随机过程

信息与通信工程学院

练习一：泊松分布

题目：

上午8:30点开始银行某柜台开始存取款工作，此时有一大堆人排队等候存取款业务，设每人存取款时间独立且都服从均值为10分钟的指数分布，记：

- A为事件“到上午9:30点钟为止恰有10人完成存取款”
- B为事件“到上午9:00为止恰有4人完成存取款”

求P(A)，P(B|A)。

练习一：泊松分布

解： 以上午8:30点作为0时刻，以1小时为单位时间，以N(t)表示[0 t]中完成取款的人数，则{ N(t)，t ≥ 0 }是 λ = 6 的泊松过程，则两个事件可记为：A = { N(1)=10 }，B = { N(0.5) = 4 }。

（1）

$$P[A]=\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=10\\ \lambda=6\\ t=1}}=\frac{6^{10}e^{-6}}{10!}$$

（2）

$$P[B|A]=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P\{N(0.5)=4,\ N(1)=10\}}{P\{N(1)=10\}}=\frac{P\{N(0.5)=4,\ N(1)-N(0.5)=10-4\}}{P\{N(1)=10\}}$$

$$=\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=4\\ \lambda=6\\ t=0.5}}\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=6\\ \lambda=6\\ t=0.5}}\Bigg/\left.\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right|_{\substack{k=10\\ \lambda=6\\ t=1}}=\frac{\dfrac{3^4e^{-3}}{4!}\ \dfrac{3^6e^{-3}}{6!}}{\dfrac{6^{10}e^{-6}}{10!}}$$

练习二：题目

题目：

顾客以泊松过程到达某商店，速率为4人/小时，已知商店上午9:00开门，

（1）求到9:30时顾客人数不多于1人，到11:30时顾客人数不少于1人的概率

（2）求第2位顾客在10点前来到的概率？

练习二：解答

解：（1）

$$P[N(0.5)\le 1, N(2.5)\ge 1] = P[N(0.5)=0, N(2.5)-N(0.5)\ge 1]$$

$$+P[N(0.5)=1, N(2.5)-N(0.5)\ge 0]$$

$$=e^{-0.5\lambda}(1-e^{-2\lambda})+0.5\lambda e^{-0.5\lambda}\times 1$$

$$=e^{-2}(3-e^{-8})$$

（2）

$$P[S_2\le 1]=P[N(1)\ge 2]=1-P[N(1)=0]-P[N(1)=1]$$

$$=1-e^{-4}-4e^{-4}$$

$$=1-5e^{-4}$$

练习三：题目

设到达火车站的顾客数服从参数为λ的泊松过程，火车t时刻离开车站，求在[0 t]到达火车站的所有顾客平均等待时间。

练习三：解答

解：

每个顾客的到达时刻为Si，在[0 t]内到达的顾客数为N(t)，则所有顾客的总等待时间为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)$$

则：

$$E\left[S(t)\middle|N(t)=n\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\middle|N(t)=n\right\}$$

$$=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}S_i\middle|N(t)=n\right\}$$

练习三：解答

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n} & 0<t_1<t_2<\ldots<t_n\le t\\ 0 & others\end{cases}$$

到达时间的条件分布

S_1，S_2，…，S_n

[0, t] 均匀分布独立随机变量

U_1，U_2，…，U_n 的顺序统计量

$U_{(1)}$，$U_{(2)}$，…，$U_{(n)}$分布相同

$$f_{U_{(1)}U_{(2)}\ldots U_{(n)}}(u_1,u_2,\ldots u_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n} & 0<u_1<u_2<\ldots<u_n\le t\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

练习三：解答

$$E\left[S(t)\middle|N(t)=n\right]=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}S_i\middle|N(t)=n\right\}=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\middle|N(t)=n\right\}$$

$$=nt-E\left\{\sum_{i=1}^{n}U_i\middle|N(t)=n\right\}=\frac{nt}{2}$$

$$E\left[S(t)\right]=E\left\{E\left[S(t)\middle|N(t)=n\right]\right\}=E\left\{\frac{N(t)\,t}{2}\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{P\left[N(t)=n\right]\frac{nt}{2}\right\}=\frac{t}{2}\times\lambda t$$

$$=\frac{\lambda t^2}{2}$$

练习四：题目

设{ X(t), t ≥ 0 } 是具有跳跃强度

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$$

的非齐次泊松过程(ω≠0)，求EX(t)，DX(t)。

练习四：解答

解：

$$
\begin{aligned}
EX(t) = DX(t) &= m_X(t) \\
&= \int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega s)ds \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]
\end{aligned}
$$

练习五：题目

题目：某设备的使用年限是10年，在前5年内平均2.5年需要维修一次，在后5年平均2年需要维修一次。求平均使用期内只维修过一次的概率。

练习五：解答

解： 因维修次数与时间有关，因此是非齐次泊松过程。

强度函数为：

$$\lambda(t)=\begin{cases}\mathbf{1/2.5},\ \mathbf{0\le t\le 5},\\ \mathbf{1/2},\ \mathbf{5<t\le 10},\end{cases}$$

$$m_N(10)=\int_0^{10}\lambda(t)dt=\int_0^5 0.4dt+\int_5^{10}0.5dt=4.5$$

$$P[N(s+t)-N(s)=k]$$

$$=\frac{[m_N(s+t)-m_N(s)]^k}{k\ !}e^{-[m_N(s+t)-m_N(s)]}$$

$$\boxed{P[N(10)-N(0)=1]=4.5e^{-4.5}\approx 0.05}$$

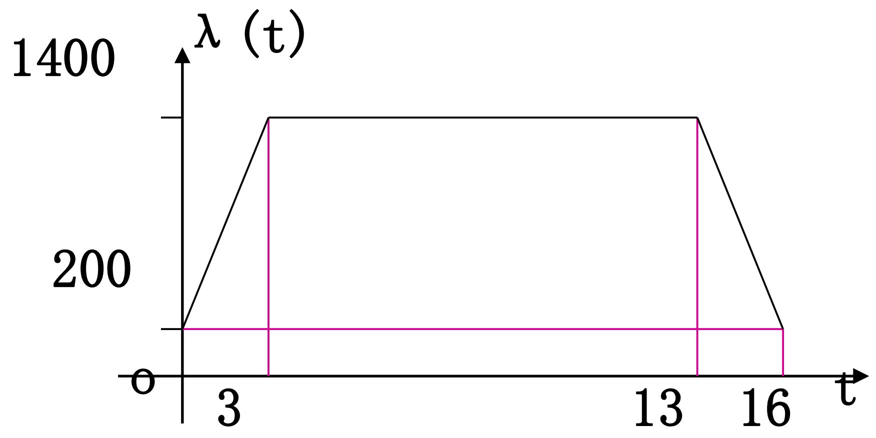
练习六：题目

题目： 某路公共汽车从早晨5时到晚上9时有车发出，乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/小时计算；5时至8时乘客平均到达率线性增加，8时到达率为1400人/小时；8时至18时保持平均到达率不变；18时到21时到达率线性下降，到21时为200人/小时，假定乘客数在不重叠的区间内是相互独立的，求12时至14时有2000人乘车的概率，并求这两个小时内来站乘车人数的数学期望。

练习六：解答

解： 设 t=0 为早晨5时，t=16为晚上9时，则：

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, 0\le t\le 3\\ 1400 \quad , \quad 3<t\le 13\\ 1400-400(t-13), 13<t\le 16\end{cases}$$



练习六：解答

12时至14时为$t\in[7,9]$，在$[0,t]$内到达的乘车人数$X(t)$服从参数为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程。

12时至14时乘车人数的数学期望为

$$\boxed{\begin{aligned}E[X(9)-X(7)]&=m_X(9)-m_X(7)\\&=\int_7^9\lambda(s)ds=\int_7^9 1400ds=2800\end{aligned}}$$

12时至14时有2000人来站乘车的概率为

$$\boxed{P\{X(9)-X(7)=2000\}=e^{-2800}\frac{(2800)^{2000}}{2000!}}$$

练习七：题目

P77，CH3 练习题3.14

3.14 假定某股票在一段时间中的交易次数为参数 λ 的泊松过程 $\{N(t), t\geq 0\}$。记第k次交易后股票价格相对前次的变化为 Y_k，各 Y_k 彼此独立同分布且与 $N(t)$ 独立。已知该股票的初始价格为 x_0，试问： t时刻该股票的交易价格 $X(t)$ 及其特征函数。

练习七：解答

解：（1）t 时刻的股票交易价格为

$$X(t)=x_0+\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k \quad , \quad t\geq 0$$

（2）X(t)的分布

设Yk的分布为：$F_Y(y)$

密度函数为：$f_Y(y)$

特征函数为：$\phi_Y(v)$

则：

$$E[e^{jvX(t)} \mid N(t)=n] = E\left[\exp\left(jv\left(x_0+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)\right)\right]$$

$$= e^{jvx_0}\prod_{i=1}^{n}E(e^{jvY_i}) = e^{jvx_0}\phi_Y^n(v)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_{X(t)}(v) &= E[e^{jvx_0}\phi_Y^{N(t)}(v)] = e^{jvx_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\phi_Y^n(v)\\ &= e^{jvx_0}e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t\phi_Y(v)]^n}{n!} = e^{jvx_0}e^{-\lambda t}e^{\lambda t\phi_Y(v)}\\ &= e^{jvx_0}e^{\lambda t[\phi_Y(v)-1]}\end{aligned}}$$

从特征函数可得**X(t)**的分布

练习九：题目

某校车候车区时段为[0,T），候车人流服从参数为λ的泊松过程N(t)。在T时刻校车发车，带走全部乘客。若在$t \in (0, T)$增加一班校车将当时候车的乘客全部带走，为了使所有乘客在候车区的总等候时间的平均时间最小，求t的最佳选择，说明原因。

练习九：解答

设在[0，t]时间段内第i个乘客到达时间为Si，到达的总乘客数为N(t)，在[t，T]时间段内第j个乘客到达时间为Rj，到达的总乘客数为N(T) – N(t)，则**总的等候时间**为：

$$W=\sum_{i=0}^{N(t)}\left(t-S_i\right)+\sum_{i=0}^{N(T-t)}\left(T-t-R_i\right)$$

总等候时间的平均值为： $E\left[W\right]$

到达时间的条件分布
S_1，S_2，…，S_n

⟺

[0, t] 均匀分布独立随机变量
U_1，U_2，…，U_n 的顺序统计量
$U_{(1)}$，$U_{(2)}$，…，$U_{(n)}$分布相同

到达时间的条件分布
R_1，R_2，…，R_k

⟺

[0, T-t] 均匀分布独立随机变量
V_1，V_2，…，V_k 的顺序统计量
$V_{(1)}$，$V_{(2)}$，…，$V_{(k)}$分布相同

$$
\begin{aligned}
E[W] &= E\left[\sum_{i=0}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=0}^{N(T-t)}(T-t-R_i)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{N(t)}(t-S_i)\right]+E\left[\sum_{i=0}^{N(T-t)}(T-t-R_i)\right] \\
&= E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{n}(t-S_i)\,|\,N(t)=n\right]\right\}+E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{k}(T-t-R_i)\,|\,N(T-t)=k\right]\right\} \\
&= E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{n}(t-U_i)\,|\,N(t)=n\right]\right\}+E\left\{E\left[\sum_{i=0}^{k}(T-t-V_i)\,|\,N(T-t)=k\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$E[W] = E\left\{\sum_{i=0}^{n} E\left(t - U_i\right) \mid N(t) = n\right\} + E\left\{\sum_{i=0}^{k} E\left(T - t - V_i\right) \mid N(T-t) = k\right\}$$

$$= E\left(\frac{t * N(t)}{2}\right) + E\left(\frac{(T-t) * N(T-t)}{2}\right)$$

$$= \frac{t * \lambda t}{2} + \frac{(T-t) * \lambda(T-t)}{2}$$

$$= \lambda\left(t^2 - Tt + 0.5T^2\right)$$

$$\frac{\partial E[W]}{\partial t} = \lambda\left(2t - T\right) = 0$$

$$\boxed{t = \frac{T}{2}}$$

解毕！

练习十：题目

设$N_A(t)$与$N_B(t)$分别是参数为λ_A与λ_B的

齐次泊松过程，且相互独立。求：

（1）$N_A(S_2^{(B)})$的数学期望；

（2）$S_{N_A(t)}^{(B)}$的特征函数，$t \geq 0$。

（其中$S_n^{(B)}$表示$N_B(t)$过程的第 n 次事件发生时刻）。

练习十：解答

（1） $N_A\left(S_2^{(B)}\right)$ 的数学期望

解：

$$
\begin{aligned}
E\left[N_A\left(S_2^{(B)}\right)\right] &= E\left[E\left[N_A\left(S_2^{(B)}\right) \mid S_2^{(B)}=t\right]\right] \\
&= E\left[E\left[N_A(t) \mid S_2^{(B)}=t\right]\right] \\
&= E\left[\lambda_A S_2^{(B)}\right] \\
&= E\left[\lambda_A\left(T_1^{(B)}+T_2^{(B)}\right)\right] \\
&= \frac{2\lambda_A}{\lambda_B}
\end{aligned}
$$

（2）$S_{N_A(t)}^{(B)}$ 的特征函数

$$\phi_{S_{N_A(t)}^{(B)}}(v)=E\left[\exp\left(jvS_{N_A(t)}^{(B)}\right)\right]=E\left[E\left[\exp\left(jvS_n^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]$$

$$=E\left[E\left[\exp\left(jv\sum_{i=1}^{n}T_i^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]=E\left[E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(jvT_i^{(B)}\right)\mid N_A(t)=n\right]\right]$$

$$=E\left[\left[\prod_{i=1}^{n}E\left\{\exp\left(jvT_i^{(B)}\right)\right\}\right]\mid N_A(t)=n\right]=E\left[\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^n\mid N_A(t)=n\right]$$

$$=E\left[\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^{N_A(t)}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B-jv}\right)^k\left(\frac{\left(\lambda_At\right)^k e^{-\lambda_At}}{k!}\right)$$

$$=e^{-\lambda_At}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_B\lambda_At}{\lambda_B-jv}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda_At}e^{\frac{\lambda_B\lambda_At}{\lambda_B-jv}}$$

$$=\exp\left(\frac{jv\lambda_At}{\lambda_B-jv}\right)$$

解毕！