^{k+1}=\left(\dfrac{2}{3^k}-2,\ (-\dfrac{1}{3})^k-1\right)^T$。

注意：1. 请大家按习题顺序排序，标清楚每个题的题号；作业写明“班内小号+姓名”，如“B001 张某某”；

2. 11 月 25 日(周三)B 班课堂提交作业纸质版；11 月 26 日（周四）A、C 班课堂提交作业纸质版。

请大家按时提交作业，谢谢！