1.1 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3$$
$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x 5-\boldsymbol{e}_z 2$$

求：（1）$\boldsymbol{e}_A$；（2）$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；（3）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；（4）$\theta_{AB}$；（5）$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；（6）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；（7）$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；（8）$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解 （1）$\boldsymbol{e}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{1}{\sqrt{14}}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{2}{\sqrt{14}}-\boldsymbol{e}_z\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

（2）$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3)-(-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z)|=$

$$|\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 6-\boldsymbol{e}_z 4|=\sqrt{53}$$

（3）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3)\cdot(-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z)=-11$

（4）由 $\cos\theta_{AB}=\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\dfrac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}}=-\dfrac{11}{\sqrt{238}}$，得

$$\theta_{AB}=\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right)=135.5^\circ$$

（5）$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=-\frac{11}{\sqrt{17}}$$

（6）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x 4-\boldsymbol{e}_y 13-\boldsymbol{e}_z 10$

（7）由于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x 8+\boldsymbol{e}_y 5+\boldsymbol{e}_z 20$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x 10-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z 4$$

所以 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3)\cdot(\boldsymbol{e}_x 8+\boldsymbol{e}_y 5+\boldsymbol{e}_z 20)=-42$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x 10-\boldsymbol{e}_y 1-\boldsymbol{e}_z 4)\cdot(\boldsymbol{e}_x 5-\boldsymbol{e}_z 2)=-42$$

（8）$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x 2-\boldsymbol{e}_y 40+\boldsymbol{e}_z 5$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x 55-\boldsymbol{e}_y 44-\boldsymbol{e}_z 11$$

1.9 用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{25}{r^2}$。

（1）求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处的 $|\boldsymbol{E}|$ 和 E_x；

（2）求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处 $\boldsymbol{E}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x 2-\boldsymbol{e}_y 2+\boldsymbol{e}_z$ 构成的夹角。

解 （1）在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处，$r=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$，故

$$|\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}\right|=\frac{1}{2}$$

又在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处，$\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_x 3+\boldsymbol{e}_y 4-\boldsymbol{e}_z 5$，所以

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}=\frac{25}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{-\boldsymbol{e}_x 3+\boldsymbol{e}_y 4-\boldsymbol{e}_z 5}{10\sqrt{2}}$$

故

$$E_x=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=\frac{-3}{10\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

（2） $$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$$

在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{-\boldsymbol{e}_x 3+\boldsymbol{e}_y 4-\boldsymbol{e}_z 5}{10\sqrt{2}}\cdot(\boldsymbol{e}_x 2-\boldsymbol{e}_y 2+\boldsymbol{e}_z)=-\frac{19}{10\sqrt{2}}$$

故 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的夹角为

$$\theta_{EB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(-\frac{19/(10\sqrt{2})}{3/2}\right)=153.6^{\circ}$$

1.11 求标量函数 $\Psi=x^2yz$ 的梯度及 Ψ 在一个指定方向的方向导数，此方向由单位矢量 $\boldsymbol{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 定出；求 $(2,3,1)$ 点的方向导数值。

解 $$\nabla\Psi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)=$$

$$\boldsymbol{e}_x 2xyz+\boldsymbol{e}_y x^2z+\boldsymbol{e}_z x^2y$$

故沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\nabla\Psi\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{6xyz}{\sqrt{50}}+\frac{4x^2z}{\sqrt{50}}+\frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点 $(2,3,1)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数值为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\frac{36}{\sqrt{50}}+\frac{16}{\sqrt{50}}+\frac{60}{\sqrt{50}}=\frac{112}{\sqrt{50}}$$

1.12 已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$。（1）求 ∇u；（2）在哪些点上 ∇u 等于零。

解 （1）$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)$；

（2）由 $\nabla u=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)=0$，得

$$x=-3/2,\ y=1/2,\ z=1$$

1.16 已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c 使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场。

解 由 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(2x+az)+(2xy+b)+(1-2z+cx-2xy)=0$，得

$$a = 2, b = -1, c = -2$$

1.17 在由 $\rho = 5$、$z = 0$ 和 $z = 4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \rho^2 + \boldsymbol{e}_z 2z$ 验证散度定理。

解 在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \rho^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 3\rho + 2$$

所以
$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_0^4 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^5 (3\rho + 2)\rho\,\mathrm{d}\rho = 1200\pi$$

又
$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{上}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_{下}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_{柱面}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^5 \boldsymbol{A}\big|_{z=4} \cdot \boldsymbol{e}_z \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^5 \boldsymbol{A}\big|_{z=0} \cdot (-\boldsymbol{e}_z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi +$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 \boldsymbol{A}\big|_{\rho=5} \cdot \boldsymbol{e}_\rho 5\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^5 2\times 4\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^4 5^2 \times 5\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi = 1200\pi$$

故有

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = 1200\pi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.18 求（1）矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x x^2 + \boldsymbol{e}_y x^2 y^2 + \boldsymbol{e}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；（2）求 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；（3）求 $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

解 （1）$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{\partial(x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^2y^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(24x^2y^2z^3)}{\partial z} = 2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2$

（2）$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$$

（3）$\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分

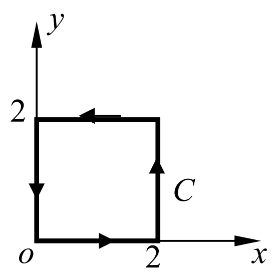
$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z +$$
$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2(\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2(-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z +$$
$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2(\frac{1}{2})^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2(-\frac{1}{2})^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{24}$$

故有
$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{24} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.21 求矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

解 如题 1.21 图所示

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=0} \cdot \boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{x=2} \cdot \boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}y +$$
$$\int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=2} \cdot (-\boldsymbol{e}_x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{x=0} \cdot (-\boldsymbol{e}_y)\,\mathrm{d}y =$$
$$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^2 2^2\,\mathrm{d}y - \int_0^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^2 0\,\mathrm{d}y = 8$$



题 1.21 图

又

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & x^2 & y^2 z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x 2yz+\boldsymbol{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^2\int_0^2(\boldsymbol{e}_x 2yz+\boldsymbol{e}_z 2x)\cdot\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8$$

故有

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=8=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.23 证明:（1）$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$；（2）$\nabla\times\boldsymbol{R}=0$；（3）$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{A}$。其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$\boldsymbol{A}$ 为一常矢量。

解 （1） $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}=3$

（2）

$$\nabla\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

（3）设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=A_x x+A_y y+A_z z$，故

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(A_x x+A_y y+A_z z)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(A_x x+A_y y+A_z z)+$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(A_x x+A_y y+A_z z)=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z=\boldsymbol{A}$$

1.27 现有三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\rho z^2\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi z^2\cos\phi+\boldsymbol{e}_z 2\rho z\sin\phi$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z 2z$$

（1)哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

（2）求出这些矢量的源分布。

解（1）在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}=$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\cos\phi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\phi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi)=$$

$$\frac{2}{r}\sin\theta\cos\phi+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\phi}{r}-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \end{vmatrix}=0$$

故矢量 $\boldsymbol{A}$ 既可以由一个标量函数的梯度表示，也可以由一个矢量函数的旋度表示；

在圆柱坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho(\rho B_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho z^2\sin\phi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(z^2\cos\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(2rz\sin\phi)=$$

$$\frac{z^2\sin\phi}{\rho}-\frac{z^2\sin\phi}{\rho}+2\rho\sin\phi=2\rho\sin\phi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_\rho & \rho B_\phi & B_z \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & r\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2\sin\phi & \rho z^2\cos\phi & 2\rho z\sin\phi \end{vmatrix}=0$$

故矢量 $\boldsymbol{B}$ 可以由一个标量函数的梯度表示；

直角在坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2x)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2-2x & x^2 & 2z \end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$$

故矢量 $\boldsymbol{C}$ 可以由一个矢量函数的旋度表示。

（2）这些矢量的源分布为

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$；

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=2\rho\sin\phi$，$\nabla\times\boldsymbol{B}=0$；

$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$.