静态场总结一：静电场

第一节 电场强度 库仑定律

一、库仑定律 $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{R^2}\vec{e}_R = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{R^3}\vec{R}$

真空介电常数：$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}\times 10^{-9} = 8.854\times 10^{-12}\,F/m$

二、电场强度 $\lim\limits_{q\to 0}\dfrac{\vec{F}}{q} = \vec{E}$ ［V/m（伏/米）］

点电荷的电场强度：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla(\dfrac{1}{R})$

三、电荷的几种分布形式及电场

1、体分布 $\rho'(x',y',z') = \lim\limits_{\Delta V'\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta V'}$ (C/m^3)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(x',y',z')}{R^2}\vec{e}_R dV' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(x',y',z')\nabla(\frac{1}{R})dV'$$

2、面分布 $\rho_S(x',y',z') = \lim\limits_{\Delta s'\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta S'}$ (C/m^2)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_S(x',y',z')}{R^2}\vec{e}_R dS' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \rho_S(x',y',z')\nabla(\frac{1}{R})dS'$$

3、线分布 $\rho_l(x',y',z') = \lim\limits_{\Delta l'\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta l'}$ (C/m)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\rho_l(x',y',z')}{R^2}\vec{e}_R dl' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \rho_l(x',y',z')\nabla(\frac{1}{R})dl'$$

第二节 静电场的基本方程

一、立体角：$d\Omega = \dfrac{dS}{R^2}$ ［球面度（sr）］

$d\Omega$ 与所取球面半径 R 无关

二、高斯定律

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

高斯定律的微分形式 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

三、静电场的无旋性

$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$（静电场是保守场）

静电场的无旋性：$\nabla\times\vec{E}=0$ （电场守恒性的微分形式）

四、电位

电位函数φ： $\vec{E}=-\nabla\varphi \leftrightarrow \nabla\times\vec{E}=0$

$\vec{E}$ 沿任意方向 l 的投影：$\vec{E}_l=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

定义 A 点电位：$\varphi_A=\int_A^P \vec{E}\cdot d\vec{l}$（$P$ 为参考点，$\varphi_P=0$）

点电荷电位：

$$\varphi=\int_R^{R_P}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R_P}\frac{dR}{R^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_p}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+C$$

分布电荷的电位

体分布 $\varphi=\int_V \dfrac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 R}+C$

面分布 $\varphi=\int_S \dfrac{\rho_S dS}{4\pi\varepsilon_0 R}+C$

线分布 $\varphi=\int_l \dfrac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 R}+C$

五、总结静电场的基本方程

积分形式	微分形式
$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$或$\vec{E}=-\nabla\varphi$

第三节 泊松方程 拉普拉斯方程

拉普拉斯算符 $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$

泊松方程 $\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ （$\rho=0$）

静电问题求解： 求$\varphi\rightarrow\vec{E}=-\nabla\varphi$

直角坐标： $$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

圆柱坐标： $$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

球 坐 标： $$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

二、边值问题：在给定边界条件下求解拉普拉斯方程或泊松方程

★ 第四节 点电荷的δ函数表示 格林函数

第五节 格林定理 *泊松方程的积分公式

第六节 唯一性定理

一、边值问题分类（括号内是导体为边界的情况）

1. 狄利克莱问题：已知整个边界上的电位函数，求$\nabla^2\varphi$
（已知表面电位函数）

2. 诺伊曼问题：已知整个边界上的电位法向导数，求$\nabla^2\varphi$
（已知导体总电量，因为$\rho_S=-\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$）

3. 混合问题：已知边界上一部分电位和另一部分电位的法向导数，
求$\nabla^2\varphi$（已知一部分导体电位；另一部分导体电量）

二、唯一性定理

在给定的边界条件下（上述三类条件之一），泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的

第七节 电偶极子

电偶极子：一对等值异号电荷相距一个小的距离 l 组成的电荷系统

电偶极矩矢量： $\vec{p}=q\vec{l}$（单位 $C\cdot m$）

第八节 介质中的高斯定律 电位移

一、极化

极化强度 $\vec{P}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\sum\vec{p}}{\Delta V}=N\langle\vec{p}\rangle$（$C/m^2$）[N 为分子密度]

极化后的介质:在真空中充满了的偶极子的分布,每一个分子就是一个偶极子（故 $\vec{P}$ 就是偶极矩密度）

二、束缚电荷:介质极化后在体积内或表面上出现的正或负的净电荷

三、介质中的高斯定律

介质中的高斯定律: $\oint_s\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q$

微分形式: $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ （真空为 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$）

四、$\vec{D}$ 矢量:电位移(电通密度)

结论： $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 成正比即 $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

本构关系(组成关系） $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$

$\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=1+\chi_e$: 相对介电常数(相对电容率)

五 束缚电荷密度

体密度 $\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}$， 面密度 $\rho_{Sp}=\vec{P}\cdot\vec{n}$

有介质时静电场基本方程的总结

积分形式	微分形式	本构关系
$\oint_s\vec{D}\cdot d\vec{S}=q$	$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$	$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$
$\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$	$(\vec{E}=-\nabla\varphi)$

第九节 介质分界面上的边界条件

分界面上有自由电荷 $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$

分界面上无自由电荷 $D_{1n} = D_{2n}$ 即 $\vec{n}\cdot\vec{D}_1 = \vec{n}\cdot\vec{D}_2$

用电位表示的 $\vec{D}$ 的法向分量的边界条件

有自由电荷时 $-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \rho_S$

无自由电荷时 $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$

电场强度的切向分量总是连续的 $E_{1t} = E_{2t}$

分界面上电位是连续的 $\varphi_1 = \varphi_2$ 折射关系：$\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

第十节 导体系统的电容

孤立导体电容：$C = \dfrac{q}{\varphi}$， q 为电量， φ 为电位，其参考点在 ∞

大地也是导体，取 $\varphi = 0$

两个导体电容：$C = \dfrac{q}{U}$

电容的计算： $q \to E \to \varphi(U) \to C$

第十一节 静电场的能量

一、电场能量

$$W_e = \int_\alpha^1 \alpha d\alpha \int_{整个空间} \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\int_{整个空间} \rho\varphi dV \qquad (3.1.31)$$

如果电荷分布于表面 $W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{所有表面} \rho_S \varphi dS$

公式中的电荷全是自由电荷；有电荷的区域对积分才有贡献

两个导体情形 $W = \dfrac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{1}{2}qU = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{q^2}{2C}$

场量表示电场能量：

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}dV = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2\varepsilon}\int D^2 dV \qquad (3.1.36)$$

电场能量密度：$w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2\varepsilon}D^2$

电场能量分布于有电场的空间中，而不是唯一有电荷的地方

静电场解题

一、已知电荷分布求电场

①用电场强度计算公式

②用高斯定理：场对称/有介质分界面时：分界面上只有 E_n 或 E_t

③由电位梯度

二、已知电荷分布求电位

①用电位计算公式

②由电场强度的积分

③解泊松方程或拉普拉斯方程

三、求自由电荷

①已知电场或电位分布，由 $\rho = \nabla\cdot\vec{D}$ 或 $\rho = -\varepsilon\nabla^2\varphi$ 计算

②由边界条件 $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$ 计算

四、求电容

①假设板极上有电荷 q，则 $q \to E \to \varphi(U) \to C$

②假设板极间的电位为 U，则 $U \to \varphi \to E \to q \to C$

典型例题

{例} 有限长直线 l 上均匀分布着线密度为 ρ_l 的电荷，求线外任一点的电场强度。

$$E_\rho = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\rho}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

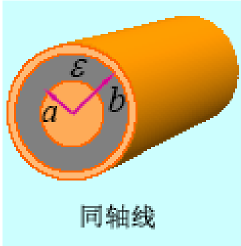
直线为无限长时：$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$

{例} 一半径 a 的导电球，总电量为 Q，求球内外的电场强度。

球外任意一点的电场强度：$\vec{E} = \vec{e}_r Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$

球内点的电场强度：$E = 0$

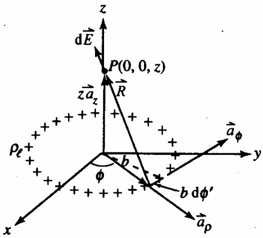
{例} 两无限长同轴导电圆柱，内外半径为 a 、b ，其间加电压 U ，求两圆柱间场强:



$$E_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{U}{\rho\ln\frac{b}{a}}$$

{例} 导体表面的电荷密度 $\rho_S = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$

{例} 均匀带电圆环半径为 b ，如图所示，求圆环轴线上任意一 点的电场强度。



解: 在圆柱坐标中，电荷分布方向上的长度微元是 $bd\phi'$ ，电荷元到观测点 $P(0,0,\ z)$ 的距离矢量为 $\vec{R} = -b\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ ，因而

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{bd\phi'}{\left[b^2+z^2\right]^{3/2}}(-b\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)$$

$$= \frac{\rho_l b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[b^2+z^2\right]^{3/2}}\left[-b\int_0^{2\pi}\vec{e}_\rho d\phi' + z\int_0^{2\pi}d\phi'\vec{e}_z\right]$$

因为 $\vec{e}_\rho = \vec{e}_x\cos\phi' + \vec{e}_y\sin\phi'$ ，则等式右边的第一个积分式变为

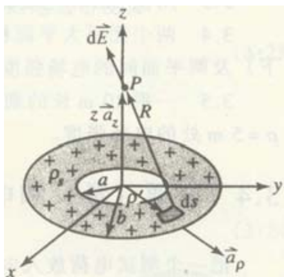
$$\int_0^{2\pi}\vec{e}_\rho d\phi' = \vec{e}_x\int_0^{2\pi}\cos\phi' d\phi' + \vec{e}_y\int_0^{2\pi}\sin\phi' d\phi' = 0 \qquad !$$

等式右边第二个积分式为 2π 。因此，圆环轴线上 P 点的电场强为

$$\vec{E} = \frac{\rho_l bz}{2\varepsilon_0\left[b^2+z^2\right]^{3/2}}\vec{e}_z \ ,$$

当 $z=0$ 时，圆环中心处的场强为零。

{例} 一个均匀带电的环形薄圆盘，内半径为 a ，外半径为 b ，面电荷密度为 ρ_S ，求 z 轴上任一点的电场强度。



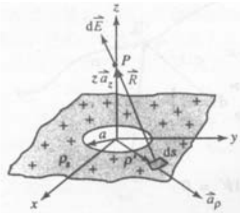
解: 如图所示，圆盘上面微分元 dS' 所带电荷为 $\rho_S\,\rho' d\rho' d\phi'$ ，从此电荷到 z 轴上 P 点的距离矢量为 $\vec{R} = -\rho'\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ ，其大小为

$R = (\rho'^2 + z^2)^{1/2}$ 。 $P(0,0,\ z)$ 点的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\rho'^2+z^2\right]^{3/2}}\left[-\rho'\vec{e}_\rho+z\vec{e}_z\right]$$

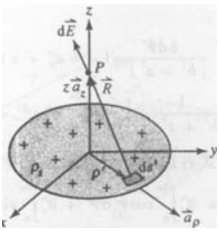
再一次可以证明 $\int_0^{2\pi}\vec{e}_\rho d\phi'=0$。由于电荷的对称分布，观测点的电场强度 $\vec{E}$ 没有径向分量。因为，对每一个可以产生电场强度 $\vec{E}$ 径向分量 P 点一侧的电荷元，在 P 点另一侧存在相对应的电荷元恰好与它的作用抵消，从而 $\vec{E}$ 的径向分量为零。于是

$$\vec{E}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\rho' dr' d\phi'}{\left[\rho'^2+z^2\right]^{3/2}}z\vec{e}_z=\frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}}-\frac{1}{(b^2+z^2)^{1/2}}\right]\vec{e}_z \qquad *$$



对于外半径 $b\to\infty$ 的圆盘，如图所示，

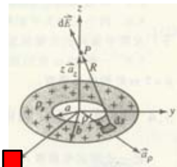
电场强度为 $\vec{E}=\frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right]\vec{e}_z$



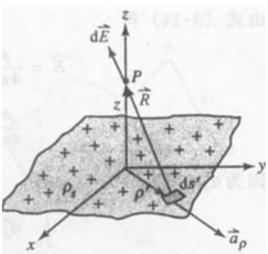
对于一个半径为 b 的实心圆盘，如图所示，

令 $a=0$ 从式 $(*)$ 得电场强度

$$\vec{E}=\frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{(b^2+z^2)^{1/2}}\right]\vec{e}_z$$

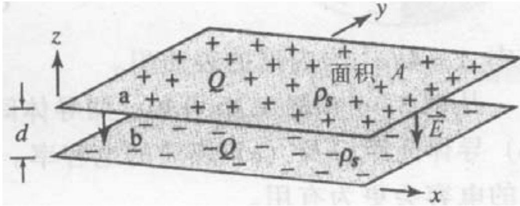


$$\vec{E}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\rho'^2+z^2\right]^{3/2}}z\vec{e}_z=\frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}}-\frac{1}{(b^2+z^2)^{1/2}}\right]\vec{e}_z \qquad *$$



最后，对 $(*)$ 式令 $a=0$，$b\to\infty$ （见图），便得到无限大带电平面外任一点的电场强度 $\vec{E}=\rho_S/2\varepsilon_0$，此式所得的恒值电场强度对于任何 z 值都是适用的。虽然无限大的带电平面并不存在，但当场点靠近一个有限大带电平面时，其电场强度可以近似由无限大带电平面确定。

{例} 两间距为 d 每块面积为 A 的平行导电板构成一平板电容器，如图所示。上面板的电荷为 $+Q$，下面板为 $-Q$，问电容是多少？并用此系统的电容表示媒质中储存的能量。



解：设两板间距与其面积相比足够小。从而，可忽略边缘效应，并认为电荷均匀分布在每块板的内表面，则导体间的电场强度为 $\vec{E} = -\dfrac{\rho_S}{\varepsilon}\vec{e}_z$，$\rho_S = \dfrac{Q}{A}$

式中，Q 为处于 $z = d$ 的上面板 a 的电荷，A 为每块板的面积，ε 为媒质的电容率，$z = 0$ 处下面板 b 的电荷为 $-Q$。

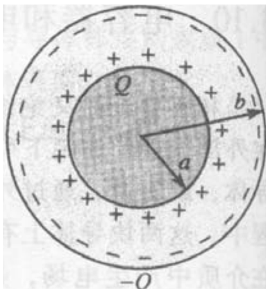
a 板相对于 b 板的电位为 $V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \dfrac{\rho_S}{\varepsilon}\int_0^d dz = \dfrac{\rho_S}{\varepsilon}d = \dfrac{Qd}{\varepsilon A}$

因此，平板电容器的电容为 $C = \dfrac{Q}{V_{ab}} = \dfrac{\varepsilon A}{d}$

系统的储能为 $W = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dV = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ad}{\varepsilon}\rho_S^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{\varepsilon A}Q^2 = \dfrac{1}{2C}Q^2 = \dfrac{1}{2}CV_{ab}^2$

这些就是电容器储存能量的基本电路方程。

{例}一球形电容器由半径分别为 a 和 b 的同心金属球壳组成，如图所示。内球带电 $+Q$，外球带电 $-Q$，试确定系统电容。一个孤立球体的电容是多少？视地球为一半径 $6.5\times 10^6 m$ 的孤立球体，计算它的电容。若两球体间隔相对于它们的半径足够小，试推导其电容的近似表达式。



解：对于电荷均匀分布的球体，由高斯定律可知球内电场强度为 $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$

内球相对于外球的电位为

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

因此系统的电容为 $C=\dfrac{Q}{V_{ab}}=\dfrac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$

若 $b\to\infty$，可得孤立球体的电容 $C=4\pi\varepsilon a$

取地球 $\varepsilon=\varepsilon_0$，则地球电容为 $C=\dfrac{6.5\times10^6}{9\times10^9}=0.722\times10^{-3}F=722\mu F$

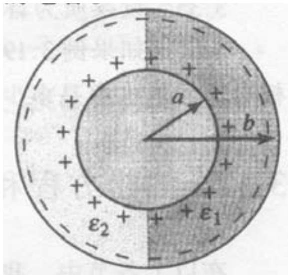
若两个球体间隔很小，令 $d=b-a$ 且 $d<<a$，则可以近似取 $ab\approx a^2$，

即系统电容为 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon a^2}{b-a}=\dfrac{\varepsilon A}{d}$ 式中 $A=4\pi a^2$ 为内球的表面积。

从以上例子可知，两导体间的电容取决于下列三个因素：

(*a*) 导体的尺寸和形状，(*b*) 导体间距，及 (*c*) 媒质的电容率。

[教材：几何尺寸、形状和及周围电介质]



{例} 两同心球壳间充满两种不同的电介质，如图所示，求系统的电容。

解：设想电场强度 $\vec{E}$ 沿径向分布，且媒质分界面上的切向分量连续，即 $E_{r1}=E_{r2}$，因为 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，则 $D_{r1}=\varepsilon_1E_{r1},\ D_{r2}=\varepsilon_2E_{r2}$，因而

$D_{r2}=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}D_{r1}$，由高斯定律可知，

对任一个 $a\le r\le b$ 的闭合面，有 $\oint_s\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q\to2\pi r^2D_{r1}+2\pi r^2D_{r2}=Q$，

因而 $D_{r1}+D_{r2}=\dfrac{Q}{2\pi r^2}$，所以 $D_{r1}=\dfrac{Q\varepsilon_1}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$，$E_{r1}=\dfrac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

则内球相对于外球的电位为

$$V_{ab}=\int_a^bE_{r1}dr=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^b\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left[\frac{b-a}{ab}\right]$$

因此系统的电容为 $C=\dfrac{Q}{V_{ab}}=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\dfrac{ab}{b-a}=C_1+C_2$

式中，$C_1=2\pi\varepsilon_1\dfrac{ab}{b-a}$，$C_2=2\pi\varepsilon_2\dfrac{ab}{b-a}$。$C_1$ 和 C_2 分别为媒质 1 和媒质 2 的电容。所以，系统的电容等于两个电容的并联值，这一结果你可能早在电路分析中就已经使用过。

{例} 同轴电缆的内导体半径为a，电压为V_0，外导体半径为b，接地，如图所示。试求，(a) 导体间的电位分布，(b) 内导体的表面电荷密度，(c) 单位长度的电容。

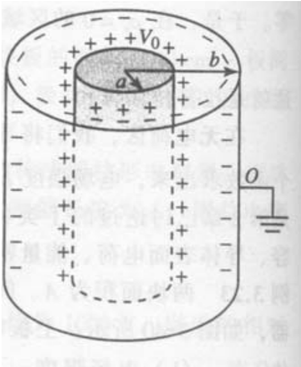


图 3·41 同轴电缆示意图

解：因为半径分别为a和b的内外导体组成了两个等位面，所以电位φ就只是ρ的函数。因此，拉普拉斯方程简化为$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d\varphi}{d\rho})=0$，积分两次后可得$\varphi=c_1\ln\rho+d_1$，式中$c_1$和$d_1$为积分常数

当 $\rho=b,\varphi=0\Rightarrow d_1=-c_1\ln b$，

因而 $\varphi=c_1\ln\frac{\rho}{b}$； 当 $\rho=a,\varphi=V_0\Rightarrow c_1=\frac{V_0}{\ln(a/b)}$，

因而在$a\le\rho\le b$区域内的电位分布为 $\varphi=V_0\frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)}$

电场强度为 $$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho=\frac{V_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_\rho$$

电通密度为 $$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\frac{\varepsilon V_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_\rho$$

在$\rho=a,\vec{D}$的法向分量产生内导体表面电荷密度 $\rho_S=\frac{\varepsilon V_0}{(a\ln\frac{b}{a})}$

内导体单位长度上的电荷为 $Q=\rho_S S=\frac{2\pi\varepsilon V_0}{\ln\frac{b}{a}}$ （$S=2\pi a\times1$）

则单位长度的电容为 $$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$$

1. 电偶极子电位

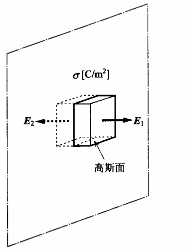
$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

2. 电偶极子电场

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\left(\vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\vec{e}_r\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\vec{e}_\theta\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

3. 无限大平面电荷的电场

$$\vec{E}=\vec{e}_n\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}$$

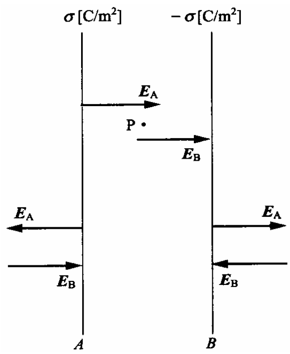


4. 带正、负电荷的两无限大平行平板的电场

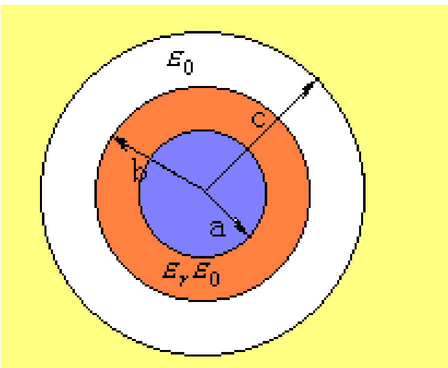
平板内： $E=\dfrac{\rho_S}{\varepsilon_0}$

平板外： $E=0$

{此题在两个平板之间不能使用高斯定理，因为穿进和穿出两个底面的电场一样。}



5. 两层介质的球形电容器



两层介质的球形电容器

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

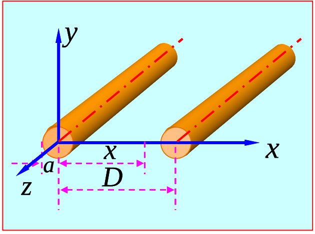
$$\vec{E}_1=\frac{\vec{e}_r Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}，\quad \vec{E}_2=\frac{\vec{e}_r Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right],$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\varepsilon_r\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$$

6．平行双线传输线单位长度的电容

两导线之间的平面上任一点 P 的电场强度为



$$\vec{E}(x)=\vec{e}_x\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$$

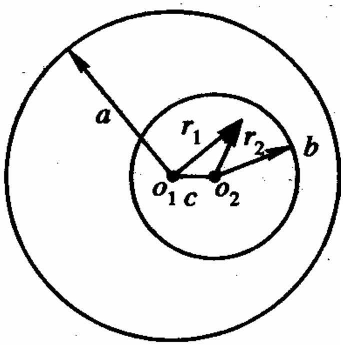
两导线间的电位差

$$U=\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^{D-a}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)dx=\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-a}{a}$$

故单位长度的电容为：$C=\dfrac{\rho_l}{U}=\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D-a}{a}}\approx\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D}{a}}$

7．不同心两球面间体电荷密度为 ρ ，

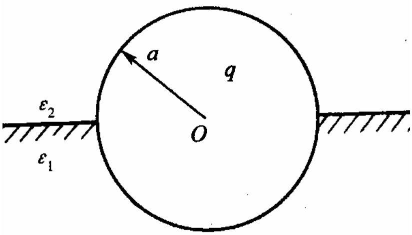
求小球面内任一点的电场



$$\vec{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1,\ \vec{E}_2=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{c}$$

8．电量为 q 导体球中心位于两均匀半无限大介质分界面，求电场



$$2\pi r^2D_{1r}+2\pi r^2D_{2r}=q$$

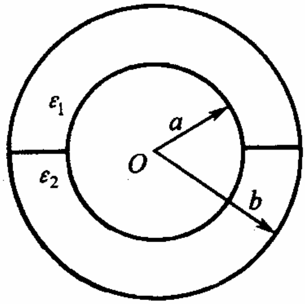
$$2\pi r^2\varepsilon_1E_{1r}+2\pi r^2\varepsilon_2E_{2r}=q$$

$$E_{1t}=E_{2t}\rightarrow E_{1r}=E_{2r}=E$$

$$E=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\qquad(r>a)$$

9．外加电压U的球形电容器上下部分填充不同介质，求电容器内电场

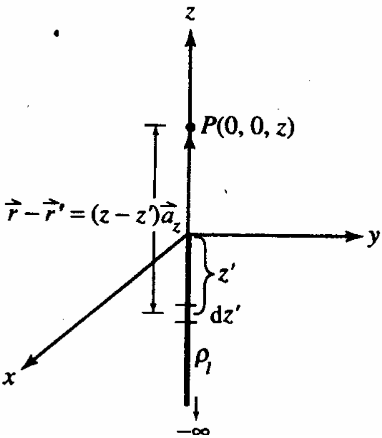
$$2\pi r^2\varepsilon_1 E_{1r}+2\pi r^2\varepsilon_2 E_{2r}=q\text{，}E_{1t}=E_{2t}\to$$



$$E=\frac{q}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}=\frac{Uab}{r^2(b-a)}$$

$$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

{例}一根无限长的带电线，沿z轴从$-\infty$到 0，均匀电荷分布为$100\,nC/m$，求$P(0,0,2)$点的电场强度。假设有一个$1\,\mu C$的电荷置于P点，计算作用在此电荷上的力。



解： 考虑在$z=z'$处有一个电荷微元$\rho_l dz'$(如图所示)，从z'到P点的距离矢量为$\vec{r}-\vec{r}'=(z-z')\vec{e}_z$，其大小为$|\vec{r}-\vec{r}'|=z-z'$， P点的电场强度为

$$\vec{E}=\vec{e}_z\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0}\frac{dz'}{(z-z')^2}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 z}\vec{e}_z$$

代入数值得

$$\vec{E}=\frac{9\times10^9\times100\times10^{-9}}{2}\vec{e}_z=450\vec{e}_z\,V/m\text{，}$$

在$z=2m$处$1\,\mu C$的电荷所受的力为

$$\vec{F}=q\vec{E}=1\times10^{-6}\times450\vec{e}_z=450\vec{e}_z\,\mu N\text{。}$$