

作业题

1、 $f(\mathbf{X}) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_1 - \beta x_2$ 是凸函数的充要条件是_____ (关于 α, β) .

2、考虑约束优化问题: $\min \mathbf{C}^T \mathbf{X}, s.t., \mathbf{X}^T \mathbf{X} \leq 4$, 这里, $\mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{C} \neq 0$, 则最优解

$\mathbf{X}^* =$ _____.

3、已知下面线性规划的最优解 $\mathbf{X}^* = (4, 2)^T$,

$$\begin{aligned} & \max x_1 + 2x_2 \\ & s.t. \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq \alpha \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

(1)、用图解法说明 $\alpha = 8$; (2)、写出 \mathbf{X}^* 处的下降可行方向; (3)、写出其对偶线性规划; (4)、求其对偶规划的最优解。

4、验证向量组 $\mathbf{P}^i = (1, 2, \dots, i+1, 0, \dots, 0)^T$, $i = 0 \sim n-1$, 关于 n 阶三对角矩阵

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{共轭.}$$

5、用 **FR** 共轭梯度法求解 $\min x_1^2 + 2x_2^2$, 从 $\mathbf{X}^0 = (5, 5)^T$ 出发进行第一次迭代后得到 $\mathbf{X}^1 = (20/9, -5/9)^T$,

(1)、请写出后续迭代过程; (2)、说明 \mathbf{X}^1 处的搜索方向 \mathbf{P}^1 与牛顿方向 \mathbf{P}_N^1 共线。

6、求原点到 $S = \{2x_1 + x_2 \geq 5, x_1 + x_2 \geq 4\}$ 之间的最小距离。

7、试叙述惩罚函数法的基本思想及其优缺点; 并用外点法、内点法、乘子法分别求解下面约束优化问题:

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 \\ & s.t. \quad -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ & \quad \quad x_2 - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

8、求出下面问题的 **KT** 点:

$$\begin{aligned} & \min -x_2 \\ & s.t. \\ & (3 - x_1)^2 - (x_2 - 2) \geq 0; \\ & 3x_1 + x_2 \geq 9. \end{aligned}$$

9、用 **Rosen** 梯度投影法求解:

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2 \\ & s.t. \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2. \end{aligned}, \quad \mathbf{X}^0 = (2, 0)^T.$$