2.7.1 线性相关与线性无关

线性组合

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

用矩阵表示：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

解为：

$\boldsymbol{x_1=-1, x_2=2, x_3=1}$

再换个角度：用列向量表示

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{即} \; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

实际表示为：
$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性组合

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

用列向量表示

其中一个解为:
$x_1=1, x_2=4, x_3=2$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}$$

用列向量表示

$$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-5, \\ x_3=3, \\ x_4=0. \end{cases}$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = -1, \end{cases}$$

用行向量表示： **(解为 $x_1=2, x_2=1$)**

$x_1(1,1)+x_2(1,-3)=2(1,1)+(1,-3)=(3,-1)$

定义2.7.1 (向量的线性组合,线性表示) 给定n维向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 和同维向量β，如果存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使

$$\beta=k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m,$$

则称向量β是向量组A的一个线性组合或称向量β可由向量组A线性表示 .

例2.7.1 零向量是任何向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的线性组合 . 因为

$$\theta = 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \dots + 0\cdot\alpha_m \ .$$

例2.7.2 对于向量组 $\beta=(2,-5,3,0)^T$, $\varepsilon_1=(1,0,0,0)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)^T$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)^T$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)^T$. 因为

$$\beta = 2\varepsilon_1 + (-5)\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4 \ ,$$

所以β 是$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 的线性组合.

一般地，设

$$e_1=(1,0,\dots,0)^T, \ e_2=(0,1,0,\dots,0)^T, \ \dots, \ e_n=(0,\dots,0,1)^T \ ,$$

那么任何n维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$都可表示成

$$\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n \ ,$$

即任何n维向量都可由$e_1, e_2, \dots, e_n$线性表示. 向量组$e_1, e_2, \dots, e_n$也称为n维基本向量组 .

例2.7.3 设$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$. 试将 $\beta=(2,3,1)^T$表示成向量组α_1, α_2, α_3 的线性组合 .

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$， 即

$$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3\\x_3\end{pmatrix},$$

于是得到关于x_1, x_2, x_3 的线性方程组:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ \quad\ \ x_2+x_3=3,\\ \qquad\quad\ x_3=1.\end{cases}$$

这是一个标准的阶梯形线性方程组，它有唯一的一组解 $x_1= -1$, $x_2=2$, $x_3=1$. 因此得到

$$\beta= -\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 .$$

例2.7.4 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(3,-3,6)^T$. 试将 $\boldsymbol{\beta}$表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合 .

解　设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ ，则得线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=3, \\ x_1-x_2=-3, \\ x_2+x_3=6. \end{cases}$$

第二个方程加上第三个方程减去第三个方程后即得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=3, \\ x_2+x_3=6, \end{cases}$$

让x_3为自由未知量 . 任取 $x_3=t$，得方程组的一般解为

$$x_1=3-t\,,\quad x_2=6-t\,,\quad x_3=t\,,$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=(3-t)\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(6-t)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+t\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 t\,.$$

若取 t=2，则得 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

定义2.7.2 (等价向量组) 设有两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 及B: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，若$A$组中的每一个向量都可由向量组$B$线性表示，则称向量组$A$可由向量组$B$线性表示．若两个向量组$A$，$B$可以相互线性表示，则称这两个向量组等价．

向量组A：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

向量组B：

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B线性表示A组向量：

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \alpha_2 = \beta_2 + \beta_3$$

A线性表示B组向量：

$$\beta_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \beta_2 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \beta_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$$

向量组之间的等价具有一般等价关系的3个性质：

(1) 自反性：任一向量组与它自身等价；

(2) 对称性：若向量组A与B等价，则向量组B也与A等价；

(3) 传递性：若向量组A与B等价且向量组B与C等价，则A与C也等价．

线性相关性

考虑向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{pmatrix},$ 可知：$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}=3\alpha_1-2\alpha_3.$

说明$\boldsymbol{\alpha}_2$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_3$来线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_2$在向量组中是多余的.
我们称有多余向量的向量组是线性相关的，即$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$是线性相关的.

再考虑向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\4\end{pmatrix},$ 经过分析$\beta_1, \beta_2, \beta_3$都不能用其它两个向量线性表示.

说明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$哪个向量对于向量组来说都是必不可少的.
我们称没有多余向量，各个向量都是独立向量的向量组是线性无关的，或线性独立的，即$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$是线性相关的.

如何发现向量组中有多余向量？

因为我们不知道到底哪个向量可以用其它向量来表示，所以不能一个个测试方程

$$\alpha_j=x_1\alpha_1+\ldots+x_{j-1}\alpha_{j-1}+x_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+x_n\alpha_n$$

是否有解？

我们干脆将各个向量等同看待，看如下方程

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_j\alpha_j+\ldots+k_n\alpha_n=\theta$$

是否有非零解？

我们有如下的关系：

$k_1\alpha_1+\ldots+k_j\alpha_j+\ldots+k_n\alpha_n=\theta$有非零解 (假设$k_j\neq 0$)

$$\Leftrightarrow$$

$\alpha_j=x_1\alpha_1+\ldots+x_{j-1}\alpha_{j-1}+x_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+x_n\alpha_n \Leftrightarrow$ 有多余向量

我们有：$k_1\alpha_1+\ldots+k_j\alpha_j+\ldots+k_n\alpha_n=\theta$有非零解 $\Leftrightarrow$向量组线性相关.

有多余向量

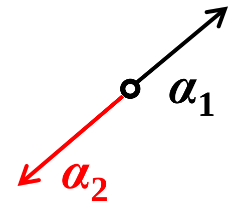
线性相关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$ 有非零组合系数$k_1, k_2, \ldots, k_m$.

线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=\theta$只有$k_1=k_2=\ldots=k_m=0$.

都是独立向量

线性相关的几何意义

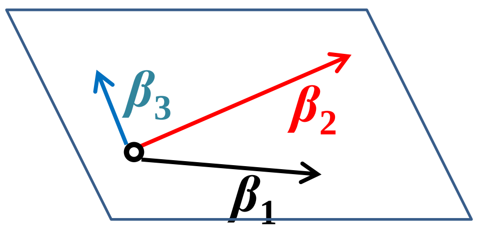
α_1 , α_2 线性相关，表示α_1 , α_2向量共线



进一步，面积 $\det(\alpha_1 , \alpha_2)=0$

多余向量

β_1 , β_2 , β_3 线性相关，表示β_1 , β_2 , β_3 向量共面



进一步，体积 $\det(\beta_1 , \beta_2 , \beta_3)=0$

定义2.7.3 (线性相关与线性无关) 给一向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$， 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2 , \dots , k_m$， 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m= \theta,$$

则称向量组A是线性相关的. 如果只有当$k_1= k_2= \dots =k_m=0$时，上述等式才成立，则称这组向量是线性无关的 .

注　由定义可知，向量组A或线性相关，或线性无关，两者必居其一. 而向量组的线性相关与否跟这些向量的次序无关，也跟这个向量组是行向量组还是列向量组都没有关系.

线性相关、线性无关的基本性质：

(1) 一个向量线性相关的充要条件是 $\alpha=\theta$.

(2) 包含零向量的向量组必线性无关.

(3) 如果一向量组的部分向量组线性相关，则该向量组也线性相关.

(4) 如果一个向量组线性无关，则其中任一个部分向量组也线性无关.

(3) (4)相互等价

说明： (1) α线性相关$\Leftrightarrow k\alpha=\theta, k\neq 0 \Leftrightarrow \alpha=\theta$，等价地　α线性无关$\Leftrightarrow \alpha\neq\theta$.

(2) 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m , \theta \}$ 有线性相关的关系

$$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_m+1\cdot\theta = \theta .$$

(3) 向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m \}$中的部分向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_r \}$线性相关，则有关系：$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r=\theta$， $k_1,k_2,\dots, k_r$不全为0.

于是：$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r+0\cdot\alpha_{r+1}+\dots+0\cdot\alpha_m=\theta$， $k_1,k_2,\dots, k_r,0,\dots,0$不全为0.

例2.7.5 证明：n维基本向量组$e_1,e_2,\ldots,e_n$是线性无关的.

证明　设有$k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使 $k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\theta$. 即

$$k_1(1,0,\ldots,0)+k_2(0,1,\ldots,0)+\ldots+k_n(0,0,\ldots,1)=(0,0,\ldots,0)\ ,$$

从而 $$(k_1,k_2,\ldots,k_n)=(0,0,\ldots,0)\ .$$

故有 $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$，所以$e_1,e_2,\ldots,e_n$线性无关 .

例2.7.6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，试证向量组

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

证明　设有k_1, k_2, k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$ ， 即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\theta\ ,$$

从而 $$(k_1+k_3)\,\alpha_1+(k_1+k_2)\,\alpha_2+(k_2+k_3)\,\alpha_3=\theta\ .$$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故关系式

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \end{cases}$$

成立，解之得 $k_1=k_2=k_3=0$，故向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关 .

例2.7.7 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，又设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_3,$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关.

证明 设有k_1, k_2, k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$，即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=\theta,$$

从而 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+(2k_1+k_3)\alpha_3=\theta$.

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故有关系式

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2=0, \\ 2k_1+k_3=0, \end{cases}$$

解之，有无穷多非零解，取 $k_1=1, k_2=1, k_3=-2$，故有 $1\beta_1+1\beta_2-2\beta_3=\theta$. 故向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关 .

***例2.7.6、例2.7.7 的进一步说明**

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\theta,\text{即求}C\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\theta.$$

例2.7.6

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\text{只有零解}.$$

例2.7.7

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix},\text{有非零解}k_1=1,k_2=1,k_3=-2.$$

定理2.7.1 向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ $(m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是，向量组A中至少有一个向量可由其余 m-1个向量线性表示 .

证明　必要性. 设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性相关，则必有一组不全为0的数$k_1, k_2, \dots, k_m$ (不妨设$k_1\neq 0$) 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \theta,$$

从而

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即α_1可由$\alpha_2, \dots, \alpha_m$线性表示 .

充分性. 设向量组A中有某个向量可由其余m-1个向量线性表示，不妨设α_m可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示，即有$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$，使

$$\alpha_m = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1}.$$

于是

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = \theta .$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, -1 这$m$个数不全为0，所以向量组$A$线性相关.

注　α_1, α_2相关$\Leftrightarrow$ α_1, α_2成比例(其中一个如α_2是另一个的倍数$\alpha_2=k\alpha_1$)

相关向量组内可能有向量是独立的，但一定有多余的，如$\{e_1, e_2, e_2\}$

定理2.7.2 设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关，而向量组B: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，则向量β必可由向量组A线性表示，并且表示式是唯一的.

证明　由于向量组B: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$线性相关，所以存在不全为0的$r$+1个数 $k_1, k_2, \dots, k_r, k$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = \theta .$$

如果 k=0，则 $k_1, k_2, \dots, k_r$必不全为0. 于是

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = \theta .$$

这与向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关矛盾，所以$k \neq 0$. 于是有

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\alpha_r .$$

即β可由向量组A线性表示.

下面再证唯一性. 设β的两种表示式为

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_r\alpha_r ,$$

$$\beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \dots + \mu_r\alpha_r .$$

两式相减得

$$(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2-\mu_2)\alpha_2 + \dots + (\lambda_r-\mu_r)\alpha_r = \theta .$$

由向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关知：$\lambda_i-\mu_i=0$ (i=1,2,…,r)，即 $\lambda_i=\mu_i$. 所以向量β 的表示式唯一 .

例2.7.8 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$线性无关的充分必要条件是$\beta$不可能由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表示.

说明 通过证明：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$线性相关$\Leftrightarrow$ β可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表示, 再由定理2.7.2与定理2.7.1可得结论.

例2.7.9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ $(m\geq 2)$ 线性相关，而$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$线性无关，则

(1) α_1可由$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示 .

(2) α_m不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示 .

证明 (1) 因为$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$线性无关，所以部分向量组$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$也线性无关. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性相关，所以$\alpha_1$可由$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示.

(2) 假设α_m能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示， 由(1)的结果，$\alpha_1$可由$\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示，于是得到$\alpha_m$能由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$线性表示，与假设矛盾. 从而结论成立.