1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

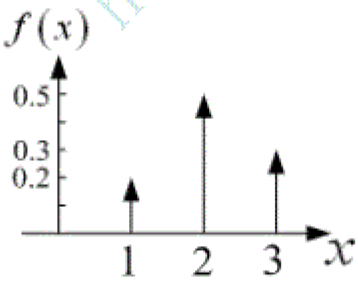
9. 设随机试验 X 的分布律为

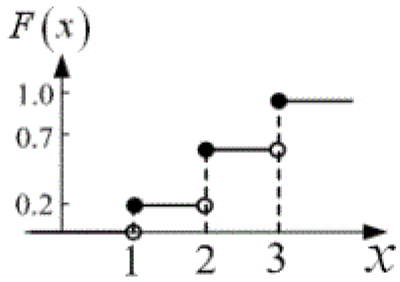
X	1	2	3
P	0.2	0.5	0.3

求 X 的概率密度和分布函数，并给出图形。

解：$f(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i)=0.2\delta(x-1)+0.5\delta(x-2)+0.3\delta(x-3)$

$$F(x)=\sum_i p_i u(x-x_i)=0.2u(x-1)+0.5u(x-2)+0.3u(x-3)$$





10.

答案网 http://www.daanwang.com

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=ae^{-|x|}$，

求:(1)系数 a；（2）其分布函数。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-|x|}dx=a\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx\right)=2a$$

所以 $a=1/2$

（2）$F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt$

所以 X 的分布函数为

$$F\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$$

答案网 http://www.daanwang.com

12.

13.

14. 若随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

求：（1）X 与 Y 的联合分布函数与密度函数；（2）X 与 Y 的边缘分布律；（3）$Z=XY$ 的分布律；（4）X 与 Y 的相关系数。

解：（1）

$$F(x,y)=\sum_i\sum_j p_{ij}u(x-x_i,y-y_j)$$
$$=0.07u(x,y+1)+0.18u(x,y)+0.15u(x,y-1)+$$
$$0.08u(x-1,y+1)+0.32u(x-1,y)+0.20u(x-1,y-1)$$

$$f(x,y)=\sum_i\sum_j p_{ij}\delta(x-x_i,y-y_j)$$
$$=0.07\delta(x,y+1)+0.18\delta(x,y)+0.15\delta(x,y-1)+$$
$$0.08\delta(x-1,y+1)+0.32\delta(x-1,y)+0.20\delta(x-1,y-1)$$

（2）X 的分布律为（$P_{i\cdot}=\sum_j P_{ij}$）

$$P(X=0)=0.07+0.18+0.15=0.40$$
$$P(X=1)=0.08+0.32+0.20=0.60$$

Y 的分布律为

$$P(Y=-1)=0.07+0.08=0.15$$
$$P(Y=0)=0.18+0.32=0.50$$
$$P(Y=1)=0.15+0.20=0.35$$

（3）$Z=XY$ 的分布律为

答案网 http://www.daanwang.com

$$P(Z=-1)=P(XY=-1)=P(X=1,Y=-1)=0.08$$

$$P(Z=0)=P(XY=0)$$
$$=P(X=0)+P(X=1,Y=0)=0.40+0.32=0.72$$

$$P(Z=1)=P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=0.20$$

（4）因为

$$E(X)=0\times0.40+1\times0.60=0.60$$

$$E(Y)=(-1)\times0.15+0\times0.50+1\times0.35=0.20$$

$$E(XY)=(-1)\times0.08+0\times0.72+1\times0.20=0.12$$

则

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=0.12-0.60\times0.20=0$$

X **与** Y **的相关系数** $\rho_{XY}=0$**，可见它们无关。**

15.

16. **设随机变量** $X\sim N(0,1)$**，** $Y\sim N(0,1)$ **且相互独立，**

$$\begin{cases}U=X+Y\\V=X-Y\end{cases}。$$

（1） 随机变量(U,V)**的联合概率密度** $f_{UV}(u,v)$**；**

（2） 随机变量U **与**V **是否相互独立？**

解：（1）随机变量(X,Y)**的联合概率密度为**

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},(x,y)\in R^2$$

答案网 http://www.daanwang.com

由反函数 $\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$， $J=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}$，

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x,y)\cdot|J|=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}},(u,v)\in R^2$$

由于,

（3） $$\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}e^{-\frac{u^2}{4}}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}e^{-\frac{v^2}{4}}\right)$$

$$f_{UV}(u,v)=f_U(u)f_V(v)\quad (u,v)\in R^2$$

所以随机变量U与V相互独立。

答案网 http://www.daanwang.com

17.

18.

19.

20.

21. 已知对随机变量X与Y，有$EX=1$，$EY=3$，$D(X)=4$，$D(Y)=16$，$\rho_{XY}=0.5$，又设$U=3X+Y$，$V=X-2Y$，试求EU，EV，$D(U)$，$D(V)$和$Cov(U,V)$。

（$D(U)=EU^2-(EU)^2$）

解：首先，

$$EX^2 = D(X) + (EX)^2 = 5\text{，}$$

$$EY^2 = D(Y) + (EY)^2 = 25\text{。}$$

又因为

$$\begin{aligned} E(XY) &= Cov(X,Y) + EX \times EY \\ &= \rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} + EX \times EY = 7 \end{aligned}$$

于是

$$EU = E(3X+Y) = 3EX + EY = 6$$

$$EV = E(X-2Y) = EX - 2EY = -5$$

$$\begin{aligned} D(U) &= EU^2 - (EU)^2 = E\left(3X+Y\right)^2 - (EU)^2 \\ &= E(9X^2 + 6XY + Y^2) - (EU)^2 = 76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(V) &= EV^2 - (EV)^2 = E\left(X-2Y\right)^2 - (EV)^2 \\ &= E(X^2 - 4XY + 4Y^2) - (EV)^2 = 52 \end{aligned}$$

答案网 http://www.daanwang.com

$$\begin{aligned} E(UV) &= E\left[(3X+Y)(X-2Y)\right] \\ &= E(3X^2 - 5XY - 2Y^2) = -70 \end{aligned}$$

$$Cov(U,V) = E(UV) - EU \times EV = -40$$

22.

23.

24. 已知随机变量 X 服从 $[0,a]$ 上的均匀分布。随机变量 Y 服从 $[X,a]$ 上的均匀分布，试求

（1） $E(Y|X),\ (0\le X\le a)$；

（2） EY

解：（1）对 $x\in[0,a]$ 有，

$$E(Y|X)=\frac{a+X}{2}$$

（2）

$$EY=E(E(Y|X))=E\left(\frac{a+X}{2}\right)=\frac{a+a/2}{2}=\frac{3}{4}a$$

答案网 http://www.daanwang.com

25.

26. 设太空梭飞行中，宇宙粒子进入其仪器舱的数目 N 服从（参数为 λ ）泊松分布。进舱后每个粒子造成损坏的概率为 p，彼此独立。求：造成损坏的粒子平均数目。

解：每个粒子是否造成损坏用 X_i 表示

$$X_i=\begin{cases}1, \text{造成损坏}\\ 0, \text{没有造成损害}\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,N$$

造成损坏的粒子数 $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$ ，于是

$$E(Y\mid N=n)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i\mid N=n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\mid N=n\right)$$

可合理地认为 N 和 X_i 是独立的，于是

$$E(Y\mid N=n)=\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)=np$$

$$E(Y)=E\left(E(Y\mid N)\right)=E\left(Np\right)=pE\left(N\right)=\lambda p$$

27. **若随机变量 X 的概率特性如下，求其相应的特征函数：**

（1） X **为常数 c，即** $P\{X=c\}=1$；

（2）参数为 2 的泊松分布；

（3）（－1，1）伯努利分布：

$$f(x)=0.4\delta(x-1)+0.6\delta(x+1)$$

（4）指数分布： $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

解：（1） $\phi_X(v)=E\left[e^{jvX}\right]=E\left[e^{jvc}\right]=e^{jvc}$，

如果 c=0，则 $\phi_X(v)=1$。

答案网 http://www.daanwang.com

（2）

$$\phi_X(v)=E\left[e^{jvX}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{jv}\right)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{jv}}=e^{\lambda\left(e^{jv}-1\right)}$$

（3）$\phi_X(v)=E\left[e^{jvX}\right]=e^{jv1}\times0.4+e^{jv(-1)}\times0.6=0.4e^{jv}+0.6e^{-jv}$

（4）$\phi_X(v)=E\left[e^{jvX}\right]=\int_0^{+\infty}e^{jvx}\times3e^{-3x}dx=3\int_0^{+\infty}e^{(jv-3)x}dx=\dfrac{3}{3-jv}$

28. 随机变量 X_1,X_2,X_3 彼此独立；且特征函数分别为 $\phi_1(v),\phi_2(v),\phi_3(v)$，求下列随机变量的特征函数：

（1）$X=X_1+X_2$；

（2）$X=X_1+X_2+X_3$；

（3）$X=X_1+2X_2+3X_3$；

（4）$X=2X_1+X_2+4X_3+10$；

解：（1）$X=X_1+X_2$

$$\phi_X(v)=E\left[e^{jvX}\right]=\phi_1(v)\phi_2(v)$$

（2）$X=X_1+X_2+X_3$

答案网 http://www.daanwang.com

同（1），$\phi_X(v)=\phi_1(v)\phi_2(v)\phi_3(v)$

（3）$X = X_1 + 2X_2 + 3X_3$

$$\phi_X(v)=\phi_1(v)\phi_2(2v)\phi_3(3v)$$

（4）$X = 2X_1 + X_2 + 4X_3 + 10$

$$\phi_X(v)=e^{jv10}\phi_1(2v)\phi_2(v)\phi_3(4v)$$

29. 随机变量 X 具有下列特征函数，求其概率密度函数、均值、均方值与方差。

（1）$\phi(v)=0.2+0.3e^{j2v}+0.2e^{j4v}+0.2e^{-j2v}+0.1e^{-j4v}$；

（2）$\phi(v)=0.3e^{jv}+0.7e^{-jv}$；

（3）$\phi(v)=4/(4-jv)$；

（4）$\phi(v)=(\sin 5v)/(5v)$；

答案网 http://www.daanwang.com

解：（1）$\phi(v)=\sum_{i=1}^{k} p_i e^{jvx_i}$　　$f(x)=\sum_{i=1}^{k} p_i\delta(x-x_i)$

$$\phi(v)=0.2+0.3e^{j2v}+0.2e^{j4v}+0.2e^{-j2v}+0.1e^{-j4v}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=0.2\delta(x)+0.3\delta(x-2)+0.2\delta(x-4)\\&\quad+0.2\delta(x+2)+0.1\delta(x+4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\phi'(0)/j\\&=2\times0.3+4\times0.2+(-2)\times0.2+(-4)\times0.1=0.6\end{aligned}$$

$$E\left(X^2\right)=(-j)^2\phi''(0)$$

$$=2^2\times0.3+4^2\times0.2+(-2)^2\times0.2+(-4)^2\times0.1=6.8$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=6.8-0.36=6.44$$

（2）$\phi(v)=0.3e^{jv\cdot1}+0.7e^{jv\cdot(-1)}$

$$f(x)=0.3\delta(x-1)+0.7\delta(x+1)$$

$$E(X)=\phi'(0)/j=1\times0.3+(-1)\times0.7=-0.4$$

$$E\left(X^2\right)=(-j)^2\phi''(0)=1^2\times0.3+(-1)^2\times0.7=1$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=1-0.16=0.84$$

（3）$\phi(v)=4/(4-jv)$ $\phi(-v)=4/(4+jv)$

利用傅里叶变换公式，可知这是指数分布，

$$f(x)=4e^{-4x}u(x)$$

$\phi(v)=4/(4-jv)$ $E\left[X^k\right]=(-j)^k\phi^{(k)}(0)$

$$E(X)=\phi'(0)/j=4(4-jv)^{-2}\big|_{v=0}=\frac{1}{4}$$

$$E\left(X^2\right)=-\phi''(0)=8(4-jv)^{-3}\big|_{v=0}=\frac{1}{8}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}。$$

答案网 http://www.daanwang.com

（4） $x(t)=p_{\tau}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tau sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$

$$\phi(v)=\frac{\sin 5v}{5v}=\frac{1}{10}\times\left[10\times\frac{\sin 10v/2}{10v/2}\right]=\phi(-v)$$

，利用傅里叶变换公式，可知这是均匀分布，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10},-5<x<5\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$E(X)=0$，$Var(X)=\frac{10^2}{12}=\frac{25}{3}$，

$E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=\frac{25}{3}$。

答案网 http://www.daanwang.com

30.利用傅立叶变换推导均匀分布的特征函数。

解：由于 $f(x)$ 是宽度为 $b-a$，高度为 $\frac{1}{b-a}$，中心在 $\frac{a+b}{2}$

处的矩形函数。即 $f(x)=\dfrac{1}{b-a}p_{(b-a)}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$

其傅立叶变换为

$$F(v)=\frac{1}{b-a}\times\left\{(b-a)\times\frac{\sin\left[v(b-a)/2\right]}{v(b-a)/2}\right\}e^{-jv(a+b)/2}$$

$$\because\quad \phi_X(-v)=F(v)$$

$$\phi_X(v)=F(-v)=\frac{\sin\left[v(b-a)/2\right]}{\left[v(b-a)/2\right]}e^{jv(a+b)/2}=\frac{e^{jvb}-e^{jva}}{jv(b-a)}$$

31.

32.

33. 设有高斯随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试利用随机变量的矩发生特性（$E\left[X^k\right]=(-j)^k\phi^{(k)}(0)$）证明：

(1) $EX=\mu$

(2) $EX^2=\sigma^2+\mu^2$

(3) $EX^3=3\mu\sigma^2+\mu^3$

解：特征函数为 $\phi_X(v)=\exp(j\mu v-\sigma^2v^2/2)$

由矩发生性质，

答案网 http://www.daanwang.com

$$EX = (-j)\phi_X'(0)$$

$$= (-j)(j\mu - \sigma^2 v)\,\mathrm{e}^{j\mu v - \sigma^2 v^2/2}\Big|_{v=0} = \mu$$

$$EX^2 = (-j)^2 \phi_X''(0)$$

$$= (-j)^2 \left[(j\mu - \sigma^2 v)^2\,\mathrm{e}^{j\mu v - \sigma^2 v^2/2} - \sigma^2\,\mathrm{e}^{j\mu v - \sigma^2 v^2/2} \right]\Big|_{v=0}$$

$$= \sigma^2 + \mu^2$$

$$EX^3 = (-j)^3 \phi_X'''(0)$$

$$= (-j)^3 \left[(j\mu - \sigma^2 v)^3\,\mathrm{e}^{j\mu v - \sigma^2 v^2/2} - 3\sigma^2 (j\mu - \sigma^2 v)\,\mathrm{e}^{j\mu v - \sigma^2 v^2/2} \right]\Big|_{v=0}$$

$$= 3\mu\sigma^2 + \mu^3$$

答案网 http://www.daanwang.com

2.1

2.2

2.3 掷一枚硬币定义一个随机过程：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & \text{出现正面}\\ 2t & \text{出现反面}\end{cases}$$

设“出现正面”和“出现反面”的概率相等。试求：

（1） $X(t)$ 的一维分布函数 $F_X(x,1/2)$，$F_X(x,1)$；

（2） $X(t)$ 的二维分布函数 $F_X(x_1,x_2;1/2,1)$；

（3）画出上述分布函数的图形。

2.3 解：

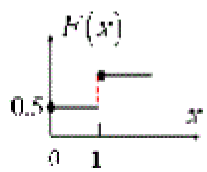
（1）

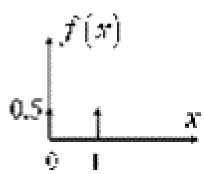
X(0.5)	0	1
P	0.5	0.5

X(1)	-1	2
P	0.5	0.5

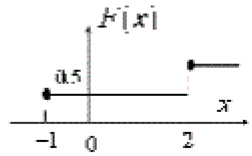
一维分布为： $F_X(x;0.5)=0.5u(x)+0.5u(x-1)$

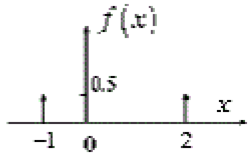
$F_X(x;1)=0.5u(x+1)+0.5u(x-2)$





答案网 http://www.daanwang.com





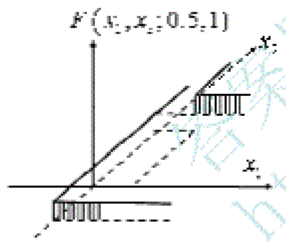
(2) $X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & \text{出现正面}\\ 2t & \text{出现反面}\end{cases}$

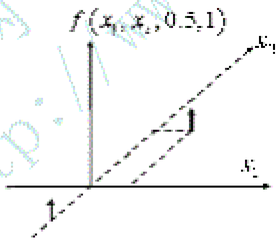
$\{X(0.5)=0, X(1)=-1\}$,依概率0.5发生

$\{X(0.5)=1, X(1)=2\}$,依概率0.5发生

二维分布函数为

$$F(x_1,x_2;0.5,1)=0.5u\left(x_1,x_2+1\right)+0.5u\left(x_1-1,x_2-2\right)$$





答案网 http://www.daanwang.com

2.4 假定二进制数据序列{B(n)，n=1，2，3,….}是伯努利随机序列，其每一位数据对应随机变量 B(n)，并有概率 P[B(n)=0]=0.2 和 P[B(n)=1]=0.8。试问，

（1）连续 4 位构成的串为{1011}的概率是

多少？

（2）连续 4 位构成的串的平均串是什么？

（3）连续 4 位构成的串中，概率最大的是什么？

（4）该序列是可预测的吗？如果见到 10111 后，下一位可能是什么？

2.4 解：

解：（1）

$$
\begin{aligned}
&P\left[\{1011\}\right] \\
&= P\left[B(n)=1\right]\cdot P\left[B(n+1)=0\right]\cdot P\left[B(n+2)=1\right]\cdot P\left[B(n+3)=1\right] \\
&= 0.8\times 0.2\times 0.8\times 0.8 = 0.1024
\end{aligned}
$$

（2）设连续 4 位数据构成的串为 B(n)，B(n+1)，B(n+2)，B(n+3)，n=1, 2, 3,…. 其中 B(n)为离散随机变量，由题意可知，它们是相互独立，而且同分布的。所以有：

✧串（4bit 数据）为：$X(n)=\sum_{k=0}^{3}2^k B(n+k)$，

其矩特性为：

因为随机变量 $B(n)$ 的矩为：

http://www.daanwang.com

均值：$E[B(n)]=0\times0.2+1\times0.8=0.8$

方差：

$$Var\left[B(n)\right]=\mathrm{E}\left[B(n)^2\right]-\left\{\mathrm{E}\left[B(n)\right]\right\}^2$$
$$=0^2\times0.2+1^2\times0.8-0.8^2$$
$$=0.8-0.8^2=0.16$$

所以随机变量 $X(n)$ 的矩为：

均值：

$$E[X(n)]=E\left[\sum_{k=0}^{3}2^k B(n+k)\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{3}2^k E\left[B(n+k)\right]=\sum_{k=0}^{3}2^k\times0.8=12$$

方差：

$$D[X(n)]=D\left[\sum_{k=0}^{3}2^k B(n+k)\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{3}\left(2^k\right)^2 D\left[B(n+k)\right]=\sum_{k=0}^{3}4^k\times0.16=13.6$$

✧如果将 4bit 串看作是一个随机向量，

则随机向量的均值和方差为：

串平均：

$$\mathrm{E}\left[\left\{B(n),B(n+1),B(n+2),B(n+3)\right\}\right]=\left\{0.8,0.8,0.8,0.8\right\}$$

答案网 http://www.daanwang.com

串方差：

$$Var\left[\left\{B(n),B(n+1),B(n+2),B(n+3)\right\}\right]$$
$$=\left\{0.16,0.16,0.16,0.16\right\}$$

（3）**概率达到最大的串为** $\{1,1,1,1\}$

（4）**该序列是不可预测的,因为此数据序列各个数据之间相互独立，下一位数据是 0 或 1，与前面的序列没有任何关系。所以如果见到 10111 后，下一位仍为 0 或 1 ，而且仍然有概率 P[B(n)=0]=0.2 和 P[B(n)=1]=0.8。**

2.5 正弦随机信号 $\{X(t,s)=A\cos(200\pi t), t>0\}$，其中振幅随机变量 A 取值为 1 和 0，概率分别为 0.1 和 0.9，试问，

（1）一维概率分布 $F(x,5)$；

（2）二维概率分布 $F(x, y, 0, 0.0025)$；

（3）开启该设备后最可能见到什么样的信号？

（4）如果开启后 t=1 时刻测得输出电压为 1 伏特，问 t=2 时刻可能的输出电压是什么？概率多少？它是可预测的随机信号

吗？

解：（1） $X(t)=\begin{cases}\cos(200\pi t)\text{，依概率0.1发生}\\ 0\qquad\qquad\text{，依概率0.9发生}\end{cases}$

$$X(5)=\begin{cases}1\quad\text{，依概率0.1发生}\\ 0\quad\text{，依概率0.9发生}\end{cases}$$

$$F(x;5)=0.1u(x-1)+0.9u(x)$$

（2）

$$\{X(0)=1, X(0.0025)=0\}\quad\text{，依概率0.1发生}$$

$$\{X(0)=0, X(0.0025)=0\}\quad\text{，依概率0.9发生}$$

$$F(x,y;0,0.0025)=0.1u(x-1,\ y)+0.9u(x,y)$$

（3）因为 $P[A=0]=0.9$，所以开启该设备后 90%的情况会见到无电压(A = 0) 。

（4）t = 1 时刻 ，有

$X(t,s)=A\cos(200\pi\times 1)=A=1$， 可得 A=1；

t = 2 时刻 ，有

$$X(t,s)=\cos(200\pi\times 2)=1\text{；}$$

因为在 A=1 的前提下，t=2 时刻输出电压为确定值 1 ，所以 $P[(X(2)=1)/X(1)=1]=1$。它是可预测的随机信号。

答案网 http://www.daanwang.com

解题关键：理解本随机信号中只有一个随机变量 A，而它的值只在初始时是不确定的，一旦 A 的值确定了，信号变成了确定信号。

2.6 若正弦信号 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，其中振幅 A 与频率 ω 取常数，相位 Θ 是一个随机变量，它均匀分布于 $[-\pi,\pi]$ 间，即

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<\theta<\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求在 t 时刻信号 $X(t)$ 的概率密度 $f_{X(t)}(x)$。

解：注意到 $X(t)$ 是 Θ 的函数，并且，$\theta=\arccos\left[\dfrac{x}{A}\right]-\omega t$。对于任意给定的 ωt，$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$ 随 Θ 可能有多个单调段。但在每个单调段上都有，

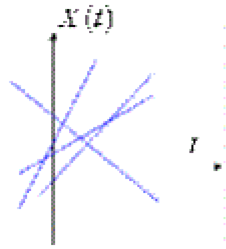
$$f_{X(t)}(x)=f_{\Theta}[\theta(x)]\left|\theta'(x)\right|=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

因此，

$$f_{X(t)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{A^2-x^2}} & |x|<|A| \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

2.7 设质点运动的位置如直线过程 $X(t)=Vt+X_0$，其中 $V\sim N(1,1)$ 与 $X_0\sim N(0,2)$，并彼此独立。试求 t 时刻随机变量的一维概率密度函数、均值与方差？

2.7 解： 独立高斯分布的线性组合依然是高斯分布（$X(t)=Vt+X_0$）



$$E[X(t)]=E[Vt+X_0]=tE[V]+E[X_0]=t$$

$$D[X(t)]=D[Vt+X_0]=t^2D[V]+D[X_0]=t^2+2$$

所以它的一维概率密度函数为：$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t^2+2)}}\exp\{-\dfrac{(x-t)^2}{2(t^2+2)}\}$

2.8 假定（$-1,+1$）的伯努利序列 $\{I_n, n=1,2,\ldots\}$ 的取值具有等概特性。试求它的一维概率密度函数、均值与协方差函数？

2.8 解： $f_I(i;n)=0.5\delta(i+1)+0.5\delta(i-1)$

$$E[I_n]=0.5(1-1)=0$$

$$C(n_1,n_2)=R(n_1,n_2)=E\left[I_{n_1}I_{n_2}\right]$$

$$=\begin{cases} E[I_{n_1}]E[I_{n_2}]=0, & n_1\neq n_2 \\ E[I_{n_1}^2]=1, & n_1=n_2 \end{cases}$$

www.daanwang.com

2.9

2.10 给定随机过程$X(t)$和常数a，试以$X(t)$的自相关函数来表示差信号$Y(t)=X(t+a)-X(t)$的自相关函数。

2.10 解：

由题意可得：

$$
\begin{aligned}
&R_Y(t_1,t_2)\\
&=E[Y(t_1)Y(t_2)]\\
&=E\{[X(t_1+a)-X(t_1)][X(t_2+a)-X(t_2)]\}\\
&=E[X(t_1+a)X(t_2+a)]-E[X(t_1+a)X(t_2)]\\
&\quad -E[X(t_1)X(t_2+a)]+E[X(t_1)X(t_2)]\\
&=R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2)-R_X(t_1,t_2+a)+R_X(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

答案网 http://www.daanwang.com

2.11 两个随机信号$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$与$Y(t)=B\cos(\omega t+\Theta)$，其中$A$与$B$为未知分布随机变量，$\Theta$为0～2π均匀分布随机变量，$A$、$B$与$\Theta$两两统计独立，$\omega$为常数，试问，

（1）两个随机信号的互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$；

（2）讨论两个随机信号的正交性、互不相关（无关）性与统计独立性；

解：（1）

$$E\left[X(t)\right]=E\left[A\sin(\omega t+\Theta)\right]=E[A]\cdot E\left[\sin(\omega t+\Theta)\right]=0$$

$E\left[Y(t)\right]=E\left[B\cos(\omega t+\Theta)\right]=0$，

$$R_{XY}(t_1,t_2)=C_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$
$$=E\left[A\sin(\omega t_1+\Theta)\cdot B\cos(\omega t_2+\Theta)\right]$$
$$=E[A]\cdot E[B]\cdot\frac{1}{2}E\left[\sin(\omega(t_1-t_2))+\sin(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}E[A]E[B]\left\{\left[\sin(\omega(t_1-t_2))\right]+E\left[\sin(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}E[A]E[B]\left[\sin(\omega(t_1-t_2))\right]$$

（2）①如果 E[A]或 E[B]为 0，或 E[A]、E[B]都为 0，则

$R_{XY}(t_1,t_2)=C_{XY}(t_1,t_2)\equiv 0$，随机信号 X(t)与 Y(t)正交 且互不相关；

②如果 E[A]与 E[B]均不为 0，则 $R_{XY}(t_1,t_2)=C_{XY}(t_1,t_2)\neq 0$，X(t)与 Y(t)不正交，相关；

③因为随机信号 X(t)与 Y(t)中都有随机变量Θ，所以 X(t)与 Y(t)一般不会相互独立。

答案网 http://www.daanwang.com

且 $\left[\frac{X(t)}{A}\right]^2+\left[\frac{Y(t)}{B}\right]^2=1$

2.12 二项式随机信号 $Y(n)=\sum_{i=1}^{n}X(i)$，其中 $X(n)$ 是取值 [0, 1] 的伯努利随机信号，$P[X(n)=0]=q$ 和 $P[X(n)=1]=p$。试求：（1）$Y(n)$ 的均值；（2）$Var[Y(n)-Y(m)]$，（$n>m$）；（3）$Y(n)$ 的相关函数；

解：（1）$Y(n)$ 的均值：因为

$E[X(n)]=0*q+1*p=p$，所以

$$E[Y(n)]=E[\sum_{i=1}^{n}X(i)]=\sum_{i=1}^{n}E[X(i)]=np$$

（2）因为贝努里信号在不同时隙里彼此独立，则（$Y(n)=\sum_{i=1}^{n}X(i)$）

$$Var[Y(n)-Y(m)]=Var[\sum_{i=m+1}^{n}X(i)]$$

$$=\sum_{i=m+1}^{n}Var[X(i)]=(n-m)D[X(i)]$$

$$=(n-m)[E[X^2(i)]-E^2[X(i)]]$$

$$=(n-m)(p-p^2)$$

课后答案网 http://www.daanwang.com

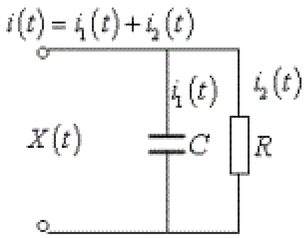
（3） $Y(n)$的相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_Y(n_1,n_2) &= E[Y(n_1)Y(n_2)] \\
&= E[\sum_{i=1}^{n_1} X[i] \sum_{j=1}^{n_2} X[j]] \\
&= E[\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} X[i]X[j]] \\
&= \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} E[X[i]X[j]] \\
&= \sum_{i=1,i\neq j}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} E[X[i]X[j]] + \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} E[X^2[i]] \\
&= \left[n_1n_2p^2 - \min(n_1,n_2)p^2\right] + \min(n_1,n_2)p \\
&= n_1n_2p^2 + \min(n_1,n_2)pq
\end{aligned}
$$

2.13 假定正弦电压信号 $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$，其中，$A$ 服从均匀分布 $U(-1,+1)$，Θ 服从均匀分布 $U(-\pi,+\pi)$，它们彼此独立。如果信号施加到 RC 并联电路上，求总的电流信号及其均方值。

题 2.13

解：由电路原理的相关知识可知：



$$i_1(t)=C\cdot\frac{dX(t)}{dt}$$

$$i_2(t)=\frac{X(t)}{R}$$

$$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$$

$$i(t)=\frac{A}{R}\cos(\omega t+\Theta)-AC\omega\sin(\omega t+\Theta)$$，则

$$E[i^2(t)]$$

$$=E\left[\left(\frac{A}{R}\cos(\omega t+\Theta)-AC\omega\sin(\omega t+\Theta)\right)^2\right]$$

$$=E[\frac{A^2}{R^2}\cos^2(\omega t+\Theta)-\frac{A^2C\omega}{R}\sin(2\omega t+2\Theta)$$
$$+A^2C^2\omega^2\sin^2(\omega t+\Theta)]$$

$$=\frac{1}{6R^2}+\frac{C^2\omega^2}{6} \qquad E\left[A^2\right]=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}a^2da=\frac{1}{3}$$

2.14

2.15 零均值高斯信号 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(t_1,t_2)=0.5\mathrm{e}^{-|t_1-t_2|}$，求 $X(t)$ 的一维和二维概率密度。

解：(1) 因为 $m_X(t)=0$，

$$R_X(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)=0.5\mathrm{e}^{-|t_1-t_2|}$$

$$D_X(t)=C_X(t,t)=0.5$$

答案网 http://www.daanwang.com

所以一维概率密度函数为：

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_X(t)}}\exp\left\{-\frac{\left[x-m_X(t)\right]^2}{2D_X(t)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-x^2\right\}$$

(2) 高斯信号 X(t) 的二维概率密度函数为：

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2)\\C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\exp\left(-\left|t_1-t_2\right|\right)\\0.5\exp\left(-\left|t_1-t_2\right|\right) & 0.5\end{pmatrix},$$

$\rho(t_1,t_2)=\exp\left(-\left|t_1-t_2\right|\right)$，则

$$f_{\mathbf{X}}\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi 0.5\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\rho}{2\left(1-\rho^2\right)0.5}\right]$$

2.16

2.17

2.18　　某高斯信号的均值 $m_X(t)=2$，协方差 $C_X(t_1,t_2)=8\cos(t_1-t_2)$，写出当 $t_1=0$、

答案网 http://www.daanwang.com

$t_2=0.5$ 和 $t_3=1$ 时的三维概率密度。

解：由定义得：

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & C(t_1,t_3) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & C(t_2,t_3) \\ C(t_3,t_1) & C(t_3,t_2) & C(t_3,t_3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C(0,0) & C(0,0.5) & C(0,1) \\ C(0.5,0) & C(0.5,0.5) & C(0.5,1) \\ C(1,0) & C(1,0.5) & C(1,1) \end{pmatrix}$$

又因为 $C_X(t_1,t_2)=8\cos(t_1-t_2)$

$$C(0,0)=C(0.5,0.5)=C(1,1)=8\cos(0)=8$$

$$C(0,0.5)=C(0.5,1)=C(0.5,0)=C(1,0.5)=8\cos(0.5)$$

$$C(0,1)=C(1,0)=8\cos(1)$$

设

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ X(t_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 8 & 8\cos(1/2) & 8\cos 1 \\ 8\cos(1/2) & 8 & 8\cos(1/2) \\ 8\cos 1 & 8\cos(1/2) & 8 \end{pmatrix}$$

则

答案网 http://www.daanwang.com

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x},\mathbf{t})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\mathbf{C}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right]$$

2.19 设随机变量$(X,Y)\sim N(\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})$，其中$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$，求$(X,Y)$的概率密度和特征函数$\phi_{XY}(u,v)$。

题 2.19

解： 因为$E(X)=2$与$E(Y)=2$，$D_X=2,D_Y=5$，

而$\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D_XD_Y}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$。

于是，$(X,Y)\sim N\left(2,2;2,5;3/\sqrt{10}\right)$。则

(X，Y)的概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{5}\left[\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{3(x-2)(y-2)}{5}+\frac{(y-2)^2}{5}\right]\right\}$$

其特征函数为：

$$\phi_{XY}(u,v)=\exp\left[j(m_xu+m_yv)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2u^2+2\rho\sigma_1\sigma_2uv+\sigma_2^2v^2)\right]$$

$$\phi_{XY}(u,v)=\exp\left[2j(u+v)-\frac{1}{2}(2u^2+6uv+5v^2)\right]$$

3.1 随机电压信号$U(t)$在各不同时刻上是统计独立的，而且，一阶概率密度函数是高斯的、均值为 **0**，方差为 **2**，试求：

（**1**）密度函数 $f(u;t)$、$f(u_1,u_2;t_1,t_2)$ 和 $f(u_1,u_2,\ldots,u_k;t_1,t_2,\ldots,t_k)$，**k** 为任意整数；

（**2**）$U(t)$的平稳性。

3.1 解：

(1) $$f(u;t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\{-\frac{u^2}{4}\}$$

$$f(u_1,u_2;t_1,t_2)=f(u_1,t_1)f(u_2,t_2)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{u_1{}^2+u_2{}^2}{4}\}$$

$$f(u_1,u_2,\ldots,u_k;t_1,t_2\ldots,t_k)=\prod_{i=1}^{k}f(u_i,t_i)$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^k}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}u_i^2}{4}\}$$

(2)由于任意 k 阶概率密度函数与 t 无关，它不会随着观察时刻组的平移而变，因此它是严平稳的。也是严格循环平稳的；因为是高

答案网 http://www.daanwang.com

斯随机信号，所以$U(t)$也是广义平稳的和广义循环平稳的。

3.2

3.3

3.4 已知随机信号$X(t)$和$Y(t)$相互独立且各自平稳，证明新的随机信号$Z(t)=X(t)Y(t)$也是平稳的。

3.4 解：

$\because$ $X(t)$与$Y(t)$各自平稳，设$m_X=E[X(t)]$，

$m_Y=E[Y(t)]$， $R_X(\tau)=E[X(t+\tau)X(t)]$ ，

$R_Y(\tau)=E[Y(t+\tau)Y(t)]$

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)Y(t)]$$

$$=E[X(t)]\times E[Y(t)]=m_Xm_Y$$ ，为常数

$$R_Z(t+\tau,t)=E[Z(t+\tau)Z(t)]$$

$$=E[X(t+\tau)Y(t+\tau)X(t)Y(t)]$$

$$=E[X(t+\tau)X(t)]\cdot E[Y(t+\tau)Y(t)]$$

$$=R_X(\tau)\cdot R_Y(\tau)=R_Z(\tau)$$

答案网 http://www.daanwang.com

$\therefore R_Z(\tau)$仅与τ有关，故$Z(t)=X(t)Y(t)$也是平稳过程。

3.5 随机信号$X(t)=10\sin(\omega_0 t+\Theta)$，$\omega_0$为确定常数，$\Theta$在$[-\pi,\pi]$上均匀分布的随机变量。若$X(t)$通过平方律器件，得到$Y(t)=X^2(t)$，试求：

（1）$Y(t)$的均值；

（2）$Y(t)$的相关函数；

（3）$Y(t)$的广义平稳性。

解：(1)

$$E[Y(t)]=E[X^2(t)]=E[100\sin^2(\omega_0 t+\Theta)\ ]$$

$$=50E[1-\cos(2\omega_0 t+2\Theta)\ ]=50$$

$$(2)R_Y(t+\tau,t)=E[Y(t+\tau)Y(t)]=E[X^2(t+\tau)X^2(t)]$$

$$=E\left[100\sin^2(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Theta)\cdot 100\sin^2(\omega_0 t+\Theta)\right]$$

$$=2500E\left[\left(1-\cos\left(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\Theta\right)\right)\left(1-\cos\left(2\omega_0 t+2\Theta\right)\right)\right]$$

$$=2500E\left[1+\cos\left(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\Theta\right)\cdot\cos\left(2\omega_0 t+2\Theta\right)\right]$$

$$=2500+1250E\left[\cos(2\omega_0\tau)+\cos(4\omega_0 t+2\omega_0\tau+4\Theta)\right]$$

$$=2500+1250\cos(2\omega_0\tau)$$

答案网 http://www.daanwang.com

$\therefore R_Y(\tau)$仅与τ有关，且均值为常数，故$\mathrm{Y}(t)$是平稳过程。

3.6 给　定　随　机　过　程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$，其中$\omega_0$是常数，$A$和$B$是两个任意的不相关随机变量，它们均值为零，方差同为σ^2。证明$X(t)$是广义平稳而不是严格平稳的。

3.6 证明：

$$\because m_{\mathrm{X}}(t)=E[\mathrm{X}(t)]=E[A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\ ]=0$$

$$
\begin{aligned}
&R_X(t+\tau,t)=E[\mathrm{X}(t+\tau)\mathrm{X}(t)]\\
&=E\left\{\left(A\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+B\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\right)\left(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\right)\right\}\\
&=E\left[A^2\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)\cos(\omega_0 t)+B^2\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\sin(\omega_0 t)\right]\\
&=\sigma^2\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)\cos(\omega_0 t)+\sigma^2\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\sin(\omega_0 t)\\
&=\sigma^2\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}
$$

由于均值是常数，且相关函数只与τ有关，故$\mathrm{X}(t)$是广义平稳过程。

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$

答案网 http://www.daanwang.com

取$t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$时，$\mathrm{X}(t) = A$

取$t_2 = \dfrac{\pi}{2\omega_0}$时，$\mathrm{X}(t) = B$,

显然$f_X(x,t_1) = f_A(x)$不一定等于$f_X(x,t_2) = f_{\mathrm{B}}(x)$

$\therefore \mathrm{X}(t)$不是严格平稳的。

3.7 $Y(t)$**是广义周期（循环）平稳的实随机信号，平稳周期为 100，有均值**$m(10)=20$**和相关函数**$R(5,1)=10$**，试求：**

（1） $E[5Y(110)]$，$E[10Y(310)+50]$；

（2） $E[Y(105)Y(101)]$，

$E[30Y(205)Y(201)+200]$；

（3） $E[10Y(305)Y(301)+6Y(210)+80]$。

3.7 解：

答案网 http://www.daanwang.com

$\because \mathrm{Y}(t)$是广义循环平稳随机信号，

$(1)E[5\mathrm{Y}(110)]=5E[\mathrm{Y}(10)]=5m(10)=5\times 20=100$

$E[10\mathrm{Y}(310)+50]=10E[\mathrm{Y}(10)]+50=250$

$(2)E[\mathrm{Y}(105)\mathrm{Y}(101)]=E[\mathrm{Y}(5)\mathrm{Y}(1)]=R(5,1)=10$

$E[30\mathrm{Y}(205)\mathrm{Y}(201)+200]$

$=30E[\mathrm{Y}(5)\mathrm{Y}(1)]+200=500$

$(3)E[10\mathrm{Y}(305)\mathrm{Y}(301)+6\mathrm{Y}(210)+80]$

$=10R(5,1)+6m(10)+80=300$

3.8 给定过程 $X(t)=A\cos t-B\sin t$ 和 $Y(t)=B\cos t+A\sin t$，其中随机变量 A,B 独立，均值都为 0，方差都为 5。

（1）证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自平稳且联合平稳。

（2）求两个过程的互相关函数。

解：因为随机变量 A,B 独立，均值都为 0，方差都为 5，所以 $E[AB]=E[A]E[B]=0$，$E[A^2]=E[B^2]=\sigma^2=5$，故有

$m_{\mathrm{X}}(t)=E[\mathrm{X}(t)]=E[A\cos t-B\sin t]=0$

$$
\begin{aligned}
&R_X(t+\tau,t)=E[\mathrm{X}(t+\tau)\mathrm{X}(t)]\\
&=E\{[A\cos(t+\tau)-B\sin(t+\tau)]\times[A\cos t-B\sin t]\}\\
&=E[A^2]\cos(t+\tau)\cos t+E[B^2]\sin(t+\tau)\sin t]\\
&\quad -E[AB]\cos(t+\tau)\sin t-E[AB]\sin(t+\tau)\cos t\\
&=\sigma^2\cos(t+\tau)\cos t+\sigma^2\sin(t+\tau)\sin t\\
&=5\cos\tau
\end{aligned}
$$

由于均值是常数，且相关函数只与τ有关，故$\mathrm{X}(t)$是广义平稳过程。同理得到：

$$
\begin{aligned}
&m_Y(t)=E[\mathrm{Y}(t)]=E[B\cos t+A\sin t]=0\\
&R_Y(t+\tau,t)=E[\mathrm{Y}(t+\tau)\mathrm{Y}(t)]\\
&=E\{[B\cos(t+\tau)+A\sin(t+\tau)]\cdot[B\cos t+A\sin t]\}\\
&=E[B^2]\cos(t+\tau)\cos t+E[A^2]\sin(t+\tau)\sin t\\
&=5\cos\tau
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Y}(t)$ 均值是常数，相关函数也只与τ有关，故$\mathrm{Y}(t)$也是平稳过程。

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}(t+\tau,t)=E[\mathrm{X}(t+\tau)\mathrm{Y}(t)]\\
&=E\{[A\cos(t+\tau)-B\sin(t+\tau)]\cdot[B\cos t+A\sin t]\}\\
&=E[A^2]\cos(t+\tau)\sin t-E[B^2]\sin(t+\tau)\cos t\\
&=-5\sin\tau=R_{XY}(\tau)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{X}(t)$与$\mathrm{Y}(t)$分别广义平稳，其互相关函数也只与τ有关，所以$\mathrm{X}(t)$和$\mathrm{Y}(t)$联合广义平稳。

3.9 两个统计独立的平稳随机过程$X(t)$和$Y(t)$，其均值都为 0，自相关函数分别为$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}$，$R_Y(\tau)=\cos 2\pi\tau$，试求：

（1） $Z(t)=X(t)+Y(t)$ **的自相关函数；**

（2） $W(t)=X(t)-Y(t)$ **的自相关函数；**

（3）互相关函数 $R_{ZW}(\tau)$ **。**

3.9 解：

$$(1)R_Z(t+\tau,t)=E\left[\mathrm{Z}(t+\tau)\mathrm{Z}(t)\right]$$

$$=E\left\{\left[\mathrm{X}(t+\tau)+\mathrm{Y}(t+\tau)\right]\left[\mathrm{X}(t)+\mathrm{Y}(t)\right]\right\}$$

$$=E\left[\mathrm{X}(t+\tau)\mathrm{X}(t)\right]+E\left[\mathrm{Y}(t+\tau)\mathrm{Y}(t)\right]$$

$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}+\cos(2\pi\tau)$$

$$(2)R_W(t+\tau,t)=E\left[\mathrm{W}(t+\tau)\mathrm{W}(t)\right]$$

$$=E\left\{\left[\mathrm{X}(t+\tau)-\mathrm{Y}(t+\tau)\right]\left[\mathrm{X}(t)-\mathrm{Y}(t)\right]\right\}$$

$$=E\left[\mathrm{X}(t+\tau)\mathrm{X}(t)\right]+E\left[\mathrm{Y}(t+\tau)\mathrm{Y}(t)\right]$$

$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}+\cos(2\pi\tau)$$

$$(3)R_{ZW}(t+\tau,t)=E\left[\mathrm{Z}(t+\tau)\mathrm{W}(t)\right]$$

$$=E\left\{\left[\mathrm{X}(t+\tau)+\mathrm{Y}(t+\tau)\right]\left[\mathrm{X}(t)-\mathrm{Y}(t)\right]\right\}$$

$$=R_X(\tau)-R_Y(\tau)-R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

又由于$\mathrm{X}(t)$与$\mathrm{Y}(t)$零均值相互独立，

同时彼此正交，则$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(\tau)=0$

$$\therefore R_{ZW}(t+\tau,t)=R_X(\tau)-R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}-\cos(2\pi\tau)$$

答案网 http://www.daanwang.com

3.10

3.11

3.12 广义平稳随机过程$Y(t)$的自相关函数矩阵如下，试确定矩阵中带下划线的空白处元素的值。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.3 & 0.4 & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & 2 & 1.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.2 & \underline{\quad} & 1.1 \\ 0.9 & \underline{\quad} & \underline{\quad} & 2 \end{bmatrix}$$

3.12 解：根据广义平稳随机信号过程的自相关函数矩阵的对称性，得到：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1.3 & 0.4 & \underline{0.9} \\ \underline{1.3} & 2 & 1.2 & 0.8 \\ 0.4 & 1.2 & \underline{2} & 1.1 \\ 0.9 & \underline{0.8} & \underline{1.1} & 2 \end{pmatrix}$$

答案网 http://www.daanwang.com

3.13

3.14 对于两个零均值广义平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，已知 $\sigma_X^2=5$，$\sigma_Y^2=10$，问下述函数可否作为自相关函数，为什么？

（1） $R_X(\tau)=5u(\tau)\exp(-3\tau)$；否，非偶函数

（2） $R_X(\tau)=5\sin(5\tau)$；否，非偶函数

（3） $R_Y(\tau)=9(1+2\tau^2)^{-1}$；否， $R_Y(0)=9\neq\sigma^2{}_Y$

（4） $R_Y(\tau)=-\cos(6\tau)\exp(-|\tau|)$；否， $R_Y(0)=-1$

（5） $R_X(\tau)=5\left[\dfrac{\sin(3\tau)}{3\tau}\right]^2$；是

（6） $R_Y(\tau)=6+4\left[\dfrac{\sin(10\tau)}{10\tau}\right]$。不是， $m_Y^2=6$

（7） $R_X(\tau)=5\exp(-|\tau|)$； 是

（8） $R_Y(\tau)=6+4\exp(-3\tau^2)$。 不是 $m_Y^2=6$

解：根据平稳随机信号相关函数的性质，

判断原则：

(1)偶对称性 (2)非负，最大值点， $|R(\tau)|\leq R(0)$

(3)连续性 (4)周期性

(1)否，该函数非偶函数 （2）否，该函数非偶函数 （3） 否， $R_Y(0)=9\neq\sigma^2{}_Y$ 不符

答案网 http://www.daanwang.com

合题意　（4）否，$R_Y(0)=-1$不是非负　（5）是　（6）不是，$m_Y^2=6$非零，不符合题意　（7）是　（8）不是，$m_Y^2=6$非零，不符合题意

3.15

3.16　已知随机过程$X(t)$和$Y(t)$独立且各自平稳，自相关函数为$R_X(\tau)=2e^{-|\tau|}\cos\omega_0\tau$与$R_Y(\tau)=9+\exp(-3\tau^2)$。令随机过程$Z(t)=AX(t)Y(t)$，其中A是均值为2，方差为9的随机变量，且与$X(t)$和$Y(t)$相互独立。求过程$Z(t)$的均值、方差和自相关函数。

解：

$$
\begin{aligned}
E[Z(t)] &= E[A\cdot X(t)\cdot Y(t)] \\
&= E[A]\cdot E[X(t)]\cdot E[Y(t)] \\
&= 2E[X(t)]\cdot E[Y(t)]
\end{aligned}
$$

$$m_X^2=R_X(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}2e^{|\tau|}\cos\omega_0\tau=0\to m_X=0$$

$$\therefore E[Z(t)]=0$$

$Z(t)$的相关函数：

$$R_z(s,t)=E\left[A^2X(s)\cdot Y(s)\cdot X(t)\cdot Y(t)\right]$$

$$=E\left[A^2\right]\cdot E\left[X(s)\cdot Y(s)\cdot X(t)\cdot Y(t)\right]$$

$$=13\cdot R_X(\tau)\cdot R_Y(\tau)$$

$$=26\cdot e^{-|\tau|}\cdot\cos\omega_0\tau\cdot(9+e^{-3\tau^2})$$

$$D[Z(t)]=R_X(0)=26\times 10=260$$

3.17

3.18

3.19　平稳信号 $X(t)$的功率谱密度为

（1） $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$

（2） $S(\omega)=\begin{cases}8\delta(\omega)+20(1-|\omega|/10), & |\omega|\le 10\\ 0, & |\omega|>10\end{cases}$

求它们的自相关函数和均方值。

解：(1)

答案网 http://www.daanwang.com

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}=\frac{-1}{\omega^2+1}+\frac{2}{\omega^2+2}$$

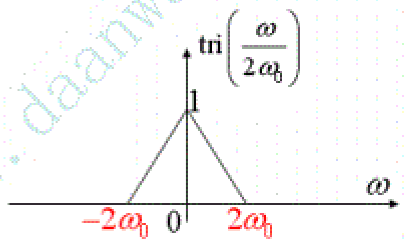
$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{\omega^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\omega^2+2}$$

$$R_X(\tau)=\frac{-1}{2}e^{-|\tau|}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

$$\therefore R_X(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$$

(2) 查傅立叶变换表:

$$\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\Leftrightarrow\frac{\omega_0 Sa^2(\omega_0\tau)}{\pi}$$



$$S(\omega)=8\delta(\omega)+20\left[1-|\omega|/10\right]\quad,|\omega|\le 10$$

$$=8\delta(\omega)+20\cdot\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$$R_X(\tau)=\frac{8}{2\pi}+20\cdot\frac{5Sa^2(5\tau)}{\pi}$$

$$\therefore R_X(\infty)=4/\pi=m_X{}^2\qquad D[X(t)]=100/\pi$$

$$R_X(0)=\frac{8}{2\pi}+\frac{100}{\pi}=\frac{104}{\pi}$$

答案网 http://www.daanwang.com

3.20

3.21 下述函数哪些是实随机信号功率谱的正确表达式？为什么？

判断的原则：实平稳信号功率谱是实的，非负的偶函数。

（1） $\left(\dfrac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$ 是

（2） $\dfrac{\omega^2}{\omega^6+3\omega^2+3}$ 是

（3） $\dfrac{\omega^2}{\omega^4-1}-\delta(\omega)$ 不是，$\omega=0$ 时值为负数。

（4） $\dfrac{\omega^4}{j\omega^6+\omega^2+1}$ 不是，功率谱为复数，

（5） $\dfrac{|\omega|}{\omega^4+2\omega^2+1}$ 是。

（6） $e^{-(\omega-1)^2}$ 不是，非偶函数。

答案网 http://www.daanwang.com

3.22

3.23 $X(t)$是平稳随机过程，证明过程 $Y(t)=X(t+T)+X(t)$的功率谱是

$$S_Y(\omega)=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T)$$

3.23

$$E[Y(t)]=E[X(t+T)+X(t)]=2m_x$$

$$R_Y(\tau)=E\left[Y(t+\tau)Y(t)\right]$$
$$=E\left\{\left[X(t+\tau+T)+X(t+\tau)\right]\left[X(t+T)+X(t)\right]\right\}$$
$$=2R_X(\tau)+R_X(\tau+T)+R_X(\tau-T)$$

$$S_Y(\omega)=2S_X(\omega)+S_X(\omega)e^{-j\omega T}+S_X(\omega)e^{j\omega T}$$
$$=2S_X(\omega)+2S_X(\omega)\cdot\cos\omega T$$
$$=2S_X(\omega)\cdot(1+\cos\omega T)$$

答案网 http://www.daanwang.com

3.24

3.25 设两个随机过程 **$X(t)$**和 **$Y(t)$**联合平稳，其互相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}9e^{-3\tau} & \tau\ge 0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

求互谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 与 $S_{YX}(\omega)$。

3.25

$$R_{XY}(\tau)\xrightarrow{FT}\frac{9}{3+j\omega}=S_{XY}(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega)=S_{XY}^{*}(\omega)=\frac{9}{3-j\omega}$$

3.26 设随机过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i(t)$，式中 a_i 是一组实常数。而随机过程 $X_i(t)$ 为平稳的和彼此正交的。试证明： $S_X(\omega)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2S_{X_i}(\omega)$

证明：

$$E[X(t)]=E\left[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n}a_iE[X_i(t)]=\sum_{i=1}^{n}a_im_{X_i}\to\text{常数}$$

答案网 http://www.daanwang.com

$$R_X(t,s)=E\left\{X\left(t\right)X\left(s\right)\right\}=E\left\{\sum_{i=1}^{n}a_iX_i(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}a_jX_j(s)\right\}$$

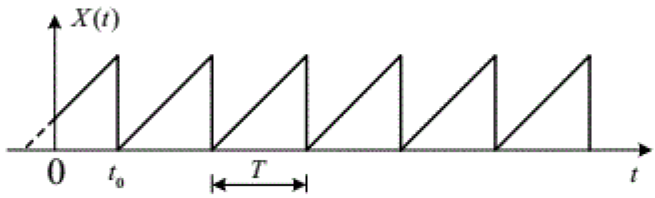
$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_jX_i(t)X_j(s)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_jE\left[X_i(t)X_j(s)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}E[X_i(t)\cdot X_i(s)]=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}R_{X_i}(\tau)=R_X(\tau)$$

$$S_X\left(\omega\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}S_{X_i}(\omega)$$

3.31 假定周期为 T 高为 A 的锯齿波脉冲串具有随机相位，如题图 3.31 所示，它在 $t=0$ 时刻以后出现的第一个零值时刻是 $[0,T)$ 均匀分布的随机变量。试说明 $X(t)$ 的一阶密度函数为

$$f(x;t)=\begin{cases}1/A & x\in[0,T]\\ 0 & x\notin[0,T]\end{cases}$$



题图 3.31

3.31

解：注意到从τ开始的一段锯齿波可写为，$X(t)=\frac{A}{T}(T-\tau+t)$，它是$\tau$的线性函数。并且，$\tau=T-\frac{T}{A}X(t)+t=h(x)$。于是 $h'(x)=-\frac{T}{A}$

已知$\tau\sim U(0,T)$，即 $f_\tau(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\le\tau\le T)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$

因此，当 t 在这段上

$$f_X(x;t)=\begin{cases}f_\tau[h(x)]\cdot|h'(x)|=\frac{1}{T}\times\frac{T}{A}=\frac{1}{A} & 0\le x\le A\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

对于其他任何 t 时刻的$X(t)$，令k为t/T的整数部分（小于等于t/T），则在$t\in[kT+\tau,(k+1)T+\tau)$段有，$X(t)=\frac{A}{T}(T-\tau+t-kT)$。仿上，得到同样的结果。因此

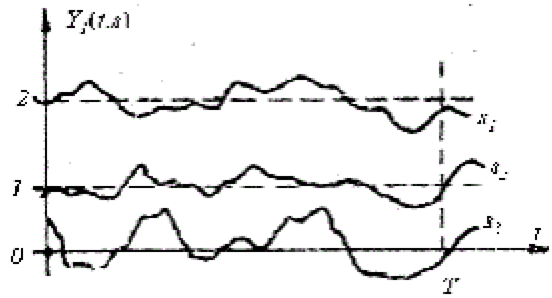
$$f(x;t)=\begin{cases}1/A & x\in[0,A]\\ 0 & x\notin[0,A]\end{cases}$$

答案网 http://www.daanwang.com

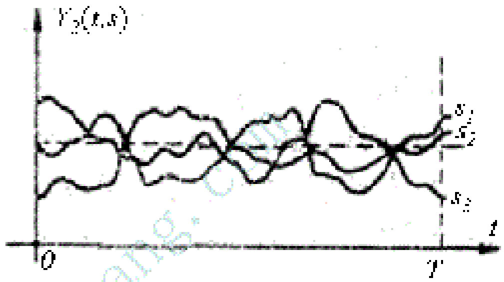
答案网（http://www.daanwang.com）

习 题

4.1 随机信号$Y_1(t)$与$Y_2(t)$的实测样本函数如下题图 4.1(a)与(b)所示，试说明它们是否均值各态历经。



（a）



（b）

题图 4.1

解：由均值各态历经信号的定义：

$$A[Y(t,s)] \overset{MSE}{=} E[Y(t,s)],$$

即随机信号的每条样本的时间平均都相同，并在均方意义下等于其统计平均。

图（a）中每条样本的时间平均都不相同，$Y_1(t)$不可能是均值各态历经信号；

图（b）中每条样本的时间平均都可能相同，且大致等于其统计平均，$Y_2(t)$很可能是均值各态历经信号

答案网（http://www.daanwang.com）

4.2 随机二元传输信号如例 3.16 所述，试分析它的均值各态历经性。

解：由例 3.16，随机二元传输信号的协方差函数为，

$$C_Y(\tau)=\begin{cases}4pq\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau|\le T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}$$

又根据充分条件为：$\lim\limits_{\tau\to\infty}C(\tau)=0$，且 $C(0)=4pq<\infty$，因此，它是均值各态历经信号。

答案网 http://www.daanwang.com

4.3

4.4 随机信号 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是联合广义各态历经的，试分析信号 $Z(t)=aX(t)+bY(t)$ 的各态历经性，其中 ***a*** 与 ***b*** 是常数。

解：由题意，均方意义下有，

答案网（http://www.daanwang.com）

$$A[Z(t)] = A\left[aX(t) + bY(t)\right]$$

$$= aA[X(t)] + bA[Y(t)] = aE[X(t)] + bE[Y(t)]$$

$$= E\left[aX(t) + bY(t)\right] = E[Z(t)]$$

所以，$Z(t)$是均值各态历经信号

$$A[Z(t+\tau)Z(t)]$$

$$= A\left[\left(aX(t+\tau) + bY(t+\tau)\right)\left(aX(t) + bY(t)\right)\right]$$

$$= a^2 A[X(t+\tau)X(t)] + b^2 A[Y(t+\tau)Y(t)] +$$

$$abA[X(t+\tau)Y(t)] + abA[Y(t+\tau)X(t)]$$

$$= a^2 E[X(t+\tau)X(t)] + b^2 E[Y(t+\tau)Y(t)] +$$

$$abE[X(t+\tau)Y(t)] + abE[Y(t+\tau)X(t)]$$

$$= E\left[\left(aX(t+\tau) + bY(t+\tau)\right)\left(aX(t) + bY(t)\right)\right]$$

$$= E[Z(t+\tau)Z(t)] = R_Z(\tau)$$

因此，$Z(t)$是相关各态历经信号，也是广义各态历经。

答案网（http://www.daanwang.com）

4.5 已知随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$，其中 ω_0 为常数，$\Phi\sim U(0,2\pi)$，A 可能为常数，也可能为随机变量，且若 A 为随机变量时，它与 Φ 相互独立。求：

（1） 时间自相关函数与自相关函数；

（2） A 具备什么条件两种自相关函数才能相等？

解：（1）时间自相关函数

$$A\left[X(t+\tau)X(t)\right]$$

$$=A\left[A\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Phi)A\cos(\omega_0 t+\Phi)\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}A\left[\cos(\omega_0\tau)+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Phi)\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

统计自相关函数

答案网 http://www.daanwang.com

$$E\left[X(t+\tau)X(t)\right]$$
$$=E\left[A\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Phi)A\cos(\omega_0 t+\Phi)\right]$$
$$=E\left[A^2\right]E\left[\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Phi)\cos(\omega_0 t+\Phi)\right]$$
$$=\frac{E[A^2]}{2}E\left[\cos(\omega_0\tau)+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Phi)\right]$$
$$=\frac{E[A^2]}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

当 *A* 为常数时： $E\left[X(t+\tau)X(t)\right]=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$

当 *A* 为随机变量时：

$$E\left[X(t+\tau)X(t)\right]=\frac{E[A^2]}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

答案网 http://www.daanwang.com

（2）当 *A* 为常数时，有：

$$A\left[X(t+\tau)X(t)\right]=E\left[X(t+\tau)X(t)\right]=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

即：当 *A* 为常数时， $X(t)$**相关各态历经。**

4.6 随机过程 $X(t)=A\sin t+B\cos t$**，式中，*A* 和 *B* 为零均值相互独立的随机变量。求证** $X(t)$

是均值各态历经的，而均方值无各态历经性。

解：由题意，首先，

$$E\left[X(t)\right]=E\left[A\right]\sin t+E\left[B\right]\cos t=0$$

$$A[X(t)]=A\left[A\sin t+B\cos t\right]$$

$$=A\cdot A[\sin t]+B\cdot A[\cos t]=0$$

$$\therefore\ E\left[X(t)\right]=A[X(t)]\quad\rightarrow\text{均值各态历经}$$

而

$$X^2(t)=A^2\sin^2 t+B^2\cos^2 t+2AB\sin t\cos t$$

$$=A^2\sin^2 t+B^2\cos^2 t+AB\sin 2t$$

$$E[X^2(t)]=E[A^2]\cdot\sin^2 t+E[B^2]\cdot\cos^2 t+E[A\mathrm{B}]\cdot\sin 2t$$

$$=E[A^2]\cdot\sin^2 t+E[B^2]\cdot\cos^2 t$$

均方值不平稳

$$\left\{\begin{aligned}&A[X^2(t)]=A^2\cdot A[\sin^2 t]+B^2\cdot A[\cos^2 t]+AB\cdot A[\sin 2t]\\&=\frac{A^2}{2}\cdot A[1-\cos 2t]+\frac{B^2}{2}\cdot A[1+\cos 2t]\\&=\frac{A^2+B^2}{2}\end{aligned}\right\}$$

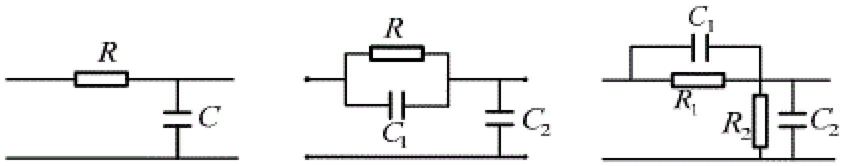
答案网（http://www.daanwang.com）

显然，

$EX^2(t) \neq A[X^2(t)]$ $\rightarrow$ 均方值非各态历经。

答案网 http://www.daanwang.com

5.1 求题图 5.1 中三个电路的传输函数（不考虑输出负载）。



题图 5.1

解根据电路分析、信号与系统的知识，

第一个图中系统的传输函数

$$H(j\omega)=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

第二个图中系统地传输函数

$$H(j\omega)=\frac{1/j\omega C_2}{\dfrac{R/j\omega C_1}{R+1/j\omega C_1}+1/j\omega C_2}=\frac{1+j\omega RC_1}{1+j\omega R\left(C_1+C_2\right)}$$

第三个图中系统地传输函数

$$H(j\omega)=\frac{\dfrac{R_2/j\omega C_2}{R_2+1/j\omega C_2}}{\dfrac{R_1/j\omega C_1}{R_1+1/j\omega C_1}+\dfrac{R_2/j\omega C_2}{R_2+1/j\omega C_2}}$$

$$=\frac{R_2+j\omega R_1R_2C_1}{R_1+R_2+j\omega R_1R_2\left(C_1+C_2\right)}$$

5.2 若平稳随机信号 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=A^2+Be^{-|\tau|}$，其中，***A*** 和 ***B*** 都是正常数。又若某系统冲击响应为 $h(t)=u(t)te^{-wt}$。当 $X(t)$ 输入时，求该系统输出的均值。

解： 因为 $E^2[X]=R_X(\infty)=A^2$

所以 $E[X]=\pm A$。

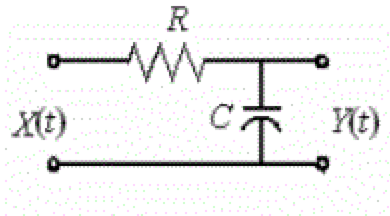
$$H(j\omega)=\left(\frac{1}{j\omega+w}\right)^2 \qquad H(j0)=\left(\frac{1}{w}\right)^2$$

$$E[Y(t)]=E[X(t)]H(j0)=\pm A\cdot\left(\frac{1}{w}\right)^2=\frac{\pm A}{w^2}$$

5.3

5.4 若输入信号 $X(t)=X_0+\cos(\omega_0 t+\Phi)$ 作用于正文图 5.2 所示 RC 电路，其中 X_0 为[0,1]上均匀分布的随机变量，Φ 为[0,2π]上均匀分布的随机变量，并且 X_0 与 Φ 彼此独立。求输出信号 ***Y*(*t*)** 的功率谱与相关函数。

答案网 http://www.daanwang.com



解：首先我们求系统的频率响应$H(j\omega)$**。根据电路分析、信号与系统的知识，**

$$H(j\omega)=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

然后，计算$X(t)$**的均值与自相关函数，**

$$m_X=E\left[X(t)\right]=E\left[X_0+\cos(\omega_0 t+\Phi)\right]=1/2$$

$$R_X(t+\tau,t)=E\left\{X\left(t+\tau\right)X\left(t\right)\right\}$$

$$=E\left\{\left\{X_0+\cos\left[\omega_0\left(t+\tau\right)+\Phi\right]\right\}\left\{X_0+\cos\left[\omega_0 t+\Phi\right]\right\}\right\}$$

$$=E\left[X_0^2\right]+E\left[X_0\cos\left[\omega_0 t+\Phi\right]\right]$$

$$+E\left\{X_0\cos\left[\omega_0\left(t+\tau\right)+\Phi\right]\right\}$$

$$+E\left\{\cos\left[\omega_0\left(t+\tau\right)+\Phi\right]\cos\left[\omega_0 t+\Phi\right]\right\}$$

$$=1/3+1/2\cos\left(\omega_0\tau\right)=R_X(\tau)$$

$$E\left[X_0^2\right]=\int_0^1 x_0^2\cdot 1dx_0=\frac{1}{3}$$

可见$X(t)$**是广义平稳的。所以**

$$S_X(\omega)=\frac{2\pi}{3}\delta\left(\omega\right)+\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

故

$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2$$

$$=\left\{\frac{2\pi}{3}\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]\right\}\times\frac{1}{1+(\omega RC)^2}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(1+\omega_0{}^2R^2C^2)}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

于

是，

$$R_Y(\tau)=1/3+\frac{1}{2(1+\omega_0{}^2R^2C^2)}\cos\omega_0\tau$$

答案网 http://www.daanwang.com

5.5

5.6 设某积分电路输入输出之间满足以下关系

$$Y(t)=\int_{t-T}^{t}X(\tau)d\tau$$

式中，T 为积分时间。并设输入输出都是平稳过程。求证输出功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=\frac{4S_X(\omega)}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

（提示：$Y(t)=X(t)*h(t)$，而 $h(t)=u(t)-u(t-T)$，是矩形方波。）

解：因为 $Y(t)=\int_{t-T}^{t}X(\tau)d\tau$，

所以 $h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)d\tau$，故 $h(t)=u(t)-u(t-T)$

而

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{T}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}e^{-j\omega T/2}$$

所以 $\left|H(j\omega)\right|^2=\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2}$

所以

$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2=\frac{4S_X(\omega)}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

答案网 http://www.daanwang.com

5.7

5.8

5.9

5.10　若线性时不变系统的输入信号 $X(t)$ 是均值为零的平稳高斯随机信号，且自相关函数为 $R_X(\tau)=\delta(\tau)$，

输出信号为$Y(t)$。试问系统$h(t)$要具备什么条件，才能使随机变量$X(t_1)$与$Y(t_1)$互相独立。

解：　由于输入信号$X(t)$是均值为零的平稳高斯随机信号，所以通过线性时不变系统后$Y(t)$仍然是均值为零的平稳高斯随机信号，且$X(t)$和$Y(t)$是高斯联合平稳过程。如果$X(t_1)$与$Y(t_1)$相互独立，则$X(t_1)$与$Y(t_1)$也互不相关和正交，即

$E[X(t_1)Y(t_1)] = R_{XY}(0) = 0$。而

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) = \delta(\tau) * h(-\tau) = h(-\tau)$$

因此，$h(t)$要满足$h(0) = 0$。

5.11若功率谱为**5W/Hz**的平稳白噪声作用到冲击响应为$h(t) = \mathrm{e}^{-at}u(t)$的系统上，求系统输出的均方值与功率谱密度。

解：由题知：$H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + a}$，所以

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2 = 5\left|H(j\omega)\right|^2$$

$$= \frac{5}{\omega^2 + a^2} = \frac{5}{2a} \cdot \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

答案网 http://www.daanwang.com

而输出过程的自相关函数：

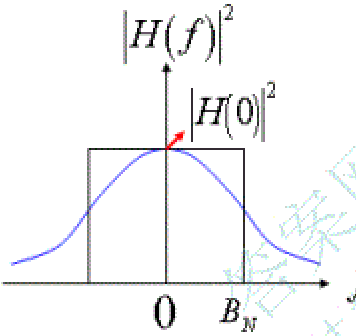
$$R_Y(\tau)=\frac{5}{2a}e^{-a|\tau|}$$

于是，$E\left[Y^2(t)\right]=R_Y(0)=\dfrac{5}{2a}$

5.12

5.13 功率谱为 $N_0/2$ 的白噪声作用到 $|H(0)|=2$ 的低通网络上，网络的等效噪声带宽为 2MHz。若输出噪声平均功率是 0.1 瓦，求 N_0 的值。

解：



由 $P_Y=N_0\left|H(0)\right|^2 B_N=N_0 B_N G_0=0.1$ 得，

$$N_0=\frac{0.1}{B_N\left|H(0)\right|^2}=\frac{0.1}{2\times10^6\times4}=1.25\times10^{-8}$$ （瓦/Hz）

5.14

5.15

5.16 已知平稳随机信号的相关函数为

答案网 http://www.daanwang.com

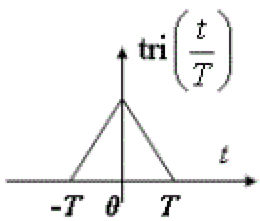
（1） $R_X(\tau)=\begin{cases}\sigma_X^2(1-\alpha|\tau|), & |\tau|\le\dfrac{1}{\alpha}\\ 0, & |\tau|>\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}$

（2） $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$

求它们的矩形等效带宽。

解：（1）因为 $R_X(\tau)$ **是三角函数，**

由附录 A ： $\mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{T}\right)\Leftrightarrow T\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)$ $,T>0$



$$R_X(\tau)=\begin{cases}\sigma_X^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{1/\alpha}\right), & |\tau|\le\dfrac{1}{\alpha}\\ 0, & |\tau|>\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}=\sigma_X^2\,\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{1/\alpha}\right)$$

$$S_X(\omega)=\frac{\sigma_X^2}{\alpha}Sa^2\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)$$

$$B_{eq}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{S_X(\omega)}{S_X(\omega_0)}d\omega=\frac{R_X(0)}{2S_X(0)}=\frac{\sigma_X^2}{2\sigma_X^2/\alpha}=\frac{\alpha}{2}$$

答案网 http://www.daanwang.com

（2） $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$

$$S_X(\omega)=\frac{2\sigma_X{}^2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

所以

$$B_{eq}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{S_X(\omega)}{S_X(\omega_0)}d\omega=\frac{R_X(0)}{2S_X(0)}=\frac{\sigma_X^2}{4\sigma_X^2/\alpha}=\frac{\alpha}{4}$$

5.25 在图讨论 5.11 的过程中，信号 $X(t)=s(t)+N(t)$，式中 $N(t)$ 是谱密度为 $N_0/2$ 的平稳高斯白噪声，$h(t)$ 是 $s(t)$ 的匹配滤波器。试求：

（1） $Y(t)$ 的一维密度函数 $f_Y(y,t)$；

（2） 概率 $P[Y(t_0)\geq 0]$？

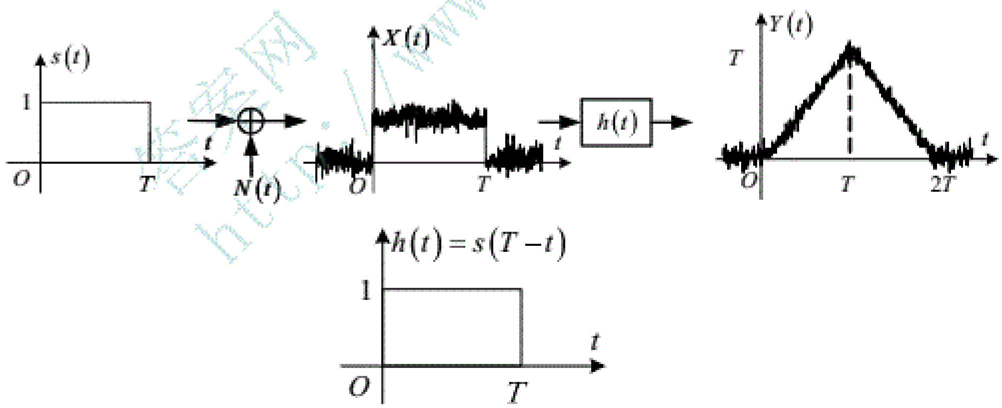


图 5.11

解： （1）由线性系统理论有 $Y(t)=Y_s(t)+Y_N(t)$，因为 $N(t)$ 为平稳高斯白噪声，故 $Y(t)$ 也是高斯噪声，其均值为 $Y_s(t)$，方差为 $Y_N(t)$。

$$Y_s(t)=s(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$=\begin{cases}\int_0^t 1\cdot 1d\tau=t \quad , & 0\le t<T\\ \int_{t-T}^{T}1\cdot 1d\tau=(2T-t) \quad , & T\le t<2T\\ 0 \quad , & t<0 \ \ or \ \ t\ge 2T\end{cases}$$

$Y(t)$ 的均值为

$$m_y(t)=\begin{cases}t & ,(0\le t<T)\\ 2T-t & ,(T\le t<2T)\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

$Y(t)$ 的方差为

$$\sigma_y^2(t)=R_{y_N}(0)=\frac{N_0}{2}E_{s1}=\frac{N_0T}{2}$$

所以 $y(t)\sim N\left[m_y(t),\sigma_y^2(t)\right]$，即

$$f_Y(y,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0T}}\exp\left\{-\frac{\left[y-m_y(t)\right]^2}{N_0T}\right\}$$

（2）取 $t_0=T$， $m_y(t_0)=T$， $\sigma_y^2(t_0)=\frac{N_0T}{2}$

答案网 http://www.daanwang.com

$$P\{y(t_0)\ge 0\}=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y(t_0)}\exp\left\{-\frac{\left[y-m_y(t_0)\right]^2}{2\sigma_y^2(t_0)}\right\}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[y-m_y(t_0)\right]^2}{2\sigma_y^2(t_0)}\right\}d\left(\frac{y-m_y(t_0)}{\sigma_y(t_0)}\right)$$

$$=\int_{-\frac{m_y(t_0)}{\sigma_y(t_0)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du$$

$$=Q\left[\frac{-m_y(t_0)}{\sigma_y(t_0)}\right]=Q\left[-\frac{\sqrt{2}T}{\sqrt{N_0T}}\right]=Q\left[-\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right]$$

答案网
http://www.daanwang.com

6.1 复随机过程 $Z(t)=e^{j(\omega_0 t+\Phi)}$，式中 ω_0 为常数，Φ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。

求：（1）$E[Z(t+\tau)Z^*(t)]$ 和 $E[Z(t+\tau)Z(t)]$；（2）信号的功率谱。

解：(1)

$$Z(t)=e^{j(\omega_0 t+\Phi)}$$

$$E\left[Z(t)\right]=E\left[e^{j(\omega_0 t+\Phi)}\right]=E\left[e^{j\Phi}\right]e^{j\omega_0 t}=0$$

$$E[Z(t+\tau)Z^*(t)]=E\left[e^{j[\omega_0(t+\tau)+\Phi]}e^{-j[\omega_0 t+\Phi]}\right]$$

$$=E\left[e^{j\omega_0\tau}\right]=e^{j\omega_0\tau}=R_Z\left(\tau\right)$$

$$E[Z(t+\tau)Z(t)]=E\left[e^{j[\omega_0(t+\tau)+\Phi]}e^{j[\omega_0 t+\Phi]}\right]$$

$$=E\left[e^{j[\omega_0(2t+\tau)+2\Phi]}\right]=e^{j[\omega_0(2t+\tau)]}E\left[e^{j2\Phi}\right]$$

$$=e^{j[\omega_0(2t+\tau)]}E\left[\left[\cos 2\Phi+j\sin 2\Phi\right]\right]$$

$$=e^{j\omega_0(2t+\tau)}\int_0^{2\pi}\left[\cos 2\Phi+j\sin 2\Phi\right]\frac{1}{2\pi}d\Phi$$

$$=0$$

(2) $S_Z(\omega)=F[R_Z(\tau)]=F[e^{j\omega_0\tau}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

6.2

6.3

http://www.daanwang.com 答案网

6.4 已知 $a(t)$ 的频谱为实函数 $A(\omega)$，假定 $|\omega| > \Delta\omega$ 时，$A(\omega)=0$，且满足 $\omega_0 \gg \Delta\omega$，试比较：

（1） $a(t)\cos\omega_0 t$ 和 $(1/2)a(t)\exp(j\omega_0 t)$ 的傅立叶变换。

（2） $a(t)\sin\omega_0 t$ 和 $(-j/2)a(t)\exp(j\omega_0 t)$ 的傅立叶变换。

（3） $a(t)\cos\omega_0 t$ 和 $a(t)\sin\omega_0 t$ 的傅立叶变换。

解：

由傅立叶变换的定义可以得到：

（1）

$$a(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)]$$

$$\frac{1}{2}a(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}A(\omega-\omega_0)$$

$$\left(a(t)e^{j\omega_0 t} = a(t)\cos\omega_0 t + ja(t)\sin\omega_0 t\right)$$

$a(t)e^{j\omega_0 t}$ 是 $a(t)\cos\omega_0 t$ 的解析信号

$\frac{1}{2}a(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅立叶变换是 $a(t)\cos\omega_0 t$ 的傅立叶变换的正频率部分。

（2）

$$a(t)\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \frac{-j}{2}[A(\omega-\omega_0)-A(\omega+\omega_0)]$$

$$\frac{-j}{2}a(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{-j}{2}A(\omega-\omega_0)$$

答案网 http://www.daanwang.com

$\left(-ja(t)e^{j\omega_0 t}=a(t)\sin\omega_0 t-ja(t)\cos\omega_0 t\right)$

$-ja(t)e^{j\omega_0 t}$ 是 $a(t)\sin\omega_0 t$ 的解析信号

$\frac{-j}{2}a(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅立叶变换是 $a(t)\sin\omega_0 t$ 的傅立叶变换的正频率部分。

（3）$a(t)\cos\omega_0 t$ 和 $a(t)\sin\omega_0 t$ 的傅立叶变换

$$a(t)\cos\omega_0 t\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)]$$

$$a(t)\sin\omega_0 t\xleftrightarrow{FT}\frac{-j}{2}[A(\omega-\omega_0)-A(\omega+\omega_0)]$$

$a(t)\sin\omega_0 t$ 是 $a(t)\cos\omega_0 t$ 的希尔伯特变换。

$$F\left[a(t)\sin\omega_0 t\right]=F\left[a(t)\cos\omega_0 t\right]\cdot\left[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)\right]$$

6.5

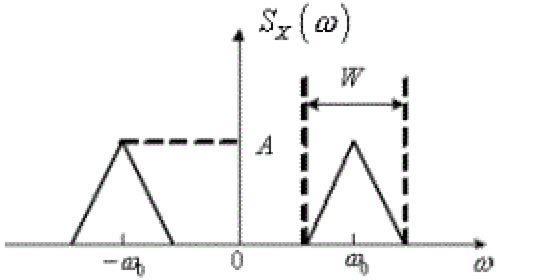
答案网 http://www.daanwang.com

6.6

6.7　若零均值平稳窄高斯随机信号 $X(t)$ 的功率谱密度如题图 6.7

(1) 试写出此随机信号的一维概率密度函数；

(2)写出 $X(t)$ 的两个正交分量的联合概率密度函数。



题图 6.7

解：

(1) 零均值平稳窄带高斯信号 $X(t)$ 的正交表达式为

$$x(t)=i(t)\cos\omega_0 t-q(t)\sin\omega_0 t$$

基于功率谱计算功率得

$$P=R_X(0)=\sigma_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega=\frac{AW}{2\pi}$$

所以 $X(t)\sim N(0,{\sigma_X}^2)$

所以一维概率密度

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{AW}{2\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{AW}{2\pi}}}=\frac{1}{\sqrt{AW}}e^{-\frac{\pi x^2}{AW}}=\frac{1}{\sqrt{AW}}e^{-\frac{\pi x^2(t)}{AW}}$$

(2) 又因为 $X(t)$ 的功率谱关于中心频率 ω_0 偶对称，$S_{qi}(\omega)=0$

即 $$R_{qi}(\tau)=E[i(t_1)q(t_2)]=0$$

所以 $i(t),q(t)$ 彼此正交，做为零均值的高斯信号也彼此独立，且

答案网 http://www.daanwang.com

$E\left[X(t)\right]=E\left[i(t)\right]=E\left[q(t)\right]=0$, $\sigma_X{}^2=\sigma_i{}^2=\sigma_q{}^2=\dfrac{AW}{2\pi}$

$$f_{iq}(i,q;t_1,t_2)=f_i(i,t_1)f_q(q,t_2)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_X{}^2}e^{-\frac{(i^2+q^2)}{2\sigma_X{}^2}}=\frac{1}{AW}e^{-\frac{\pi(i^2+q^2)}{AW}}$$

$$=\frac{1}{AW}\exp\left(-\frac{\pi\left(i^2(t_1)+q^2(t_2)\right)}{AW}\right)$$

6.8 对于窄带平稳随机过程 $x(t)=i(t)\cos\omega_0 t-q(t)\sin\omega_0 t$**，若其均值为零，功率谱密度为**

$$S_x(\omega)=\begin{cases}P\cos[\pi(\omega-\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega-\omega_0|\le\Delta\omega/2\\ P\cos[\pi(\omega+\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega+\omega_0|\le\Delta\omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

式中 $P,\Delta\omega$及$\omega_0>>\Delta\omega$ **都是正实常数。试求**

(1) **$x(t)$的平均**功率；

(2) **$i(t)$的功率谱密度；**

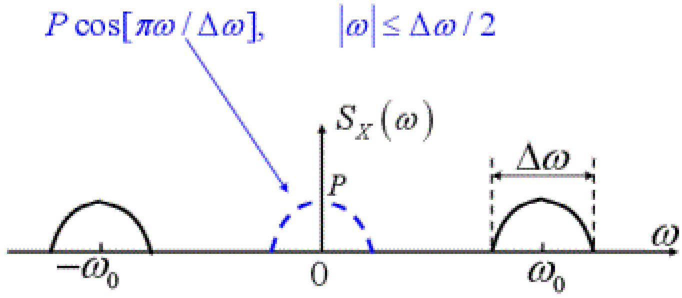
(3) **互相关函数** $R_{iq}(\tau)$ **或互谱密度** $S_{iq}(\omega)$**；**

(4) **$i(t)$与 $q(t)$是否正交或不相关？**

解：

答案网 http://www.daanwang.com

$$S_x(\omega)=\begin{cases} P\cos[\pi(\omega-\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega-\omega_0|\le\Delta\omega/2 \\ P\cos[\pi(\omega+\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega+\omega_0|\le\Delta\omega/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



（1）$x(t)$ **的平均功率：**

$$P_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}}P\cos(\pi\omega/\Delta\omega)d\omega=\frac{2P\cdot\Delta\omega}{\pi^2}$$

（2）$x(t)$ **是零均值平稳窄带随机信号，所以有：**

$$S_i(\omega)=S_q(\omega)=\begin{cases} S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)\ , & |\omega|\le\omega_0 \\ 0\ , & other \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2P\cos\left(\dfrac{\pi\omega}{\Delta\omega}\right), & |\omega|\le\dfrac{\Delta\omega}{2} \\ 0\ , & other \end{cases}$$

（3）**互相关函数** $R_{iq}(\tau)$ **或互谱密度** $S_{iq}(\omega)$

因为 $S_X(\omega)$ **是关于** ω_0 **偶对称，故互谱密度** $S_{iq}(\omega)$ **为 0，互相关函数** $R_{iq}(\tau)$ **也为 0**

（4）**由** $R_{iq}(\tau)=0$**，所以** $i(t)$ **与** $q(t)$ **任意时刻正交。因为** $i(t)$ **与** $q(t)$ **是**

答案网 http://www.daanwang.com

零均值的，所以$i(t)$与$q(t)$也是不相关的。

6.9

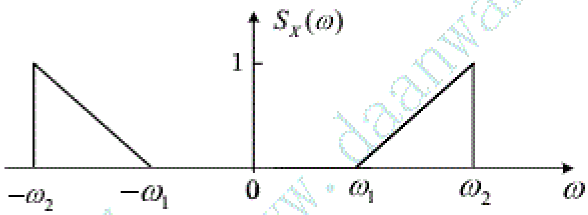
6.10

6.11 已知零均值窄带平稳噪声 $X(t)=A(t)\cos\omega_0 t-B(t)\sin\omega_0 t$ 的功率谱密度如题图 6.11 所示。画出下列情况下随机过程 $A(t)$，$B(t)$各自的功率谱密度：

（1） $\omega_0=\omega_1$ （2） $\omega_0=\omega_2$

（3） $\omega_0=(\omega_1+\omega_2)/2$

判断上述各种情况下，过程$A(t)$，$B(t)$是否互不相关。



题图 6.11

解：

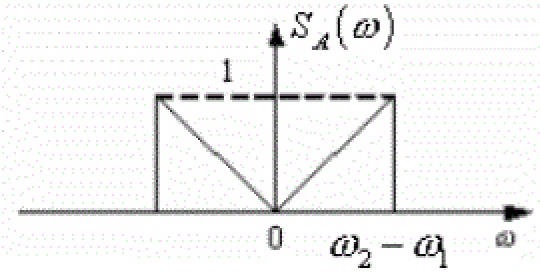
因为$X(t)$是零均值平稳窄带随机信号，所以有：

$$S_A(\omega)=S_B(\omega)=\begin{cases}S_x(\omega+\omega_0)+S_x(\omega-\omega_0) & |\omega|<\omega_0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

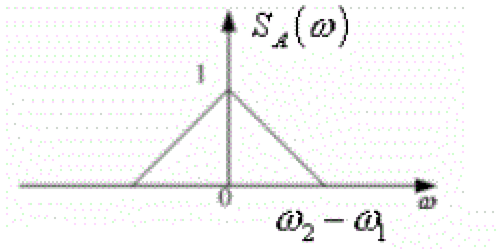
$$S_{BA}(\omega)=-S_{AB}(\omega)=\begin{cases}j[S_x(\omega-\omega_0)-S_x(\omega+\omega_0)] & |\omega|<\omega_0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

功率谱图形如下：

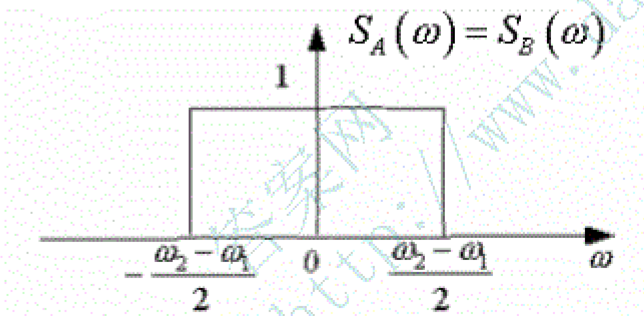
（1）



（2）



（3）



由于 $X(t)$ 的功率谱不以中心频率 ω_0 偶对称，所以互功率谱密度 $S_{BA}(\omega)$ 在三种情况下都不为 0，即 $R_{BA}(\tau)\neq 0$，所以 $A(t),B(t)$ 非正交，相关.

但作为带通信号，其 $R_{BA}(0)=0$， 所以 $A(t),B(t)$ 在同一时刻正交，互不相关.

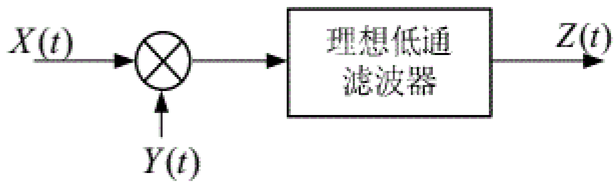
6.12

答案网 http://www.daanwang.com

6.14 同步检波器如下题图 6.13 所示，输入 $X(t)$ 为窄带平稳噪声，它的自相关函数为

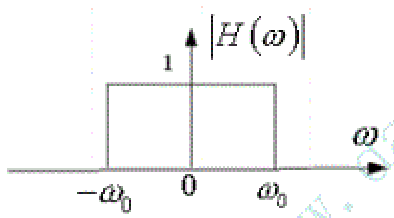
$$R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau\text{，}\quad \beta\ll\omega_0\text{。}$$

若另一输入 $Y(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$，其中 A 为常数，θ 服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布，且与 $X(t)$ 独立。求检波器输出 $Z(t)$ 的平均功率。



题图 6.14

理想 *LPF*：



解：因为 $X(t)$ 为窄带平稳噪声, 且

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau$$

$$E\left[Y(t)\right]=AE\left[\sin(\omega_0 t+\theta)\right]=0$$

$$R_Y\left(t_1,t_2\right)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]=E\left[A^2\sin(\omega_0 t_1+\theta)\sin(\omega_0 t_2+\theta)\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}E\left[\cos\omega_0\tau-\cos(\omega_0 t_1+\omega_0 t_2+\theta)\right]=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

所以 $Y(t)$ 也广义平稳

$$M(t)=X(t)Y(t)$$

答案网 http://www.daanwang.com

$$E\left[M(t)\right]=E\left[X(t)Y(t)\right]=0$$

$$R_M\left(t_1,t_2\right)=E\left[M(t_1)M(t_2)\right]=E\left[X(t_1)Y(t_1)X(t_2)Y(t_2)\right]=R_X\left(\tau\right)\cdot R_Y\left(\tau\right)$$

所以，

$$R_M\left(\tau\right)=\sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau\cdot\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}e^{-\beta|\tau|}\left[1+\cos 2\omega_0\tau\right]$$

$$S_M\left(\omega\right)=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}*\left[2\pi\delta\left(\omega\right)+\pi\left(\delta\left(\omega+2\omega_0\right)+\delta\left(\omega-2\omega_0\right)\right)\right]$$

$$=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}\cdot\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}+\frac{A^2\sigma_X^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2\beta}{\left(\omega+2\omega_0\right)^2+\beta^2}+\frac{2\beta}{\left(\omega-2\omega_0\right)^2+\beta^2}\right]$$

低通后（单位增益的理想低通滤波器）：

$$S_Z\left(\omega\right)=S_M\left(\omega\right)\cdot\left|H_{LPF}\left(\omega\right)\right|^2=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}\cdot\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}$$

$$R_Z\left(\tau\right)=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}\cdot e^{-\beta|\tau|}\quad\rightarrow\quad R_Z\left(0\right)=\frac{A^2\sigma_X^2}{4}$$

答案网 http://www.daanwang.com