第2章

- **Suppose that you enter into a short futures contract to sell July silver for $17.20 per ounce. The size of the contract is 5,000 ounces. The initial margin is $4,000, and the maintenance margin is $3,000. What change in the futures price will lead to a margin call? What happens if you do not meet the margin call?**

> There will be a margin call when $1,000 has been lost from the margin account. This will occur when the price of silver increases by 1,000/5,000 = $0.20. The price of silver must therefore rise to $17.40 per ounce for there to be a margin call. If the margin call is not met, your broker closes out your position.

- **Explain how margin accounts protect futures traders against the possibility of default**

> 保证金相当于投资者存在经纪人账上的资金，它是投资者用于弥补期货合约损失的保证。保证金账户余额每天进行调整，以反映投资者在期货合约上的收益或损
>
> 失。如果损失超过一定额度，那么投资者需要补充更多的保证金，这个机制排除了投资者违约的可能性。在投资者的经纪人和清算中心会员间买卖期货合约时，类似的
>
> 机制排除了经纪人违约的可能性。再者，在清算中心会员和清算中心之间的交易中，也排除了清算中心会员违约的可能性。

- **假定在2018年10月24日，一家公司卖出1份2019年4月的活牛期货合约，并在2019年1月21日将合约平仓。在承约合约时期货价格（每磅）为121.20美分，在平仓时期货价格为118.30美分，在2018年12月底期货价格为118.80美分，期货规模为40000磅活牛。这时公司的总盈利是多少？如果公司分别为：**

  a）对冲者；

  b）投机者，

  它将如何缴税？假定公司的财政年底是12月31日。

思路：对于对冲者，缴税在期末算，对于投机者，分期算

> 公司的总利润为：
>
> 40000×（1.2120 - 1.1830） = 1160（美元）
>
> 如果公司是对冲者，所有收入都在2019年缴税，应税额为1160美元。
>
> 如果公司是投机者，2018年应税额为：
>
> 40000×（1.2120 - 1.1880） = 960（美元）
>
> 2019年应税额为：
>
> 40000×（1.1880 - 1.1830） = 200（美元）

可以看到，两者总应税额相同。但是投机者分期算

- **Suppose that there are no storage costs for crude oil and the interest rate for borrowing or lending is 4% per annum. How could you make money if the June and December futures contracts for a particular year trade at $50 and $56?**

假定原油没有贮存费用，借入与借出资金的利率均为4%。假定某年6月和12月期货合约的交易价格分别为50美元及56美元，如何通过交易来盈利？

> 6月到期的原油期货合约的结算价为50美元/桶，12月到期的原油期货合约的结算价是56美元/桶。所以，可以在买入一份6月到期的原油期货合约的同时卖出一份12月到期的原油期货合约。在6月，对于需要交割的每一桶原油，以4%的利率借入50美元对期货合约进行交割。到12月份，6个月的累积利息共计50×0.04×0.5 = 1（美元/
>
> 桶），12月份原油的结算价为56美元/桶，需要偿还的6月份借款的本息共计是50 + 1 = 51（美元/桶）。因此，这个策略就带来了每桶5美元（ = 56 - 51）的利润。注意：
>
> 收益与6月份或者12月份的原油实际价格无关，只与期货合约的每日结算制度稍微有关。

第3章

- **Explain what is meant by a perfect hedge. Does a perfect hedge always lead to a better outcome than an imperfect hedge? Explain your answer.**

A **perfect hedge** is one that completely eliminates the hedger’s risk. A perfect hedge does not always lead to a better outcome than an imperfect hedge. It just leads to a more certain outcome.

Consider a company that hedges its exposure to the price of an asset. Suppose the asset’s price movements prove to be favorable to the company. A perfect hedge totally neutralizes the company’s gain from these favorable price movements. An imperfect hedge, which only partially neutralizes the gains, might well give a better outcome.

完美对冲是指完全消除风险的对冲，即完美对冲可以完全消除对冲者的风险。它的效果并不总是比不完美对冲更好，只是该策略带来的后果更为确定。考虑一家公司对冲某项资产的价格风险的情况，假设最终资产价格变动对于该公司有利，完美对冲会完全冲销公司从有利的价格变动中获得的收益，而不完美的对冲则只是部分冲销这些收益，此时不完美对冲的效果就更好。

- 假设一家公司持有价值为2000万美元、beta值为1.2的股票组合。该公司想利用股指期货来对冲风险。股指期货的当前水平是1080，每一份期货合约的交割价为250美元乘以股指。什么样的对冲可以使风险极小化？公司怎么做才可以将组合的beta值降低到0.6？

The formula for the number of contracts that should be shorted gives

$$1.2 \times \frac{20,000,000}{1080 \times 250} = 88.9$$

Rounding to the nearest whole number, 89 contracts should be shorted. To reduce the beta to 0.6, half of this position, or a short position in 44 contracts, is required.

- **“If the minimum-variance hedge ratio is calculated as 1.0, the hedge must be perfect." Is this statement true? Explain your answer.**

不正确。因为最小方差对冲比率为 $h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$ ，当ρ = 0.5和σS = 2σF时，它等于1.0。由于ρ < 1.0，所以这个对冲是不完美对冲。

- *It is July 16. A company has a portfolio of stocks worth $100 million. The beta of the portfolio is 1.2. The company would like to use the December futures contract on a stock index to change beta of the portfolio to 0.5 during the period July 16 to November 16. The index is currently 2,000, and each contract is on $250 times the index.*
  a) *What position should the company take?*
  b) *Suppose that the company changes its mind and decides to increase the beta of the portfolio from 1.2 to 1.5. What position in futures contracts should it take?*

  a) The company should short

  $$\frac{(1.2-0.5)\times 100{,}000{,}000}{2{,}000\times 250}$$

  or 140 contracts.

  b) The company should take a long position in

  $$\frac{(1.5-1.2)\times 100{,}000{,}000}{2{,}000\times 250}$$

  or 60 contracts.

  - 公司应当持有股指期货空头
  - 想要增加beta值，应当持有多头

第5章

- **Explain carefully the meaning of the terms convenience yield and cost of carry. What is the relationship between futures price, spot price, convenience yield, and cost of carry?**

便利收益衡量的是与持有期货合约多头相比持有实物资产可以获得的好处的大小。持有成本是利息成本加上贮存费用再减去资产带来的收入。期货价格F0与即期价格S0之间的关系可以表示为：

$F_0 = S_0 e^{(c-y)T}$

其中，c是持有成本，y是便利收益率，T是期货合约的期限。

- 3 假设你承约了一个无股息股票上6个月期限的远期合约，股票当前价格为30美元，无风险利率为12%（连续复利），远期价格为多少？

  答：远期价格为$30\times e^{0.12\times 0.5}\approx 31.86$（美元）。

  4 一个股指的当前价格为350，无风险利率为每年4%（连续复利），股指的股息收益率为每年3%。4个月期的期货价格为多少？

  答：该期货合约价格为$350\times e^{(0.04-0.03)\times 0.3333} = 351.17$。

- A one-year long forward contract on a non-dividend-paying stock is entered into when the stock price is \$40 and the risk-free rate of interest is 5% per annum with continuous compounding.在签署无股息股票1年期的远期合约时，股票当前价格为40美元，连续复利的无风险利率为每年5%。
  - What are the forward price and the initial value of the forward contract? 远期合约的初始价值和期货价格分别为多少?
    - 初始价值为0
    - 远期价格为$F0 = 40e^{0.05\times1} \approx 42.05$
  - Six months later, the price of the stock is \$45 and the risk-free interest rate is still 5%. What are the forward price and the value of the forward contract?
    - price: $45e^{0.05*0.5} = 46.14$
    - value: 合约的交割价格为K = 42.05美元。由式$f = S0 - Ke^{-rT}$可知6个月后的合约价值为$f = 45 - 42.05e^{-0.05\times0.5} \approx 3.99$
- 在瑞士和美国按连续复利的两个月期限利率分别为每年1%和2%。瑞士法郎的即期价格是1.0500美元。在2个月后交割的期货价格也是1.0500美元，这时会存在什么样的套利机会

由利率平价公式：$F = Se^{(r-rf)T}$,其中，rf为外币汇率。得到$F = 1.0500e^{(0.02-0.01)\times2/12} \approx 1.0518$, 而实际的期货价格比这个价格低。这表明套利者应出售瑞士法郎换得美元，同时在期货市场买入瑞士法郎期货

- 白银的现价为每盎司25美元，每年贮存费用为每盎司0.24美元，贮存费要每季度预付一次。假定所有期限的利率均为每年5%（连续复利），计算9个月后交割的期货价格。

存储费用可被视为负收入，假定u为期货期限之间所有去掉收入后存储费用的贴现值 $F_0 = (S_0 + U)e^{rT}$

答：9个月贮存成本的现值是:

$0.06 + 0.06e^{-0.05\times0.25} + 0.06e^{-0.05\times0.5} \approx 0.178$（美元/盎司）

由教材公式（5-11）可知，期货的价格为$F_0 =$（$25.000 + 0.178$）$e^{0.05\times0.75} \approx 26.14$（美元/盎司）。

- 股票预计在2个月和5个月时将支付1美元股息。股票价格为50美元，对应所有期限的连续复利无风险利率均为每年8%。某投资者刚刚承约了股票上6个月期限的远期合约空头。
  - 远期价格与远期合约的初始价值为多少?

答：（a）股票分配股息的现值I为:

$I = 1\times e^{-0.08\times2/12} + 1\times e^{-0.08\times5/12} \approx 1.9540$（美元）

从方程（5-2）知，远期价格F_0为:

$F_0 =$（$50 - 1.9540$）$e^{0.08\times0.5} \approx 50.01$（美元）

  - 初始价值为0
  - 在3个月后，股票价格变为48美元，无风险利率仍为每年8%。这时远期价格和远期合约空头的价值为多少?

        - 此时分配股息的现值为0.9867551618071957
        - 远期价格为（$48-0.9868$）$*e^{r*3/12}=47.96297538293026$
        - 价值为50.01-47.9629=2.0471
    - 总结：要减去收入现值

第10章

- 描述以下交易组合的最终价值：一个刚刚承约的某资产远期合约多头和对于同一资产的欧式看跌期权的多头。看跌期权的期限与远期合约的期限相同，期权的执行价格等于交易组合刚刚设定时资产的远期价格。证明欧式看跌期权的价格与具有相同期限和执行价格的欧式看涨期权的价格相等。

答：远期合约多头的终端价值为S_T-F_0。

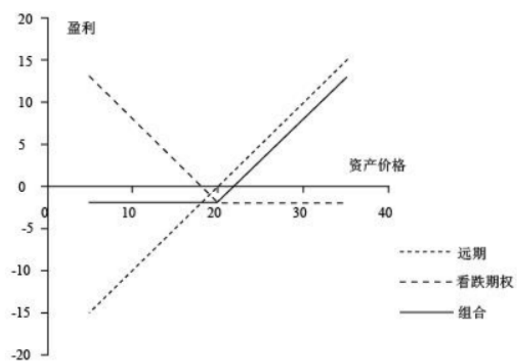
其中，S_T为到期日资产的价格，F_0为投资组合创建时资产的远期价格。（远期合约的交割价格也是F_0）。

看跌期权的终端价值为max（F_0-S_T，0）。

因此，投资组合的最终价格为：

$S_T-F_0+\max(F_0-S_T,0)=\max(0,S_T-F_0)$

这与具有相同到期期限的欧式看涨期权的价值相同。因为远期合约价格和执行价格都等于F_0。已知远期合约加上看跌期权与具有相同执行价格和到期期限的看涨期权价值相同，在投资组合创建时，远期合约的价值为零，因此看跌期权与看涨期权的价值相同。其结果可用图10-5描述。



- 某交易员买入1份看涨期权与看跌期权，看涨期权的执行价格为45美元，看跌期权的执行价格为40美元，两个期权具有相同的期限，看涨期权价格为3美元，看跌期权价格为4美元，画出交易员盈利与资产价格之间的关系图。

答：图10-6表示根据资产价格不同，交易者的交易头寸的变化，可以把两种资产价格划分为3个区间。

（a）当资产价格小于40美元时，看跌期权有$40-S_T$的收益，看涨期权没有收益。期权的总成本为7美元，所以总利润为$33-S_T$。

（b）当资产价格在40美元和45美元之间时，两个期权都没有收益，净损失7美元。

（c）当资产价格大于45美元时，看涨期权的收益为S_T-45，看跌期权没有收益。考虑到7美元的期权成本，总利润为S_T-52。

如果股价低于33美元或高于52美元，则交易员盈利（忽略资金的时间价值）。这种交易策略是异价跨式期权，将在第12章中讨论。

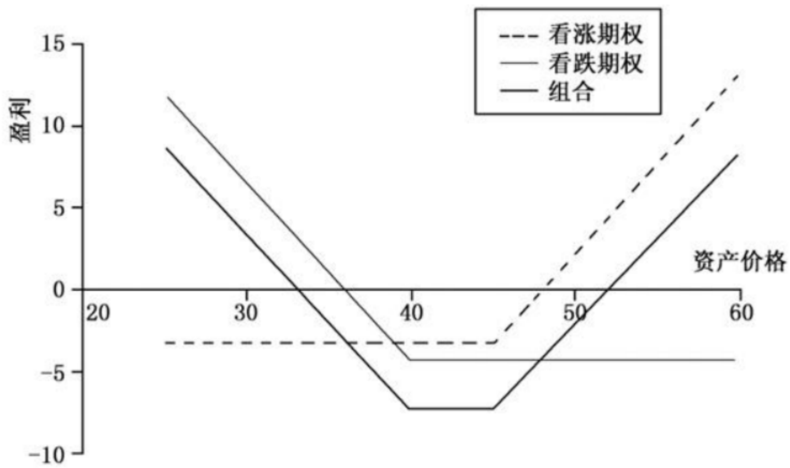


图10-6 交易员盈亏与资产价格的关系图

第11章

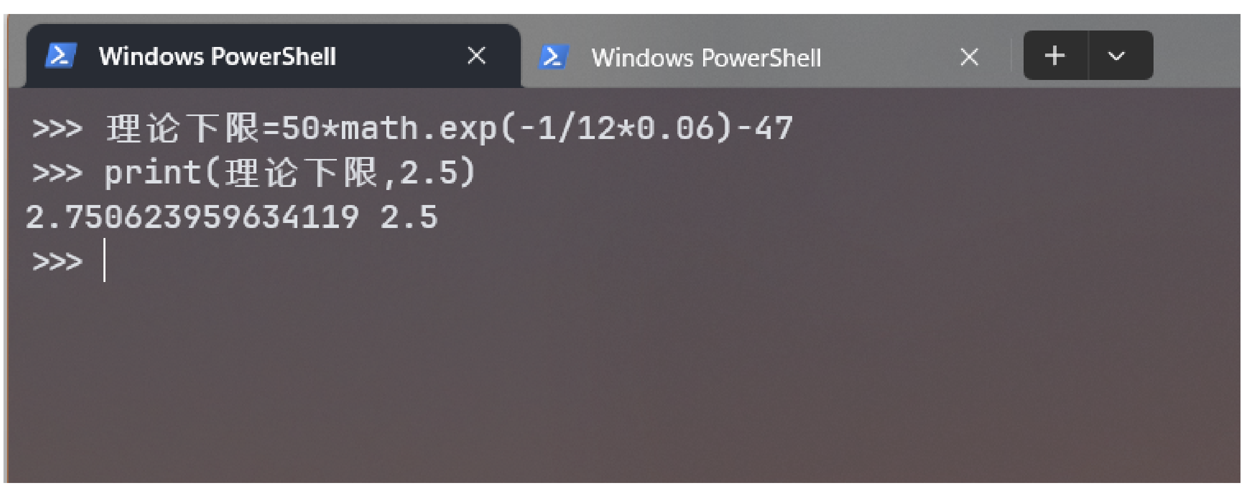
- 一份期限为4个月，在支付股息股票上的欧式看涨期权价格为5美元，执行价格为60美元，股票当前价格为64美元，预计在1个月后股票将支付0.8美元的股息，所有期限的无风险利率均为12%，这时对于套利者而言存在什么样的套利机会？

答：执行价格的现值为$60e^{-0.12\times4/12}\approx57.65$（美元）。股息的现值为$0.80e^{-0.12\times1/12}\approx0.79$（美元）。因为$5<64-57.65-0.79$，所以并不满足教材方程（11-8）欧式看涨期权价格$c\geq\max(S_0-D-Ke^{-rT},0)$。套利者应该买入期权同时做空股票，此时获得$64-5=59$（美元）。套利者将其中的0.79美元以12%的利率投资1个月，于1个月后偿还0.80美元的股息。剩余的58.21美元以12%的利率投资4个月。这样不管发生什么都可以实现利润。

如果在4个月后股票价格低于60美元，套利者损失了5美元的期权费但股票的空头头寸却是获利的。套利者以64美元的价格卖空股票，同时偿还股息的现值为0.79美元。当到期时股票价格小于等于60美元时，套利者将平掉其持有的股票空头头寸。因为60美元的现值是57.65美元，因此以现值形式表示，空头头寸至少可获利$64-57.65-0.79=5.56$（美元）。从而套利者盈利的现值至少为$5.56-5.00=0.56$（美元）。

如果在期权到期时股票价格大于60美元，期权将被执行。套利者在4个月后以60美元的价格买入股票并平掉其空头头寸。购买股票所支付60美元的现值为57.65美元，同样股息现值为0.79美元。从股票空头头寸及期权执行当中获得的收益为$64-57.65-0.79=5.56$（美元）。套利者盈利的现值等于$5.56-5.00=0.56$（美元）。

- 期限为1个月的无股息股票上欧式看跌期权的当前价格为2.5美元。股票价格为47美元，执行价格为50美元，无风险利率为每年6%，这时对套利者而言存在什么样的套利机会？



如图，看跌期权的价格被低估了，所以根据低买高卖，应该买入1份看跌期权，同时买一份股票。此时花费47+2.5=49.5，这个钱从银行借。

如果1个月后股票价格大于50美元，期权的价值为0，但股票的售价却至少为50美元。1个月后收入的50美元现值为49.75美元。因此这种策略产生的盈利现值至少为0.25（= 49.75 - 49.5）美元。

如果1个月后股票价格低于50美元，看跌期权被执行，股票以50美元价格出售（或49.75美元的现值）。该交易策略产生的盈利现值恰好为0.25美元。

- 当无风险利率上升与波动率下降时，用直观的方式解释为什么提前行使美式看跌期权会变得更吸引人。

  答：原因如下：当提前执行获得的基于执行价格的利息收益大于对损失的保险价值时，提前执行一份美式看跌期权是有吸引力的。

  - 当无风险利率增加时，基于执行价格获得的利息收益增加，因此提前执行更具有吸引力。
  - 当波动率下降时，风险变小，美式看跌期权在保险方面的价值变小，使得提前执行更具有吸引力。
- 执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看涨期权的价格为2美元。标的股票价格为29美元，在2个月与5个月时预计股票将会分别发放0.5美元的股息，所有期限的无风险利率均为10%。执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看跌期权价格是多少

解：已知K=30，T=6,c=2,S=29,r=0.10,求p=?

用$c+D+K*e^{-rt}=p+S$求解。

答：根据看跌-看涨期权平价关系式：

$$c+Ke^{-rT}+D=p+S_0$$

移项得：

$$p=c+Ke^{-rT}+D-S_0$$

在本题中，有：

$$p=2+30e^{0.1\times(-6/12)}+[0.5e^{0.1\times(-2/12)}+0.5e^{0.1\times(-5/12)}]-29\approx2.51\text{（美元）}$$

所以，该看跌期权的价格为2.51美元。

- 无股息股票上美式看涨期权的价格为4美元，股票价格为31美元，执行价格为30美元，期限为3个月，无风险利率为8%。推导具有相同股票价格、相同执行价格和相同期限的美式看跌期权上下限。

解：已知C=4,S=31,K=30,T=3,r=0.08

可用$S-K\leq C-P\leq S-Ke^{-rt}$ 求解

答：美式看跌看涨期权存在如下关系：

$S_0-K\leq C-P\leq S_0-Ke^{-rT}$

在本题中

$31-30\leq 4-P\leq 31-30e^{-0.08\times 0.25}$

即：

$2.41\leq P\leq 3.00$

因此，美式看跌期权的价格的上限和下限分别为3.00美元和2.41美元。

- 证明：$S-K\leq C-P\leq S-Ke^{-rt}$

(1) 因为$P\geq p$（提前执行看跌期权是有意义的），从看跌-看涨期权平价关系中得到：

$P\geq c+Ke^{-rT}-S_0$

因为$c=C$（在没有股息时永远不会提前行使美式看涨期权），所以

$P\geq C+Ke^{-rT}-S_0$

移项，得：

$C-P\leq S_0-Ke^{-rT}$①

(2) 对于C和P之间的关系进行更深入的考虑：

组合I：一份欧式看涨期权加上现金K；

组合J：一份美式看跌期权加上一份股票。

这两份期权具有相同的执行价格和到期时间。

(a) 假定组合I中的现金以无风险的利率进行投资。如果组合J中的看跌期权不提前执行，则在时刻T的价值为：

$\max(S_T, K)$

此时组合I的价值为：

$\max(S_T-K, 0)+Ke^{rT}=\max(S_T, K)-K+Ke^{rT}$

由于$r>0$，因此，组合I的价值高于组合J的价值。

(b) 假设组合J中的看跌期权在时刻τ被提前执行。这就是说组合J在τ时刻的价值为K。即使看涨期权的价值为零，组合I在τ时刻的价值为$Ke^{r\tau}$，仍然高于组合J。

所以，在任何情况下，组合I的价值都要大于组合J的价值。因此：

$c+K \geq P+S_0$

因为$c=C$，所以

$C+K \geq P+S_0$

移项得:

$C-P \geq S_0-K$

联立不等式① 得:

$S_0-K \leq C-P \leq S_0-Ke^{-rT}$

证明完毕。

第12章

- 利用看跌-看涨平价关系式，说明由看涨期权生成的牛市差价最初投资与由看跌期权生成的牛市差价最初投资之间的关系。

答：运用看涨期权的牛市差价与运用看跌期权的牛市差价提供的收益类型相同。定义p_1和c_1为执行价格为K_1的看跌和看涨期权的价格；p_2和c_2为执行价格为K_2的看跌和看涨期权的价格。从看跌-看涨平价关系式得出：

$p_1+S=c_1+K_1e^{-rT}$

$p_2+S=c_2+K_2e^{-rT}$

因此:

$p_1-p_2=c_1-c_2-(K_2-K_1)e^{-rT}$

这说明：运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资小于运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资，且差额为$(K_2-K_1)e^{-rT}$。实际上，运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资为负值，而运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资为正值。

用看涨期权构建牛市差价产生的利润比用看跌期权构建的要大$(K_2-K_1)(1-e^{-rT})$。这说明：相比于运用看跌期权构建牛市差价，运用看涨期权构建差价的策略中多包含一份无风险投资$(K_2-K_1)e^{-rT}$，其盈利为$(K_2-K_1)e^{-rT}(e^{rT}-1)=(K_2-K_1)(1-e^{-rT})$。

- 3份同一股票上并具有同样期限的看跌期权执行价格分别为55美元、60美元和65美元，市场价格分别为3美元、5美元和8美元。解释如何构造蝶式差价。用表来说明这一策略的盈利形式。股票在什么价位时，这一交易策略会导致亏损?

答：蝶式差价的构造方法为，购买一份执行价格为55美元的看跌期权，购买一份执行价格65美元的看跌期权，同时卖出两份执行价格为60美元的看跌期权。初始成本为 $3+8-2\times5=1$（美元）。该交易策略的损益情况如表12-13所示。

表12-13　交易策略的损益情况

股票价格	收益	盈利
$S_T \geqslant 65$	0	-1
$60 \leqslant S_T < 65$	$65-S_T$	$64-S_T$
$55 \leqslant S_T < 60$	S_T-55	S_T-56
$S_T < 55$	0	-1

当最后的股票价格大于64美元或小于56美元时，蝶式差价交易策略会导致损失。

- 25 画出以下几种投资者的交易组合与股票最终价格之间的盈亏关系图：

  (a) 一股股票并一份看涨期权的空头；

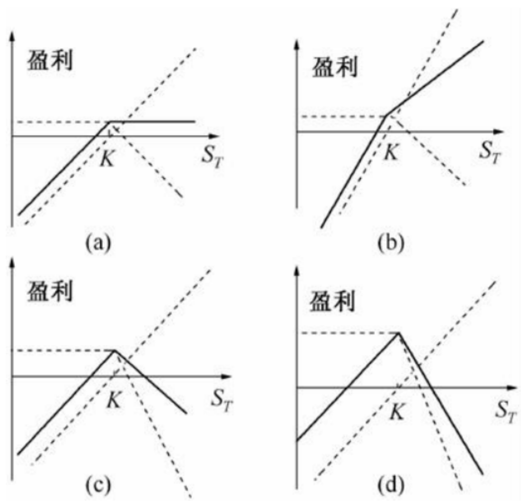
  (b) 两股股票并一份看涨期权的空头；

  (c) 一股股票并两份看涨期权的空头；

  (d) 一股股票并四份看涨期权的空头。

  对于以上不同情形，假定看涨期权的执行价格等于当前股票价格。

  答：四种交易策略中，投资者的损益随最终股票价格的变动状况如图12-18所示。其中，虚线表示投资者投资组合中每一种资产的头寸盈利状况，实线表示的是整个投资组合头寸的净盈利状况。

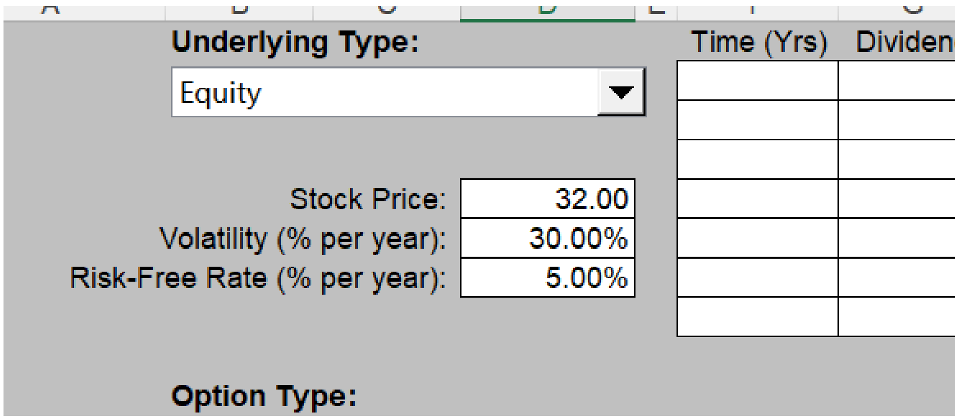


- 假定一股不付股息的股票价格为32美元，股票价格波动率为30%，对于所有期限的无风险利率均为每年5%。利用DerivaGem来计算以下几种交易策略的费用。
  - 由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看涨期权所组成的牛市差价。
  - 由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看跌期权所组成的熊市差价。
  - 由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看涨期权所组成的蝶式差价。
  - 由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看跌期权所组成的蝶式差价。
  - 由执行价格为30美元、期限为6个月的期权所组成的跨式组合。
  - 由执行价格分别为25美元与35美元、期限为6个月的期权所组成的异价跨式组合。

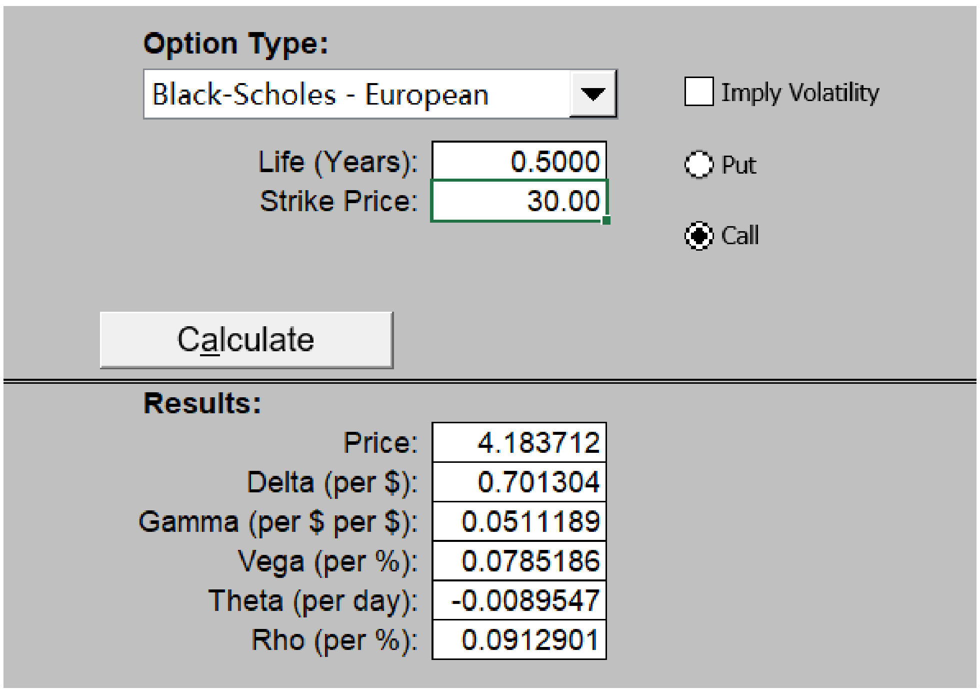
  对于每种情形，用表来说明盈利与最终股票价格之间的关系，在分析中忽略贴现作用

该题需要用DerivaGem，计算期权费用。

通过 DerivaGem，可以计算期权价格。首先设置的股票价格为 32 美元，股票价格波动率为 30%，无风险利率均每年 5%。



然后设置为欧式期权，并输入执行价格和期限，点击计算输出价格。



- 牛市差价：买入较低执行价格看涨期权，卖出较高价格看涨期权

答：（a）执行价格为25美元的看涨期权的价值为7.90美元，执行价格为30美元的看涨期权的价值为4.18美元。因此，牛市差价的成本为7.90 - 4.18 = 3.72（美元）。忽略折现的影响，损益情况如表12-14所示。

表12-14　交易策略a的损益情况

股票价格 S_T	盈利
$S_T \le 25$	-3.72
$25 < S_T < 30$	$S_T - 28.72$
$S_T \ge 30$	1.28

- 熊市差价：较高执行价格多头，较低执行价格空头

(b) 执行价格为25美元的看跌期权的价值为0.28美元，执行价格为30美元的看跌期权的价值为1.44美元。因此，熊市差价的成本为1.44 - 0.28 = 1.16（美元）。忽略折现的影响，损益情况如表12-15所示。

表12-15 交易策略b的损益情况

股票价格 S_T	盈利
$S_T \leqslant 25$	+3.84
$25 < S_T < 30$	$28.84 - S_T$
$S_T \geqslant 30$	-1.16

- 蝶式差价：设有K1<K2<K3,一份K1,K3多头，两份K2空头

(c) 期限为1年，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看涨期权的价值分别为：8.92美元、5.60美元和3.28美元。因此，蝶式差价的成本为8.92 + 3.28 - 2×5.60 = 1.00（美元）。忽略折现影响，损益情况如表12-16所示。

表12-16 交易策略c的损益情况

股票价格 S_T	盈利
$S_T \leqslant 25$	-1.00
$25 < S_T < 30$	$S_T - 26.00$
$30 \leqslant S_T < 35$	$34.00 - S_T$
$S_T \geqslant 35$	-1.00

- 蝶式差价情况二（使用看跌期权构造）

(d) 期限为1年，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看跌期权的价值分别为：0.70美元、2.14美元和4.57美元。因此，蝶式差价的总成本为0.70 + 4.57 - 2.14×2 = 0.99（美元）。在误差允许的范围内，损益情况与（c）相同。

我的理解 当看涨期权大于执行价格，盈利对股价斜率为一条1的线，而空头为-1，两份空头为-2，当股价为K2-K3时，只有K1盈利，K2两份亏损。对于看跌期权：股价小于执行价格，多头盈利为一条斜率为-1的直线(因为股价增长，反而赚的少)，空头亏损为斜率1（股价增长，反而不怎么亏了）。所以当S<K1,斜率为0（-1+2+1），K1<S<K2 斜率为（2-1），依次类推。可以发现看涨看跌是一样的。

- 跨式组合：通过购买相同执行价格的看涨看跌期权，获得和蝶式差价相反的收益。（理解：无论股票上涨还是下降，总有一个多头内在价值上涨，而另一个为0）

(e) 执行价格为30美元的看涨期权价格为4.18美元，执行价格为30美元的看跌期权价格为1.44美元。因此，跨式组合的成本为4.18 + 1.44 = 5.62（美元）。忽略折现的影响，损益情况如表12-17所示。

表12-17 交易策略e的损益情况

股票价格 S_T	盈利
$S_T \leqslant 30$	$24.58 - S_T$
$S_T > 30$	$S_T - 35.62$

- (f) 期限为6个月，执行价格为35美元的看涨期权价格为1.85美元。期限为6个月，执行价格为25美元的看跌期权价格为0.28美元。因此，异价跨式组合的总成本为1.85 + 0.28 = 2.13（美元）。忽略折现的影响，损益的情况如表12-18所示。

表12-18 交易策略f的损益情况

股票价格 S_T	盈利
$S_T \leqslant 25$	$22.87 - S_T$
$25 < S_T < 35$	-2.13
$S_T \geqslant 35$	$S_T - 37.13$

- 买入执行价格为K2的看涨期权，卖出执行价格为K1的看跌期权，而且两者具有相同期限，K2 > K1，所得交易头寸是什么？当K2 = K1时，交易头寸是什么？

买入执行价格为K2的看涨期权，卖出执行价格为K1的看跌期权，两者具有相同的期限，且K2 > K1，所得的交易头寸是一个范围远期合约多头。收到的看跌期权的期权费与支付的看涨期权的期权费的差额很小，在此忽略不计。设标的资产价格为S，则在S < K1时，持有该交易头寸会发生损失K1 - S；在K1 < S < K2时，持有该交易头寸没有任何收益和损失；在S > K2时，持有该交易头寸会产生收益S - K2。范围远期合约将会在第17章有更深入的讨论。

买入执行价格为K2的看涨期权，卖出执行价格为K1的看跌期权，两者具有相同的期限，且K2 = K1，所得交易头寸是一个普通的远期合约多头，远期价格为K1（或K2）。收到的看跌期权的期权费与支付的看涨期权的期权费的差额很小，在此忽略不计。在S < K1（或K2）时，持有该交易头寸会发生损失K1 - S；在S > K1（或K2）时，持有该交易头寸会产生收益S - K1。

第13章

- 股票的当前价格为40美元，已知在1个月后股票的价格将可能变为42美元或38美元，无风险利率为每年8%（连续复利），执行价格为39美元、1个月期限的欧式看涨期权价值是多少？ ***（这两题，每题分别用无套利技术、风险中性定价技术、组合复制技术这三种方法求解）***

通过构造无风险投资组合，根据无套利原理算出结果。

或者根据风险中性假设计算。

答：（1）考虑下面这个组合：空头：一份看涨期权；多头：Δ单位股票。

如果股票价格上升到42美元，组合价值为$42\Delta - 3$。如果股票价格下降到38美元，组合价值为38Δ。当$42\Delta - 3 = 38\Delta$，即$\Delta = 0.75$时，两种情况下组合价值相等，此时1个月后的组合价值为28.5美元，当前的价值必定等于28.5美元的现值，即$28.5e^{-0.08\times1/12}\approx28.31$（美元）。这意味着：

$$-f + 40\Delta = 28.31$$

其中，f是看涨期权价格。由于$\Delta = 0.75$，看涨期权价格为$40\times0.75 - 28.31 = 1.69$（美元）。

（2）使用另一种方法，可以计算出风险中性世界中上升概率p，必定有下式成立：

$$42p + 38(1 - p) = 40e^{0.08\times1/12}$$

得到：

$$4p = 40e^{0.08\times1/12} - 38$$

即$p\approx0.5669$。此时期权价值等于按无风险利率折现后的期望收益：

$$(3\times0.5669 + 0\times0.4331)e^{-0.08\times1/12}\approx1.69\text{（美元）}$$

这与前一种方法的计算结果相同。

- 股票的当前价格为50美元，已知在6个月后这一股票的价格将可能变为45美元或55美元，无风险利率为10%（连续复利）。执行价格为50美元、6个月期限的欧式看跌期权的价值是多少？ ***（这两题，每题分别用无套利技术、风险中性定价技术、组合复制技术这三种方法求解）***

答：（1）考虑下面这个组合：空头：一份看跌期权；多头：Δ单位股票。

如果股票价格上升到55美元，组合价值为55Δ。如果股票价格下降到45美元，组合价值为45Δ - 5。当45Δ - 5 = 55Δ，即Δ = - 0.50时，两种情况下组合价值相等，此时6个月后的组合价值为 - 27.5美元，当前的价值必定等于 - 27.5美元的现值，即：

$-27.5e^{-0.1\times0.5}\approx -26.16$（美元）

这意味着：

$-f+50\Delta=-26.16$

其中，f是看跌期权价格。由于Δ = - 0.50，看跌期权价格为1.16美元。

（2）使用另一种方法，可以计算出风险中性世界中上升概率p，必定有下式成立：

$55p+45(1-p)=50e^{0.1\times0.5}$

得到：

$10p=50e^{0.1\times0.5}-45$

即p≈0.7564。此时期权价值等于按无风险利率折现后的期望收益：

$(0\times0.7564+5\times0.2436)e^{-0.1\times0.5}\approx1.16$（美元）

这与前一种方法计算出的结果相同。

- 股票的当前价格为100美元，在今后每6个月内，股票价格可能会或上涨10%或下跌10%，无风险利率为每年8%（连续复利），执行价格为100美元、1年期的欧式看涨期权的价格是多少？

TIP 风险中性

则：

$p=(e^{r\Delta t}-d)/(u-d)=(e^{0.08/2}-0.9)/(1.1-0.9)\approx0.7041$

股票价格变动如图13-3所示。从价格树的末端向回推，得到期权价值为9.61美元。期权价值也可直接通过方程式：

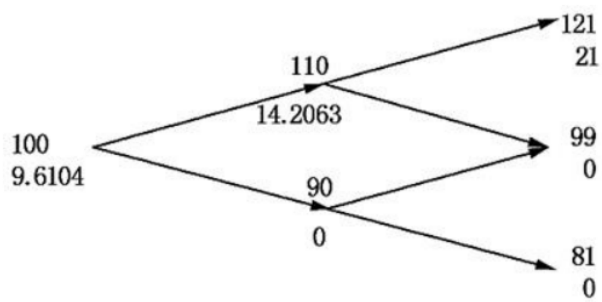


图13-3 二叉树图

$f=e^{-2r\Delta t}[p^2f_{uu}+2p(1-p)f_{ud}+(1-p)^2f_{dd}]$

得到：

$e^{-2\times0.08\times0.5}(0.7041^2\times21+2\times0.7041\times0.2959\times0+0.2959^2\times0)\approx9.61$（美元）

更进一步，执行价格为100美元，1年期的看跌期权价格是多少？验证所得结果满足期权平价关系式

答：图13-4给出了利用二叉树图为看跌期权定价的方法，得到期权价值为1.92美元。期权价值也可直接通过方程式得到：

$f=e^{-2r\Delta t}[p^2f_{uu}+2p（1-p）f_{ud}+（1-p）^2f_{dd}]$

$e^{-2\times0.5\times0.08}$ $(0.7041^2\times0+2\times0.7041\times0.2959\times1+0.2959^2\times19)\approx1.92$（美元）

股票价格加上看跌期权价格是100＋1.92＝101.92（美元）。执行价格的现值加上看涨期权价格是$100e^{-0.08}+9.61\approx101.92$（美元），二者相等，这就验证了看跌-看涨期权平价关系式。

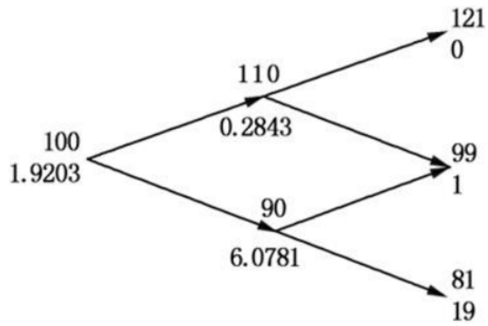


图13-4 二叉树图

- 某股票的当前价格为50美元，在今后6个月的每3个月时间内，股票价格都可能会或上涨6%，或下跌5%，无风险利率为每年5%（连续复利）。
    - 执行价格为51美元、6个月期限的欧式看涨期权价值为多少？

答：图13-5的树图描述了股票价格的变化行为。由题意可知，u＝1＋6%＝1.06；d＝1－5%＝0.95；r＝0.05；Δt＝0.25。向上趋势的风险中性概率p由下式给出：

$p=（e^{r\Delta t}-d）/（u-d）=（e^{0.05\times0.25}-0.95）/（1.06-0.95）\approx0.5689$

对于最高的末端节点（两个向上的复合），期权收益为56.18－51＝5.18（美元），而在其他情况中的收益为零。因此，期权的价值为：

$5.18\times0.5689^2\times e^{-0.05\times6/12}\approx1.635$（美元）

结果同样可以通过价格树计算出来。看涨期权的价值为图13-5中每个节点下面的数值。

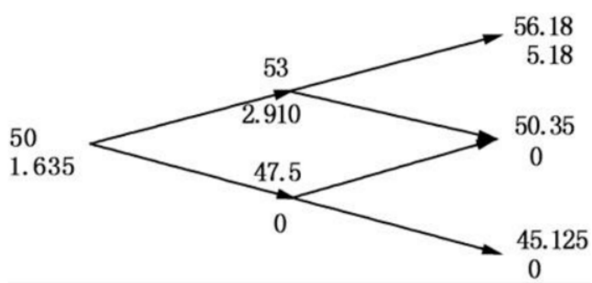


图13-5 二叉树图

- 执行价格为51美元，6个月欧式看跌期权的价值为多少？验证期权平价关系式的正确性。如果看跌期权为美式期权，在二叉树的某些节点上提前行使期权会是最优吗？

13 考虑习题12中的情形，执行价格为51美元，6个月欧式看跌期权的价值为多少？验证期权平价关系式的正确性。如果看跌期权为美式期权，在二叉树的某些节点上提前行使期权会是最优吗？

答：（1）图13-6是给看跌期权定价的价格树。如果处于中间的末端节点，将会得到的收益为51 - 50.35 = 0.65（美元）；如果处于最下面的末端节点，将会得到的收益为51 - 45.125 = 5.875（美元）。因此，期权的价值为：

$(0.65\times2\times0.5689\times0.4311+5.875\times0.4311^2)\ e^{-0.05\times6/12}\approx1.376$（美元）

结果同样可以通过后面的价格树计算出来。

（2）看跌期权加上股票价格的值为：

$1.376+50=51.376$（美元）

看涨期权加上执行价格的现值的值为：

$1.635+51e^{-0.05\times6/12}\approx51.376$（美元）

二者相等，从而验证了看跌-看涨期权平价关系式。

（3）为了检验是否值得提前执行该期权，应该比较从立即执行中得到的每个节点的收入计算出来的期权的值。在节点C，立即执行的收益为51 - 47.5 = 3.5（美元）。因为这个值大于2.8664（美元），期权应该在这个节点执行，而不在节点A或者节点B执行。也就是说，在二叉树的C节点上，提前执行是最优的。

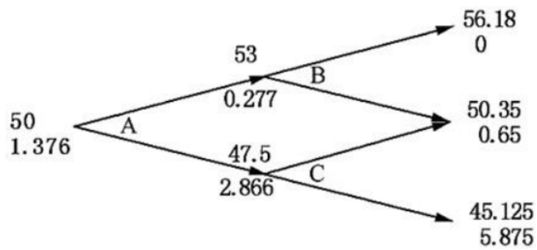


图13-6 二叉树图

第14章

- 基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否会总是高于平均收益？讨论这一问题。

任何交易策略都可能因为幸运而产生高于平均回报率的收益。关键的问题是根据风险进行相应调整时，交易策略的表现能否持续胜过市场。某一个交易策略可能做到这一点。

然而，当足够多的投资者知道这一策略并以该投资策略进行投资时，利润将会消失。小公司效应便是其中一例。当对风险进行适当的调整后，由小公司的股票组成的组

合收益率能够超过由大公司股票组成的组合收益率。关于这方面的论文早在20世纪80年代早期就有发表，并且促成了共同基金利用此现象盈利。但是，最新的一些文献和实证分析表明，这种现象已经开始消失。

- 变量X1和X2服从广义维纳过程，漂移率分别为μ1和μ2，方差率分别为σ_1^2 和σ_2^2 。在以下条件下，X1 + X2服从什么样的过程？
  - （a）X1和X2在任何小的时间区间内的变化相互无关。

答：（a）假设X_1和X_2的初始值分别等于a_1和a_2。在一个长度为T的时期后，X_1的概率分布为：

$$\phi\left(a_1+\mu_1 T,\sigma_1^2 T\right)$$

X_2的概率分布为：

$$\phi\left(a_2+\mu_2 T,\sigma_2^2 T\right)$$

从独立的正态分布变量的可加性可知，X_1+X_2的概率分布为：

$$\phi\left(a_1+\mu_1 T+a_2+\mu_2 T,\sigma_1^2 T+\sigma_2^2 T\right)$$

即

$$\phi\left[a_1+a_2+(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T\right]$$

这说明X_1+X_2服从广义维纳过程，漂移率为$\mu_1+\mu_2$，方差率为${\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2$。

（b）X1和X2在任何小的时间区间内变化的相关系数为ρ

(b)

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=a_1+a_2+(\mu_1+\mu_2)T$$

$$Var(X_1+X_2)=Cov(X_1+X_2,X_1+X_2)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T$$

由正态分布变量相加仍为正态分布可知，X_1+X_2概率分布为：

$$\phi\left[(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T\right]$$

因此，变量X_1+X_2服从广义维纳过程，漂移率为$\mu_1+\mu_2$，方差率为${\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2+2\rho{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2$。

注意，D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2COV(x,y),COV(x,y)=2r σ(x)σ(y)

- 考虑服从以下过程的变量S：

  $dS=\mu dt+\sigma dz$

  在最初的3年中，$\mu=2$，$\sigma=3$；在接下的3年中，$\mu=3$，$\sigma=4$。如果变量的初始值为5，则变量在第6年年末的概率分布是什么？

两个正态分布函数相加即可。

$$Var(1) = \sigma^2 * t = 27$$
$$Var(2) = \sigma^2 * t = 48$$
$$Var(1+2) = 75$$

$$\mu_1 * t + \mu_2 * t + \text{初值} = 20$$

The change in S during the first three years has the probability distribution

$$\varphi(2\times 3,\ 9\times 3) = \varphi(6,\ 27)$$

The change during the next three years has the probability distribution

$$\varphi(3\times 3,\ 16\times 3) = \varphi(9,\ 48)$$

The change during the six years is the sum of a variable with probability distribution $\varphi(6, 27)$ and a variable with probability distribution $\varphi(9, 48)$. The probability distribution of the change is therefore

$$\varphi(6+9, 27+48)$$

$$= \varphi(15, 75)$$

Since the initial value of the variable is 5, the probability distribution of the value of the variable at the end of year six is

$$\varphi(20, 75)$$

- 以下过程常被用来描述短期利率r随时间的变化：

  dr = a（b - r）dt + rcdz

  其中a、b、c为正常数，dz为维纳过程。描述这一过程的特性。

  tip 这就是一个服从广义维纳公式的式子。

  漂移率为a(b-r),波动率为c

  tip2

  注意：漂移率，期望收益率，方差率，波动率的计算

广义维纳过程 $dz = \varepsilon\sqrt{t}$

$dx = a\,dt + b\,dz$

漂移率 方差率

$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$

μ: 期望收益率 σ: 波动率

- *假定股票价格S服从几何布朗运动：

  $dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$

  其中μ为期望收益率，σ为波动率。变量S^n 服从什么过程？证明S^n 也服从几何布朗运动

  tip 因为S服从几何布朗运动，我的理解是几何布朗运动是伊藤过程的一种特殊情况（a和b对t求导为0，所以可以假设$G = S^n$ 服从伊藤过程）

  (接下来搓公式)

> $$G(S,t) = S^n$$
> $$\frac{\partial G}{\partial S} = nS^{n-1}$$
> $$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$
> $$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = n(n-1)S^{n-2}$$
>
> 获得导数后，继续计算
>
> $$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{2\partial S^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}bdz$$
> $$\text{导入上面的值，和} a = \mu S, b = \sigma S$$
> $$dG = (n\mu S^n + \frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)S^n)dt + n\sigma S^n dz$$
>
> 替换里面的S^n，得到$dG = (n\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)Gdt + n\sigma Gdz$
>
> 不难看出G也符合几何布朗运动的公式

这说明$G = S^n$服从几何布朗运动，其中预期回报率为：

$$\mu n+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2$$

其波动率为$n\sigma$。

股票价格S的预期回报率为μ，S_T的预期值为$S_0e^{\mu T}$。S_T^n的预期值为：

$$S_0^n e^{\left[\mu n+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right]T}$$

其中的预期值是按照期望收益率连续复利算的

- 假定x为在T时刻支付1美元的零息债券的收益率（按连续复利）。假定x服从以下随机过程：

  dx = a （x0 - x） dt + sxdz

  其中a、x0和s均为正常数，dz为维纳过程。债券价格服从的过程是什么？

tip 使用伊藤引理，首先要找到x和t为参数的函数。刚好，债券价格$K=e^{-x(T-t)}$

答：由债券价格B与收益率x的关系$B = e^{-x(T-t)}$可得，债券价格B服从的过程可从伊藤引理得出：

$$dB=\left[\frac{\partial B}{\partial x}a(x_0-x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}s^2x^2\right]dt+\frac{\partial B}{\partial x}sxdz$$

所求偏导数为：

$$\frac{\partial B}{\partial t}=xe^{-x(T-t)}=xB$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=-(T-t)e^{-x(T-t)}=-(T-t)B$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=(T-t)^2e^{-x(T-t)}=(T-t)^2B$$

因此，债券价格B服从的过程为：

$$dB=\left[-a(x_0-x)(T-t)+x+\frac{1}{2}s^2x^2(T-t)^2\right]Bdt-sx(T-t)Bdz$$

所以，债券价格B服从几何布朗运动。

- 假定股票的当前价格为50美元，其期望收益率和波动率分别为每年12%和每年30%。股票价格在2年后高于80美元的概率为多少？（提示：当lnST > ln80时，ST > 80。）

tip 由教材上的公式可知$lnS_T \sim \phi(lnS_0+(\mu-\sigma^2/2)T,\sigma^2T)$

答：变量$\ln S_T$服从正态分布，期望为$\ln S_0$ +（$\mu - \sigma^2/2$）T，标准差为$\sigma\sqrt{T}$

在本题中，$S_0 = 50$、$\mu = 0.12$、$T = 2$和$\sigma = 0.30$，因此$\ln S_T$的期望和标准差分别为ln50 +（$0.12 - 0.3^2/2$）2≈4.062和$0.3\times2^{1/2}$≈0.424。

同理可得，ln80≈4.382。$S_T > 80$的概率与$\ln S_T > 4.382$的概率相同。

即：

1 - N[（4.382 - 4.062）/0.424]≈1 - N（0.754）

其中N（x）表示服从标准正态分布（期望为0、标准差为1）的变量小于x的累积概率。从表中可以查出N（0.754）= 0.775，因此所求的概率为0.225。

第15章

- 什么是隐含波动率？如何计算？

前置知识：期权定价，比如$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(-d_2)$,其中$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$

在布莱克－斯科尔斯－默顿定价公式中，不能直接观察到的参数只有股票价格的波动率。在第15.4节中，我们已经讨论了如何由股票的历史价格来估计波动率。在实际中，交易员通常使用所谓的隐含波动率（implied volatility）。这一波动率是指由期权的市场价格所隐含的波动率。[⊖]

为了说明隐含波动率是如何计算的，假设一个不付股息股票的欧式看涨期权价格为1.875，而$S_0 = 21$，$K = 20$，$r = 0.1$和$T = 0.25$。隐含波动率是使得式（15-20）所给期权价格$c = 1.875$时对应的σ值。不幸的是，我们不能靠直接反解式（15-20）将σ表示成期权价格与其他变量S_0、K、r、T和c的函数，但是我们可以用迭代的方式求解所隐含的值σ。例如，开始时我们令$\sigma = 0.20$，对应这一波动率，期权价格c为1.76美元，这一价格太低。由于期权价格为σ的递增函数，我们需要一个较大的σ值。我们再令$\sigma = 0.30$，对应的期权价格c为2.10美元，此值高于市价，这意味着σ一定介于0.2～0.3。接下来，我们令$\sigma = 0.25$，此值所对应的期权价格仍太高，所以σ应该在0.20～0.25。这样继续下去，每次迭代都使σ所在的区间减半，因此我们可以计算出满足任何精确度的σ近似值。[⊖]在本例中，隐含波动率$\sigma = 0.235$，即每年23.5%。与二叉树结合，利用类似的方法可以计算美式期权的隐含波动率。

（也就是二分法，利用单调性）

> 一种简单的计算隐含波动率的方法为：假设有两个波动率，一个波动率太高（即期权价格远高于市场价格），一个波动率太低（即期权价格远低于市场价格）。将等于两者均值的波动率代入布莱克-斯科尔斯-默顿模型，可得到一对新的偏高波动率与偏低波动率。因此，我们只需获得最初的过高波动率及过低波动率，并重复上述步骤不断平分隐含波动率的取值范围，并逐渐收敛到正确值。实际中可利用其他更加精确的方法，比如Newton-Raphson方法来计算隐含波动率。

- 股票的当前价格为40美元，假定其期望收益率为15%，波动率为25%。在两年内的股票收益率（连续复利）的概率分布是什么？

Tip 只需要记住$ln(\frac{S_t}{S_0}) \sim \phi((\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2T)$

$X \sim ln(\frac{S_t}{S_0})/T$

答：在本题中，$\mu=0.15$和$\sigma=0.25$。根据公式：

$$x \sim \phi\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

可得2年期连续复利的回报率的概率分布是：

$$\phi\left(0.15-\frac{0.25^2}{2}, \frac{0.25^2}{2}\right)$$

即：

ø（0.11875，0.03125）

预期的价值回报率为每年11.875%，标准差为每年17.7%$\left(=\sqrt{0.03125}\right)$

- 某股票价格服从几何布朗运动，其中期望收益率为16%，波动率为35%，股票的当前价格为38美元。

  （a）一份该股票上具有执行价格为40美元，期限为6个月的欧式看涨期权被行使的概率为多少？

  （b）一份该股票上具有同样执行价格及期限的欧式看跌期权被行使的概率为多少？

答：（a）所求概率为6个月后股票价格超过40美元的概率。假设6个月后股票的价格是S_T，则有：

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln 38+\left(0.16-\frac{0.35^2}{2}\right)0.5, 0.35^2\times 0.5\right]$$

即：

$$\ln S_T \sim \varphi\left(3.687, 0.247^2\right)$$

因为ln40≈3.689，则要求的概率为：

$$1-N\left(\frac{3.689-3.687}{0.247}\right)\approx 1-N(0.008)$$

从正态分布表可以得出N（0.008）=0.5032，结果要求的概率是0.4968。

(b) 对于看跌期权，所求概率为6个月后股票价格低于40美元的概率，同法可得值为：1 - 0.4968 = 0.5032。

第17章

- 一种外币的当前价格为1.5美元，国内与国外的无风险利率分别为5%与9%。计算在下面两种情况下一个6个月期执行价格为1.40美元的看涨期权下限，假定期权分

  别是：（a）欧式；（b）美式

答：（a）欧式期权的价格下限：

$$S_0 e^{-r_f T} - Ke^{-rT} = 1.5e^{-0.09\times 0.5} - 1.4e^{-0.05\times 0.5} \approx 0.069(\text{美元})$$

（b）美式期权的价格下限：

$S_0 - K = 0.10$（美元）

- 某股指的当前值为250，股指的连续股息收益率为每年4%，无风险利率为每年6%。这一股指上3个月期，执行价格为245的欧式看涨期权的目前价格为10美元。该股指为期3个月，执行价格为245的看跌期权价值是多少？

答：在本题中，$S_0 = 250$，$q = 0.04$，$r = 0.06$，$T = 0.25$，$K = 245$和$c = 10$。利用看跌 - 看涨期权平价关系式：

$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT}$

或者：

$p = c + Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}$

代入得：

$p = 10 + 245e^{-0.25\times 0.06} - 250e^{-0.25\times 0.04} \approx 3.84$

即，题中看跌期权的价格为3.84美元。

- 假定某个投资组合的价值为6000万美元，标普500的当前值为1200，
    - 如果投资组合的收益反映了股指收益，为了保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元，投资组合管理者应购买什么样的期权？

      答：如果证券组合的价值反映出了指数的价值，那么当证券组合的价值下降10%的时候，预测指数也将会到下降10%。因此，当证券组合的价值下降到5400万美元时，指数的价值预计将会变成1080。这说明需要购买执行价格为1080的看跌期权，头寸价值应为：

      60000000/1200 = 50000（美元）

      由于每一个期权合约价值的乘数为100，因此，应该购买500份合约。

    - 假定投资组合的β为2.0，无风险利率为每年5%，投资组合与股指的股息收益率为每年3%。为了保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元，管理者应购买什么样的期权？

      > 当证券组合的价值下降到5400万美元，该组合的持有者将会有10%的资本损失。考虑股利收益后，一年中的损失为7%，比无风险利率要低12%。由资本资产定价模型：
      >
      > 证券组合的超额收益率 = β×市场组合的超额收益率
      >
      > 因此，当组合提供一个比无风险利率低12%的收益率（即 - 7%）时，市场组合的预期收益率比无风险利率要低6%(因为投资组合的β是2)。可假设指数的β值为1.0，所以指数的预期收益率（包括股利收益）应该等于市场组合的预期收益率。因此指数的预期收益率为每年 - 1%。因为指数每年提供3%的股息收益率，则指数的预期变化为 - 4%。此时，当证券组合的

> 价值为5400万美元（下降10%），预期指数的价值为0.96×1200 = 1152。因此，应该购买执行价格为1152美元、1年期的欧式看跌期权。
>
> 相比于习题16中的证券组合，本题中的组合对市场条件的变化的敏感度是前者的两倍，因此所需的期权份数是习题16中求得的期权份数的2倍，即应当购买一份价值100000美元（或1000份合约）的期权。
>
> 为了验证答案是否正确，考虑当证券组合的价值下降20%变成4800万美元时，包括股息在内的收益率为 - 17%，这低于无风险利率22%。预测到的指数收益率提供低于无风险利率11%的回报率（包括股息），也即 - 6%的回报率。因此，预计指数下降9%到1092。看跌期权得到的报酬为（1152 - 1092）×100000 = 6000000（美元），即600万美元。4800万美元加上600万美元即得5400万美元，可见，实现了风险对冲。

第18章

- 考虑一个2个月期限的期货看涨期权，执行价格为40，无风险利率为每年10%，当前期货价格为47。在以下两种情况下，期货期权的下限为多少？

  （a）欧式期权；（b）美式期权。

> 答：欧式期权的下限为：
>
> $(F_0 - K)\ e^{-rT} = (47 - 40)\ e^{-0.1\times2/12} \approx 6.88$
>
> 美式期权的下限为：
>
> $F_0 - K = 7$

- 某一期货的当前价格为60，波动率为30%。无风险利率为每年8%。利用两步二叉树来估计在期货上6个月期，执行价格为60的欧式看涨期权价格。如果看涨期权为美式期权，期权是否应被提前行使？

原理：

上一节里的分析表明，当二叉树上的步长为 Δt 时，为了与波动率相吻合，我们取

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{13-15}$$

和

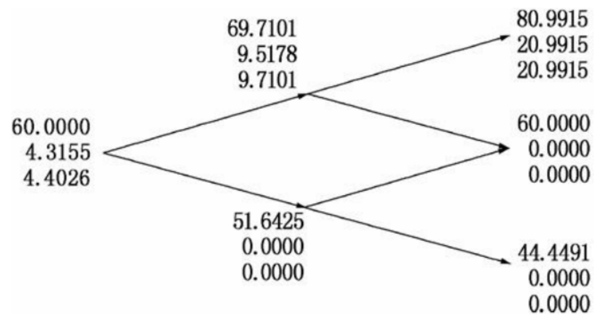
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{13-16}$$

而且由式（13-6）可得

$$p = \frac{a - d}{u - d} \tag{13-17}$$

其中

$$a = e^{r\Delta t} \tag{13-18}$$

> 答：本题中：
>
> $$u = e^{0.3\times\sqrt{0.25}} \approx 1.1618$$
>
> d = 1/u≈0.8607
>
> p = （1 - 0.8607）/（1.1618 - 0.8607）≈0.4626
>
> 如图18-2所示，每个节点上中间的数字是欧式期权的价格，下面的数字是美式期权的价格。树图显示的欧式期权的价格为4.3155，美式期权的价格为4.4026，因此，美式期权应该被提前执行（在第一步向上的节点处提前执行）。
>
> 
>
>
> 25:00
>
> 图18-2 欧式和美式看涨期权树图
>
> 其中，欧式期权价格是按照风险中性定理算出来的。美式期权价格是按照立即执行的收益（F-K）来算的

第19章

- 24 某金融机构持有以下有关英镑的场外交易期权组合。

期权类型	头寸	期权 Delta	期权 Gamma	期权 Vega
看涨	-1000	0.50	2.2	1.8
看涨	-500	0.80	0.6	0.2
看跌	-2000	-0.40	1.3	0.7
看涨	-500	0.70	1.8	1.4

  交易所里交易的一种期权的delta为0.6，gamma为1.5，vega为0.8：

  (a) 什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使交易组合为gamma与delta中性?

  (b) 什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为vega与delta中性?

  这类题就是通过三元一次方程组求解。注意使用标的资产gamma和vega都为0的特性

  25 考虑习题24中的情形，假定第2个交易所交易期权的delta为0.1，gamma为0.5，vega为0.6，进行什么样的交易可使得交易组合delta、gamma与vega均为中性。

  答：设w_1为第一种交易期权的头寸，w_2为第二种交易期权的头寸。得到：

  $6000 = 1.5w_1 + 0.5w_2$

  $4000 = 0.8w_1 + 0.6w_2$

  得出方程组的解：$w_1 = 3200$，$w_2 = 2400$。

  资产组合delta参数为：

  $-450 + 3200\times0.6 + 2400\times0.1 = 1710$

  因此应持有3200份第一种可交易期权多头，2400份第二种可交易期权多头，1710英镑空头才能保证资产组合达到delta、gamma和vega中性。

第22章

- 假定一个由价值为100000美元的资产A与价值为100000美元的资产B所组成的头寸，且两项资产的日波动率均为1%，之间的相关系数为0.3。假设收益率均服从正态分布，计算交易组合5天持有期的99%VaR与ES。

这个就是算概率论里面的置信度

$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 2.6/10000$

答：资产A和资产B的日波动率均为1%，则投资于资产A和资产B的日标准差均为1000美元。所以投资组合的日方差为：

$1000^2 + 1000^2 + 2\times0.3\times1000\times1000 = 2600000$

投资组合的标准差为方差的平方根，即1612.45美元。

所以，5天的标准差为：

$1612.45\times5^{1/2}\approx3605.55$（美元）

从N（x）的分布表中可以查到，N^{-1}（0.01）≈2.326。

这意味着一个服从正态分布变量低于其均值超过2.326个标准差的概率为1%。因此5天99%的风险价值（VaR）为2.326×3605.55≈8387（美元）。5天99%的ES为

$$\frac{3605.55\times e^{-2.326^2/2}}{\sqrt{2\pi}\times0.01}\approx 9617(\text{美元})$$

当亏损分布服从均值μ、标准差σ的正态分布时，置信度为X的ES可以由下式表示

$$ES = \mu + \sigma\frac{e^{-Y^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1-X)} \tag{22-1}$$

其中Y是标准正态分布的第X个百分位数（即在均值为0、标准差为1的正态分布上，以概率$1-X$所超过的点）。这说明，与VaR一样，当假设μ为0时，ES与σ成比例。

这个公式说明，在上面微软交易组合中，10天99%置信度的ES为1 687 000美元（$X=0.99$，$Y=2.326$）；AT&T交易组合10天99%置信度的ES为421 400美元；两家股票合在一起的交易组合10天99%置信度的ES为1 856 100美元。