1、 自由空间中均匀平面波的电场强度矢量为：$\vec{E}(x,y,z)=3(\vec{e}_x-\sqrt{2}\vec{e}_y)e^{-j\frac{\pi}{2}z}$ V/m，试求：（1）电场强度的振幅$\left|\vec{E}\right|$、波矢量$\vec{k}$、波长λ和频率f；

（2）该平面波产生1.5π相移时所传播的距离L；

（3）电场强度矢量的瞬时表达式$\vec{E}(x,y,z,t)$。

解：（1）

$$\left|\vec{E}\right|=3\sqrt{3}\ \text{V/m}$$

$$\vec{k}=\frac{\pi}{2}\vec{e}_z\text{rad/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=4\text{m}$$

$$f=\frac{\text{c}}{\lambda}=\frac{3\times10^8\text{m/s}}{4\text{m}}=0.75\times10^8\text{Hz}$$

（2）$kL=1.5\pi\Rightarrow L=3\text{m}$

（3）$\omega=k\text{c}=\dfrac{3}{2}\pi\times10^8\text{rad/s}$

$$\vec{E}(x,y,z,t)=3(\vec{e}_x-\sqrt{2}\vec{e}_y)\cos\left[\frac{3}{2}\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z\right]\text{V/m}$$

2、自由空间中一均匀平面波的电场强度矢量为$\boldsymbol{\vec{E}}=5\left(\boldsymbol{\vec{e}}_x+\boldsymbol{\vec{e}}_y\right)\boldsymbol{e}^{-j\frac{\pi}{2}z}$ V/m，试求：

（1）电场强度的振幅、波数、波长和频率；

（2）电场强度矢量和磁场强度矢量的瞬时表达式；

（3）坡印廷矢量和平均坡印廷矢量；

（4）该电磁波的极化形式。

解：（1）

$$\left|\boldsymbol{\vec{E}}\right|=5\sqrt{2},\quad \boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{rad/m},$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{k}}=\mathbf{4}\ \boldsymbol{m}，\quad \boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{7.5\times10^7}\ \boldsymbol{Hz}$$

（2）角频率$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{2}\boldsymbol{\pi f}=\mathbf{1.5}\boldsymbol{\pi}\mathbf{\times10^8}\ \boldsymbol{rad/s}$

电场强度矢量的瞬时表达式为：

$$\vec{E}=\mathrm{Re}\left[5\left(\vec{e}_x+\vec{e}_y\right)e^{-j\frac{\pi}{2}z}e^{j\omega t}\right]$$

$$=5\left(\vec{e}_x\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}z)+\vec{e}_y\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}z)\right)$$

$$=5\left(\vec{e}_x\cos(1.5\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z)+\vec{e}_y\cos(1.5\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z)\right)$$

磁场强度矢量的瞬时表达式：

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta_0}\vec{e}_z\times\vec{E}=\frac{5}{\eta_0}\left(-\vec{e}_x\cos(1.5\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z)+\vec{e}_y\cos(1.5\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z)\right)$$

（3）坡印廷矢量：

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{e}_z\frac{1}{\eta_0}\left|\vec{E}\right|^2$$

$$=\vec{e}_z\frac{50}{\eta_0}\cos^2(1.5\pi\times10^8t-\frac{\pi}{2}z)$$

平均坡印廷矢量：

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_0}\left|\vec{E}_m\right|^2=\vec{e}_z\frac{25}{\eta_0}$$

（4）为线极化波

3、 理想介质（$\varepsilon_r=4$，μ_r=1）中传播的均匀平面波，

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{r})=\left(\vec{e}_x+A\vec{e}_y+j\sqrt{5}\vec{e}_z\right)e^{-j\pi(2x+y+cz)},$$

式中常数 A、c 为实数

试求： （1）A，c 的值；

（2）波的传播方向单位矢量、波长、频率，波的极化特性；

（3）相伴磁场的瞬时值形式。

解：（1）由 $\vec{E}\bullet\vec{k}=0$ 得，$(\vec{e}_x+A\vec{e}_y+j\sqrt{5}\vec{e}_z)\bullet\pi(2\vec{e}_x+\vec{e}_y+c\vec{e}_z)=0$

得：$A=-2,c=0$

（2） $\vec{k}=\pi(2\vec{e}_x+\vec{e}_y),k=\sqrt{5}\pi$

$$\vec{e}_n=\frac{\vec{k}}{k}=\frac{\pi(2\vec{e}_x+\vec{e}_y)}{\sqrt{5}\pi}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{e}_x+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{e}_y$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}\pi} = \frac{2\sqrt{5}}{5} m$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\lambda} = \frac{3\sqrt{5}}{4} \times 10^8 Hz \qquad \omega = 2\pi f = \frac{3\sqrt{5}\pi}{2} \times 10^8$$

$E_{mI} = \sqrt{5} = E_{mR}$，相位超前的分量和相位滞后的分量振幅相等，相位差为$\pi/2$，且相互垂直，所以电磁波为圆极化波，由$\vec{E}_I \times \vec{E}_R \bullet \vec{k} = (\sqrt{5}\vec{e}_z \times (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)) \bullet (2\pi\vec{e}_x + \pi\vec{e}_y) > 0$，所以电磁波为右旋圆极化波。

（3） 介质的波阻抗$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta_0 = 60\pi$

相伴的磁场 $\vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_n \times \vec{E} = \frac{1}{60\pi}(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y) \times (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + j\sqrt{5}\vec{e}_z)e^{-j\pi(2x+y)}$

$$= \frac{1}{60\pi}(j(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) - \sqrt{5}\vec{e}_z)e^{-j\pi(2x+y)}$$

相应的瞬时值形式 $\vec{H} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{60\pi}(j(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) - \sqrt{5}\vec{e}_z)e^{j\omega t}e^{-j\pi(2x+y)}\right]$

$\vec{H} = \frac{1}{60\pi}\left[(2\vec{e}_y - \vec{e}_x)\sin(\omega t - \pi(2x+y)) - \sqrt{5}\vec{e}_z\cos(\omega t - \pi(2x+y))\right]$。

$$\omega = \frac{3\sqrt{5}\pi}{2} \times 10^8$$

课堂练习题：

1． 在空气中传播的均匀平面波的磁场强度的复数表示式为

$$\vec{H} = (-\vec{e}_x A + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}$$

式中 A 为常数。求：（1）波矢量$\vec{k}$；（2）波长和频率；（3）A 的值；（4）相伴电场的复数形式；（5）平均坡印廷矢量。

解：（1）因为$\vec{H} = \vec{H}_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}}$，所以

$\vec{H}_\mathrm{m} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4$，

$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z=4\pi x+3\pi z$

因此有，$\vec{k}=\vec{e}_x 4\pi+\vec{e}_z 3\pi$，$k=\sqrt{(3\pi)^2+(4\pi)^2}=5\pi$。

（2） $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{5\pi}=\dfrac{2}{5}\ \mathrm{m}$，　$f=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{3\times10^8}{2/5}=7.5\times10^8\ \mathrm{Hz}$

（3）$\vec{k}\cdot\vec{H}_{\mathrm{m}}=4\pi(-A)+0\times2+3\pi\times4=0$，所以 A=3。

（4）$\vec{E}(\vec{r})=\eta_0\vec{H}(\vec{r})\times\vec{e}_{\mathrm{n}}$

$$=120\pi(-\vec{e}_x 3+\vec{e}_y 2+\vec{e}_z 4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}\times(\vec{e}_x\frac{4}{5}+\vec{e}_z\frac{3}{5})$$
$$=120\pi(\vec{e}_x 1.2+\vec{e}_y 5-\vec{e}_z 1.6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}$$

（5）
$$\begin{aligned}\vec{S}_{\mathrm{av}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{120\pi(\vec{e}_x 1.2+\vec{e}_y 5-\vec{e}_z 1.6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}\\&\quad\times[(-\vec{e}_x 3+\vec{e}_y 2+\vec{e}_z 4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}]^*\Big\}\\&=12\pi\times29\times(\vec{e}_x 4+\vec{e}_z 3)\ \ \mathrm{W/m^2}\end{aligned}$$

2. 已知在良导体中传播的均匀平面波的电场强度为

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 5e^{-4y}\cos(2\pi\times10^9 t-\beta y)\quad \mathrm{V/m},$$

试求：(1) 波的传播方向；（2）频率 f；（3）衰减常数α和相位常数β；（4）波长λ和相速v_p；(5) 趋肤深度δ；(6) 波的极化状态。

解：(1) 沿+y 方向传播

(2) $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{2\pi\times10^9}{2\pi}=1\times10^9\ \ \mathrm{Hz}$

(3) $\alpha=4\ \ \mathrm{Np/m}$，$\beta=4\ \ \mathrm{rad/m}$

(4) $\lambda=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\ \ \mathrm{m}$，　$v_p=\dfrac{\omega}{\beta}=\dfrac{2\pi\times10^9}{4}=5\pi\times10^8\ \ \mathrm{m/s}$

(5) $\delta=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{4}\ \ \mathrm{m}$

3. 判断下面均匀平面波的极化方式：

$$\vec{E}(\vec{r}) = [-4\vec{e}_x + j5\vec{e}_y + 3\vec{e}_z]e^{-j\pi(3x+4z)}$$

解：波传播方向$\vec{e}_n = \dfrac{3}{5}\vec{e}_x + \dfrac{4}{5}\vec{e}_z = \vec{e}_z{}'$

寻找两个与$\vec{e}_z{}'$垂直，且互相垂直的方向作为新的$\vec{e}_x{}'$和$\vec{e}_y{}'$。根据电场幅度的表达式，可以选取$-\dfrac{4}{5}\vec{e}_x + \dfrac{3}{5}\vec{e}_z$和$\vec{e}_y$两个方向，并且有$\vec{e}_y \times \left(-\dfrac{4}{5}\vec{e}_x + \dfrac{3}{5}\vec{e}_z\right) = \dfrac{3}{5}\vec{e}_x + \dfrac{4}{5}\vec{e}_z = \vec{e}_z{}'$，因此$\vec{e}_x{}' = \vec{e}_y$，$\vec{e}_y{}' = \left(-\dfrac{4}{5}\vec{e}_x + \dfrac{3}{5}\vec{e}_z\right)$。再根据电场的表达式可以知道$\vec{e}_x{}'$方向上的波初始相位为$\dfrac{\pi}{2}$，幅度为 5；而$\vec{e}_y{}'$方向上的波初始相位为 0，幅度为 5。因此幅度相等，$\Delta\phi = 0 - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$，为右旋圆极化波。