学院________姓名________ 学号__________任课老师________考场教室________选课号/座位号______

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

电子科技大学 2014-2015 学年第 2 学期期 末 考试 A 卷

课程名称：随机信号分析 考试形式：一页纸开卷 考试日期：2015 年 7 月 1 日 考试时长：120 分钟

课程成绩构成：平时 30 %， 期中 0 %， 实验 0 %， 期末 70 %

本试卷试题由 10 部分构成，共____页。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	合计
得分											

得 分

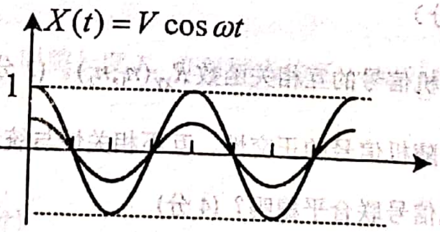
一、设有正弦随机信号 $X(t)=V\cos\omega t$，其中 $0\le t<\infty$，ω 为常数，V 是 $[0,1)$ 均匀分布的随机变量。（ 共 10 分）

1. 画出该过程两条样本函数。(2 分)

2. 确定 $t_0=\dfrac{\pi}{2\omega}$，$t_1=\dfrac{3\pi}{4\omega}$ 时随机信号 $X(t)$ 的一维概率密度函数，并画出其图形。(5 分)

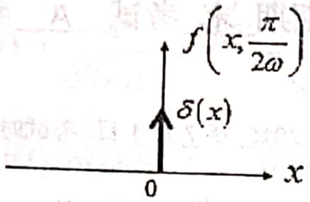
3. 随机信号 $X(t)$ 是否广义平稳和严格平稳？(3 分)

解： 1.随机信号 $X(t)$ 的任意两条样本函数如题解图 2.1(a)所示：



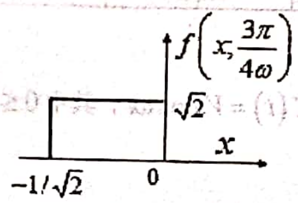
2.

当 $t_0=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时，$X(\dfrac{\pi}{2\omega})=0$，$P\left[X(\dfrac{\pi}{2\omega})=0\right]=1$，此时概率密度函数为：$f_X(x;\dfrac{\pi}{2\omega})=\delta(x)$



当$t=\frac{3\pi}{4\omega}$时，$X(\frac{3\pi}{4\omega})=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$，随机过程的一维概率密度函数为：

$$f_X(x;\frac{3\pi}{4\omega})=\begin{cases}\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0\\ 0, \quad others\end{cases}$$



3. $E\left[X(t)\right]=E\left[V\right]\cos\omega t=\frac{1}{2}\cos\omega t$ 均值不平稳，所以$X(t)$非广义平稳，非严格平稳。

得 分

二、设随机信号$X(n)=\sin(2\pi n+\phi)$与$Y(n)=\cos(2\pi n+\phi)$，其中ϕ为$0\sim\pi$上均匀分布随机变量。（共 10 分）

1. 求两个随机信号的互相关函数$R_{XY}(n_1,n_2)$。(2 分)

2. 讨论两个随机信号的正交性、互不相关性与统计独立性。(4 分)

3. 两个随机信号联合平稳吗？(4 分)

解：1. 两个随机信号的互相关函数

$$R_{XY}(n_1,n_2)=E\left[X(n_1)Y(n_2)\right]=E\left[\sin(2\pi n_1+\phi)\cos(2\pi n_2+\phi)\right]$$

$$=\frac{1}{2}E\left[\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+2\phi)+\sin(2\pi n_1-2\pi n_2)\right]=\frac{1}{2}\sin(2\pi n_1-2\pi n_2)=0$$

$$\text{其中 } E\left[\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+2\phi)\right]=0$$

2. 对任意的n_1、n_2，都有$R_{XY}(n_1,n_2)=0$，故两个随机信号正交。

30

又

$$E\left[X(n)\right]=E\left[\sin(2\pi n+\phi)\right]=\frac{1}{\pi}\left(-\cos(2\pi n+\phi)\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi},$$

$$E\left[Y(n)\right]=E\left[\cos(2\pi n+\phi)\right]=\frac{1}{\pi}\left(\sin(2\pi n+\phi)\Big|_0^{\pi}\right)=0$$

$C_{XY}(n_1,n_2)=R_{XY}(n_1,n_2)-m_X(n_1)m_Y(n_2)=\frac{1}{2}\sin(2\pi n_1-2\pi n_2)=0$，故两个随机信号互不相关，

又因为 $X^2(n)+Y^2(n)=\sin^2(\omega_0 n+\phi)+\cos^2(\omega_0 n+\phi)=1$，故两个随机信号不独立。

3.

$$R_X(n_1,n_2)=E\left[X(n_1)X(n_2)\right]=E\left[\sin(2\pi n_1+\phi)\sin(2\pi n_2+\phi)\right]$$
$$=\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi n_1-2\pi n_2)-\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\phi)\right]$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$R_Y(n_1,n_2)=E\left[Y(n_1)Y(n_2)\right]=E\left[\cos(2\pi n_1+\phi)\cos(2\pi n_2+\phi)\right]$$
$$=\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi n_1-2\pi n_2)+\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\phi)\right]$$
$$=\frac{1}{2}$$

两个随机信号的均值都平稳、相关函数都与时刻组的起点无关，故两个信号分别平稳，又其互相关函数也与时刻组的起点无关，因而二者联合平稳。

得 分

三、$W(t)$ 为独立二进制传输信号，时隙长度 T。在时隙内的任一点 $P\left[W(t)=+3\right]=0.3$ 和 $P\left[W(t)=-3\right]=0.7$，试求（ 共 10 分）

1. $W(t)$ 的一维概率密度函数。(3 分)

2. $W(t)$ 的二维概率密度函数。(4 分)

3. $W(t)$ 是否严格平稳？(3 分)

解： 下面的讨论中，t 不在时隙分界点上：

1.在时隙内的任一点上，$W(t)$ 为二进制离散随机变量，因此，随机信号的一维概率密度函数为：

$$f(w,t)=0.3\delta(w-3)+0.7\delta(w+3)$$

2. 当 t_1,t_2 在同一时隙时，随机变量 $W(t_1),W(t_2)$ 取值相同，此时二维概率密度函数为：

$$f(w_1,w_2;t_1,t_2)=0.3\delta(w_1-3,w_2-3)+0.7\delta(w_1+3,w_2+3)$$

当t_1,t_2不在同一时隙时，随机变量$W(t_1),W(t_2)$取值独立，此时二维概率密度函数为：

$$f(w_1,w_2;t_1,t_2)=0.09\delta(w_1-3,w_2-3)+0.21\delta(w_1-3,w_2+3)$$
$$+0.21\delta(w_1+3,w_2-3)+0.49\delta(w_1+3,w_2+3)$$

3. $W(t)$不严格平稳。

得 分

四、设正弦随机信号 X(t) = Acos(ωt+Θ), ω 是常数，A∽U(-1,+1)，Θ∽ U(0,π), 且 A 和 Θ 统计独立，令 $Y(t)=X^2(t)$。（ 共 10 分）

讨论：

1. Y(t)的均值。(3 分)
2. Y(t)的相关函数。(4 分)
3. Y(t)是否是广义平稳？。(3 分)

解：1. Y(t)的均值：因为 $E[Y(t)] = E[A^2\cos^2(\omega t+\Theta)]$

所以 $E[Y(t)] = E[A^2\{1+\cos(2\omega t+2\Theta)\}]/2$

$= E[A^2]\{1+E[\cos(2\omega t+2\Theta)]\}/2$

$= E[A^2]\{1+E[\cos(2\omega t+2\Theta)]\}/2 = 1/3 * 1/2 = 1/6$

2. Y(t)的相关函数：

$E[Y(t+\tau)Y(t)] = E[A^4\cos^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\cos^2(\omega t+\Theta)]$

$= E[A^4]E[\{1+\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)\}+\{1+\cos(2\omega t+2\Theta)\}]/4$

$$=\frac{1}{5\times4}E[1+\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)+\cos(2\omega t+2\Theta)+\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)]\cos(2\omega t+2\Theta)$$

$$=\frac{1}{20}E\left[1+\frac{\cos(4\omega t+2\omega\tau+4\Theta)+\cos(2\omega\tau)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[1+\frac{\cos(2\omega\tau)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{\cos(2\omega\tau)}{40}$$

3. 因为 Y(t)的均值和相关函数都与 t 无关，因此 Y(t)是广义平稳随机信号。

得 分

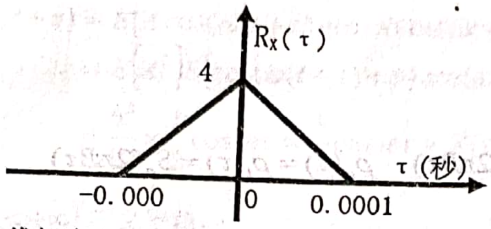
五、高斯随机信号 X(t)的自相关函数如图所示（ 共 10 分）

1. 求 X(t)的一维概率密度函数。(3 分)

32

2．求 X(t)上间隔为 0.001 的任意两个采样时刻的二维密度函数。(4 分)

3．对一段时长为 1 秒的信号，最多能够获取多少了独立的采样点？(3 分)



解：1. 求 X(t)的一维概率密度函数；（3 分）

因为：$R_X(\infty)=m^2$，故 m = 0

$\sigma^2 = R_X(0)- m^2 = 4$

$$f_X(x;t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

2. 求 X(t)上间隔为 2T 的任意两个采样时刻的二维密度函数；（4 分）

因为：$C_X(\tau) = R_X(\tau) - m^2$，故 $C_X(2T) = 0$

高斯随机变量不相关，则其统计独立，因此任意两个间隔为 2T 的两个随机变量的二维密度函数为：

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{8\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{8}\right)$$

3. 对一段时长为 1 秒的信号，最多能够获取多少了独立的采样点？（3 分）

因为不相关的最小间隔为 0.0001 秒，则在 1 秒间隔内，最多可采集的独立采样点为：

1/0.0001 + 1 = 10001

得 分

六、功率谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$的零均值平稳高斯白噪声通过一个理想带通滤波器，此滤波器的增益为 1，中心频率为f_0，带宽为$2B$。（ 共 10 分）

1．$n_i(t)$的同相分量$i(t)$及正交分量$q(t)$的自相关函数和相关系数。(4 分)

2．$i(t)$的二维概率密度函数$f_i(i_1,i_2;t,t+\dfrac{1}{2B})$。(3 分)

3．$i(t)$及$q(t)$的二维联合概率密度函数。(3 分)

解：1. $S_i(\omega)=S_q(\omega)=\begin{cases}S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0), & |\omega|\le 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$R_i(\tau)=R_q(\tau)=N_0\dfrac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau}$

$\rho_i(\tau)=\dfrac{C_i(\tau)}{C_i(0)}=\dfrac{R_i(\tau)}{R_i(0)}=\dfrac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}=S_a(2\pi B\tau)$，$\rho_q(\tau)=\rho_i(\tau)=S_a(2\pi B\tau)$

2. $f_i(i_1,i_2;t,t+\dfrac{1}{2B})=f_i(i_1;t)f_i(i_2;t+\dfrac{1}{2B})=\dfrac{1}{4\pi N_0B}\exp(-\dfrac{i_1^2+i_2^2}{4N_0B})$

3. $f_{iq}(i,q;t_1,t_2)=f_i(i;t_1)f_{iq}(q;t_2)=\dfrac{1}{4\pi N_0B}\exp(-\dfrac{i^2+q^2}{4N_0B})$

得 分

七、已知平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的均值函数为$m(t)=1$，相关函数为$R(\tau)=2\cos^2\tau$，讨论其均值各态历经性。（共 10 分）

解：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R(\tau)-1)\,d\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos 2\tau d\tau \qquad \text{或} \quad \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}C(\tau)d\tau=0$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_0^{4T}\left(1-\frac{x}{4T}\right)\cos x dx=0$$

所以$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$具有均值各态历经性。

得 分

八、设有随机过程$\{X(t)=A\cos(\omega t+\phi),-\infty<t<+\infty\}$，其中$A,\phi$是相互独立的随机变量，$\omega$是正常数，$A\sim U(-3,3),\phi\sim U(0,2\pi)$，试讨论$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的广义平稳性和广义各态历经性。

（共 10 分）

解：

$$m_X(t)=E[A\cos(\omega t+\phi)]=E[A]E[\cos(\omega t+\phi)]=0$$

$$\begin{aligned}R(t,t+\tau)&=E[A\cos(\omega(t+\tau)+\phi)A\cos(\omega t+\phi)]\\&=E[A^2]E[\cos(\omega(t+\tau)+\phi)\cos(\omega t+\phi)]\\&=\frac{6^2}{12}\times\frac{1}{2}\cos\omega\tau=\frac{3}{2}\cos\omega\tau=R(\tau)\end{aligned}$$

$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$广义平稳。

$$\begin{aligned}A[X(t)]&=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\phi)dt\\&=\lim_{T\to+\infty}\frac{A}{\omega T}\sin\omega T\cos\phi=0=m_X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A[X(t+\tau)X(t)]&=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega(t+\tau)+\phi)A\cos(\omega t+\phi)dt\\&=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau\neq R_X(\tau)\end{aligned}$$

$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$均值各态历经，相关函数不具有各态历经性。

得 分

九、假设某积分电路的输入 X(t)与输出 Y(t)之间满足关系：$Y(t)=\int_{t-4}^{t}X(\tau)d\tau$，积分时间为 4 秒。（共 10 分）

1．求该积分电路的冲激响应 h(t)。(5 分)

2．若输入$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$，其中 A=2，$\omega_0$为常数，θ 为服从$[0,2\pi)$均匀分布的随机变量，求输出 Y(t)的功率谱。(5 分)

解：

（1）

$$Y(t)=\int_{t-4}^{t}X(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t-\tau)-u(t-4-\tau)]X(\tau)d\tau=[u(t)-u(t-4)]*X(t)$$

故$h(t)=u(t)-u(t-4)$

（2）

$$E[X(t)]=E[A\cos(\omega_0 t+\theta)]=0$$

$$R_X(t+\tau,t)=E[X(t+\tau)X(t)]=E[A\cos(\omega_0 t+\theta)\cdot A\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)]=2\cos\omega_0\tau$$

故 X(t)为平稳随机信号，其功率谱为

$$S_X(\omega) = 2\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

因为积分电路为 LTI 系统，当输入为平稳随机信号时，输出也是平稳随机信号。

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$$

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{4\sin^2 2\omega}{\omega^2}$$

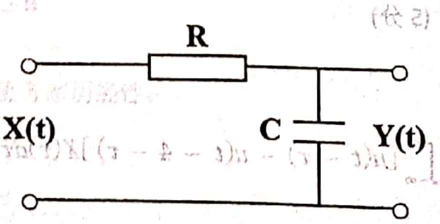
则 $S_Y(\omega) = \left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]\cdot\dfrac{8\pi\sin^2 2\omega}{\omega^2}$

得 分

十、已知平稳白噪声信号 X(t)通过下图所示的低通滤波器，X(t)的均值为零，自相关函数为 $R_X(\tau)=\delta(\tau)$。（共 10 分）

求：

1. 输出信号的功率谱。(5 分)
2. 输出信号的平均功率。(5 分)



解：

（1）求输出信号功率谱。

因为输入为平稳随机过程，故输出 Y(t)也是平稳随机过程。

由图，$H(j\omega)=\dfrac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}=\dfrac{1}{1+j\omega RC}\to\left|H(j\omega)\right|^2=\dfrac{1}{1+\omega^2R^2C^2}$.

$$S_X(\omega)=1$$

$$S_Y(w)=S_X(w)\left|H(jw)\right|^2=\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}$$

（2）求输出信号平均功率。

由于输出信号是平稳的，则

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2RC}e^{-|\tau|/RC}$$

故输出信号的平均功率为

$$P=R_Y(0)=\frac{1}{2RC}$$