衍生工具作业3

😀 姓名： 学号：202109120****

第2章

2.3

【问题】假定你承约了一份纽约商品交易所的7月份白银期货合约的空头，在合约中你能够以每盎司17.20美元的价格卖出白银，期货规模为5000盎司白银。初始保证金为4000美元，维持保证金为3000美元。期货价格如何变动才会导致保证金的催付通知？你如果不履行保证金催付通知会有什么后果？

【回答】

- 因为最低保证金要求是3000元，当账户保证金小于3000元，也即保证金从最初4000减少1000时会产生催付。此时期货价格变动 $=1000/5000=0.2$；合约中充当空头，当价格升高时保证金减少，也即**期货价格大于等于每盎司**17.20+0.2=**17.40美元时将收到催收通知。**
- 如果不履行保证金催付通知，将会被**强行平仓**。

2.10

【问题】说明为什么保证金可以使投资者免受违约风险。

【回答】

保证金可以看作投资者存在经纪人账上的资金，类似于抵押品，当遭受合约损失时可以用来弥补。

具体来讲，期货市场采取**逐日盯市制度**，每天进行保证金的调整和判断，保证金的增减一定程度上反映了投资者在期货合约上的收益或者损失。如果损失超过最低保证金要求，那么投资者将会受到催收通知以补充保证金，这个机制排除了投资者违约的可能性。**如果投资者未能履行合约义务或遭受亏损，保证金就可以被用来支付这些损失**，从而减轻投资者的违约风险。

同样的，对于经纪人和清算中心会员间买卖期货合约时，保证金机制排除了经纪人违约的可能性；在清算中心会员和清算中心之间的交易中，也排除了清算中心会员违约的可能性。因此保证金可以使投资者免受违约风险。

2.23

【问题】假定在2018年10月24日，一家公司卖出1份2019年4月的活牛期货合约，并在2019年1月21日将合约平仓。在承约合约时期货价格（每磅）为121.20美分，在平仓时期货价格为118.30美分，在2018年12月底期货价格为118.80美分，期货规模为40000磅活牛。这时公司的总盈利是多少？如果公司分别为：(a)对冲者；(b)投机者，它将如何缴税？假定公司的财政年底是12月31日。

【回答】

- 总盈利： $40000 *（1.212-1.183）=1160$美元
- 交税
  - 如果为对冲者（套期保值者），将会在最后统一交税，也就是在2019年交税，应税额为 $40000 *（1.212-1.183）=1160$美元
  - 如果为投机者，将会分阶段交税：

    在2018年，应税额 $40000 *（1.212-1.188）=960$美元

    在2019年，再次交税，应税额 $40000 *（1.188-1.183）=200$美元

2.31

【问题】假定原油没有贮存费用，借入与借出资金的利率均为4%。假定某年6月和12月期货合约的交易价格分别为50美元及56美元，如何通过交易来盈利?

【回答】

分析：若借50美元，12月应该还 $50 *（1+4\%）^{1}=51$ 美元，而51<56，因此可选择期货做空，借款买入现货后交割，再偿还

具体套利方案如下：

- 在6月，以4%利率借款50美元，在期货市场买入一份6月到期的原油期货并交割，得到一份原油现货
- 在原油期货市场上做空12月到期的原油期货
- 在12月，用在6月购得的原油现货对做空的12月原油期货交割，结算价56美元/桶，应偿还借入款为： $50 *（1+4\%）^{1}=51$ 美元/桶

可以得出，最终获利为 $56-51=5$美元/桶

第3章

3.3

【问题】什么是完美对冲？一个完美对冲的后果一定比不完美对冲好吗？解释你的答案

【回答】

- 完美对冲是指**完全消除风险的对冲**，即完美对冲可以完全消除对冲者的风险。
- 一个完美对冲的后果**不一定**比不完美对冲好，具体解释为：
  - 倘若某个资产的最终价格变动对投资者有利，完美对冲会使得所有收益被冲销，不完美对冲只是冲销部分收益，此时不完美对冲的效果就更好；
  - 倘若某个资产的最终价格变动对投资者不利，完美对冲会使得所有损失被冲销，不完美对冲只是冲销部分损失，此时完美对冲的效果就更好。

> 举个例子：如果农场主需要购买小麦，期初价格10元，选择完美对冲锁定价格
>
> 若期末价格为15，价格变动则对农场主不利，完美对冲会冲销所有损失
>
> 若期末价格为9，价格变动对农场主有利，不完美对冲仍会获得部分收益，更好。

3.7

【问题】假设一家公司持有价值为2000万美元、beta值为1.2的股票组合。该公司想利用股指期货来对冲风险。股指期货的当前水平是1080，每一份期货合约的交割价为250美元乘以股指。什么样的对冲可以使风险极小化？公司怎么做才可以将组合的beta值降低到0.6？

【回答】

beta值反映了股票组合的风险大小，beta的变动反映了最小套期保值率

- 风险极小化：

风险最小时beta=0，根据公式，最优化合约数量：$N=\frac{hN_a}{Q_F}=(1.2-0)*\frac{20000000}{250*1080}=88.89\approx 89份$，为了最小化风险，该公司可以卖出（做空）等价值的股指期货合约来对冲。所以**做空89份股指期货合约可以使得风险最小化**。

- beta值降低到0.6：

如需要将beta值降低到0.6，$N=h^{'}\frac{N_a}{Q_F}=(1.2-0.6)*\frac{20000000}{250*1080}\approx 44份$.所以**做空44份股指期货合约可以使得beta值降低到0.6**。

3.13

【问题】 “最小方差对冲比率为1.0，这一对冲一定为完美对冲。” 这一说法正确吗？解释你的答案。

【回答】**不正确**

最小套期保值率 $h = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$ 。

完美对冲指能完全消除风险的对冲，当仅当 $\rho = 1$、$h = 1$ 时，期货和现货完全线性相关，因此可以用期货完全消除现货的价格风险，表示1单位期货价格的变化等于1单位现货价格的变化。

但是，h 受 ρ、σ_S、σ_F 三方面影响。$h = 1$ ，不保证 $\rho = 1$ 那么仍有可能有其他风险产生，价格波动仍然可能不一致。

具体例如，考虑 $\rho = 0.25$ 且 $\frac{\sigma_S}{\sigma_F} = 4$ 时，$h = 1$ 仍然成立，这就不是一个完美对冲（因为 $\rho = 0.25$ ，两个资产的价格波动实际可能不一致，无法实现风险对冲）。

3.30

【问题】 假设今天是7月16日，一家公司持有价值1亿美元的股票组合，组合的beta为1.2，这家公司希望采用CME12月标准普尔500股指期货将组合在7月16日至11月16日之间变化的beta由1.2变成0.5。当前股指期货价格为2000，每一份期货合约的规模是250美元与股指的乘积。（a)公司应做什么样的交易？(b)假如公司改变初衷而想将投资组合的beta由1.2增加到1.5，公司应持什么样的头寸？

【回答】

a. beta由1.2变成0.5:

最优化合约数量 $N = \frac{hN_a}{Q_F} = (1.2 - 0.5) * \frac{100000000}{250 * 2000} = 140$份 。为了减小风险，该公司可以卖出（做空）一定的股指期货合约来对冲。所以**做空140份股指期货合约可以使得beta由1.2变成0.5**。

b. beta由1.2增加到1.5:

最优化合约数量 $N = \frac{hN_a}{Q_F} = (1.5 - 1.2) * \frac{100000000}{250 * 2000} = 60$份 。beta增加风险增加，该公司可以买入（做多）一定的的股指期货合约来对冲。所以**持有60份股指期货合约的多头头寸可以使得beta值提升到1.5**。

第5章

5.6

【问题】详细解释便利收益与持有成本这两个术语的含义。期货价格、即期价格、便利收益与持有成本之间的关系式是什么?

【回答】

- 术语含义:
  - 便利收益:代表由于持有商品而带来的好处,衡量了与持有期货合约多头相比持有实物资产可以获得的好处的大小。有时候,拥有实物资产使制造商能够保持生产流程的运行,就可能从当地暂时的短缺中获利。
  - 持有成本:包括贮存成本加上资产的融资利息,再减去资产所提供的收益
- 关系式:

$F_0 = S_0 e^{(c-y)T}$,其中 F_0 代表期货价格, S_0 代表即期价格, c 代表便利收益, y 代表持有成本

5.9

【问题】在签署无股息股票上一年期的远期合约时,股票当前价格为40美元,连续复利的无风险利率为每年5%:(a)远期合约的初始价值和期货价格分别为多少?(b)在6个月后,股票价格变为45美元,无风险利率仍为每年5%。这时远期价格和远期合约的价值分别为多少?

【回答】

a.

期初在签署合约时,该交易并未发生,因此远期合约的在期初时的初始价值 $f = 0$美元;

期货价格 $F_0 = S_0 e^{rT} = 40 * e^{5\%*1} \approx 42.05$美元

b.

由第一题知,期货的交割价格 $K = F_0 = 42.05$美元,已经过去 $t = 0.5$ 年,距离到期还有 $T' = 0.5$ 年

远期合约的价值 $f = S_1 - Ke^{-rT'} = 45 - 42.05 * e^{-5\%*0.5} \approx 3.98$美元;

期货价格 $F_1 = S_1 e^{rT'} = 45 * e^{5\%*0.5} \approx 46.14$美元

5.14

【问题】在瑞士和美国按连续复利的两个月期限利率分别为每年1%和2%。瑞士法郎的即期价格是1.0500美元。在两个月后交割的期货价格也是1.0500美元，这时会存在什么样的套利机会?

【回答】

根据外汇期货公式,正常的期货定价为： $F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} = 1.05 * e^{(2\%-1\%)*\frac{2}{12}} = 1.0518$美元

现在实际期货价格低于预期期货价格，根据“低买高卖、低多高空”原则，**套利者应将瑞士法郎换得美元（卖出法郎换为美元），同时在期货市场买入（做多）瑞士法郎期货。**

> 以1000法郎为例子：
>
> - 借1000法郎（利率为1%），转换为1050美元（利率2%）。2个月后美元因产生利息变为： $1050 * e^{2\%*2/12} = 1053.5$美元
> - 在期货市场上做多头，买入一份2个月后到期的外汇期货。用1051.8美元兑换1001.7法郎用于偿还。
>
> （欠款总额含利息： $1000 * e^{1\%*2/12} = 1001.7$法郎，这些钱对应1001.7*1.05=1051.8美元）
>
> 那么共赚：1053.5-1051.8=1.7美元

5.15

【问题】白银的现价为每盎司25美元，每年贮存费用为每盎司0.24美元，贮存费要每季度预付一次。假定所有期限的利率均为每年5%（连续复利），计算9个月后交割的期货价格。

【回答】

每个季度付款：0.24/4=0.06(美元/盎司)

先计算存储价格的现值，即

$u = 0.06 + 0.06 * e^{-5\%*0.25} + 0.06 * e^{-5\%*0.5} \approx 0.178(美元/盎司)$

根据带贮存成本的定价公式知，期货价格

$F = (S+u) * e^{rT} = (25 + 0.178) * e^{5\%*9/12} \approx 26.14(美元/盎司)$

5.30

【问题】股票预计在2个月和5个月时将支付1美元股息。股票价格为50美元，对应所有期限的连续复利无风险利率均为每年8%。某投资者刚刚承约了股票上6个月期限的远期合约空头。(a)远期价格与远期合约的初始价值为多少？(b)在3个月后，股票价格变为48美元，无风险利率仍为每年8%。这时远期价格和远期合约空头的价值为多少?

【回答】

a.

期初在签署合约时，该交易并未发生，因此远期合约的在期初时的初始价值 $f=0$美元；

股票派息的现值 $I=1*e^{-8\%*2/12}+1*e^{-8\%*5/12}\approx 1.954$美元

期货价格 $F_0=(S_0-I)e^{rT}=(50-1.954)*e^{8\%*6/12}\approx 50.007$美元

b.

由第一题知，期货的交割价格 $K=F_0=50.007$美元，已经过去 $t=0.25$ 年，距离到期还有 $T'=0.25$ 年,此时剩余股票派息的现值 $I'=1*e^{-8\%*2/12}\approx 0.987$美元

远期合约(空头)的价值
$f=-(S_1-I'-Ke^{-rT'})=-(48-0.987-50.007*e^{-8\%*0.25})\approx 2.01$美元

期货价格 $F_1=(S_1-I')e^{rT'}=(48-0.987)*e^{8\%*0.25}\approx 47.96$美元

> 本文档通过飞书文档编写

衍生工具作业4

> 2023-2作业2（Hull 英文第十版）

😀 姓名 学号：202109120****

第10章：

10.11

【问题】描述以下交易组合的最终价值：一个刚刚承约的某资产远期合约多头和对于同一资产的欧式看跌期权的空头。看跌期权的期限与远期合约的期限相同，期权的执行价格等于交易组合刚刚设定时资产的远期价格。证明欧式看跌期权的价格与具有相同期限和相同执行价格的欧式看涨期权的价格相等。

【解答】

a. 设资产在到期时的现货价格为 S_T ,设期权执行价格为 F_0 ,根据题意 F_0 也是期初的资产远期价格（交割价格）。

   最终时，远期合约多头价值= $S_T - F_0$ ；看跌期权价值= $max(F_0 - S_T, 0)$

   那么这个交易组合的最终价值= $S_T - F_0 + max(F_0 - S_T, 0) = max(S_T - F_0, 0)$

b. 由第一小问知，该组合的最终价值为 $max(S_T - F_0, 0)$ 其恰好等于一个看涨期权的最终价值。

   根据“一价定律”和“无套利原理”可知，一份该组合(本题中的远期合约+看跌)和一份看涨期权应具有相同的价值，那么他们在期初时价格也应该相同，即**远期合约 f 加上欧式看跌期权 p 与具有相同执行价格和到期期限的看涨期权价值 c 相同。**即有

   $$f + p = c$$

   在期初时，远期合约价值 $f = 0$，因此 $p = c$,即欧式看跌期权的价格与具有相同期限和相同执行价格的欧式看涨期权的价格相等，得证。

10.12

【问题】某交易员买入一份看涨期权与看跌期权，看涨期权的执行价格为45美元，看跌期权的执行价格为40美元，两个期权具有相同的期限，看涨期权价格为3美元，看跌期权价格为4美元，画出交易员的盈利与资产价格之间的关系图。

【解答】

由题意知，分三类情况讨论——

- 当资产价格高于45美元时($S_T > 45$)会行使看涨期权：

  购买期权花销7美元，看涨期权中赚钱 $S_T - K_a = S_T - 45$ => 总盈利 $= S_T - 45 - 7 = S_T - 52$

- 低于40美元时($S_T < 45$)会行使看跌期权

  购买期权花销7美元，看跌期权中赚钱 $K_b - S_T = 40 - S_T$ => 总盈利 $= 40 - S_T - 7 = 33 - S_T$

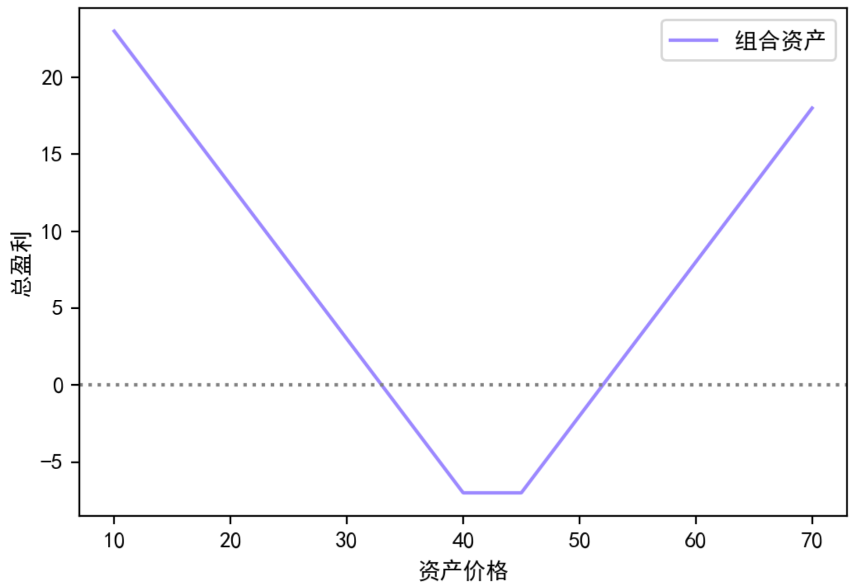
- 高于40美元低于45美元时($45 > S_T > 40$)不会行权

  购买期权花销7美元，没有任何收益 => 总盈利 $= -7$

可以得到如下的盈利分段函数——

$$\text{总盈利} = \begin{cases} S_T - 52 & S_T \geq 45 \\ -7 & 40 < S_T < 45 \\ 33 - S_T & S_T \leq 40 \end{cases}$$

使用matplotlib绘图得——



第11章：

11.11

【问题】一份在支付股息股票上期限为4个月的欧式看涨期权价格为5美元，执行价格为60美元，股票当前价格为64美元，预计在1个月后股票将支付0.8美元的股息，所有期限的无风险利率均为12%这时对于套利者而言存在什么样的套利机会？

【解答】

欧式看涨期权应满足关系式 $c \geq max(S_0 - Ke^{-rT} - D, 0)$。在本题中 $c = 5, S_0 = 64, K = 60$,那么 $Ke^{-rT} = 60 * e^{-12\% * \frac{1}{3}} \approx 57.65$ 美元，股票红利现值为 $D = 0.8 * e^{-12\% * \frac{1}{12}} = 0.79$ 美元，而 $5 < max(64 - 57.65 - 0.79, 0) = 5.56$，因此其存在套利机会。

套利策略：

- 根据低买高卖原则，期权价格定价过低，应该借款**买入这份欧式看涨期权同时做空股票**。此时获得64-5=59美元。
- 随后将这笔钱存入银行进行无风险投资，其中0.79元偿还股息，剩下的全部进行无风险投资。
- 到期时，分两种情况讨论：
  - 当股票价格高于60时，行权：从银行取出无风险投资的资产合计 $58.21 * e^{12\%/3}$，以执行价格60元买入股票并归还股票和利息，净赚 $58.21 * e^{12\%/3} - 60 = 0.56$ 美元
  - 当股票价格低于60时，不行权，但是在做空股票上会盈利：因为不知道最终价格，我们以最小盈利算（价格等于60），此时**至少**净赚 $58.21 * e^{12\%/3} - 60 = 0.56$ 美元，当价格低于60时，净赚更多。

11.13

【问题】当无风险利率上升与波动率下降时，用直观的方式解释为什么提前行使美式看跌期权会变得更吸引人。

【解答】

当提前执行获得的基于执行价格的利息收益大于对损失的保险价值时，会选择提前执行

(1)当无风险利率增加时，基于执行价格获得的**利息收益增加**，因此提前执行更具有吸引力。

(2)当波动率下降时，风险变小，美式看跌期权在**保险方面的价值变小**，使得提前执行更具有吸引力。

11.14

【问题】执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看涨期权价格为2美元。标的股票价格为29美元，在2个月与5个月时预计股票将会分别发放0.5美元的股息，所有期限的无风险利率均为10%。执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看跌期权价格是多少?

【解答】

由欧式期权看跌-看涨平价公式 $c+Ke^{-rT}+D=p+S_0$ 可以确定价格。

已知 $c=2, S_0=29, K=30, T=0.5$ 股息贴现值 $D=0.5*e^{-10\%*\frac{2}{12}}+0.5*e^{-10\%*\frac{5}{12}}=0.97$

对公式移项，带入数据得 $p=(c+Ke^{-rT}+D)-S_0=2+30*e^{-10\%*0.5}+0.97-29=2.51$ 美元

因此：执行价格为30美元，期限为6个月的**欧式看跌期权价格是2.51美元**

11.16

【问题】无股息股票上的美式看涨期权的价格为4美元，股票价格为31美元，执行价格为30美元，期限为3个月，无风险利率为8%。推导具有相同股票价格与相同执行价格和相同期限的美式看跌期权上下限。

【解答】

由美式期权看跌-看涨关系式可知：$S_0-K\le C-P\le S_0-Ke^{-rT}$

移项得：$C-S_0+Ke^{-rT}\le P\le C-S_0+K$

带入数据得：$4-31+30*e^{-8\%*0.25}\le P\le 4-31+30$

即 $2.41\le P\le 3$,因此，美式看跌期权的价格的**上限和下限分别为3.00美元和2.41美元**。

11.18

【问题】证明式(11-7)（提示：对于关系式的第一部分，考虑一个欧式看涨期权与一个数量为K的现金组合，以及一个美式看跌期权与一只股票的组合)。

$$S_0-K\le C-P\le S_0-Ke^{-rT}$$

【解答】

- 先证明关系式左侧 $S_0-K\le C-P$

  考虑组合A：一份欧式看涨期权 c 与一个数量为K的现金

  考虑组合B：一个美式看跌期权 P 与一只股票

  > 说明：两个期权具有相同得到期日，执行价格相同为K，无风险利率r(r>0)

  下面从两个方面考虑组合AB的价值

	组合A	组合B
不提前行权	$max(S_T-K,0)+Ke^{rT}=max(S_T,K)-K+Ke^{rT}$	$max(S_T,K)$
t时刻提前行权	Ke^{rt}	K

因为 $r>0, t<T$ 因此在任意一种情况下，组合A的价值均大于组合B的价值。在期初时也存在此关系，即 $c+K\leq\ P+S_0$,而 $c=C$ *(在没有股利的情况下,美式看涨期权一般不会被提前执行)*

因此 $C+K\leq\ P+S_0\ \Rightarrow\ S_0-K\leq\ C-P$ ① 得证。

- 下面证明关系式右侧 $C-P\leq\ S_0-Ke^{-rT}$

  已知欧式期权看跌-看涨平价公式为 $c+Ke^{-rT}=p+S_0$

  而由于 $P\geq\ p$ *(美式期权可提前执行)*，且 $c=C$ *(在没有股利的情况下,美式看涨期权一般不会被提前执行)*，因此 $c+Ke^{-rT}-S_0=p\leq P\ \Rightarrow\ C+Ke^{-rT}-S_0\leq P$

  移项：$C-P\leq\ S_0-Ke^{-rT}$ ②

- 将①②式子联立，即可得到：$S_0-K\leq\ C-P\leq\ S_0-Ke^{-rT}$,得证

第12章：

12.8

【问题】利用看跌一看涨平价关系式，说明由看涨期权生成的牛市差价最初投资与由看跌期权生成的牛市差价最初投资之间的关系。

【解答】

由欧式期权看跌-看涨平价公式 $c+Ke^{-rT}=p+S_0$,设 p_1 和 c_1 为执行价格为 K_1 的看跌和看涨期权的价格：p_2 和 c_2 为执行价格为 K_2 的看跌和看涨期权的价格($K_2>K_1$)。可得出：

$$\begin{cases} p_1+S_0=c_1+K_1e^{-rT} & ① \\ p_2+S_0=c_2+K_2e^{-rT} & ② \end{cases}$$

将①、②相减得 $p_1-p_2=c_1-c_2-(K_2-K_1)e^{-rT}$

这说明**运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资小于运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资**，且差额为 $(c_1-c_2)-(p_1-p_2)=(K_2-K_1)e^{-rT}$ 。实际上，运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资为负值，而运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资为正值。

用看涨期权构建牛市差价产生的利润比用看跌期权构建的要大 $(K_2-K_1)(1-e^{-rT})$ 。这说明相比于运用看跌期权构建牛市差价，运用看涨期权构建差价的策略中**多包含一份无风险投资** $(K_2-K_1)e^{-rT}$,其盈利为 $(K_2-K_1)e^{-rT}(e^{rT}-1)=(K_2-K_1)(1-e^{-rT})$ 。

12.23

【问题】3份同一股票上并具有同样期限的看跌期权执行价格分别为55美元、60美元和65美元，市场价格分别为3美元、5美元和8美元。解释如何构造蝶式差价。用表来说明这一策略的盈利形式。股票在什么价位时，这一交易策略会导致亏损?

【解答】

构造方法为：

- 购买一份执行价格为55美元的看跌期权
- 购买一份执行价格65美元的看跌期权
- 同时卖出两份执行价格为60美元的看跌期权。

盈利形式：

初始成本为 $3+8-2*5=1$。该交易策略的损益表为(最后一列为该状态下总收益)：

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 65$	0	0	0	0	-1
$60 < S_T \leq 65$	0	$65-S_T$	0	$65-S_T$	$64-S_T$
$55 < S_T \leq 60$	0	$65-S_T$	$-2*(60-S_T)$	S_T-55	S_T-56
$S_T \leq 55$	$55-S_T$	$65-S_T$	$-2*(60-S_T)$	0	-1

导致亏损：

当最后的股票价格**大于64美元或小于56美元**时，蝶式差价交易策略会导致损失。

12.25

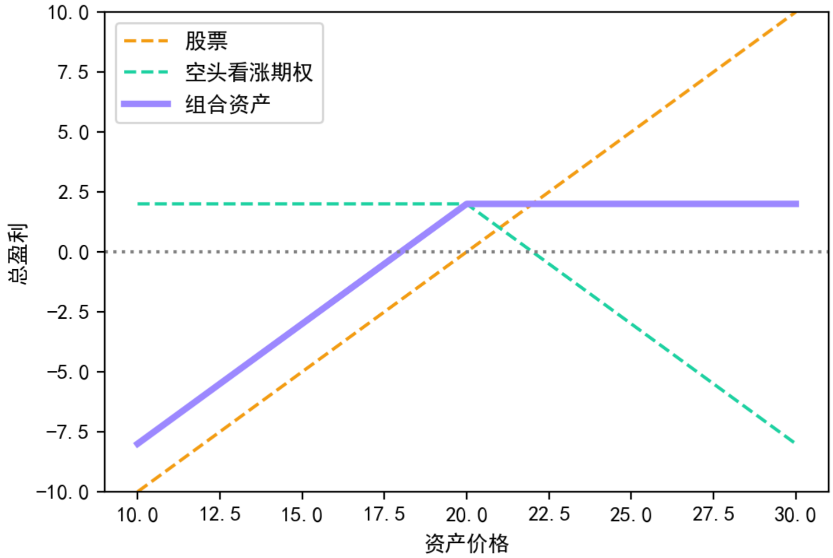
【问题】画出以下几种投资者的交易组合与股票最终价格之间的盈亏关系图：(a)一股股票并一份看涨期的空头；(b)两股股票并一份看涨期权的空头；(c)一股股票并两份看涨期权的空头；(d)一股股票并四份看涨期权的空头。对于以上不同情形，假定看涨期权的执行价格等于当前股票价格

【解答】

a. 一股股票并一份看涨期的空头

看涨期权空头的价值为 $-max(S_T-K,0)$,则总收益为 $-max(S_T-K,0)+S_T-K+c$

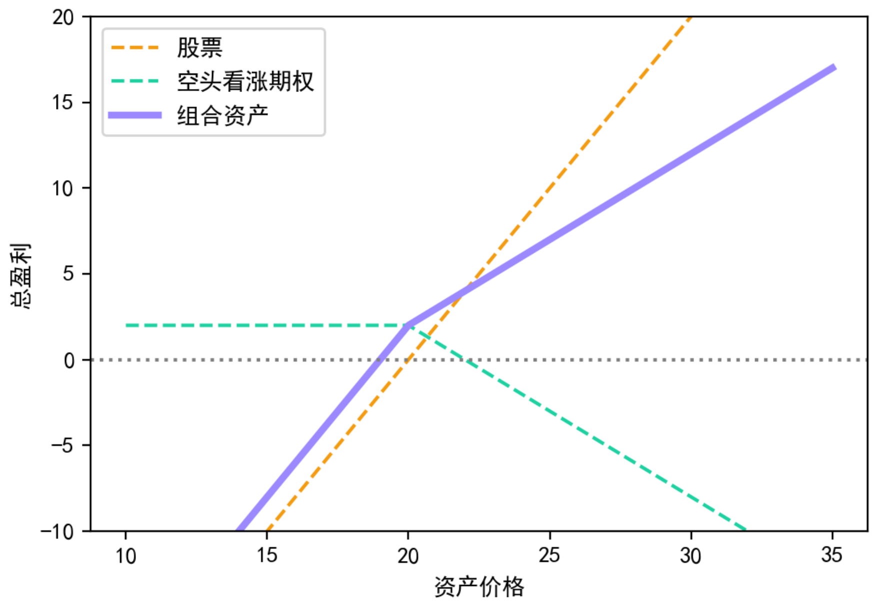
假设 $S_0=K=20, c=2$ 即有如下图像：



b. 两股股票并一份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-max(S_T-K,0)$,则总收益为
$-max(S_T-K,0)+2*（S_T-K）+c$

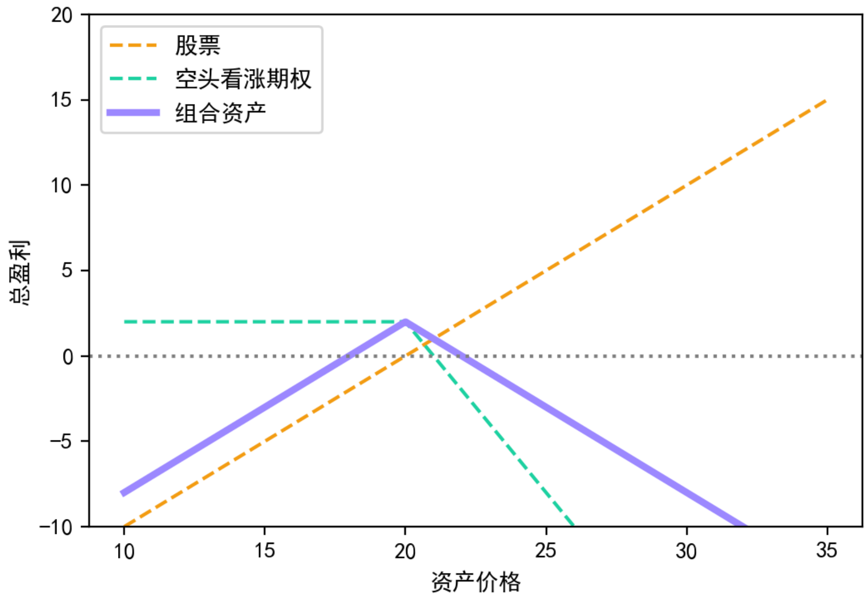
假设 $S_0=K=20,c=2$ 即有如下图像：



c. 一股股票并两份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-2*max(S_T-K,0)$,则总收益为
$-2*max(S_T-K,0)+（S_T-K）+c$

假设 $S_0=K=20,c=2$ 即有如下图像：

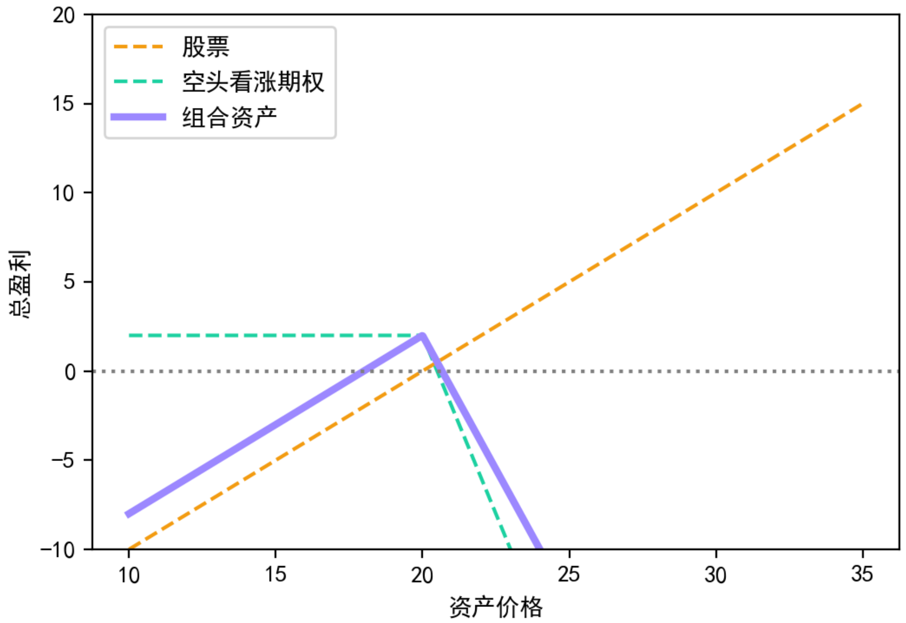


d. 一股股票并四份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-4*max(S_T-K,0)$,则总收益为

$-4*max(S_T-K,0)+\ (S_T-K)\ +c$

假设 $S_0=K=20,c=2$ 即有如下图像：



12.26

【问题】假定一股不付股息的股票价格为32美元，股票价格波动率为30%，对于所有期限的无风险利率均为每年5%。利用 DerivaGem来计算建立以下几种交易策略的费用。

(a)由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看涨期权所组成的牛市差价。

(b)由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看跌期权所组成的熊市差价。

(c)由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看涨期权所组成的蝶式差价。

(d)由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看跌期权所组成的蝶式差价。

(e)由执行价格为30美元、期限为6个月的期权所组成的跨式组合。

(f)由执行价格分别为25美元与35美元，期限为6个月的期权所组成的异价跨式组合。

对于每种情形，用表来说明盈利与最终股票价格之间的关系，在分析中忽略贴现作用。

【解答】

a. 利用软件可以算得，执行价格为25美元的看涨期权的价值为7.90美元，执行价格为30美元的看涨期权的价值为4.18美元。因此，牛市差价的成本为 $7.90-4.18=3.72$（美元）。损益情况如下：

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权空头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T>30$	S_T-25	$30-S_T$	5	1.28
$25<S_T\leq 30$	S_T-25	0	S_T-25	$S_T-28.72$
$S_T\leq 25$	0	0	0	-3.72

b. 利用软件可以算得，执行价格为25美元的看涨期权的价值为0.28美元，执行价格为30美元的看涨期权的价值为1.44美元。因此，熊市差价的成本为 $1.44-0.28=1.16$（美元）。损益情况如下：

股票价格	第一份期权空头收益	第二份期权多头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T>30$	0	0	0	-1.16
$25<S_T\leq 30$	0	$30-S_T$	$30-S_T$	$28.84-S_T$
$S_T\leq 25$	S_T-25	$30-S_T$	5	3.84

c. 利用软件可以算得，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看涨期权的价值分别为：8.92美元、5.60美元和3.28美元。因此，蝶式差价的成本为 $8.92+3.28-2\times 5.60=1.00$（美元）。损益情况如下

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 35$	$S_T - 25$	$S_T - 35$	$-2 * (S_T - 30)$	0	-1
$30 < S_T \leq 35$	$S_T - 25$	0	$-2 * (S_T - 30)$	$35 - S_T$	$34 - S_T$
$25 < S_T \leq 30$	$S_T - 25$	0	0	$S_T - 25$	$S_T - 26$
$S_T \leq 25$	0	0	0	0	-1

d. 利用软件可以算得，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看涨期权的价值分别为：0.71美元、2.14美元和4.57美元。因此，蝶式差价的成本为 $0.71 + 4.57 - 2 \times 2.14 = 1.00$（美元）。损益情况如下

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 35$	0	0	0	0	-1
$30 < S_T \leq 35$	0	$35 - S_T$	0	$35 - S_T$	$34 - S_T$
$25 < S_T \leq 30$	0	$35 - S_T$	$-2 * (30 - S_T)$	$S_T - 25$	$S_T - 26$
$S_T \leq 25$	$25 - S_T$	$35 - S_T$	$-2 * (30 - S_T)$	0	-1

e. 利用软件可以算得，执行价格分别为30美元的看涨期权、看跌期权的价值分别为：4.18美元、1.44美元。因此，跨式组合的成本为 $4.18 + 1.44 = 5.62$（美元）。损益情况如下

股票价格	看涨期权多头收益	看跌期权多头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 30$	$S_T - 30$	0	$S_T - 30$	$S_T - 35.62$
$S_T \leq 30$	0	$30 - S_T$	$30 - S_T$	$24.58 - S_T$

f. 利用软件可以算得，执行价格分别为35美元的看涨期权、执行价格25美元看跌期权的价值分别为：1.85美元、0.28美元。因此，异价跨式差价的成本为 $1.85 + 0.28 = 2.13$（美元）。损益情况如下

股票价格	看跌期权多头收益	看涨期权多头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 35$	0	$S_T - 35$	$S_T - 35$	$S_T - 37.13$
$25 < S_T \leq 35$	0	0	$30 - S_T$	-2.13
$S_T \leq 25$	$25 - S_T$	0	$25 - S_T$	$22.87 - S_T$

12.28

【问题】买入执行价格为K1的看涨期权，卖出执行价格为K2的看跌期权，而且两者具有相同期限，K2>K1所得交易头寸是什么？当K2=K1时，交易头寸是什么？

【解答】

> 看跌期权的期权费与支付的看涨期权的期权费的差额很小，在此忽略不计
>
> max(S-K1,0)-max(K2-S,0)=

设标的资产价格为 S

- 当 $K_2 > K_1$ 时：

  此时所得的交易头寸可以看作范围远期合约多头，在此分三种状态讨论

状态	头寸	解释
$S < K_1$	**损失（$K_1 - S$）**	看涨期权不行权，看跌期权他人行权，空方价值为 $-max(K_1 - S, 0)$，即亏损 $K_1 - S$
$K_2 < S < K_1$	0	看涨期权不行权，看跌期权他人也不行权，双方价值都为0，即不亏也不赚
$S > K_2$	获益 $S - K_2$	看涨期权行权，多方价值为值为 $max(S - K_2, 0)$ 看跌期权他人也不行权。即获益 $S - K_2$

- 当 $K_2 = K_1$ 时：

  此时所得的交易头寸可以看作远期合约多头，在此分三种状态讨论

状态	头寸	解释
$S < K_1$	**损失（$K_1 - S$）**	看涨期权不行权，看跌期权他人行权，空方价值为 $-max(K_1 - S, 0)$，即亏损 $K_1 - S$
$S > K_1$	获益 $S - K_1$	看涨期权行权，多方价值为值为 $max(S - K_1, 0)$ 看跌期权他人也不行权。即获益 $S - K_1$

衍生工具作业5

> 2022-3作业（Hull 英文第十版）

😀 姓名： 学号：202109120****

第13章

> *（13.1&13.4，每题分别用无套利技术、风险中性定价技术、组合复制技术这三种方法求解）*

13.1

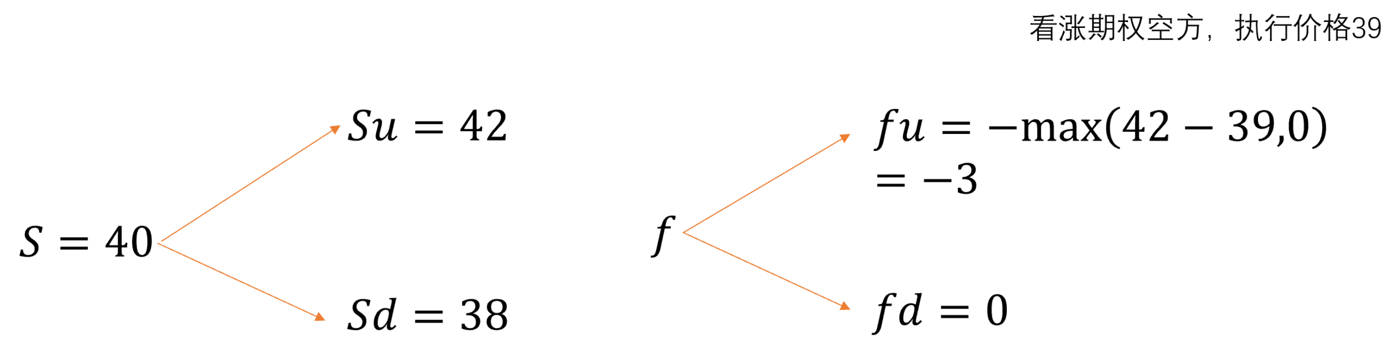
【问题】股票的当前价格为40美元，已知在 1个月后股票的价格将可能变为42美元或38美元，无风险利率为每年8%（连续复利)，执行价格为39美元、1个月期限的欧式看涨期权价值是多少?

【解答】

无套利技术：

构造无风险组合——一份欧式看涨期权的空头，与 Δ 份股票现货。组合价值为 $S\Delta - f$

绘制出单步二叉树如下：



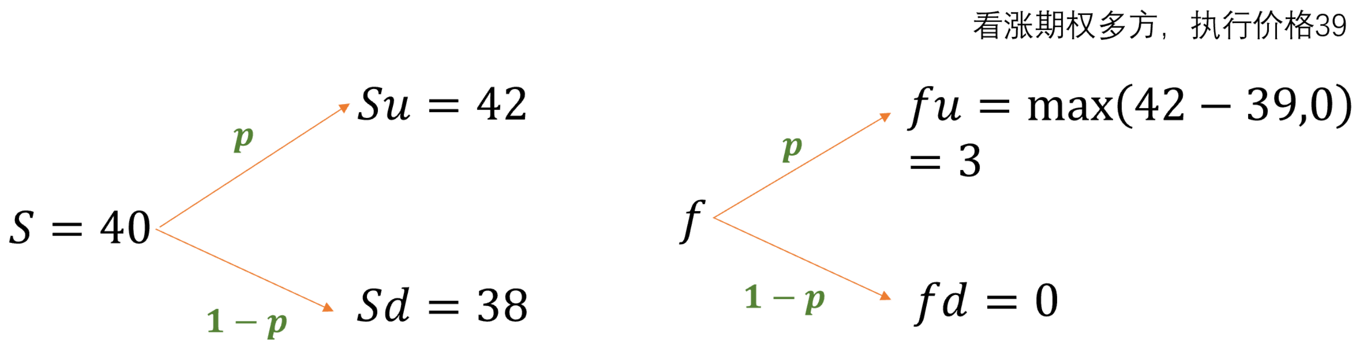
如上图可知：如果股票价格变为 $S_u = 42$ 美元，期权价格变为 $f_u = -3$,组合价值为 $42\Delta - 3$;如果股票价格 $S_f = 42$ 美元，期权价格变为 $f_d = 0$,组合价值为 $38\Delta - 0$

因为构造的是无套利（无风险组合），那么两种状态价格需一致，即 $42\Delta - 3 = 38\Delta \ \Rightarrow \ \Delta = 0.75$,此时一个月后，组合价格为 $38 * 0.75 = 28.5$,贴现到当前，价格为 $28.5 * e^{-8\% * \frac{1}{12}} \approx \ 28.31$.

带入组合期初价值的公式 $S\Delta - f = 28.31 = 40 * 0.75 - f \Rightarrow \ f = 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**欧式期权价值是1.69美元**

风险中性定价技术：



由风险定价公式 $S_T = pS_0u + (1-p)S_0d$ ，其中 $S_T = S_0e^{rT}$

也即是有 $S_up + S_d(1-p) = S_0e^{rT}$ ，即 $42p + 38(1-p) = 40 * e^{8\% * \frac{1}{12}} \Rightarrow \ p = 0.5669$

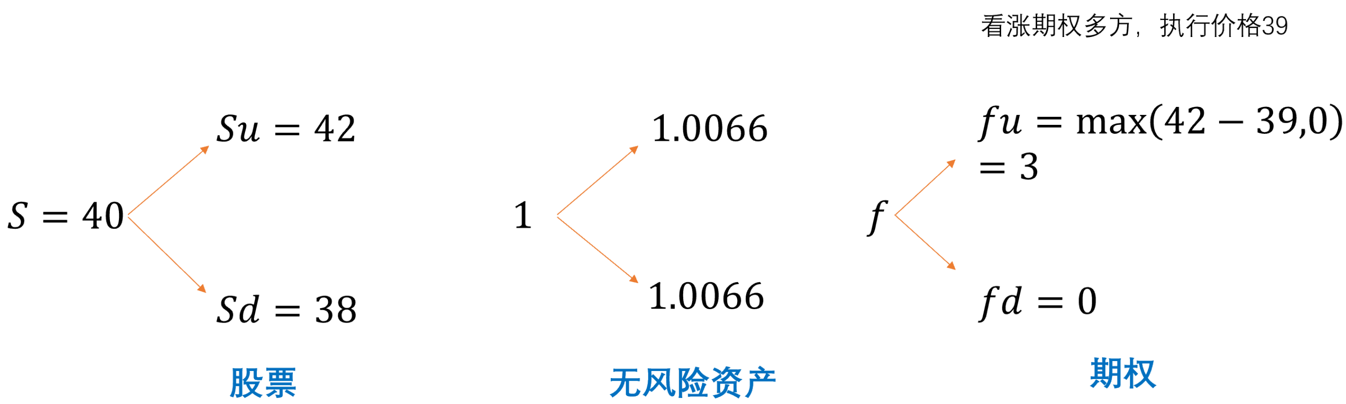
那么期权也满足这个中性风险，即

$f = e^{-rT}[f_up + f_d(1-p)] = e^{-8\%*\frac{1}{12}}[3 * 0.5669 + 0] \approx \ 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**欧式期权价值是1.69美元**

组合复制技术：

采用静态组合策略，用已知资产组合复制未知资产，此题即用股票复制期权



设 x 份股票和 y 份无风险资产可以构成期权，可以得到如下线性方程组：

$$x\begin{bmatrix} 42 \\ 38 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1.0066 \\ 1.0066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得：$\begin{cases} x = 0.75 \\ y = -28.3131 \end{cases}$

代入初始资产可得 $40x + 1y = 40 * 0.75 - 28.3131 \approx 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**欧式期权价值是1.69美元**

13.4

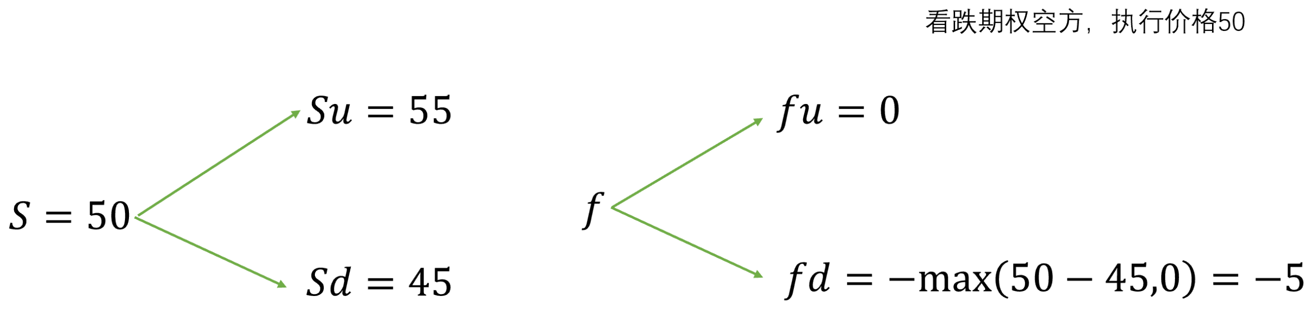
【问题】股票的当前价格为50美元，已知在6个月后这一股票的价格将可能变为45美元或55美元，无风险利率为10%（连续复利）。执行价格为50美元、6个月期限的欧式看跌期权的价值是多少?

【解答】

无套利技术:

构造无风险组合——一份欧式看跌期权的空头，与 Δ 份股票现货。组合价值为 $S\Delta-f$

绘制出单步二叉树如下:



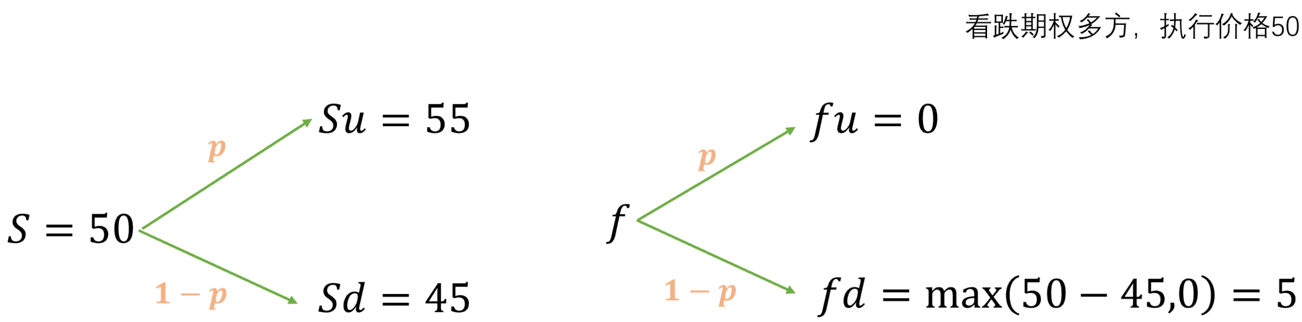
如上图可知：如果股票价格变为 $S_u=55$ 美元，期权价格变为 $f_u=0$,组合价值为 $55\Delta-0$；如果股票价格 $S_f=45$ 美元，期权价格变为 $f_d=-5$,组合价值为 $45\Delta-0$

因为构造的是无套利（无风险组合），那么两种状态价格需一致，即 $55\Delta-0=45\Delta-5\ \Rightarrow\ \Delta=-0.5$,此时一个月后，组合价格为 $-55*-0.5=-27.5$,贴现到当前，价格为 $-27.5*e^{-10\%*\frac{6}{12}}\approx\ -26.16$.

带入组合期初价值的公式 $S\Delta-f=-26.16=50*(-0.5)-f\Rightarrow\ f=1.16$

因此：执行价格为50美元、6个月期限的**欧式看跌期权的价值是1.16美元**

风险中性定价技术:



由风险定价公式 $S_T=pS_0u+(1-p)S_0d$ ，其中 $S_T=S_0e^{rT}$

也即是有 $S_up+S_d(1-p)=S_0e^{rT}$ ，即 $55p+45(1-p)=50*e^{10\%*\frac{6}{12}}\ \Rightarrow\ p=0.7564$

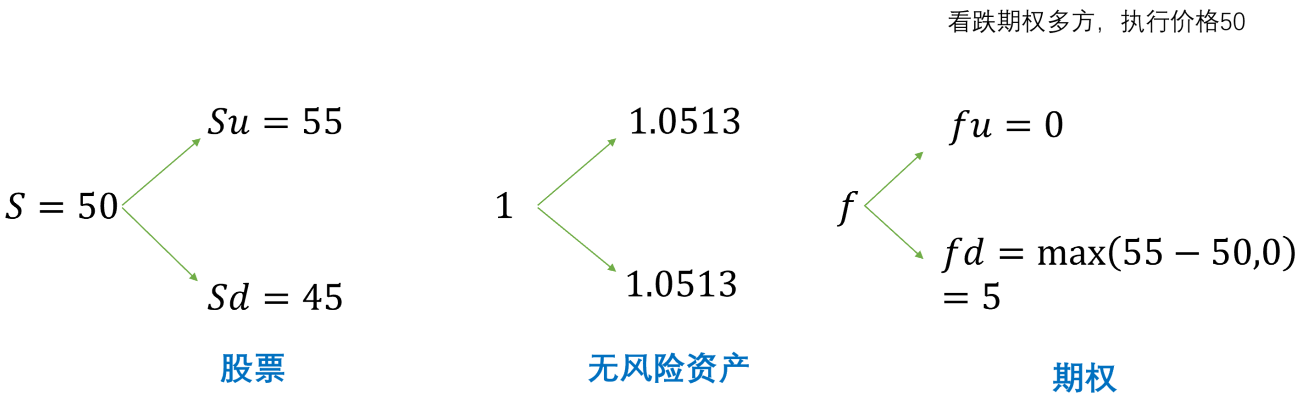
那么期权也满足这个中性风险，即

$$f=e^{-rT}[f_up+f_d(1-p)]=e^{-10\%*\frac{6}{12}}[5*0.2436+0]\approx\ 1.16$$

因此：执行价格为50美元、6个月期限的**欧式看跌期权的价值是1.16美元**

组合复制技术：

采用静态组合策略，用已知资产组合复制未知资产，此题即用股票复制期权



设 x 份股票和 y 份无风险资产可以构成期权，可以得到如下线性方程组：

$$x\begin{bmatrix}55\\45\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.0513\\1.0513\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$$

解得：$\begin{cases}x=-0.5\\y=26.1581\end{cases}$

代入初始资产可得 $50x+1y=50*(-0.5)+26.1581\approx 1.16$

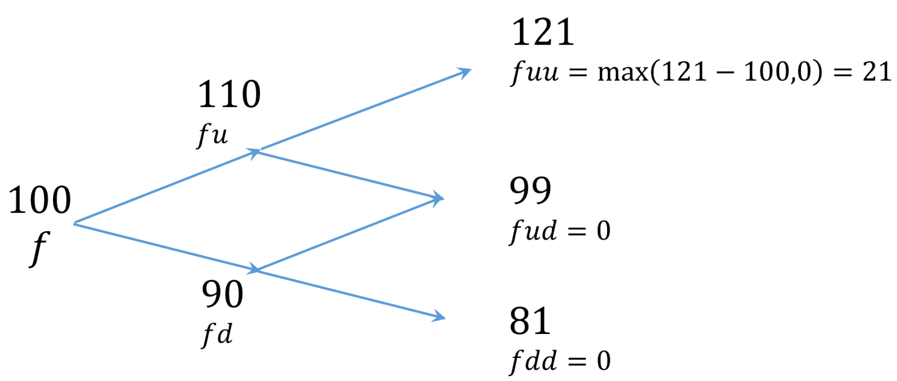
因此：执行价格为50美元、6个月期限的**欧式看跌期权的价值是1.16美元**

13.5

【问题】股票的当前价格为100美元，在今后每6个月内，股票价格可能会或上涨 10%或下跌10%，无风险利率为每年8%(连续复利)，执行价格为100美元、1年期的欧式看涨期权的价格是多少?

【解答】

股票和期权得二叉树变化如下图



看涨期权空方，执行价格100

由题知 $u=1.1$ $d=0.9$ $r=0.08$ $T=0.5$

风险中性概率 $p=\dfrac{a-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.08*0.5}-0.9}{1.1-0.9}\approx\ 0.7041\quad (a=e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f=e^{-2rT}[p^2 f_{uu}+2p(1-p)f_{ud}+(1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f=e^{-2*0.08*0.5}[0.7041^2*21+0+0]\approx\ 9.61$ 美元

因此：执行价格为100美元、1年期的**欧式看涨期权的价格是9.61美元**

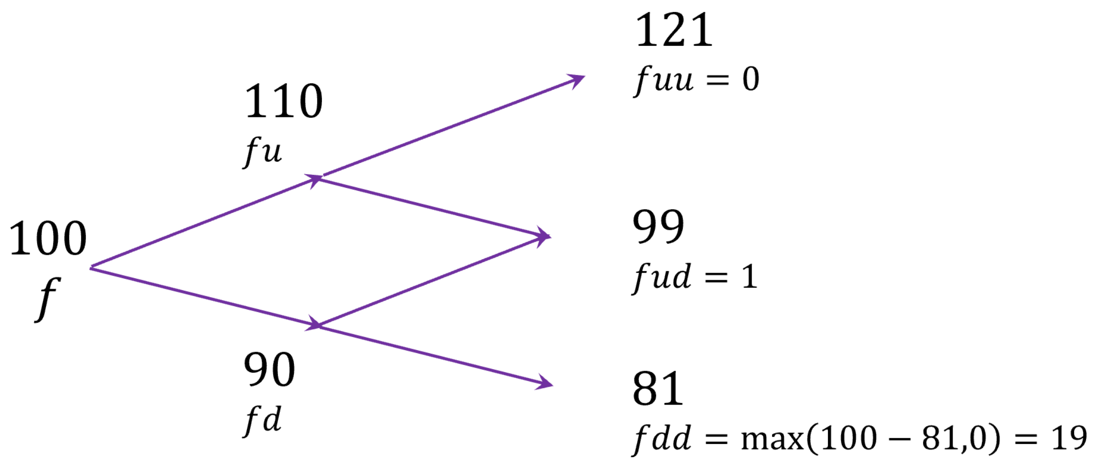
13.6

【问题】在习题5的情形下，执行价格为100美元，1年期的欧式看跌期权价格是多少？验证所得结果满足期权平价关系式。

【解答】

a. 计算期权价格

类比上一题，股票和期权得二叉树变化如下图



看跌期权空方，执行价格100

由题知 $u=1.1\ d=0.9\ r=0.08\ T=0.5$

风险中性概率 $p=\dfrac{a-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.08*0.5}-0.9}{1.1-0.9}\approx\ 0.7041\quad(a=e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f=e^{-2rT}[p^2 f_{uu}+2p(1-p)f_{ud}+(1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f=e^{-2*0.08*0.5}[0+2*0.7041*0.2959*1+0.2959^2*19]\approx\ 1.92$ 美元

因此：执行价格为100美元、1年期的**欧式看跌期权的价格是1.92美元**

b. 验证结果

期权平价关系式为 $c+Ke^{-rT'}=p+S_0$，带入数据得

$1.92+100*e^{-1*0.08}=9.61+100=109.61$

因此，**结果满足期权平价关系式**

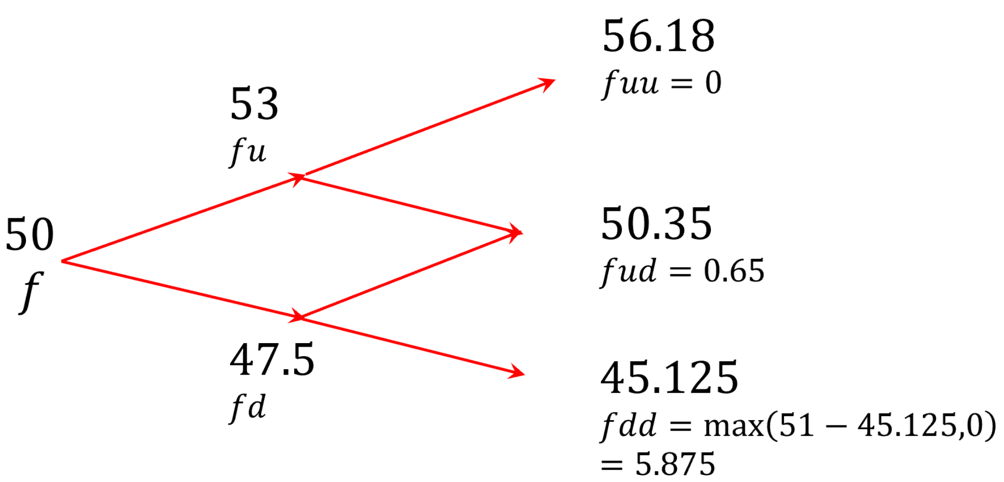
13.13

【问题】考虑习题12中的情形*（某股票的当前价格为50美元，在今后6个月的每3个月时间内，股票价格都可能会或上涨6%，或下跌 5%,无风险利率为每年5%（连续复利））*，执行价格为51美元，6个月欧式看跌期权的价值为多少？验证期权平价关系式的正确性。如果看跌期权为美式期权，在二叉树的某些节点上提前行使期权会是最优吗？

【解答】

a. 计算看跌期权价格

股票和期权得二叉树变化如下图



看跌期权空方，执行价格51

由题知 $u = 1.06\ d = 0.95\ r = 0.05\ T = 0.25$

风险中性概率 $p = \dfrac{a-d}{u-d} = \dfrac{e^{0.05*0.25}-0.95}{1.06-0.95} \approx\ 0.5689 \quad (a = e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f = e^{-2rT}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f = e^{-2*0.05*0.25}[0 + 2*0.5689*0.4311*0.65 + 0.4311^2*5.875] \approx\ 1.376$ 美元

因此：执行价格为51美元，6个月**欧式看跌期权的价值是1.376美元**

b. 验证结果

同理可知，看涨期权的价格为 $f = e^{-2*0.05*0.25}[5.18*0.5689^2 + 0 + 0] \approx\ 1.635$ 美元

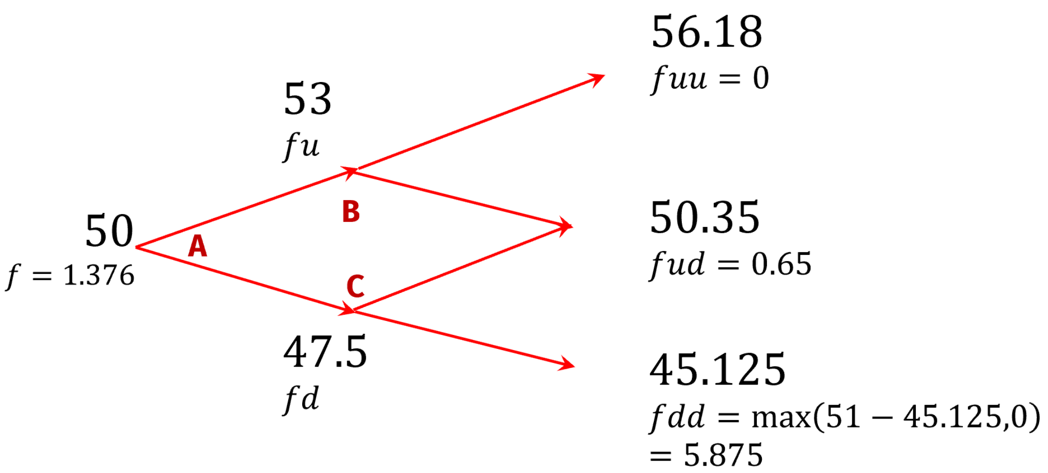
期权平价关系式为 $c + Ke^{-rT'} = p + S_0$ ，带入数据得

$1.635 + 51*e^{-0.5*0.05} = 1.376 + 50 = 51.376$

因此，**结果满足期权平价关系式**

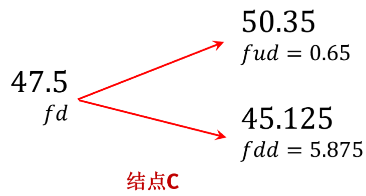
c. 美式期权情况下提前行使期权

因为美式期权允许提前行权，那么需要考虑下图所示的ABC三个结点，如果期权的内在价值大于时间价值，则可以行权。对下列ABC结点分析如下：



看**跌**期权空方，执行价格51

- 对于A结点：$f=1.376$（第一问算得）,立即执行获利 $max(51-50,0)=1$, $1<1.376$,不会提前行权
- 对于B结点：立即执行并不获利，不会提前执行



- 对于C结点：考虑如右图所示二叉树，$f=e^{-rT}[pf_u+(1-p)f_d]$ ，带入数据得， $f=2.866$,立即执行获利 $max(51-47.5,0)=3.5$

  而 $3.5>2.866$ 因此，会在结点C处提前行权

即在二叉树**结点C时（第一次下跌，股价跌至47.5时），提前行权是最优的！**

第14章

14.2

【问题】基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否会总是高于平均收益？讨论这一问题。

【解答】

任何交易策略都可能因为幸运而产生高于平均回报率的收益。**关键的问题是根据风险进行相应调整时，交易策略的表现能否持续胜过市场**。某一个交易策略可能做到这一点。然而，**当足够多的投资者知道这一策略并以该投资策略进行投资时，利润将会消失**。

小公司效应便是其中一例。当对风险进行适当的调整后，由小公司的股票组成的组合收益率能够超过由大公司股票组成的组合收益率。关于这方面的论文早在20世纪80年代早期就有发表，并且促成了共同基金利用此现象盈利。但是，最新的一些文献和实证分析表明，这种现象已经开始消失。

因此，基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否高于平均收益，需要具体情况具体分析。

14.4

【问题】变量 X_1 和 X_2 服从广义维纳过程，漂移率分别为 μ_1 和 μ_2 ，方差率分别为 σ_1^2、σ_2^2 。在以下条件下， X_1+X_2 服从什么样的过程？(a) X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内的变化相互无关。(b) X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内变化的相关系数为 ρ 。

【解答】

a. 变化相互无关

不妨假设 X_1 和 X_2 的初始值分别为 a_1、a_2 ,经过时间 T 后， X_1 和 X_2 的概率分布分别为

$$\begin{cases}\phi_1=\phi(a_1+\mu_1T,\sigma_1^2T)\\ \phi_2=\phi(a_2+\mu_2T,\sigma_2^2T)\end{cases}$$

因为 X_1 和 X_2 变化相互无关，即 X_1 和 X_2 相互独立，由正态分布的可加性可知

$$X_1+X_2\sim\phi(a_1+\mu_1T+a_2+\mu_2T,\sigma_1^2+\sigma_2^2)=\phi[(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T]$$

即 X_1+X_2 同样服从广义维纳过程，漂移率为 $\mu_1+\mu_2$,方差率为 $\sigma_1^2+\sigma_2^2$

b. 变化相关系数为 ρ

正态分布具有可加性，相加后仍为正态分布，但是此时相关系数不为0

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T$$

$Var(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2cov(X_1,X_2)$,而 $cov(X_1,X_2)=\rho*\sqrt{D(X_1)D(X_2)}$,因此， $Var(X_1+X_2)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T$

综上： $X_1+X_2\sim\phi[(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T]$

即 X_1+X_2 同样服从广义维纳过程，漂移率为 $\mu_1+\mu_2$,方差率为 $\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2$

14.5

【问题】考虑服从以下过程的变量 $S:dS=\mu dt+\sigma\,dz$。在最初的3年中， $\mu=2,\sigma=3$； 在接下的3年中， $\mu=3,\sigma=4$。如果变量的初始值为5，则变量在第6年年末的概率分布是什么？

【解答】

最初三年和接下来三年，其分别服从概率分布 ϕ_1、ϕ_2 ,具体为

$$\begin{cases}\phi_1=\phi(a_1+\mu_1T,\sigma_1^2T)=\phi(a_1+2*3,9*3)\\ \phi_2=\phi(a_2+\mu_2T,\sigma_2^2T)=\phi(a_2+3*3,16*3)\end{cases}$$

这六年的变化即是两个正态分布之和，由正态分布可加性知：

$$\phi=\phi_1+\phi_2=\phi(a_1+6,27)+\phi(a_2+9,48)=\phi(a_1+a_2+15,75)$$

考虑到变量初始值为5,即 $a_1+a_2=5$,所以变量在第6年年末的概率分布是：

$$\phi=\phi(5+15,75)=\phi(20,75)$$

14.10

【问题】假定股票价格 S 服从几何布朗运动 $dS=\mu Sdt+\sigma\ Sdz$,其中以 μ 期望收益率， σ 为波动率。变量 S^n 服从什么过程？证明 S^n 也服从几何布朗运动。

【解答】

因为股票价格S服从几何布朗运动，即也符合伊藤过程 $dx=a(x,t)\,dt+b(x,t)\,dz$

为了方便描述，不妨假设 $G(S,t)=S^n$ ，且其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial S}=nS^{n-1} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial S^2}=n(n-1)S^{n-2} \end{cases}$$

即 G（S,t） 可微，满足伊藤引理适用条件， S^n 服从**伊藤过程**。

运用伊藤引理可知，

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial S}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial S}b\,dz$$

带入 $a=\mu S, b=\sigma S$ 可得

$$dG=(n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)G\ dt+n\sigma G\ dz$$

因此 S 与 S^n 具有同样的形式，也**满足几何布朗运动**。其期望收益率为 $n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2$,波动率为 $n\sigma$ 。

那么 S_T的期望值为$S_0^n e^{[\mu n+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2]T}$

14.17

【问题】假定股票的当前价格为50美元，其期望收益率和波动率分别为每年12%和每年30%。股票价格在2年后高于80美元的概率为多少？（提示：当 $\ln S_T>\ln 80$ 时， $S_T>80$ ）

【解答】

由题目可知 $\mu=0.12\ \sigma=0.30\ T=2$

股票价格服从对数正态分布，即 $\ln S_T\ \sim\ \phi\ [\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T,\sigma^2 T]$

带入数据得 $\ln S_T\ \sim\ \phi\ [\ln 50+(0.12-\frac{0.30^2}{2})*2,0.3^2*2]\ \Rightarrow\ \ln S_T\ \sim\ \phi\ (4.062,0.424^2)$

若 $S_T>80\ \Rightarrow\ \ln S_T\ >\ln\ 80=4.382$

高于80美元的概率为：

$P(\ln S_T > 4.382) = 1 - P(\ln S_T \leq 4.382) = 1 - N(\frac{4.382 - 4.062}{0.424}) = 1 - N(0.754) = 0.225$

因此：**股票价格在2年后高于80美元的概率为22.5%**

第15章

15.6

【问题】什么是隐含波动性？如何计算？

【解答】

隐含波动率是**使得布莱克-斯科尔斯-默颜(Black—Scholes)模型中期权价格等于其市场价格的波动率**，可以由迭代计算法获得。

一种简单的计算隐含波动率的方法为(迭代/试错法)：假设有两个波动率，一个波动率太高（即期权价格远高于市场价格），一个波动率太低（即期权价格远低于市场价格）。将等于两者均值的波动率代入布莱克-斯科尔斯-默顿模型，可得到一对新的偏高波动率与偏低波动率。不断进行迭代。因此，我们只需获得最初的过高波动率及过低波动率，并重复上述步骤不断平分隐含波动率的取值范围，并逐渐收敛到正确值。

实际中可利用其他更加精确的方法，比如 Newton-Raphson方法来计算隐含波动率。

15.7

【问题】股票的当前价格为40美元，假定其期望收益率为15%，波动率为25%。在两年内的股票收益率（连续复利)的概率分布是什么？

【解答】

由题目可知 $\mu = 0.15\ \sigma = 0.25\ T = 2$

由收益率分布公式知，收益率 $x \sim \phi(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T})$

带入数据得两年内的股票收益率（连续复利)的概率分布是 $x \sim \phi(0.15 - \frac{0.25^2}{2}, \frac{0.25^2}{2})$

即 $x \sim \phi(0.11875, 0.03125)$

> 预期的价值回报率为每年11.875%，标准差为每年17.7%

15.8

某股票价格服从几何布朗运动，其中期望收益率为16%，波动率为35%，股票的当前价格为38美元。

(a)一份该股票上具有执行价格为40美元，期限为6个月的欧式看涨期权被行使的概率为多少?
(b)一份该股票上具有同样执行价格及期限的欧式看跌期权被行使的概率为多少?

【解答】

a. 看涨期权

由题目可知 $\mu=0.16\ \sigma=0.35\ T=0.5$

股票价格服从对数正态分布，即 $\ln S_T\ \sim\ \phi\left[\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T,\sigma^2 T\right]$

带入数据得

$\ln S_T\ \sim\ \phi\left[\ln 38+(0.16-\frac{0.35^2}{2})*0.5,0.35^2*0.5\right]\ \Rightarrow\ \ln S_T\ \sim\ \phi\left(3.687,0.247^2\right)$

如需行权，需要 $S_T\ >40\ \Rightarrow\ \ln S_T\ >\ln\ 40=3.689$

行权概率：

$P(\ln S_T\ >3.689)=1-P(\ln S_T\ \leq 3.689)=1-N(\frac{3.689-3.687}{0.247})=1-N(0.008)=0.4968$

也即，期限为6个月的欧式看涨期权被**行使的概率为49.68%**

b. 看跌期权

与第一问类似，如需行权，需要 $S_T\ <40\ \Rightarrow\ \ln S_T\ <\ln\ 40=3.689$

行权概率：$P(\ln S_T\ <3.689)=N(\frac{3.689-3.687}{0.247})=N(0.008)=0.5032$

也即，同样的欧式看跌期权被**行使的概率为50.32%**

衍生工具作业6

> 2022-4作业（Hull 英文第十版）

😀 姓名： 学号：202109120****

第17章

17.9

【问题】一种外币的当前价格为1.5美元，国内与国外的无风险利率分别为5%与 9%。计算在下面两种情况下一个6个月期执行价格为1.40美元的看涨期权下限，假定期权分别是：(a)欧式；(b)美式。

【解答】

a. 欧式期权

由书中公式，欧式期权价格
$c \geq max(S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0) = max(1.5e^{-0.09*0.5} - 1.4e^{-0.05*0.5}, 0) = 0.069$

即该欧式期权价格**下限为0.069美元**

b. 美式期权

由公式，美式期权价格 $C \geq\ max(S_0 - K, 0) = 0.10$

即该美式期权价格**下限为0.1美元**

17.10

【问题】某股指的当前值为250，股指的连续股息收益率为每年4%，无风险利率为每年6%。这一股指上3个月期、执行价格为245的欧式看涨期权的目前价格为 10美元。该股指上3个月期，执行价格为245的看跌期权价值是多少?

【解答】

由题知 $S_0 = 250, q = 0.04, r = 0.06, T = 0.25, K = 245, c = 10$

由看涨-看跌平价公式得到—— $c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT}$

带入数据得到 $10 + 245 * e^{-0.06*0.25} = p + 250 * e^{-0.04*0.25}$

$\Rightarrow\ p = 10 + 245 * e^{-0.06*0.25} - 250 * e^{-0.04*0.25} \approx\ 3.84$ 美元

因此，3个月期，执行价格为245的**看跌期权价值是3.84美元**。

17.17

【问题】考虑练习题17.16的情形*(某个投资组合的价值为6000万美元,标准普尔500的当前值为1200)*。假定投资组合的 β 为2.0,无风险利率为每年 5%,投资组合与股指的股息收益率为每年3%。为了保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元,管理者应购买什么样的期权?

【解答】

- 购买份数: $n = \dfrac{V_0}{S_0 * 100} * \beta = \dfrac{60000000}{100 * 1200} * 2 = 1000$
- 购买价格:

  因为要保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元,相比6000万美元下跌10%。股息收益率每年3%,那么一共总市场收益率 $R_m = -10\% + 3\% = -7\%$

  而投资组合的超额收益率= β ×股指组合的超额收益率

  其中投资组合的超额收益率 $= -7\% - 5\% = -12\%$,那么股指组合的超额收益率 $= -6\%$,即股指组合的收益率 $= 5\% - 6\% = -1\%$

  又因为提供三个月的股息收益率,那么指数的预期变化 $= -1\% - 3\% = -4\%$

  预测指数的变化为 $1200 * (1 - 4\%) = 1152$ 美元

综上,应该买**1000份1152美元、1年期的欧式看跌期权**

> 进行答案验证:当证券组合的价值下降20%,此时变成4800万美元。记入股息,收益率为-17%,这比无风险利率低22%。
>
> 由投资组合的超额收益率= β ×股指组合的超额收益率,预测到的指数收益率提供低于无风险利率11%,也即-6%的回报率。
>
> 因此,预计指数下降9%到1092。看跌期权得到的报酬为(1152—1092)×100000=6000000(美元),即600万美元。4800万美元加上600万美元即得5400万美元,可见,实现了风险对冲。

第18章

18.10

【问题】考虑一个2个月期限的期货看涨期权,执行价格为40,无风险利率为每年 10%,当前期货价格为47。在以下两种情况下,期货期权的下限为多少?(a)欧式期权;(b)美式期权。

【解答】

a. 欧式期权的情况

由公式 $c \geq max((F_0 - K)e^{-rT}, 0)$ 可知，欧式看涨期权的下限为 $max((47-40)e^{-10\%*\frac{2}{12}}, 0) = 6.88$ 美元

b. 美式期权的情况

由公式 $C \geq max((F_0 - K), 0)$ 可知，欧式看涨期权的下限为 $max((47-40), 0) = 7$ 美元

18.12

【问题】某一期货的当前价格为60，波动率为30%。无风险利率为每年8%。利用两步二叉树来估计在期货上6个月期，执行价格为60的欧式看涨期权价格。如果看涨期权为美式期权，期权是否应被提前行使?

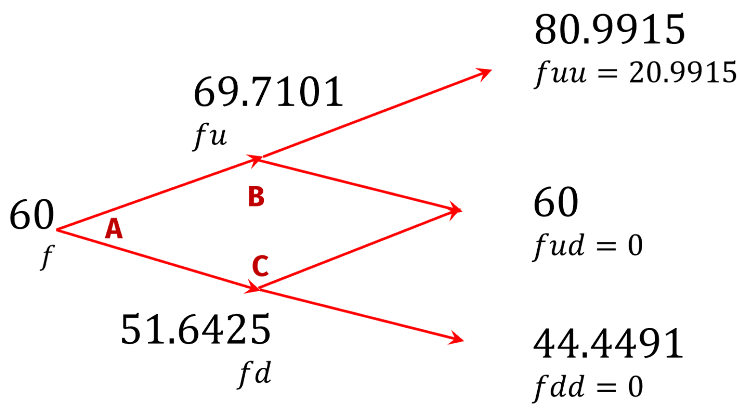
【解答】

由题，期权价格上涨的参数 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{30\%*\sqrt{0.25}} = 1.1618$；

下降参数 $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-30\%*\sqrt{0.25}} = 0.8607$

利用风险中性算得 $p = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1-0.8607}{1.1618-0.8607} = 0.4626$

可以画出如下的二叉树：



看涨期权多方，执行价格60

a. 欧式期权

由两步二叉树公式 $f = e^{-2rT}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f = e^{-2*0.08*0.25}[0.4626^2 * 20.9915 + 0 + 0] \approx\ 4.3155$ 美元

因此：期货上6个月期，执行价格为60的**欧式看涨期权价格为4.3155美元**。

b. 美式期权

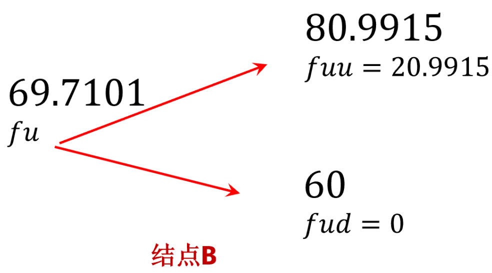
- 对于A结点：立即执行并不获利，不会提前执行

- 对于B结点：考虑如右图所示二叉树，
  $f=e^{-rT}[pf_u+(1-p)f_d]$ ，带入数据得，
  $f=9.5183$,立即执行获利
  $max(69.7101-60,0)=9.7101$

  而 $9.7101>9.5183$ 因此，会在结点B处提前行权

  用9.7101代替B结点重算A

  此时计算得**美式期权在期初的价格为4.4026美元**



- 对于C结点：立即执行并不获利，不会提前执行

综上，美式期权会在**B结点（第一步的上行处）提前行权**。

第19章

19.24

【问题】某金融机构持有以下（右图）有关英镑的场外交易期权组合。交易所里交易的一种期权的delta为0.6， gamma为1.5，vega为0.8：
(a)什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使交易组合为 gamma与delta中性?
(b)什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为 vega与delta中性？假设所有隐含波动率的变化量相同，这样vega就可以被相加

期权类型	头寸	期权delta	期权gamma	期权vega
看涨	-1 000	0. 50	2. 2	1. 8
看涨	-500	0. 80	0. 6	0. 2
看跌	-2 000	-0. 40	1. 3	0. 7
看涨	-500	0. 70	1. 8	1. 4

【解答】

金融机构持有资产的希腊字母值分别为：

$$delta:\Delta=-1000*0.5-500*0.8-2000*(-0.4)-500*0.7=-450$$
$$gamma:\Gamma=-1000*2.2-500*0.6-2000*1.3-500*1.8=-6000$$
$$vega:V=-1000*1.8-500*0.2-2000*0.7-500*1.4=-4000$$

a. gamma与delta中性

首先考虑gamma中性，如需要中性，那么需要交易所的期权的 $gamma=6000$ ，即需要持有 $6000/1.5=4000$ 份期权多头。

此时整个组合的 $delta = 4000 * 0.6 - 450 = 1950$ ，需要 $delta = -1950$ 来维持中性。即需要持有1950英镑空头 *（因为标的资产的* $gamma = 0, delta = 1$ *所以增加英镑不影响组合的gamma）*

综上，需要持有**4000份期权多头以及1950英镑空头**，可以使得gamma和delta中性。

b. vega与delta中性

首先考虑vega中性，如需要中性，那么需要交易所的期权的 $gamma = 4000$ ，即需要持有 $4000/0.8 = 5000$ 份期权多头。

此时整个组合的 $delta = 5000 * 0.6 - 450 = 2550$ ，需要 $delta = -2550$ 来维持中性。即需要持有2550英镑空头 *（因为标的资产的* $vega = 0, delta = 1$ *所以增加英镑不影响组合的vega）*

综上，需要持有**5000份期权多头以及2550英镑空头**，可以使得vega和delta中性。

19.25

【问题】再次考虑问题19.24中的情况。假设第二个交易期权的delta为0.1，gamma为0.5，vega为0.6。如何使投资组合保持delta、gamma和vega中性?

【解答】

首先考虑gamma和vega中性，设两个交易期权的数量分别为 w_1、 w_2 ，可以列出方程

$$\begin{cases} 1.5w_1 + 0.5w_2 = 6000 \\ 0.8w_1 + 0.6w_2 = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 3200 \\ w_2 = 2400 \end{cases}$$

此时组合的 $delta = -450 + 3200 \times 0.6 + 2400 \times 0.1 = 1710$

因此应持有**3200份第一种可交易期权多头**，**2400份第二种可交易期权多头**，**1710英镑空头**才能保证资产组合达到delta、gamma和vega中性。