2.3 电荷 q 均匀分布在半径为 a 的导体球面上，当导体球以角速度 ω 绕通过球心的 z 轴旋转时，试计算导体球面上的面电流密度。

解 导体球上的面电荷密度为

$$\rho_S = \frac{q}{4\pi a^2}$$

球面上任一点的位置矢量为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r a$，当导体球以角速度 ω 绕通过球心的 z 轴旋转时，该点的线速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_z \omega \times \boldsymbol{e}_r a = \boldsymbol{e}_\phi \omega a \sin\theta$$

则得导体球面上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_S = \rho_S \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{q\omega}{4\pi a} \sin\theta$$

2.6 在真空中，点电荷 $q_1 = -0.3\mu c$ 位于点 A(25,-30,15)；点电荷 $q_2 = 0.5\mu c$ 位于点 B(-10,8,12)。求：（1）坐标原点处的电场强度；（2）点 P(15,20,50)处的电场强度。

解 （1）源点的位置矢量及其大小分别为

$$\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{e}_x 25 - \boldsymbol{e}_y 30 + \boldsymbol{e}_z 15, \quad |\boldsymbol{r}_1'| = \sqrt{25^2 + 30^2 + 15^2} = 41.83$$

$$\boldsymbol{r}_2' = -\boldsymbol{e}_x 10 + \boldsymbol{e}_y 8 + \boldsymbol{e}_z 12, \quad |\boldsymbol{r}_2'| = \sqrt{10^2 + 8^2 + 12^2} = 17.55$$

而场点 O 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0 = 0$，故坐标原点处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1'|^3}(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1') + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_2'|^3}(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_2')\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-0.3\times10^{-6}}{(41.83)^3}(-\boldsymbol{e}_x 25 + \boldsymbol{e}_y 30 + \boldsymbol{e}_z 15) + \frac{0.5\times10^{-6}}{(17.55)^3}(\boldsymbol{e}_x 10 - \boldsymbol{e}_y 8 - \boldsymbol{e}_z 12)\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_x 9.237 - \boldsymbol{e}_y 7.762 - \boldsymbol{e}_z 9.437 \quad \text{V/m}$$

（2）场点 P 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{e}_x 15 + \boldsymbol{e}_y 20 + \boldsymbol{e}_z 50$$

故

$$\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_1' = -\boldsymbol{e}_x 10 + \boldsymbol{e}_y 50 + \boldsymbol{e}_z 35$$

$$\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{e}_x 25 + \boldsymbol{e}_y 12 + \boldsymbol{e}_z 38$$

则

$$\boldsymbol{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-0.3\times10^{-6}}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_1'|^3}(-\boldsymbol{e}_x 10 + \boldsymbol{e}_y 50 + \boldsymbol{e}_z 35) + \frac{0.5\times10^{-6}}{|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_2'|^3}(\boldsymbol{e}_x 25 + \boldsymbol{e}_y 12 + \boldsymbol{e}_z 38)\right]$$

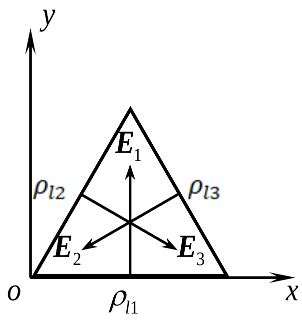
$$= \boldsymbol{e}_x 1.194 - \boldsymbol{e}_y 0.0549 + \boldsymbol{e}_z 1.24 \quad \text{V/m}$$

2.9 三根长度均为 L、线电荷密度分别为 ρ_{l1}、ρ_{l2} 和 ρ_{l3} 的线电荷构成一个等边三角形，

设 $\rho_{l1}=2\rho_{l2}=2\rho_{l3}$，试求三角形中心的电场强度。

解　根据题意建立题 2.9 图所示的坐标系。三角形中心到各边的距离为

$$d=\frac{L}{2}\tan 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{6}L$$



题 2.9 图

直接利用有限长直线电荷的电场强度公式

$$E_r=\frac{\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

得

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_y\frac{\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos 30^{\circ}-\cos 150^{\circ})=\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0 L}$$

$$\boldsymbol{E}_2=-(\boldsymbol{e}_x\cos 30^{\circ}+\boldsymbol{e}_y\sin 30^{\circ})\frac{3\rho_{l3}}{2\pi\varepsilon_0 L}=-(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}$$

$$\boldsymbol{E}_3=(\boldsymbol{e}_x\cos 30^{\circ}-\boldsymbol{e}_y\sin 30^{\circ})\frac{3\rho_{l2}}{2\pi\varepsilon_0 L}=(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}-\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}$$

故等边三角形中心处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0 L}-(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}+(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}-\boldsymbol{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}=\boldsymbol{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

2.11　自由空间有三个无限大的均匀带电平面：位于点(0,0,-4)处的平面上 $\rho_{S1}=3\text{nC/m}^2$，位于点(0,0,1)处的平面上 $\rho_{S2}=6\text{nC/m}^2$，位于点(0,0,4)处的平面上 $\rho_{S3}=-8\text{nC/m}^2$。试求以下各点的 $\boldsymbol{E}$：（1） $P_1(2,5,-5)$；（2） $P_2(-2,4,5)$；（3） $P_3(-1,-5,2)$。

解　无限大的均匀面电荷产生的电场为均匀场，利用前面的结果得

（1）

$$\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S1}}{2\varepsilon_0}-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S2}}{2\varepsilon_0}-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S3}}{2\varepsilon_0}=$$

$$-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\varepsilon_0}(3+6-8)\times10^{-9}=$$

$$-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\times8.85\times10^{-12}}\times10^{-9}=-\boldsymbol{e}_z 56.49\text{ V/m}$$

（2）

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S1}}{2\varepsilon_0}+\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S2}}{2\varepsilon_0}+\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S3}}{2\varepsilon_0}=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\varepsilon_0}(3+6-8)\times10^{-9}=\boldsymbol{e}_z 56.49\text{ V/m}$$

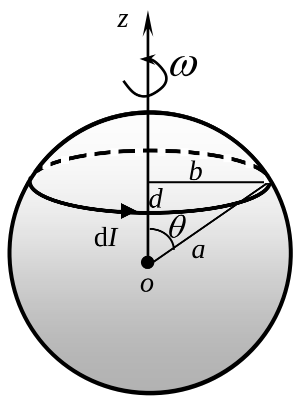
（3）

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S1}}{2\varepsilon_0}+\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S2}}{2\varepsilon_0}-\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S3}}{2\varepsilon_0}=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\varepsilon_0}(3+6+8)\times10^{-9}=\boldsymbol{e}_z 960.5\text{ V/m}$$

2.13　一个半径为 a 的导体球带电荷量为 q，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时（如题 2.13 图所示），试求球心处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$

解　导体球面上的面电荷密度为 $\rho_S=\dfrac{q}{4\pi a^2}$，当球体以均匀角速度



题 2.13 图

ω绕一个直径旋转时，球面上位置矢量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r a$点处的电流面密度为

$$\boldsymbol{J}_S=\rho_S\boldsymbol{v}=\rho_S\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\rho_S\boldsymbol{e}_z\omega\times\boldsymbol{e}_r a=$$
$$\boldsymbol{e}_\phi\omega\rho_S a\sin\theta=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\omega q}{4\pi a}\sin\theta$$

将球面划分为无数个宽度为$\mathrm{d}l=a\,\mathrm{d}\theta$的细圆环，则球面上任一个宽度为$\mathrm{d}l=a\,\mathrm{d}\theta$细圆环的电流为

$$\mathrm{d}I=J_S\,\mathrm{d}l=\frac{\omega q}{4\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

该细圆环的半径为$b=a\sin\theta$，细圆环平面到球心的距离$d=a\cos\theta$，利用电流圆环的轴线上任一点的磁场公式，可得到该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 b^2\,\mathrm{d}I}{2(b^2+d^2)^{3/2}}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\omega q a^2\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{8\pi(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^{3/2}}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\omega q\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{8\pi a}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\int_0^\pi\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\omega q\sin^3\theta}{8\pi a}\mathrm{d}\theta=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\omega q}{6\pi a}$$

2.15 一条扁平的直导体带，宽度为 2a，中心线与 z 轴重合，通过的电流为 I。试证明在第一象限内任一点 P 的磁感应强度为

$$B_x=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$$
$$B_y=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

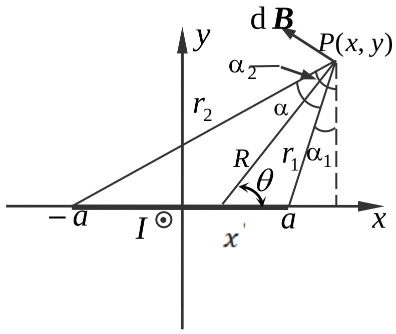
式中的α、r_1和r_2如图 2.15 图所示。

解 将导体带划分为无数个宽度为$\mathrm{d}x'$的细条带，每一细条带的电流$\mathrm{d}I=\frac{I}{2a}\mathrm{d}x'$。根据安培环路定理，可得到位于$x'$处的细条带的电流$\mathrm{d}I$在点处的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi R}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x'}{4\pi aR}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]^{1/2}}$$

故

$$\mathrm{d}B_x=-\mathrm{d}B\sin\theta=-\frac{\mu_0 Iy\,\mathrm{d}x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$
$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta=\frac{\mu_0 I(x-x')\,\mathrm{d}x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$



题 2.15 图（附）

式中的 x’如题 2.18 图（附）所示，则得

$$B_x=-\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 Iy\,\mathrm{d}x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\arctan\left(\frac{x'-x}{y}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{a-x}{y}\right)-\arctan\left(\frac{-a-x}{y}\right)\right]=$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]=$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\alpha_2-\alpha_1)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$$

$$B_y=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 I(x-x')\,\mathrm{d}\,x'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=-\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln[(x-x')^2+y^2]\Big|_{-a}^{a}=$$

$$\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

2.18 下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求出其源量 $\boldsymbol{J}$。

（1）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\rho a\rho,\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ （圆柱坐标系）

（2）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x(-ay)+\boldsymbol{e}_y ax,\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

（3）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x ax-\boldsymbol{e}_y ay,\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

（4）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi ar,\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ （球坐标系）

解 根据静态磁场的基本性质，只有满足 $\nabla\cdot B=0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，对于磁场矢量，则可由方程 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ 求出源分布。

（1）在圆柱坐标中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)=\frac{\mu_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(a\rho^2)=2a\mu_0\neq 0$$

可见矢量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\rho a\rho$ 不是磁场的场矢量。

（2） 在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial x}(-ay)+\frac{\partial}{\partial y}(ax)=0$$

故矢量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x(-ay)+\boldsymbol{e}_y ax$ 是磁场矢量，其源分布为

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -ay & ax & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z 2a$$

（3） $$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial x}(ax)+\frac{\partial}{\partial y}(-ay)=0$$

故矢量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x ax-\boldsymbol{e}_y ay$ 是磁场矢量，其源分布为

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ax & -ay & 0\end{vmatrix}=0$$

（4） 在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(ar)=0$$

故矢量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi ar$ 是磁场的场矢量，其源分布为

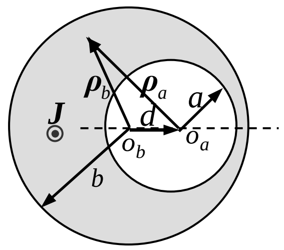
$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & 0 & ar^2\sin\theta\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_r a\cot\theta-\boldsymbol{e}_\theta 2a$$

2.19 通过电流密度为 $\boldsymbol{J}$ 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，其横截面如题 2.19 图所示。试计算各部分的磁感应强度，并证明空腔内的磁场是均匀的。

解 将题给的非对称电流分布分解为两个对称电流分布的叠加：一个是电流密度 $\boldsymbol{J}$ 均匀分布在半径为 b 的圆柱内，另一个是电流密度 $-\boldsymbol{J}$ 均匀分布在半径为 a 的圆柱内。原有的空腔被看作是同时存在 $\boldsymbol{J}$ 和 $-\boldsymbol{J}$ 两种电流密度。这样就可以利用安培环路定律分别求出两种对称电流分布的磁场，再进行叠加即可得到解答。

由安培环路定律 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot dl=\mu_0 I$，先求出均匀分布在半径为 b 的圆柱内的 $\boldsymbol{J}$ 产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_b=\begin{cases}\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\rho}_b & \rho_b<b\\ \dfrac{\mu_0 b^2}{2}\dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\rho}_b}{\rho_b^2} & \rho_b>b\end{cases}$$



题 2.19 图

同样，均匀分布再半径为 a 的圆柱内的 $-\boldsymbol{J}$ 产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_a=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\rho}_a & \rho_a<a\\ -\dfrac{\mu_0 a^2}{2}\dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\rho}_a}{\rho_a^2} & \rho_a>a\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}_a$ 和 $\boldsymbol{\rho}_b$ 分别是点 o_a 和 o_b 到场点 P 的位置矢量。

将 $\boldsymbol{B}_a$ 和 $\boldsymbol{B}_b$ 叠加，可得到空间各区域的磁场为

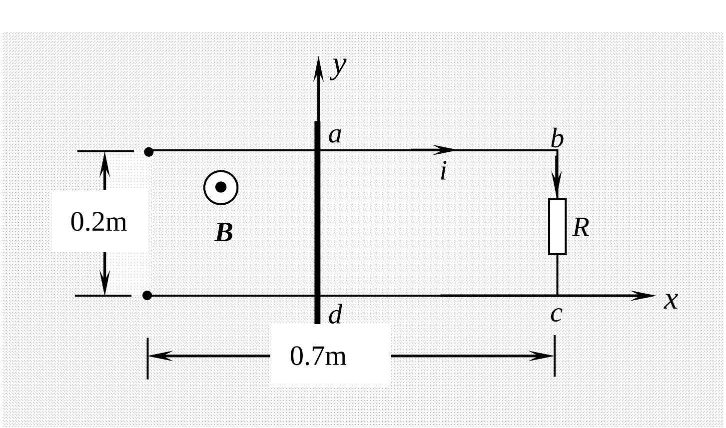
圆柱外：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\dfrac{b^2}{\rho_b^2}\boldsymbol{\rho}_b-\dfrac{a^2}{\rho_a^2}\boldsymbol{\rho}_a\right)$ $\qquad(\rho_b>b)$

圆柱内的空腔外：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\boldsymbol{\rho}_b-\dfrac{a^2}{\rho_a^2}\boldsymbol{\rho}_a\right)$ $\qquad(\rho_b<b,\ \rho_a>a)$

空腔内： $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times(\boldsymbol{\rho}_b-\boldsymbol{\rho}_a)=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{d}$ $\qquad(\rho_a<a)$

式中 $\boldsymbol{d}$ 是点和 o_b 到点 o_a 的位置矢量。由此可见，空腔内的磁场是均匀的。

2.22 一导体滑片在两根平行的轨道上滑动，整个装置位于正弦时变磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z 5\cos\omega t\ \mathrm{mT}$ 之中，如题 2.22 图所示。滑片的位置由 $x=0.35(1-\cos\omega t)\ \mathrm{m}$ 确定，轨道终端接有电阻 $R=0.2\quad\Omega$；试求感应电流 i。



题 2.22 图

解 穿过导体回路 *abcda* 的磁通为

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\cdot dS=\boldsymbol{e}_z B\cdot\boldsymbol{e}_z ab\times ad=5\cos\omega t\times 0.2(0.7-x)=$$

$$\cos\omega t\left[0.7-0.35\left(1-\cos\omega t\right)\right]=0.35\cos\omega t\left(1+\cos\omega t\right)$$

故得感应电流为

$$i=\frac{\varepsilon_{in}}{R}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{0.2}\times 0.35\omega\sin\omega t\left(1+2\cos\omega t\right)=$$

$$-1.75\omega\sin\omega t\left(1+2\cos\omega t\right)\quad \text{mA}$$

2.24 求下列情况下的位移电流密度的大小：

（1）某移动天线发射的电磁波的磁场强度

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x 0.15\cos\left(9.36\times10^8 t-3.12y\right)\quad \text{A/m}\text{；}$$

（2）一大功率变压器在空气中产生的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_y 0.8\cos\left(3.77\times10^2 t-1.26\times10^{-6}x\right)\quad \text{T}\text{；}$$

（3）一大功率电容器在填充的油中产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 0.9\cos\left(3.77\times10^2 t-2.81\times10^{-6}z\right)\quad \text{MV/m}$$

设油的相对介电常数 $\varepsilon_r=5$；

（4）工频 $\left(f=50\text{Hz}\right)$ 下的金属导体中，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_x\sin\left(377\times t-107z\right)\quad \text{MA/m}^2$，设金属导体的 $\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0,\sigma=5.8\times10^7\,\text{S/m}$。

解 （1）由 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & 0 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial H_x}{\partial y}=$$

$$-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial y}\left[0.15\cos\left(9.36\times10^8 t-3.12y\right)\right]=$$

$$-\boldsymbol{e}_z 0.468\sin\left(9.36\times10^8 t-3.12y\right)\quad \text{A/m}^2$$

故

$$\left|\boldsymbol{J}_d\right|=0.468\quad \text{A/m}^2$$

（2）由 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ 得

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial x}=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[0.8\cos\left(3.77\times10^2 t-1.26\times10^{-6}x\right)\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_z 0.802\sin\left(3.77\times10^2 t-1.26\times10^{-6}x\right)\quad \mathrm{A/m^2}$$

故

$$\left|\boldsymbol{J}_d\right|=0.802\quad \mathrm{A/m^2}$$

（3） $$\boldsymbol{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}=5\varepsilon_0\left[\boldsymbol{e}_x 0.9\times10^6\cos\left(3.77\times10^2 t-2.81\times10^{-6}z\right)\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_x 5\times8.85\times10^{-12}\times0.9\times10^6\cos\left(3.77\times10^2 t-2.81\times10^{-6}z\right)$$

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_x 15\times10^{-3}\sin\left(3.77\times10^2 t-2.81\times10^{-6}z\right)\quad \mathrm{A/m^2}$$

故

$$\left|\boldsymbol{J}_d\right|=15\times10^{-3}\quad \mathrm{A/m^2}$$

（4） $$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{1}{5.8\times10^7}\boldsymbol{e}_x 10^6\sin\left(377t-107z\right)=$$

$$\boldsymbol{e}_x 1.72\times10^{-2}\sin\left(377t-107z\right)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 8.85\times10^{-12}\times1.72\times10^{-2}\sin\left(377t-107z\right)$$

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{e}_x 15.26\times10^{-14}\times377\cos\left(377t-107z\right)=$$

$$\boldsymbol{e}_x 57.53\times10^{-12}\cos\left(377t-107z\right)\quad \mathrm{A/m^2}$$

故

$$\left|\boldsymbol{J}_d\right|=57.53\times10^{-12}\quad \mathrm{A/m^2}$$

2.25 同轴线的内导体半径 a=1mm，外导体的内半径 b=4mm，内外导体间为空气，如题 2.25 图所示。假设内、外导体间的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\rho\dfrac{100}{\rho}\cos\left(10^8 t-kz\right)$ V/m

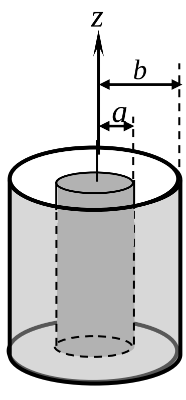
（1）求与 $\boldsymbol{E}$ 相伴的 $\boldsymbol{H}$；（2）确定 k 的值；（3）求内导体表面的电流密度；（4）求沿轴线 $0\leqslant z\leqslant 1m$ 区域内的位移电流。

解 （1）维系电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的是麦克斯韦方程。将 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ 在圆柱坐标系中展开，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_\rho}{\partial z}=$$

$$-\boldsymbol{e}_\phi\frac{100k}{\mu_0\rho}\sin\left(10^8 t-kz\right)$$

将上式对时间 t 积分，得



题 2.25 图

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{100k}{\mu_0\rho\times10^8}\cos\left(10^8t-kz\right)$$

（2）为确定 k 值，将上述 $\boldsymbol{H}$ 代入 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，得

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_{\rho}}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho H_{\phi}\right)\right]=-\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{100k^2}{\mu_0\varepsilon_0\rho\times10^8}\sin\left(10^8t-kz\right)$$

将上式对时间 t 积分，得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{100k^2}{\mu_0\varepsilon_0\rho\times\left(10^8\right)^2}\cos\left(10^8t-kz\right)$$

将其与题给的 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{\rho}\dfrac{100}{\rho}\cos\left(10^8t-kz\right)$ 比较，得

$$k^2=\left(10^8\right)^2\mu_0\varepsilon_0$$

故

$$k=10^8\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{10^8}{3\times10^8}=\frac{1}{3}\quad\text{rad/m}$$

因此，同轴线内、外导体之间的电场和磁场表示式分别为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{100}{\rho}\cos\left(10^8t-\frac{1}{3}z\right)\quad\text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{100}{120\pi\rho}\cos\left(10^8t-\frac{1}{3}z\right)\quad\text{A/m}$$

（3）将内导体视为理想导体，利用理想导体的边界条件即可求出内导体表面的电流密度

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}\big|_{\rho=a}=\boldsymbol{e}_{\rho}\times\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{100}{120\pi\rho}\cos\left(10^8t-\frac{1}{3}z\right)=$$

$$\boldsymbol{e}_z265.3\cos\left(10^8t-\frac{1}{3}z\right)\quad\text{A/m}$$

位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{100}{\rho}\cos(10^8t-\frac{1}{3}z)\right]$$

$$=-\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{8.85\times10^{-2}}{\rho}\sin(10^8t-\frac{1}{3}z)\quad\text{A/m}^2$$

在 $0\le z\le1\,\text{m}$ 区域中的位移电流则为

$$i_d=\int_S J_d\cdot dS=\int_0^1 J_d\cdot e_{\rho}2\pi\rho dz=-2\pi\times8.85\times10^{-2}\int_0^1\sin(10^8t-\frac{1}{3}z)dz$$

$$=-2\pi\times8.85\times10^{-2}\times3\left[\cos(10^8t-\frac{1}{3}z)\right]\Bigg|_0^1=0.55\sin(10^8t-\frac{1}{6})$$

2.26 由置于 $\rho=3\text{mm}$ 和 $\rho=10\text{mm}$ 的导体圆柱面和 z=0、z=20cm 的导体平面围成的圆柱形空间内充满 $\varepsilon=4\times10^{-11}\text{F/m},\mu=2.5\times10^{-6}\text{H/m},\sigma=0$ 的媒质。若设定媒质中的磁场强度为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\phi}\dfrac{2}{\rho}\cos10\pi z\cos\omega t\quad\text{A/m}$，利用麦克斯韦方程求：（1）$\omega$；（2）$\boldsymbol{E}$。

解 （1）将题设的 $\boldsymbol{H}$ 代入方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\rho\left(-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right)=-\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{\rho}\cos 10\pi z\cos\omega t\right)$$

$$=\boldsymbol{e}_\rho\frac{2\times 10\pi}{\rho}\sin 10\pi z\cos\omega t=\boldsymbol{e}_\rho\varepsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t}$$

对时间 t 积分，得

$$E_\rho=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{20\pi}{\rho}\sin 10\pi z\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{20\pi}{\varepsilon\omega\rho}\sin 10\pi z\sin\omega t$$

将 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\rho E_\rho$ 代入方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial E_\rho}{\partial z}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{20\pi}{\varepsilon\omega\rho}\sin 10\pi z\sin\omega t\right)$$

$$=\boldsymbol{e}_\phi\frac{200\pi^2}{\varepsilon\omega\rho}\cos 10\pi z\sin\omega t=\boldsymbol{e}_\phi\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t}$$

对时间 t 积分，得

$$H_\phi=-\frac{200\pi^2}{\mu\varepsilon\omega\rho}\cos 10\pi z\int\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{200\pi^2}{\mu\varepsilon\omega^2\rho}\cos 10\pi z\cos\omega t$$

将上式与题设的 $H_\phi=\dfrac{2}{\rho}\cos 10\pi z\cos\omega t$ 对比，得

$$\omega^2=\frac{100\pi^2}{\mu\varepsilon}=\frac{100\pi^2}{2.5\times 10^{-6}\times 4\times 10^{-11}}=\pi^2\times 10^{18}$$

故

$$\omega=\pi\times 10^9\quad\text{rad/s}$$

（2）将 $\omega=\pi\times 10^9\,\text{rad/s},\varepsilon=4\times 10^{-11}\,\text{F/m}$ 代入 $E_\rho=\dfrac{20\pi}{\varepsilon\omega\rho}\sin 10\pi z\sin\omega t$ 中，得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\rho\frac{20\pi}{4\times 10^{-11}\times\pi\times 10^9\rho}\sin 10\pi z\sin\left(10^9 t\right)$$

$$=\boldsymbol{e}_\rho\frac{10^3}{2\rho}\sin 10\pi z\sin\left(10^9 t\right)\quad\text{V/m}$$

2.27 媒质 1 的电参数为 $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$、$\mu_1=2\mu_0$、$\sigma_1=0$；媒质 2 的电参数为 $\varepsilon_2=2\varepsilon_0$、$\mu_2=3\mu_0$、$\sigma_2=0$。两种媒质分界面上的法向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x0.64+\boldsymbol{e}_y0.6-\boldsymbol{e}_z0.48$，由媒质 2 指向媒质 1。若已知媒质 1 内邻近分界面上的点 P 处 $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z3\right)\sin 300t\ \text{T}$，求 P 点处下列量的大小：$(1)B_{1n}$；$(2)B_{1t}$；$(3)B_{2n}$；$(4)B_{2t}$。

解 （1）$\boldsymbol{B}_1$ 在分界面法线方向的分量为

$$B_{1n}=\left|\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{e}_n\right|=\left|(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z3)\cdot(\boldsymbol{e}_x0.64+\boldsymbol{e}_y0.6-\boldsymbol{e}_z0.48)\right|$$

$$=\left|0.64-1.2-1.44\right|=2T$$

（2）
$$B_{1t}=\left|\sqrt{B_1^2-B_{1n}^2}\right|=\left|\sqrt{1+2^2+3^2-2^2}\right|=3.16\,\text{T}$$

（3）利用磁场边界条件，得

$$B_{2n} = B_{1n} 2\ \mathrm{T}$$

（4）利用磁场边界条件，得

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0} \times 3.16 = 4.74\ \mathrm{T}$$

2.28 媒质 1 的电参数为$\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$、$\mu_1 = 3\mu_0$、$\sigma_1 = 0$，媒质 2 可视为理想导体$(\sigma_2 = \infty)$。设 y=0 为理想导体表面，y>0 的区域（媒质 1）内的电场强度

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y 20\cos\left(2\times10^8 t - 2.58z\right) \quad \mathrm{V/m}$$

试计算 t=6ns 时：（1）点 P(2,0,0.3)处的面电荷密度ρ_s；（2）点 P 处的 $\boldsymbol{H}$；（3）点 P 处的面电流密度$\boldsymbol{J}_S$。

解 （1）$\rho_S = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{D}\big|_{y=0} = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y 20\times5\varepsilon_0 \cos(2\times10^8 t - 2.58z) =$

$$20\times5\times8.85\times10^{-12}\cos\left(2\times10^8\times6\times10^{-9} - 2.58\times0.3\right) =$$

$$80.6\times10^{-11} \quad \mathrm{C/m^2}$$

（2）由$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\mu}\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \boldsymbol{e}_x\frac{1}{3\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[20\cos\left(2\times10^8 t - 2.58z\right)\right] =$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{1}{3\mu_0}20\times2.58\sin\left(2\times10^8 t - 2.58z\right)$$

对时间 t 积分，得

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x\frac{1}{3\mu_0}20\times2.58\int\sin\left(2\times10^8 t - 2.58z\right)\mathrm{d}t =$$

$$-\boldsymbol{e}_x\frac{20\times2.58}{3\mu_0\times2\times10^8}\cos\left(2\times10^8 t - 2.58z\right) =$$

$$-\boldsymbol{e}_x\frac{20\times2.58}{3\times4\pi\times10^{-7}\times2\times10^8}\cos\left(2\times10^8\times6\times10^{-9} - 2.58\times0.3\right) =$$

$$-\boldsymbol{e}_x 62.3\times10^{-3} \quad \mathrm{A/m}$$

（3）$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}\big|_{y=0} = \boldsymbol{e}_y\times\left(\boldsymbol{e}_x H_x\right)\big|_{y=0} = \boldsymbol{e}_z 62.3\times10^{-3} \quad \mathrm{A/m}$