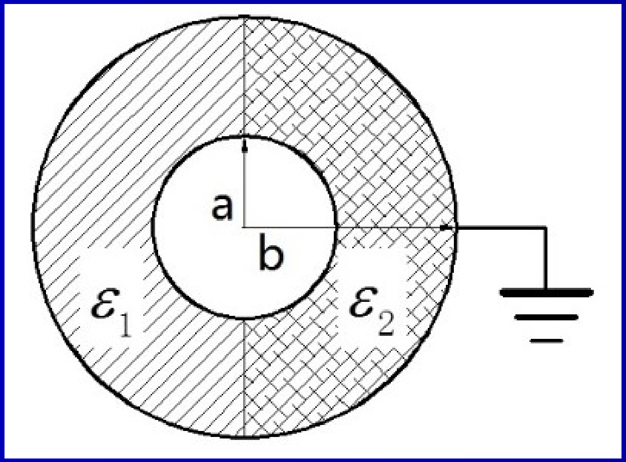
练习： 已知一个球形电容器，其内外导体半径分别为*a*和*b*。电容器内填充有介电常数分别为ε_1和ε_2电介质。假设内导体带电荷*q*,外球接地，如下图所示，求电容器两球壳间的（1）电容（2）电场能量



解： 设介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的区域中电场强度、电位移矢量分别为 $\vec{E}_1$、$\vec{D}_1$、$\vec{E}_2$、$\vec{D}_2$，其方向均为 $\vec{e}_r$ 方向。由高斯定律可得

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$$

再根据介质分别面的边界条件：$E_1 = E_2 = E$

以及介质的本构关系：$D_1 = \varepsilon_1 E_1, D_2 = \varepsilon_2 E_2$

可以得到 $E = \dfrac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$

电容器内外球壳间的电位差为：

$$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr=\frac{q(b-a)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}$$

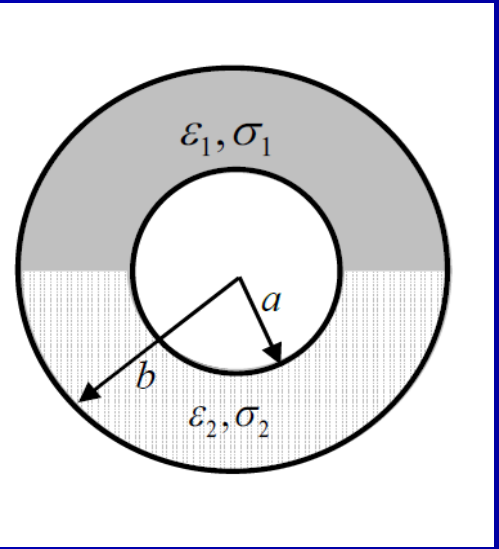
因此电容器两球壳间的电容为：

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}{b-a}$$

电容器两球壳间的电场能量为：

$$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{q^2(b-a)}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}$$

练习： 内、外导体半径分别为a、b的同轴电缆，内外导体之间以过轴线的平面为分界面，一半填充电容率为 ε_1，电导率为 σ_1的媒质，另一半填充电容率为ε_2，电导率为 σ_2 的媒质。已知内、外导体间电压为U，求：（1）该电缆单位长度的漏电导；（2）单位长度损耗的功率。



解： 设单位长度同轴电缆的径向电流为I，电场及电流的方向为$\vec{e}_\rho$，为分界面的切向，因此有$\vec{E}_1=\vec{E}_2=\vec{E}=E\vec{e}_\rho$，$J_1=\sigma_1 E, J_2=\sigma_2 E$。

根据电流的定义得

$$I=(J_1+J_2)\pi\rho=(\sigma_1+\sigma_2)\pi\rho E \Rightarrow E=\frac{I}{(\sigma_1+\sigma_2)\pi\rho}$$

又由于： $U=\int_a^b E\cdot d\rho=\frac{I}{(\sigma_1+\sigma_2)\pi}\int_a^b\frac{1}{\rho}d\rho=\frac{I}{(\sigma_1+\sigma_2)\pi}\ln\frac{b}{a}$

因此单位长度的漏电导为：

$$G=\frac{I}{U}=\frac{(\sigma_1+\sigma_2)\pi}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

单位长度的功率损耗为：

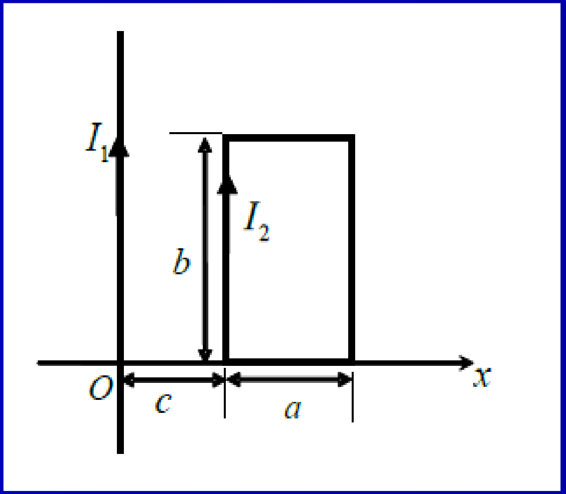
$$P=GU^2=\frac{(\sigma_1+\sigma_2)\pi U^2}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

练习： 如图所示，尺寸为$a\times b$的矩形回路与无限长直导线共面，无限长直导线载有电流I_1，矩形线框载有电流 I_2，与直线相距为c.求:

(1) 电流I_1 与电流I_2之间相互作用的磁场能量W_m；

(2) 若线框平面绕直导线旋转θ角， W_{m12} 有无变化？

(3) 若线框平面绕其对称轴旋转θ角， W_{m12}有无变化？



解： (1) 由安培环路定理得，电流I_1产生的磁场为

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_r$$

它在电流环路处产生的磁通量为，

$$\Psi_{12}=\int_{S_2}\vec{B}_1\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_c^{c+a}\frac{1}{r}dr=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

所以1对2的互感为： $M_{12}=\frac{\psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$

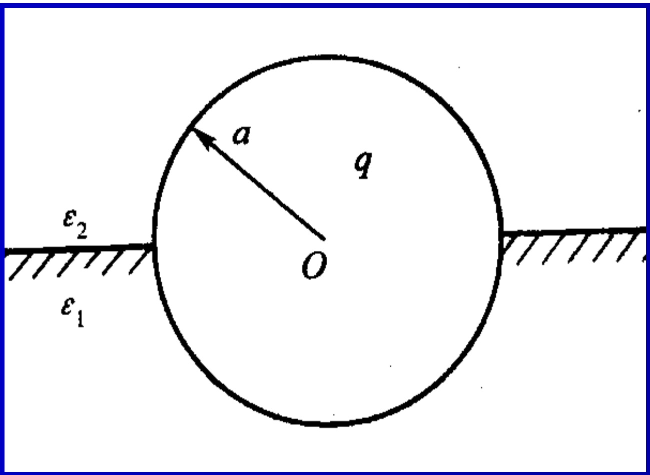
因此1和2相互作用的磁场能量为：

$$W_{m12}=I_1I_2M_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

（2） W_{m12}无变化。

（3） W_{m12}有变化。

补充练习：一半径为a、带电荷量为q的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的介电常数分别为ε_1和ε_2，分界面为无限大平面。求导体球的电容。



解： 设介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的区域中电场强度、电位移矢量分别为 $\vec{E}_1$、$\vec{D}_1$、$\vec{E}_2$、$\vec{D}_2$，其方向均为 $\vec{e}_r$ 方向。由高斯定律可得

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$$

再根据介质分别面的边界条件：$E_1 = E_2 = E$

以及介质的本构关系：$D_1 = \varepsilon_1 E_1, D_2 = \varepsilon_2 E_2$

可以得到 $E = \dfrac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$

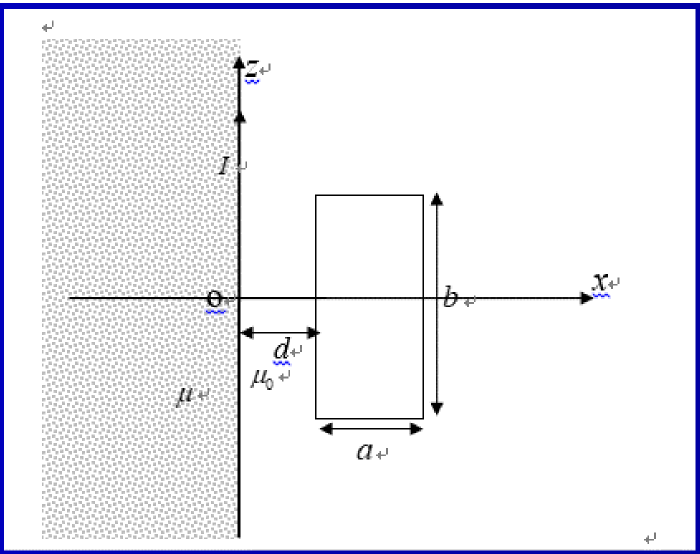
那么导体球的电位为：

$$\varphi(a)=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a}$$

最终得到导体球的电容为：

$$C=\frac{q}{\varphi(a)}=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$$

补充练习： 如下图所示，$x<0$的半空间充满磁导率为电容率为 μ 的磁介质，$x>0$的半空间为空气。有一无限长直细导线置于z轴上，导线中的电流为I。在xoz平面内有一个与细导线共面的矩形线框 $a \times b$ 试求： (1)电流I产生的磁感应强度；(2)细导线与矩形线框间的互感.



解： (1) 根据安培环路定理有

$$\pi r H_{\mu} + \pi r H_{0} = I$$

由于$B_{\mu} = \mu H_{\mu}, B_{0} = \mu_0 H_{0}$，

又根据边界条件 $B_{\mu} = B_{0} = B$，于是有

$$\pi r \frac{B}{\mu} + \pi r \frac{B}{\mu_0} = I$$

所以：$\vec{B} = \dfrac{I \mu\mu_0}{\pi r(\mu + \mu_0)} \vec{e}_{\varphi}$

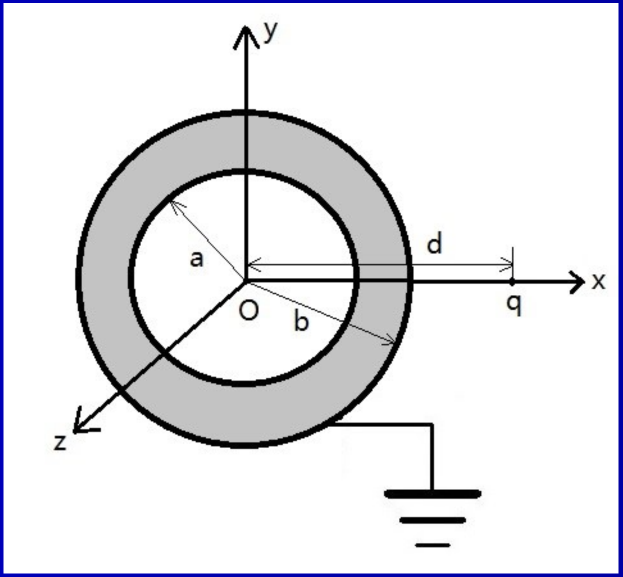
(2）与矩形线框交链的磁通为：

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_d^{a+d} \frac{I\mu\mu_0}{\pi r(\mu+\mu_0)} b dr = \frac{I\mu\mu_0 b}{\pi(\mu+\mu_0)} \ln\frac{d+a}{d}$$

所以有：

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu\mu_0 b}{\pi(\mu+\mu_0)} \ln\frac{d+a}{d}$$

补充练习： 如下图所示，一内半径为a、外半径为b的接地导体球壳，壳外沿x轴方向距球心距离为d处，放置一带电量为q的点电荷，周围为空气，求球壳外($r>b$)空间中的电位分布？



解： 此问题用利用镜像法求解，其镜像电荷为:

位置在x轴上且在$r=b$的球内，距球心的距离为 $d'=\dfrac{b^2}{d}$ ，带电量为 $q'=-\dfrac{b}{d}q$

因此$r>b$空间的电位分布为:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{bq}{4\pi\varepsilon_0 d r_2}$$

其中，$r_1=\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}$ $\quad r_2=\sqrt{\left(x-\dfrac{b^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}$