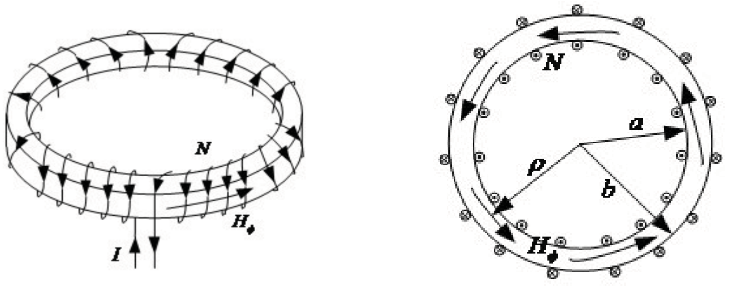
得 分

三、计算题（共64分）

1. 一个在圆环上密绕N匝的线圈如图1(a)、(b)所示，线圈内外介质为空气。圆环的内外半径分别为a 和b ，环的高度为h 。若线圈通过的电流为I ，试求（1）圆环内的磁场强度，（2）磁感应强度，（3）圆环内的总磁通，（4）线圈的外自感L_0。（18分）



•　　　　　　　　　　　　　(b)

图 1

解：　图 1（b）示圆环和线圈的截面图。应用安培环路定律可知，磁场强度仅存在于圆环内部。在环内任意半径ρ 的磁场强度在$\vec{e}_\phi$ 方向，其幅度为常数。所包围的总电流为NI ，

因此由安培环路定律：　$\oint_C \overline{H}\cdot\overline{dl} = \sum I$　（3 分）

圆环内部的磁场强度为

$$\overline{H} = \frac{NI}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \qquad a \le \rho \le b$$　（3 分）

在圆环内部任意半径为ρ的磁感应强度为$\vec{B}$

$$\overline{B} = \mu_0\overline{H} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \qquad a \le \rho \le b$$　（3 分）

圆环内部的总磁通为

$$\varPhi = \int \overline{B}\cdot\overline{ds}$$　（3 分）

$$\varPhi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}\int_0^h dz = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln(b/a)$$　（3 分）

线圈的外自感为

$$L_0 = \frac{N\varPhi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln(b/a)$$　（3 分）

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{J}}{\sigma_2}=\vec{e}_\rho\frac{\sigma_1U_0}{\rho\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ ~~（1分）~~

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\sigma_1}=\vec{e}_\rho\frac{\sigma_2U_0}{\rho\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ ~~（1分）~~

~~（2）~~

$$G=\frac{I}{U}$$ ~~（1分）~~

$$=\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}}$$ ~~（2分）~~

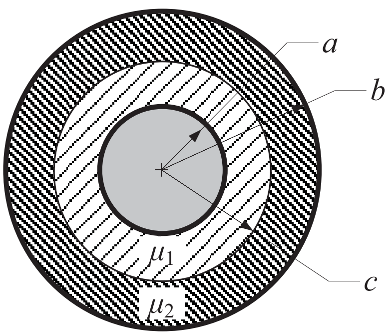
~~（3）介质分界面上的面电荷密度~~

~~由~~ $$\rho_s=\vec{e}_n\bullet\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)\Big|_{\rho=b}$$ ~~（1分）~~

$$=\vec{e}_\rho\bullet\left(\varepsilon_1\vec{E}_1-\varepsilon_2\vec{E}_2\right)\Big|_{\rho=b}$$

$$=\frac{\left(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma_1\right)U_0}{b\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ ~~（2分）~~

3. （18分）均匀同轴线的横截面如图所示，内导体半径为 a，外导体半径为 b（厚度忽略），内外导体间充满磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种介质，分界面半径为 c。导体中通有电流 I，试求：1）导体间的磁感应强度矢量和磁场强度矢量；
   2）同轴线单位长度储存的磁场能量；
   3）同轴线单位长度的自感；
   4）介质分界面上的磁化电流面密度。



题 3

1）　考虑边界条件，磁场强度在介质分界面连续，$H_{1t}=H_{2t}$

由安培环路定理，

当 $0<\rho<a$， $\vec{H}_0=\vec{e}_\phi\dfrac{\rho I}{2\pi a^2}$， $\vec{B}_0=\vec{e}_\phi\dfrac{\mu_0\rho I}{2\pi a^2}$ （2 分）

当 $a<\rho<c$， $\vec{H}_1=\vec{e}_\phi\dfrac{I}{2\pi\rho}$ ， $\vec{B}_1=\vec{e}_\phi\dfrac{\mu_1 I}{2\pi\rho}$ （2 分）

当 $c<\rho<b$， $\vec{H}_2=\vec{e}_\phi\dfrac{I}{2\pi\rho}$， $\vec{B}_2=\vec{e}_\phi\dfrac{\mu_2 I}{2\pi\rho}$ （2 分）

2）三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{\mathrm{m}0}=\frac{\mu_0}{2}\int_0^a\left(\frac{\rho I}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{\mathrm{m}1}=\frac{\mu_1}{2}\int_a^c\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_1 I^2}{4\pi}\ln\frac{c}{a}$$

$$W_{\mathrm{m}1}=\frac{\mu_2}{2}\int_c^b\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_2 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{c}$$

单位长度内总的磁场能量为：

$$W_{\mathrm{m}}=W_{\mathrm{m}0}+W_{\mathrm{m}1}+W_{\mathrm{m}2}=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}+\frac{\mu_1 I^2}{4\pi}\ln\frac{c}{a}+\frac{\mu_2 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{c}$$ （6 分）

3）单位长度的总自感

$$L=\frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_1}{2\pi}\ln\frac{c}{a}+\frac{\mu_2}{2\pi}\ln\frac{b}{c}$$ （3 分）

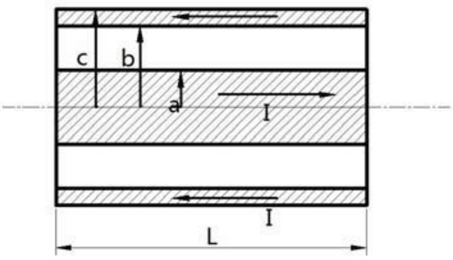
4）$\vec{J}_{SM}=\vec{e}_n\times(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\big|_{\rho=c}=-\vec{e}_\rho\times(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\big|_{\rho=c}$ （1 分）

$$\vec{B}_1=\vec{e}_\phi\frac{\mu_1 I}{2\pi\rho}\qquad \vec{M}_1=\vec{e}_\phi\frac{(\mu_1-\mu_0)I}{\mu_0 2\pi\rho}$$

$$\vec{B}_2=\vec{e}_\phi\frac{\mu_2 I}{2\pi\rho}\qquad \vec{M}_2=\vec{e}_\phi\frac{(\mu_2-\mu_0)I}{\mu_0 2\pi\rho}$$

$$\vec{J}_{SM}=\vec{e}_z\frac{(\mu_2-\mu_1)I}{\mu_0 2\pi c}$$ （2 分）

2、（20 分）同轴电缆的长度为 L，内导体半径为 a ，外导体的内、外半径分别为 b 和 c ，如图所示。导体中通有电流 I ，当 L 为无穷大时，试求同轴电缆中单位长度储存的磁场能量与自感。



解：由安培环路定理，得

$$\vec{H}=\begin{cases}\vec{e}_\phi\dfrac{\rho I}{2\pi a^2} & 0<\rho<a\\ \vec{e}_\phi\dfrac{I}{2\pi\rho} & a<\rho<b\\ \vec{e}_\phi\dfrac{I}{2\pi\rho}\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2} & b<\rho<c\\ 0 & \rho>c\end{cases}$$ 8 分

三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1}=\frac{\mu_0}{2}\int_0^a\left(\frac{\rho I}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$ 2 分

$$W_{m2}=\frac{\mu_0}{2}\int_a^b\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$ 2 分

$$W_{m3}=\frac{\mu_0}{2}\int_b^c\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ 2 分

单位长度内总的磁场能量为

$$W_m=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$
$$=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ 2 分

单位长度的总自感

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ 4 分