六、（15 分）考虑下面约束优化问题，这里 $\boldsymbol{X}^0=(2,2)^{\boldsymbol{T}}$，

$$
\begin{aligned}
&\min\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{x}_1-3)^2+(\boldsymbol{x}_2-1)^2\\
\boldsymbol{s.t.}&\\
&6-\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2\ge 0\\
&2-\boldsymbol{x}_1\ge 0
\end{aligned}
,
$$

1、若用外部惩罚函数法求解此问题，请写出惩罚函数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{m})$，不必求解;

2、用 $\boldsymbol{Rosen}$ 梯度投影法求解此问题，请补全前面的解题步骤，并写出后续过程。

解:

1、(5 分)

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{m}_k)=(\boldsymbol{x}_1-3)^2+(\boldsymbol{x}_2-1)^2+\boldsymbol{m}_k\ \min{}^2\{6-\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2,0\}+\min{}^2\{2-\boldsymbol{x}_1,0\}$$

2、

$$\boldsymbol{g}=\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}2(\boldsymbol{x}_1-3)\\2(\boldsymbol{x}_1-1)\end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{a})$ 求 $\boldsymbol{P}^0$

$$\boldsymbol{X}^0=(2,2)^{\boldsymbol{T}}，\ \boldsymbol{g}^0=(-2,2)^{\boldsymbol{T}},\quad \text{(1 分)}\ \boldsymbol{N}_0=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&0\end{pmatrix},\text{(1 分)}$$

$$\boldsymbol{M}_0=(\boldsymbol{N}_0\boldsymbol{N}_0{}^{\boldsymbol{T}})^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&5\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{Q}_0=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}_0{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{N}_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\text{(2 分)}$$

$$\boldsymbol{P}^0=-\mathbb{Q}_0\boldsymbol{g}^0=(0,0)^{\boldsymbol{T}}，\quad \boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{N}_0\boldsymbol{g}^0=(-1,3),\text{(1 分)}$$

$(\boldsymbol{b})$ 修正 $\boldsymbol{P}^0$

$$\overline{\boldsymbol{N}_0}=\ -1\quad 0\ ,\overline{\boldsymbol{M}_0}=\left(\overline{\boldsymbol{N}_0}\,\overline{\boldsymbol{N}_0}^{\boldsymbol{T}}\right)^{-1}=1，\text{(1 分)}$$

$$\overline{\mathbb{Q}_0}=\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{N}_0}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{M}_0}\,\overline{\boldsymbol{N}_0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{P}^0}=-\overline{\mathbb{Q}_0}\boldsymbol{g}^0=(0,-2)^{\boldsymbol{T}}\ \text{(1 分)}$$

$(\boldsymbol{c})$ 求 $\boldsymbol{X}^1$

$$\boldsymbol{A}''=\varnothing，\quad \bar{\boldsymbol{t}}=+\infty$$

$$\min_{0\le t\le \bar{t}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^0+\boldsymbol{t}\overline{\boldsymbol{P}^0}) \Longleftrightarrow \min_{0\le \boldsymbol{t}} (1-2\boldsymbol{t})^2 \quad , \quad \boldsymbol{t}_0=\frac{1}{2}$$ (1 分)

$$\boldsymbol{X}^1=\boldsymbol{X}^0+\boldsymbol{t}_0\overline{\boldsymbol{P}^0}=(2,1)^{\boldsymbol{T}} \quad , \quad \boldsymbol{g}^1=(-2,0)^{\boldsymbol{T}},$$ (1 分)

($\boldsymbol{d}$) 求 $\boldsymbol{P}^1$

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{matrix}-1 & 0\end{matrix}, \boldsymbol{M}_1=(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_1{}^{\boldsymbol{T}})^{-1}=1,$$

$$\mathbb{Q}_1=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}_1{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{N}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^1=-\mathbb{Q}_1\boldsymbol{g}^1=(0,0)^{\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{g}^1=2>0,$$

因此 $\boldsymbol{X}^1=(2,1)^{\boldsymbol{T}}$ 为 $\boldsymbol{KKT}$ 点，因为此问题为凸规划，所以 $\boldsymbol{X}^\star=\boldsymbol{X}^1=(2,1)^{\boldsymbol{T}}$ 为最优解。(1 分)