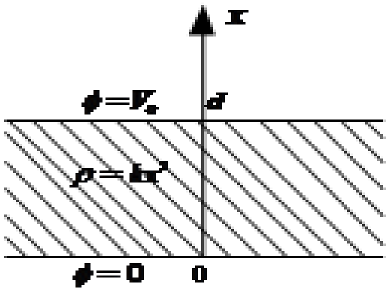
1. 已知无限大平板电容器中的电荷体密度$\rho = kx^2$，k为常数，填充的介质的介电常数为ε，上板的电位为V_0，下板接地，板间距离为d，如下图所示。试通过解泊松方程求板间的电位ϕ 和电场$\vec{E}$ 。



解：根据电位函数满足的泊松方程：

$$\nabla^2 \phi(\bar{r}) = -\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon}$$

由于电位ϕ 仅是x的函数，则上述泊松方程化简为如下微分方程形式：

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{kx^2}{\varepsilon} \qquad (0 < x < d)$$

于是解出

$$\phi(x) = -\frac{k}{12\varepsilon}x^4 + C_1 x + C_2$$

根据ϕ 所满足的边界条件为

$$\phi(0) = 0, \qquad \phi(d) = V_0$$

于是有

$$C_1 = \frac{kd^3}{12\varepsilon} + \frac{V_0}{d}, \quad C_2 = 0$$

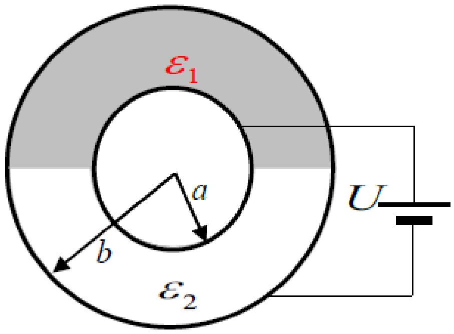
因此得到

$$\phi(x) = -\frac{k}{12\varepsilon}x^4 + (\frac{V_0}{d} + \frac{kd^3}{12\varepsilon})x$$

则有

$$\overline{E} = -\nabla\phi = (\frac{k}{3\varepsilon}x^3 - \frac{V_0}{d} - \frac{kd^3}{12\varepsilon})\overline{e_x}$$

2. 内、外导体半径分别为a、b的同轴电缆，内外导体之间以过轴线的平面为分界面，一半填充电容率为ε_1的媒质，另一半填充电容率为ε_2的媒质，已知内、外导体间电压为U，求：



（1）同轴线内外导体间各区域的$\vec{E}$和$\vec{D}$；

（2）各处的极化电荷体密度和面密度。

解：（1）设单位长度同轴电缆的带电量为Q，电场的方向为$\vec{e}_\rho$方向，为分界面的切向，因此有$\vec{E}_1=\vec{E}_2=\vec{E}=E\vec{e}_\rho$，$D_1=\varepsilon_1 E, D_2=\varepsilon_2 E$，根据高斯定理有

$$Q=(D_1+D_2)\pi\rho=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pi\rho E \Rightarrow E=\frac{Q}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pi\rho}$$

又由于$U=\int_a^b E\cdot d\rho=\dfrac{Q}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pi}\int_a^b\dfrac{1}{\rho}d\rho=\dfrac{Q}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

因此 $Q=\dfrac{U\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\pi}{\ln\dfrac{b}{a}}$

于是可以得到，$\vec{E}=\dfrac{U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\vec{e}_\rho$，$\vec{D}_1=\dfrac{\varepsilon_1 U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\vec{e}_\rho$，$\vec{D}_2=\dfrac{\varepsilon_2 U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\vec{e}_\rho$

（2）

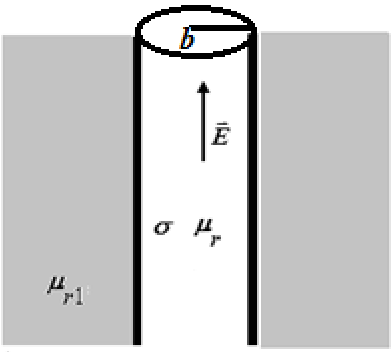
$$\vec{P}_1=\vec{D}_1-\varepsilon_0\vec{E}=\frac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\vec{e}_\rho,\quad \vec{P}_2=\vec{D}_2-\varepsilon_0\vec{E}=\frac{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_0\right)U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\vec{e}_\rho$$

因此极化电荷体密度为$\rho_{P1}=-\nabla\cdot\vec{P}_1=0$，$\rho_{P2}=-\nabla\cdot\vec{P}_2=0$

极化面电荷密度为$\rho_{sP}=\vec{P}\cdot\vec{e}_n$

$$r=a,\rho_{sa}=\begin{cases}-\dfrac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)U}{a\ln\dfrac{b}{a}}\\[2ex]-\dfrac{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_0\right)U}{a\ln\dfrac{b}{a}}\end{cases},\quad r=b,\rho_{sb}=\begin{cases}\dfrac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)U}{b\ln\dfrac{b}{a}}\\[2ex]\dfrac{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_0\right)U}{b\ln\dfrac{b}{a}}\end{cases}$$

3. 半径为 b 的无限长导体柱内有电流流过，导体柱的电导率为 σ，相对磁导率为 μ_r，导体柱内各点的电场强度为 $\vec{E}=E_0\vec{e}_z$，导体外侧充满了相对磁导率为 μ_{r1} 的各向同性均匀磁介质，试求



（1）导体柱内外空间中磁感应强度的分布情况；

（2）磁化面电流的分布情况。

（3）单位长度导体内的磁场能量和内自感。

解：（1）导体内的电流体密度

$$\vec{J}=\sigma E_0\vec{e}_z$$

由于导体柱无限长，所以所产生的磁场为平行平面场，方向为 $\vec{e}_\varphi$ 方向

利用安培环路定理，在 $r<b$ 的区域内，有

$$\oint_l \vec{H}_1 \bullet d\vec{r}=\int_S \vec{J}\bullet d\vec{S} \Rightarrow H_1 2\pi r=\sigma E_0 \pi r^2$$

$$H_1=\frac{1}{2}\sigma E_0 r \Rightarrow \vec{H}_1=\frac{1}{2}\sigma E_0 r\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B}_1=\mu_0\mu_r\vec{H}_1=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r\sigma E_0 r\vec{e}_\varphi$$

在 $r>b$ 的区域内，有

$$\oint_l \vec{H}_2 \bullet d\vec{r}=\int_S \vec{J}\bullet d\vec{S} \Rightarrow H_2 2\pi r=\sigma E_0 \pi b^2$$

$$H_2=\frac{1}{2r}\sigma E_0 b^2 \Rightarrow \vec{H}_2=\frac{1}{2r}\sigma E_0 b^2\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B}_2=\mu_0\mu_{r1}\vec{H}_2=\frac{1}{2r}\mu_0\mu_{r1}\sigma E_0 b^2\vec{e}_\varphi$$

（2）在 $r<b$ 的区域内，有

$$\vec{M}_1=\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}-\vec{H}_1=(\mu_r-1)\frac{1}{2}\sigma E_0 r\vec{e}_\varphi$$

在 $r>b$ 的区域内，有

$$\vec{M}_2=\frac{\vec{B}_2}{\mu_0}-\vec{H}_2=(\mu_{r1}-1)\frac{1}{2r}\sigma E_0 b^2\vec{e}_\varphi$$

在 $r=b$ 的分界面处的磁化面电流密度为

$$\vec{J}_{SM}=(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\times\vec{e}_\rho=(\mu_{r1}-\mu_r)\frac{1}{2}\sigma E_0 b\vec{e}_z$$

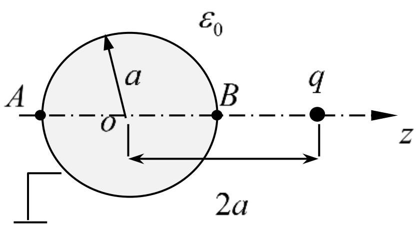
（3）单位长度导体柱内的磁场能量

$$W_m=\int_V\frac{1}{2}\vec{B}_1\bullet\vec{H}_1 dV=\int_0^b\frac{1}{2}\mu_0\mu_r(\frac{\sigma E_0 r}{2})^2 2\pi r dr=\frac{1}{16}\mu_0\mu_r\pi(\sigma E_0)^2 b^4$$

单位长度导体柱的内自感

$$L_i=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{1}{8}\frac{\mu_0\mu_r\pi(\sigma E_0)^2 b^4}{\pi^2 b^4(\sigma E_0)^2}=\frac{\mu_0\mu_r}{8\pi}$$

4. 如下图所示，点电荷 q 位于一个半径为 a 的接地导体球外，距球心为 $2a$。试求：（1）导体球面上 A、B 两点的电场强度；（2）点电荷 q 受到的静电力。



解：（1）像电荷位置距离球心

$$d'=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$$

像电荷大小

$$q'=-\frac{a}{2a}q=-\frac{1}{2}q$$

A、B 两点的电场强度分别为

$$\overrightarrow{E_A}=-\overrightarrow{e_z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(3a)^2}+\overrightarrow{e_z}\frac{\frac{1}{2}q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\overrightarrow{e_z}\frac{q}{36\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$\overrightarrow{E_B} = -\overrightarrow{e_z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \overrightarrow{e_z}\frac{\frac{1}{2}q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\overrightarrow{e_z}\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

（2）点电荷 q 受到的静电力

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{e_z}\frac{\left(-\frac{q}{2}\right)q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = -\overrightarrow{e_z}\frac{q^2}{18\pi\varepsilon_0 a^2}$$