电子科技大学 2018-2019 学年第 1 学期期末考试

考试科目：概率论与数理统计　考试形式：闭卷　考试日期：2019 年 1 月

一、简答题

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，P（A）=0.8，P（B）=0.6，（1）求 P（A∪B）（2）求 $P\left(\overline{A}|A\cup B\right)$

2. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$ 服从（0,1）上的均匀分布

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$　求 $E(X),D(X)$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，试恰当选择常数 C，使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

5. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=x)=\dfrac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$，　$x=0,1,2,\cdots,0<\theta<+\infty$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一组样本观察值，求 θ 的极大似然估计值.

二、计算题

市场上出售的某种商品由三个厂家同时供货，其供应量第一厂家为第二厂家的两倍，第二、三厂家相等，且第一、第二、第三厂家的次品率依次为2%，2%，4%。若在市场上随机购买一件商品为次品，问该件商品是第一厂家生产的概率为多少？

三、计算题

设（X,Y）的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 试求：

（1）X,Y 的边缘概率密度函数$f_X(x),f_Y(y)$；

（2）判断 X,Y 是否相互独立

（3）是否不相关？

四、计算题

某商店负责供应某地区 10000 人商品，某种商品在一段时间内每人需用一件的概率为 0.6，假定在这一段时间内各人购买与否彼此无关，问商店应预备多少件这种商品，才能以 99%的概率保证不会脱销（假定该商品在某一段时间内每人最多可以买一件）$\Phi(2.33)=0.99$

五、计算题

正常人的脉搏平均 72 次/每分钟，现在测得 10 例酏剂中毒患者的脉搏，算得平均次数为 67.4 次，样本方差为5.929^2，已知人的脉搏次数$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试问：中毒患者与正常人脉搏有无显著差异？$(\alpha=0.05)$ $(t_{0.025}(9)=2.2622, t_{0.05}(9)=1.8331)$

六、计算题

某公司为预测一款产品的定价 Y，要研究它与原材料的成本 X 之间的相关关系，现取得市场上 8 款同类产品的产品价格和原材料成本的数据(x_i,y_i)，计算得：

$$\sum_{i=1}^{8} x_i=52,\quad \sum_{i=1}^{8} y_i=228,\quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2=478,\quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2=7666,\quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i=1849$$

（1）求 Y 关于 X 的一元经验线性回归方程，并计算原材料成本为 50 元时的产品价格。

（2）检验 X 与 Y 的线性相关关系是否显著（$\alpha=0.01$）？$(R_{0.01}(8)=0.765, R_{0.01}(6)=0.834)$

参考答案

（本答案非标准答案，仅供参考）

一、简答题

1. （1）$\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

$$=\mathrm{P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)}=0.8+0.6-0.8\times 0.6=0.92$$

（2）$\mathrm{P(\bar{A}|A\cup B)}=\dfrac{\mathrm{P(\bar{A}\cap(A\cup B))}}{\mathrm{P(A\cup B)}}=\dfrac{\mathrm{P((\bar{A}\cap A)\cup(\bar{A}\cap B))}}{\mathrm{P(A\cup B)}}$

$$=\frac{\mathrm{P(\varnothing\cup(\bar{A}\cap B))}}{\mathrm{P(A\cup B)}}=\frac{\mathrm{P(\bar{A}\cap B)}}{\mathrm{P(A\cup B)}}=\frac{\mathrm{P(\bar{A})\cdot P(B)}}{\mathrm{P(A\cup B)}}=\frac{0.2\times 0.6}{0.92}=\frac{3}{23}=0.130435$$

2. 方法一：X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$y=1-e^{-2x}$在$x>0$时的反函数为$x=h(y)=-\dfrac{1}{2}\ln(1-y)$，故

$f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 所以$Y\sim U(0,1)$.

方法二：X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

设$G(y)=P\{Y\leqslant y\}$为Y的分布函数，由于$X>0$，有$0<Y=1-e^{-2X}<1$，易得

当$y<0$时，$G(y)=0$；当$y\geqslant 1$时，$G(y)=1$；

当$0\leqslant y<1$时,$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-e^{-2X}\leqslant y\}$

$$=P(e^{-2X}\geqslant 1-y)=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}=F\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)=y$$

综上有，$G(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leqslant y<1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}$所以$Y$在区间$(0,1)$上服从均匀分布。

3. $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=1$$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-1=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)dx-1$

$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2-1=\frac{1}{4}+\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{6}$$

4. 方法一：$\sigma^2=E\left[C\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=C\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_{i+1}^2-2X_{i+1}X_i+X_i^2\right)$

$$=C\sum_{i=1}^{n-1}[E(X_{i+1}^2)-2E((X_{i+1})(X_i))+E(X_i^2)]$$

$$=C\sum_{i=1}^{n-1}2\left[E(X^2)-(E(X))^2\right]=2C(n-1)\sigma^2 \qquad 因此\quad C=\frac{1}{2(n-1)}$$

方法二：令$Y=X_{i+1}-X_i$，则$Y\sim N(0,2\sigma^2)$，由

$$E\left(C\sum_{i=1}^{n-1}Y^2\right)=C\sum_{i=1}^{n-1}E(Y^2)=C(n-1)\left[D(Y)+(E(Y))^2\right]=C(n-1)2\sigma^2=\sigma^2$$

因此 $C=\dfrac{1}{2(n-1)}$

5. 似然函数为 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^{x_i}e^{-\theta}}{x_i!}=e^{-n\theta}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^{x_i}}{x_i!}$

由于$L(\theta)>0$，取对数得

$$\ln L(\theta)=\ln\left(e^{-n\theta}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\right)=-n\theta+\ln\theta\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!$$

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$ 得 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}=0$

因此θ的极大似然估计值为 $\theta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 故θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

二、设出现次品为事件M，产品出自第一、二、三厂家分别记为事件A,B,C

则 $P(A)=\dfrac{2}{4},P(B)=\dfrac{1}{4},P(C)=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P(M)=P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)+P(M|C)P(C)}=0.02\times\dfrac{2}{4}+0.02\times\dfrac{1}{4}+0.04\times\dfrac{1}{4}=0.025$

$$\therefore P(A|M)=\frac{P(AM)}{P(M)}=P(M|A)\frac{P(A)}{P(M)}=0.02\times\frac{\frac{2}{4}}{0.025}=0.4$$

三、（1）对于X的边缘概率密度$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当$x<0$ 或$x>1$时,$f_X(x)=0$;当$0\leqslant x\leqslant1$时，$f_X(x)=\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}y=\dfrac{3}{2}-x$

因此$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-x, & 0\leqslant x\leqslant1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 同理，可以求出Y的边缘概率密度$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-y, & 0\leqslant y\leqslant1\\ 0, & 其他\end{cases}$

（2）由于$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\left(\dfrac{3}{2}-y\right), & 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\\ 0, & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$ 所以X，Y不相互独立

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{12}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\left(\frac{3}{2}-y\right)\mathrm{d}y=\frac{5}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$$

同理$D(Y)=\frac{11}{144}$　由于 $\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{12}\right)^2}{\frac{11}{144}}=-\frac{1}{11}\neq 0$

所以 X 与 Y 不相关。

四、设销量为 X，备货量为 m　则$X\sim B(10000,0.6)$　故$E(X)=np=6000$，$D(x)=2400$

根据独立同分布大数定理可知$P(X\leqslant m)=P\left\{\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\leqslant\frac{m-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\}\geqslant 0.99$

故$\Phi\left(\frac{m-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)\geqslant\Phi(2.33)$　解得$m\geqslant 6114.14622$　取整得$m=6115$　因此应预备 6115 件这种商品

五、提出假设H_0: $\mu=\mu_0$　H_1: $\mu\neq\mu_0$由于σ未知，因此选择检验统计量$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(9)$

对于给定的显著性水平$\alpha=0.05$，拒绝域为$(-\infty,-t_{0.025}(9))\cup(t_{0.025}(9),+\infty)$

由于 T 的观测值为$t=\frac{67.4-72}{5.929/\sqrt{10}}=-2.45345<-t_{0.025}(9)=-2.2622$

在拒绝域内，因此拒绝H_0，因此中毒患者与正常人脉搏有显著差异。

六、（1）由题中数据得$\overline{x}=6.5,\overline{y}=28.5$

$$\therefore\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}=\frac{1849-8\times 6.5\times 28.5}{478-8\times 6.5^2}=\frac{367}{140}\approx 2.62$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx 28.5-2.62\times 6.5=11.47$$

故 y 与 x 的一元经验线性回归方程为$\hat{y}=2.62x+11.47$

当 x=50 时产品价格为 $\hat{y}=2.62\times 50+11.47=142.47$