学院__________姓名__________学号__________任课老师________考场教室__________选课号/座位号______

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

电子科技大学2015-2016学年第 2 学期期 末 考试 B 卷

随机信号分析参考答案

一、设随机过程$\{X(t)=A\cos t,-\infty<t<+\infty\}$，其中$A$是随机变量，其分布律为$P\{A=i\}=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$，求：

（1）一维分布函数$F\left(\frac{\pi}{4},x\right)$，$F\left(\frac{\pi}{2},x\right)$；

（2）二维分布函数$F\left(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2\right)$；

（3）$m_X(t)$，$C_X(t_1,t_2)$。

解：（1）

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	0
P	1

$$F_X(x,\pi/4)=\frac{1}{3}u\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{3}u\left(x-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}u\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$F_X(x,\frac{\pi}{2})=u(x)$$

（2）$\{X(t)=A\cos t,-\infty<t<+\infty\}$,样本

$$x_1(t)=\cos t\quad,x_2(t)=2\cos t\quad,x_3(t)=3\cos t$$

$\left\{x_1(0)=1\quad,x_1(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\right\}$，概率$\frac{1}{3}$

$\left\{x_2(0)=2\quad,x_2(\frac{\pi}{3})=1\right\}$，概率$\frac{1}{3}$

$\left\{x_3(0)=3\quad,x_3(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\right\}$，概率$\frac{1}{3}$

故二维分布函数为：

$F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})$

$=\frac{1}{3}u\left(x_1-1,x_2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}u\left(x_1-2,x_2-1\right)+\frac{1}{3}u\left(x_1-3,x_2-\frac{3}{2}\right)$

（3）$m_X(t)=E[X(t)]=2\cos t$

$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$=\frac{1}{3}(\cos t_1\cos t_2+4\cos t_1\cos t_2+9\cos t_1\cos t_2)$

$=\frac{14}{3}\cos t_1\cos t_2$

$C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

$=\frac{14}{3}\cos t_1\cos t_2-4\cos t_1\cos t_2$

$=\frac{2}{3}\cos t_1\cos t_2$

二、设随机过程 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，其中 ω 为常数，A 和 B 是两个相互独立的服从 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量。求：

（1）$m_X(t)$，$C_X(t_1,t_2)$；

（2）$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的一维概率密度；

（3）随机变量 $X(1)$ 的特征函数；

解：（1）

$E[X(t)]=m(t)=E[A]\cos\omega t+E[B]\sin\omega t=0$

$C(s,t)$

$=R(s,t)$

$=E[(A\cos\omega s+B\sin\omega s)(A\cos\omega t+B\sin\omega t)]$

$=E(A^2)\cos\omega s\cos\omega t+E(B^2)\sin\omega s\sin\omega t$

$=\sigma^2\cos\omega s\cos\omega t+\sigma^2\sin\omega s\sin\omega t$

$=\sigma^2\cos\omega(s-t)$

（2） 因为：$m(t)=0$，$\sigma^2(t)=C(t,t)=\sigma^2$，

$X(t)\sim N(0,\sigma^2)$，其一维概率密度函数为：

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

（3）$\varphi_{X(1)}(v)=e^{-\frac{1}{2}v^2\sigma^2}$

三、随机过程 $X(\mathrm{t})=A\cos(\omega \mathrm{t}+\phi)$，式中 A、ω、ϕ 是相互独立的随机变量，其中 A 的均值为 4，方差为 24，ϕ 在 $(-\pi,\pi)$ 上均匀分布，ω 在 $(-100,100)$ 上均匀分布。试：

（1）分析随机过程 $X(\mathrm{t})$ 的广义平稳性；

（2）求 $X(\mathrm{t})$ 的功率。

解：（1）

$$E[X(\mathrm{t})]=\mathrm{E}\left[A\cos(\omega \mathrm{t}+\phi)\right]=E\left[A\right]E\left[\cos\omega t+\phi\right]=0$$

$$\begin{aligned}
R_X(t+\tau,t)&=E[X(t+\tau)X(t)]\\
&=E\left[A\cos(\omega(t+\tau)+\phi)\cdot A\cos(\omega t+\phi)\right]\\
&=E\left[A^2\right]\cdot E\left[\cos(\omega(t+\tau)+\phi)\cos(\omega t+\phi)\right]\\
&=40\times\frac{1}{2}E\left[\cos(\omega(2t+\tau)+2\phi)+\cos\omega\tau\right]\\
&=20\int_{-100}^{100}\frac{1}{200}\cos\omega\tau\, d\omega\\
&=\frac{1}{10\tau}\sin\omega\tau\Big|_{-100}^{100}\\
&=\frac{2\sin 100\tau}{10\tau}\\
&=\frac{20\sin 100\tau}{100\tau}
\end{aligned}$$

因为 $X(\mathrm{t})$ 的均值为 0，相关函数为 τ 的函数，故 $X(\mathrm{t})$ 满足广义平稳。

（2）$X(\mathrm{t})$ 的功率 $P_{X(\mathrm{t})}$ 为

$$P_{X(\mathrm{t})}=R_X(0)=20$$

四、设$X(t)$是通信发射信号，由于受信号传输损耗、传输延迟及噪声的影响，到达接收机的信号为$Y(t)=\alpha X(t-\tau_1)+N(t)$，其中$\alpha$为传输损耗系数，$\tau_1$为发射机到接收机的传输延迟，$N(t)$为加性零均值高斯白噪声。试求

（1）若$X(t)$和$Y(t)$满足联合平稳，求互相关函数$R_{XY}(\tau)$；

（2）在上述（1）条件下，$N(t)$与$X(t)$相互独立，求$R_{XY}(\tau)$。

解:（1）因为$X(t)$和$Y(t)$满足联合平稳，则$X(t)$和$Y(t)$分别满足广义平稳，其互相关函数为

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)Y(t)\right]\\
&=E\left\{X(t+\tau)\cdot\left[\alpha X(t-\tau_1)+N(t)\right]\right\}\\
&=\alpha R_X(\tau+\tau_1)+E\left[X(t+\tau)N(t)\right]
\end{aligned}
$$

（2）若$N(t)$与$X(t)$相互独立，则$N(t)$与$X(t)$无关，又$N(t)$为0均值，则$N(t)$与$X(t)$正交，所以

$$R_{XY}(t+\tau,t)=\alpha R_X(\tau+\tau_1)$$

五、对于广义平稳随机过程$X(t)$，已知均值$m_x=0$，方差$\sigma_X^2=4$，问下述函数可否作为自相关函数，为什么？（每小题2分，共10分）

（1）$R_X(\tau)=4\delta(\tau)$；

（2）$R_X(\tau)=-4e^{-|\tau|}$；

（3）$R_X(\tau)=3\left(2+3\tau^2\right)^{-1}$；

（4）$R_X(\tau)=4\left[\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right]^2$；

（5）$R_X(\tau)=2+4\cos(4\tau)$。

解：根据平稳随机信号相关函数的性质，

(1) 否，$R_X(0)=\infty\neq 4$，和题意不符合；

(2) 否，$R_X(0)=-4$，不满足非负性；

(3) 否，$R_X(0)=\dfrac{3}{2}\neq\sigma_X^2$，不符合题意；

(4) 是，符合相关性质。

(5) 否，$R_X(0)=\sigma_X^2=6$，和题意不符合。

六.假定（0, 1）的伯努利序列$X(n)\{$其中$n=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$的取值具有等概特性。试讨论$X(n)$的均值各态历经性。

解： $E[X(n)]=0.5(1-0)=0.5$ 均值平稳

$$
\begin{aligned}
R(n_1,n_2)&=E\left[X(n_1)X(n_2)\right]\\
&=\begin{cases}E[X(n_1)]E[X(n_2)]=0.25 & n_1\neq n_2\\ E[X^2(n_1)]=0.5, & n_1=n_2\end{cases}\\
&=0.25-0.25\delta(n_1-n_2)+0.5\delta(n_1-n_2)\\
&=0.25+0.25\delta(m)\\
&=R(m)
\end{aligned}
$$

相关函数平稳，所以$X(n)$是广义平稳的

$$
\begin{aligned}
C(m)&=R(m)-m_X^2\\
&=0.25+0.25\delta(m)-0.25\\
&=0.25\delta(m)
\end{aligned}
$$

又因为，$C(0)=0.25\quad,C(\infty)=0$

所以$X(n)$是均值各态历经的

七.设随机过程$X(t)=\cos(5t+\varphi),\{-\infty<t<+\infty\}$，其中$\varphi\sim U(-\pi,\pi)$，试讨论$X(t)$的广义各态历经性。（共10分）

解：

$$
\begin{aligned}
m_X(t)&=E\left[\cos(5t+\varphi)\right]=0\\
R(t&+\tau,t)\\
&=E\left\{\cos(5t+5\tau+\varphi)\cos(5t+\varphi)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\cos(5\tau)=R(\tau)
\end{aligned}
$$

$X(t)$ 广义平稳。

$$A[X(t)] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(5t+\varphi)dt = 0 = m_X$$

$$\begin{aligned}
&A[X(t+\tau)X(t)]\\
&= A\{\cos(5t+5\tau+\varphi)\cos(5t+\varphi)\}\\
&= \frac{1}{2}A\{\cos(10t+5\tau+2\varphi)+\cos(5\tau)\}\\
&= \frac{1}{2}\cos(5\tau) = R(\tau)
\end{aligned}$$

$X(t)$ 均值各态历经和相关函数各态历经，因而广义各态历经。

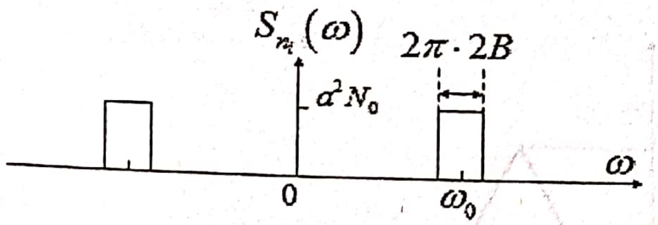
八、双边功率谱密度为 N_0 的零均值平稳高斯白噪声通过一个理想带通滤波器，此滤波器的增益为 a，中心频率为 f_0，带宽为 $2B$，其输出为 $n_i(t)$。（共 10 分）

1. $n_i(t)$ 的同相分量 $i(t)$ 及正交分量 $q(t)$ 的自相关函数和相关系数。

2. $i(t)$ 的二维概率密度函数 $f_i(i_1,i_2;t,t+\frac{1}{2B})$。

3. $i(t)$ 及 $q(t)$ 的二维联合概率密度函数。

解：1. 理想带通滤波器输出噪声 $n_i(t)$ 的功率谱：



$$S_i(\omega)=S_q(\omega)=\begin{cases}S_{n_i}(\omega+\omega_0)+S_{n_i}(\omega-\omega_0), & |\omega|\le\omega_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=2a^2N_0 \quad ,|\omega|\le 2\pi B$$

$$R_i(\tau)=R_q(\tau)=\frac{4a^2N_0\cdot 2\pi B}{2\pi}\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}=2a^2N_0\frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau}$$

$$\rho_i(\tau)=\frac{C_i(\tau)}{C_i(0)}=\frac{R_i(\tau)}{R_i(0)}=\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}=S_a(2\pi B\tau)$$

$$\rho_q(\tau)=\rho_i(\tau)=S_a(2\pi B\tau)$$

2. $R_i(\tau)$ 的零点在 $\tau = k/2B$ 处，k 为整数

$$R_i(0) = C_i(0) = 4a^2 N_0 B$$

$$f_i(i_1, i_2; t, t+\frac{1}{2B}) = f_i(i_1; t) f_i(i_2; t+\frac{1}{2B})$$

$$= \frac{1}{8\pi a^2 N_0 B} \exp(-\frac{i_1^2 + i_2^2}{8a^2 N_0 B})$$

3. $n_i(t)$ 的功率谱关于 ω_0 偶对称，其同相分量 $i(t)$ 及正交分量 $q(t)$ 处处正交、无关、独立

$$f_{iq}(i, q; t_1, t_2) = f_i(i; t_1) f_{iq}(q; t_2)$$

$$= \frac{1}{8\pi a^2 N_0 B} \exp(-\frac{i^2 + q^2}{8a^2 N_0 B})$$

九、（共 10 分） 设有一个广义平稳信号 S(t)，通过线性时不变系统后的信号为 X(t)，S(t)的带宽远大于系统带宽。*X(t)* 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-a|\tau|}$ $(a>0)$，将 *X(t)* 作用到冲激响应为 $h(t) = e^{-bt} u(t)$ $(b>0, a\neq b)$ 的系统上，系统的输出信号为 *Y(t)*。试求

（1）*Y(t)* 的功率谱密度与自相关函数；

（2）*Y(t)* 的均方值函数；

（3）*Y(t)* 的一维概率密度函数。

解：（1）依题 X(t)是高斯随机信号

$$h(t) = e^{-bt}u(t) \quad \leftrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-a|\tau|} \quad \leftrightarrow \quad S_X(\omega) = \frac{2a\sigma_X^2}{a^2 + \omega^2}$$

$$\therefore S_Y(\omega) = S_X(\omega) \left|H(j\omega)\right|^2$$

$$= \frac{2a\sigma_X^2}{a^2 + \omega^2} \times \frac{1}{b^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{2a\sigma_X^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{a^2 + \omega^2} - \frac{1}{b^2 + \omega^2} \right)$$

$$R_Y(\tau)=\frac{a\sigma_X^2}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}e^{-a|\tau|}-\frac{1}{b}e^{-b|\tau|}\right)$$

（2）$E[Y^2(t)]=R_Y(0)=\dfrac{\sigma_X^2}{b(a+b)}$

（3）高斯信号X(t)通过LTI系统后输出 $Y(t)$ 仍然是高斯信号

由 $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-a|\tau|}\ (a>0)$，$m_x^2=R_X(\infty)=0$

$$m_Y=m_X H(j0)=0$$

$$\sigma_Y^2=R_Y(0)-m_Y^2=R_Y(0)=\frac{\sigma_X^2}{b(a+b)}$$

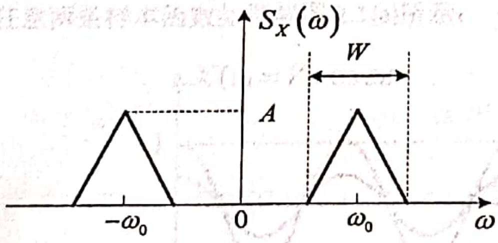
$$f_Y(y,t)=\sqrt{\frac{b(a+b)}{2\pi\sigma_X^2}}e^{-\frac{b(a+b)y^2}{2\sigma_X^2}}$$

十、若零均值平稳窄高斯随机信号 $X(t)$ 的功率谱密度如下图所示，试求：（共10分）

（1）$X(t)$ 的两个基带分量 $i(t)$ 和 $q(t)$ 的功率谱；

（2）$X(t)$ 的一维概率密度函数；

（3）$i(t)$ 和 $q(t)$ 的二维联合概率密度函数。



解：（1）

$$S_i(\omega)=S_q(\omega)=\begin{cases}S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0), & |\omega|\le\dfrac{W}{2}\\ 0, & others\end{cases}$$

$$=2A\cdot tri\left(\frac{\omega}{W/2}\right)$$

（2）基于功率谱计算功率得：

$$P=\sigma_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega=\frac{AW}{2\pi}$$

由题意，$X(t)\sim N(0,\sigma_X^2)$，所以$X(t)$的一维概率密度函数为：

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}=\frac{1}{\sqrt{AW}}e^{-\frac{\pi x^2}{AW}}$$

（3）$i(t),q(t)$与$X(t)$有相同的均值和方差，且同为高斯信号；又因为$X(t)$的功率谱关于中心频率ω_0偶对称，所以有$S_{iq}(\omega)=0$，即$R_{iq}(\tau)=0$，所以$i(t),q(t)$处处正交、互不相关和独立，于是：