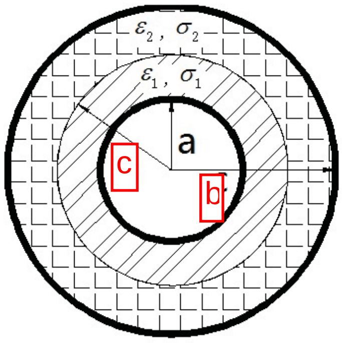
3、（15 分）有一无限长同轴线，其内部填充有两层不同材质的介质材料，如下图所示，两种介质材料的介电常数分别为ε_1 和ε_2，漏电导率分别为σ_1 和σ_2，若在同轴线的内外导体间加电压 U，试求（1）介质中的电场分布（2）介质分界面上的电荷密度。



解：（1）介质中的电场分布，假设单位长度的同轴线的径向电流为 I，则有

$$J_r = I/2\pi r,\quad E_1 = J_r/\sigma_1 = I/2\pi r\sigma_1,\quad E_2 = J_r/\sigma_2 = I/2\pi r\sigma_2$$ 3 分

$$U = \int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = \int_a^c E_1 dr + \int_c^b E_2 dr$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_a^c \frac{dr}{r} + \frac{1}{2\pi\sigma_2}\int_c^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{c}{a} + \frac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{b}{c}$$ 2 分

由此可得： $I = \dfrac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2\ln\frac{c}{a} + \sigma_1\ln\frac{b}{c}}$ 2 分

故：$E_1 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_1 r} = \dfrac{\sigma_2 U}{(\sigma_2\ln(\frac{c}{a}) + \sigma_1\ln(\frac{b}{c}))r}$，$E_2 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_2 r} = \dfrac{\sigma_1 U}{(\sigma_2\ln(\frac{c}{a}) + \sigma_1\ln(\frac{b}{c}))r}$

4 分

（2）介质分界面上的电荷密度

$$\rho_s = (D_{2n} - D_{1n})/_{r=c} = (\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n})/_{r=c}$$
$$= \frac{(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2)U}{c（\sigma_2\ln\frac{c}{a} + \sigma_1\ln\frac{b}{c}）}$$ 4 分

$$\cancel{\rho_{sp1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}\cdot(-\vec{e}_r)\Big|_{r=a}} = \frac{\cancel{Q}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi \cancel{a}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$ ~~（2 分）~~

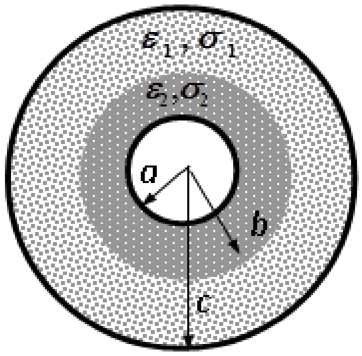
$$\cancel{\rho_{sp2} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}\cdot(-\vec{e}_r)\Big|_{r=a} = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$$ ~~（2 分）~~

2. （18 分）同轴电缆的内导体半径为 a，外导体半径为 c（厚度忽略）；内、外导体之间填充两层有损耗介质，其介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，电导率分别为和 σ_1, σ_2，两层介质的分界面为同轴圆柱面，分界面半径为 b。当外加电压 U_0 时，试求：

（1）介质中的电流密度和电场强度分布；

（2）内外导体间的漏电导；

（3）介质分界面上的自由电荷面密度。



题 2

解：（1）设单位长度同电缆的径向电流为 I，则由

$$\int_s \vec{J}\bullet d\vec{S} = I \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad \text{（2 分）}$$

因为：

$$J_{1n} = J_{2n}, E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\rho\sigma} \qquad \text{（2 分）}$$

有：

$$E_2 = \frac{J}{\sigma_2} = \frac{I}{2\pi\sigma_2\rho} \quad (a < \rho < b) \qquad \text{（1 分）}$$

$$E_1 = \frac{J}{\sigma_1} = \frac{I}{2\pi\sigma_1\rho} \quad (b < \rho < c) \qquad \text{（1 分）}$$

由于

$$U_0 = \int_a^b E_2 d\rho + \int_b^c E_1 d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{b}{a} + \frac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{c}{b} \qquad \text{（2 分）}$$

由此可得

$$I = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U_0}{\sigma_1 \ln\frac{b}{a} + \sigma_2 \ln\frac{c}{b}} \qquad \text{（1 分）}$$

故得：

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J} = \vec{e}_\rho J = \vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi r} = \vec{e}_\rho \frac{\sigma_1\sigma_2 U_0}{\rho\left(\sigma_1 \ln\frac{b}{a} + \sigma_2 \ln\frac{c}{b}\right)} \qquad \text{（1 分）}$$

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{J}}{\sigma_2}=\vec{e}_\rho\frac{\sigma_1 U_0}{\rho\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ （1 分）

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\sigma_1}=\vec{e}_\rho\frac{\sigma_2 U_0}{\rho\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ （1 分）

（2） $$G=\frac{I}{U}$$ （1 分）

$$=\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}}$$ （2 分）

（3）介质分界面上的面电荷密度

由 $$\rho_s=\vec{e}_n\bullet\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)\Big|_{\rho=b}$$ （1 分）

$$=\vec{e}_\rho\bullet\left(\varepsilon_1\vec{E}_1-\varepsilon_2\vec{E}_2\right)\Big|_{\rho=b}$$

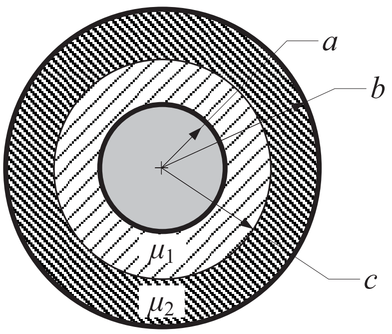
$$=\frac{\left(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma_1\right)U_0}{b\left(\sigma_1\ln\frac{b}{a}+\sigma_2\ln\frac{c}{b}\right)}$$ （2 分）

~~3. （18 分）均匀同轴线的横截面如图所示，内导体半径为 a，外导体半径为 b（厚度忽略），内外导体间充满磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种介质，分界面半径为 c。导体中通有电流 I，试求：1）导体间的磁感应强度矢量和磁场强度矢量；~~

~~2）同轴线单位长度储存的磁场能量；~~

~~3）同轴线单位长度的自感；~~

~~4）介质分界面上的磁化电流面密度。~~



题 3

~~1） 考虑边界条件，磁场强度在介质分界面连续，~~ $\cancel{H_{1t}=H_{2t}}$

~~由安培环路定理，~~