一． 填空题（30 分，每空 3 分）

1.1 已知正态分布随机变量 $Y \sim N(0,\sigma^2)$，Y 的三阶累计量值 $c_3 =$ ________。

1.2 强度为 λ 的齐次 Poisson 过程亦称以速率为 λ 到达服务机构的计数过程，其相关函数 $R(s,t) =$ ________。

1.3 某一非周期平稳正态随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 13e^{-4|\tau|} + 4$，其一维特征函数为________。

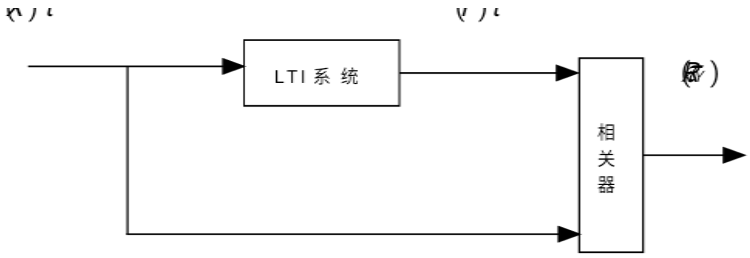
1.4 二阶矩随机过程 $X(t)$ 在 $t = t_0$ 处均方可微的充分必要条件是其自相关函数 $R_X(s,t)$ 满足________。

1.5 参数为 σ^2 的 Wiener 过程 $W(t)$ 是均方连续的正态过程，但不是均方可微过程，其方差函数 $Var[W(t)] =$ ________。

1.6 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度函数为 $S_X(\omega) = \dfrac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$，该过程的二阶矩或平均功率 $E\{|X(t)|^2\} =$ ________。

1.7 随机相位信号 $X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta)$，其中 a 和 ω_0 为常数，随机变量 Θ 在 $(0, 2\pi]$ 上的均匀分布。$X(t)$ 与其一阶均方导数 $X'(t)$ 的互相关函数 $R_{XX'}(\tau)$ ________。

1.8 利用互相关测量 LTI（线性时不变）系统的单位冲激响应 $h(t)$ 的流程如下图。假设输入 $X(t)$ 是白噪声过程，其自相关函数为 $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$，$N_0$ 是不为零常数，LTI 系统的冲激响应 $h(\tau) =$ ________。



1.9 某行业的 A、B 和 C 三个企业销售同一种产品的最初市场占有份额为 $[0.5 \quad 0.2 \quad 0.3]$**。经过市场调节与技术进步，A、B 和 C 三个企业产品销售的转移概率矩阵为** $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$**。企业 C 的最终占有份额是____________________________。**

1.10 齐次马氏链的三状态 $\{0, 1, 2\}$ **的状态转移概率矩阵为** $\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$**，其首达概率** $f_{02}^{(3)} =$ **____________________。**

二、证明题（30 分，每小题 10 分）

2.1 假设 $X(t)$ **和** $Y(t)$ **是零均值的、方差为** σ^2 **的、高斯的、平稳的、统计独立的随机过程，且有相同的自相关函数** $R(\tau)$**。证明** $Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t$ **是正态随机过程，其中** ω_0 **为常数，且远大于** $X(t)$ **和** $Y(t)$ **的功率谱密度函数带宽。**

2.2假设 $F(x)$ 是单调不减、右连续的有界函数， $F(-\infty)=0$ 。又假设 X 和 Y 是相互统计独立的随机变量，且 X 的分布函数为 $\frac{F(x)}{F(\infty)}$ ，$F(\infty)\neq 0$ ，Y 在 $(0,2\pi]$ 上均匀分布。证明 $F(\omega)$ 是广义平稳过程 $X(t)=\sqrt{\frac{F(\infty)}{2\pi}}e^{-j(Xt+Y)}$ 的谱函数。（提示： $R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}dF(\omega)$ **）**

2.3 如果齐次马氏链$\{X(n), n \geq 0\}$ **中的状态** i **和状态** j **互通，且状态** i **是常返态，则** j **也是常返态。**

三、分析题（14 分）

3.1（6 分）设齐次马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$ **的状态空间为** $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ **，其一步状态转移概率矩阵为**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

（1） 给出每个状态的周期数

（2） 说明哪些状态属于常返态和非常返态。

3.2（8 分）某接收机的输出信号为$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$**，其中**$\omega_0$**为常数，**$A$**与**$\Phi$**是相互独立的随机变量，且**$E(A)=2$**，**$Var(A)=4$**，**$\Phi$**服从**$[0,2\pi)$**上均匀分布。分析是否可以用样本的时间平均代替统计平均计算信号**$X(t)$**的均值函数和相关函数？**

四、计算题（26 分）

4.1（8 分）设$X(t)$**是零均值的、二阶均方可微的平稳正态过程，自相关函数为**$R_X(\tau)=4e^{-5|\tau|}$**。计算随机向量过程**$[X(t),\ X''(t)]$**的联合特征函数，其中**$X''(t)$**为**$X(t)$**的二阶均方导数过程。**

4.2（10 分）非周期平稳随机过程 $X(t)$ **的自功率谱密度函数为** $S_X(\omega)=\dfrac{10}{\omega^2+25}$**。**

该随机过程通过单位冲激响应为 $h(t)=3e^{-3t},\ t\ge 0$ **的** $R-C$ **积分电路，输出为** $Y(t)$**。计算**

（1）输出过程 $Y(t)$ **的自相关函数、自功率谱密度函数；**

（2） $Y(t)$ **与** $X(t)$ **的互功率谱密度函数。**

4.3（8分）仅能容纳两位顾客的银行营业所由一个营业员为顾客服务，一位顾客接受营业员服务，另外一位顾客则等待，其余顾客发现这种情况，马上离开不返回。设顾客以速率为 2 人/小时的 Poisson 流到达该营业所，且每位顾客在营业所接受服务的平均时间为0.2 小时。写出状态转移概率强度矩阵，计算各种状态的平稳分布概率。