# 练习一

## 题目：讨论随机相位正弦随机过程的广义平稳条件

正弦随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中随机变量A的均值为m和方差为$\sigma^2$，服从特征函数为$\phi(v)$的某种分布，$\Theta$与A统计独立。讨论$\phi(v)$ 在什么条件下$X(t)$是广义平稳性的。

# 练习一

**解：** $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$

$$E[X(t)]=\frac{m_A}{2}\left\{e^{j\omega_0 t}\Phi_\Theta(1)+e^{-j\omega_0 t}\Phi_\Theta^*(1)\right\}$$

$$E[X(t_1)X(t_2)]=\frac{E(A^2)}{2}E\begin{bmatrix}\cos\omega_0(t_1-t_2)+\\ \frac{1}{2}\left\{e^{j\omega_0(t_1+t_2)}\Phi_\Theta(2)+e^{-j\omega_0(t_1+t_2)}\Phi_\Theta^*(2)\right\}\end{bmatrix}$$

广义平稳的充要条件是 $\boxed{\phi_\Theta(1)=\phi_\Theta(2)=0}$

当Θ服从均匀分布 $U(-\pi,\pi)$ $\phi_\Theta(v)=\dfrac{\sin\pi v}{\pi v}$ 满足条件

# 练习二

## 题目：

随机过程由下述三个样本函数组成，且等概率发生：

$X(t,\xi_1)=1$、$X(t,\xi_2)=\sin t$ 与 $X(t,\xi_3)=\cos t$

（1）计算均值 $m_X(t)$ 和自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$

（2）该随机过程 $X(t)$ 是否平稳？

# 练习二

## 解答：

| X（t） | 1 | sint | cost |
|---|---|---|---|
| P | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

$$(1) m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times \sin t+\frac{1}{3}\times \cos t=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\cos t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\frac{1}{3}\times 1\times 1+\frac{1}{3}\times \sin t_1\times \sin t_2+\frac{1}{3}\times \cos t_1\times \cos t_2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2+\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$$

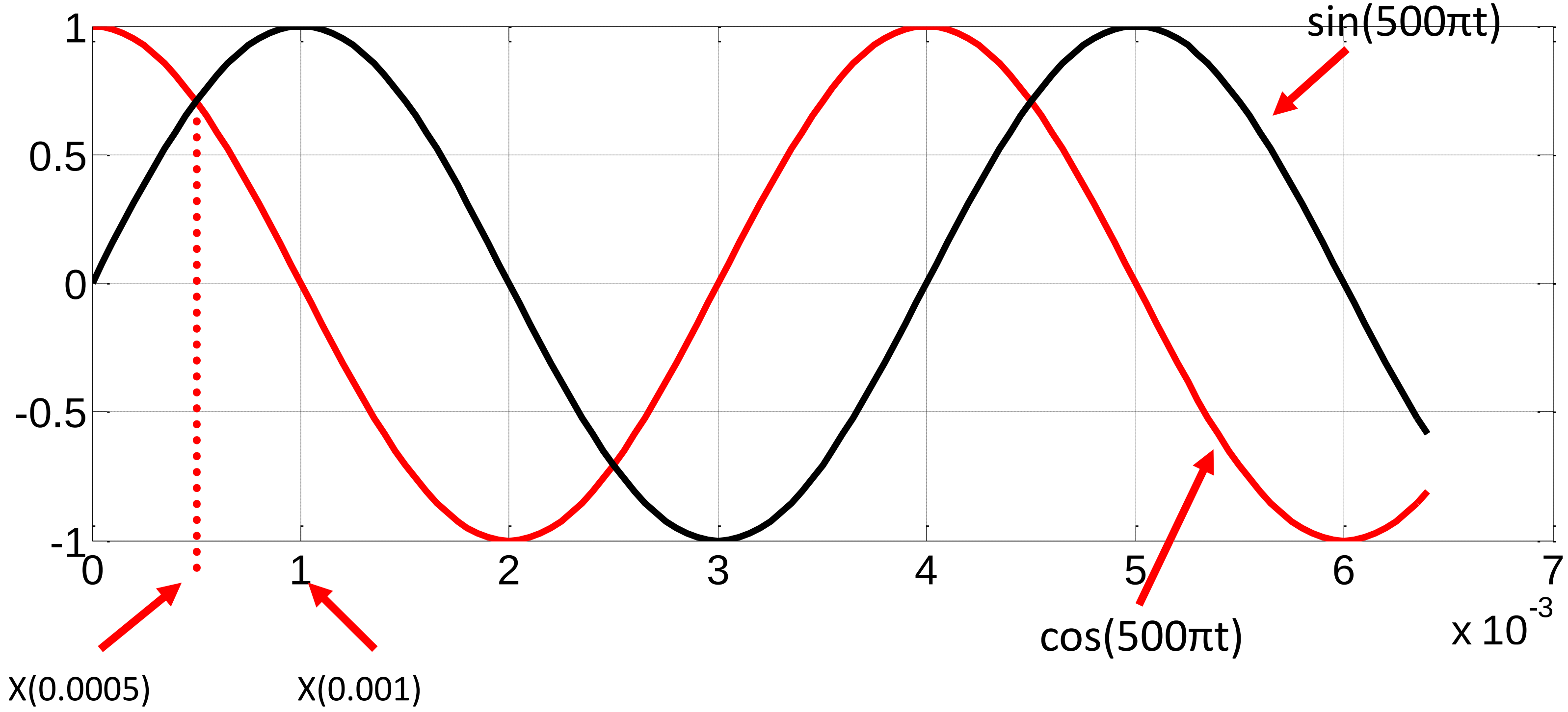
(2) $\because m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\cos t$，它与 t 有关,而不是常数， $\therefore$ 随机过程 X(t)不是平稳过程。

# 练习三：题目

掷硬币实验产生过程：正面产生正弦波、反面产生余弦波，等概率。求：

(1)t1=1ms与t2=0.5ms时的二维联合概率密度

(2)任意t1, t2时的二维联合概率密度。



# 练习三：解答

**解：** （1）正、反面概率都为 0. 5，取值分别为，

$$\{X(0.0005,H),X(0.001,H)\}=\{0.707,0\};$$

$$\{X(0.0005,T),X(0.001,T)\}=\{0.707,1\}$$

于是，

$$f_{X(0.0005),X(0.001)}(x,y)$$
$$=0.5\delta(x-0.707,y)+0.5\delta(x-0.707,y-1)$$

# 练习三：解答

（2）正、反面概率都为 0.5，取值分别为

$$\{X(t_1,H),X(t_2,H)\}=\{\cos(500\pi t_1),\cos(500\pi t_2)\}$$

$$\{X(t_1,T),X(t_2,T)\}=\{\sin(500\pi t_1),\sin(500\pi t_2)\}$$

于是，

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)=0.5\delta(x-\cos(500\pi t_1),y-\cos(500\pi t_2))$$

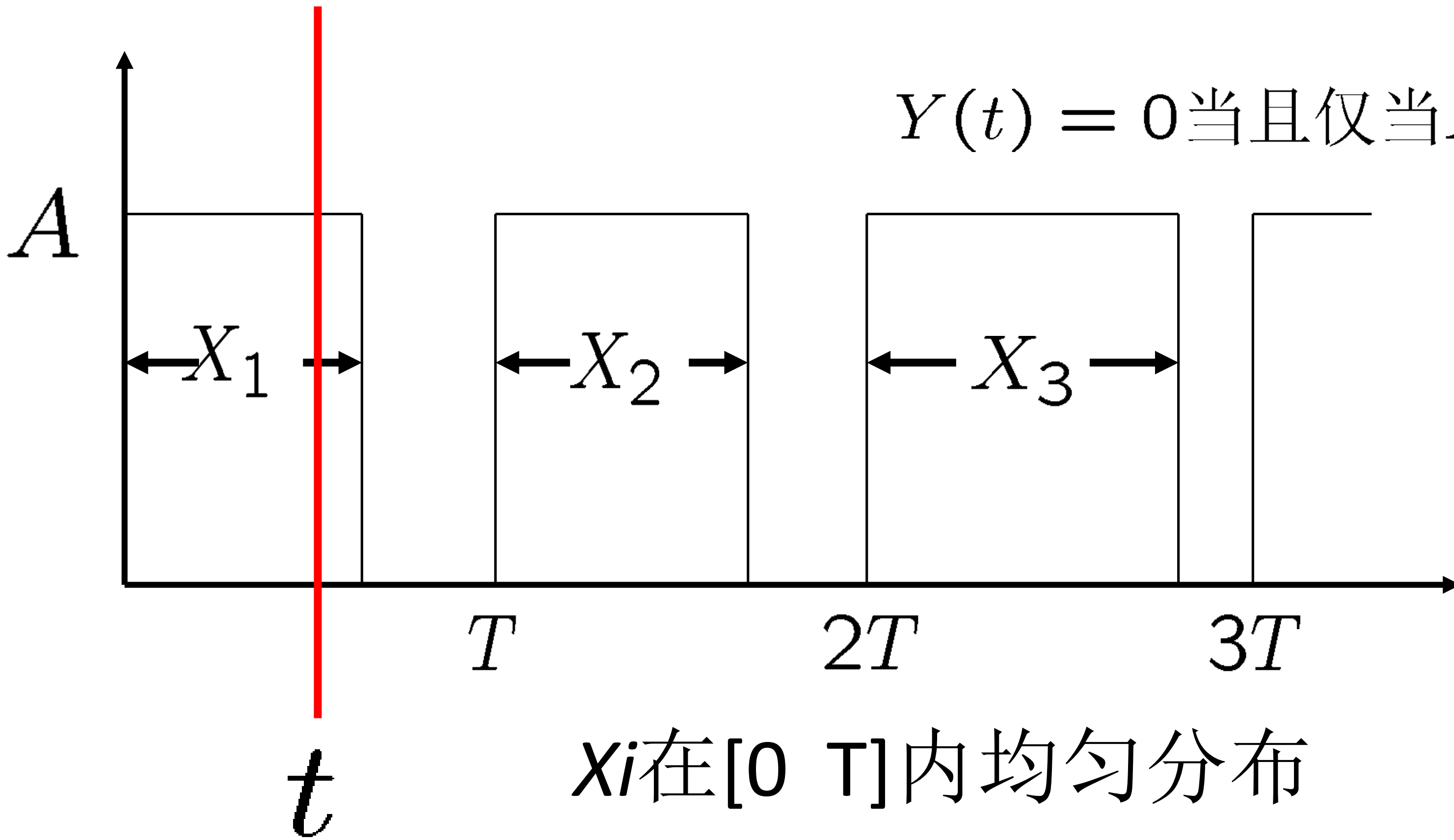
$$+0.5\delta(x-\sin(500\pi t_1),y-\sin(500\pi t_2))$$

# 练习四：题目

求 $f_Y(y;t)$

$Y(t) = A$当且仅当$X_1 > t$;

$Y(t) = 0$当且仅当$X_1 \le t$




*Xi*在[0 T]内均匀分布

# 练习四：解答

$$P[Y(t)=A]=P\left[X_1 \geq t\right]=\int_t^T \frac{1}{T}dt=\frac{T-t}{T} \quad , \quad t\in\left[0 \quad T\right]$$

$$P[Y(t)=0]=P\left[X_1 < t\right]=\int_0^t \frac{1}{T}dt=\frac{t}{T} \quad , \quad t\in\left[0 \quad T\right]$$

$$f_Y\left(y;t\right)=\frac{T-t}{T}\delta\left(y-A\right)+\frac{t}{T}\delta\left(y\right) \quad , \quad t\in\left[0 \quad T\right]$$

对任意的t，有：

$$f_Y\left(y;t\right)=\frac{T-\left(t-\left\lfloor \frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\delta\left(y-A\right)+\frac{\left(t-\left\lfloor \frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\delta\left(y\right) \quad , \quad t\in[0 \quad +\infty)$$

$$E\left[Y(t)\right]=\frac{T-\left(t-\left\lfloor \frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\times A+\frac{t-\left\lfloor \frac{t}{T}\right\rfloor T}{T}\times 0=\frac{T-\left(t-\left\lfloor \frac{t}{T}\right\rfloor T\right)}{T}\times A$$