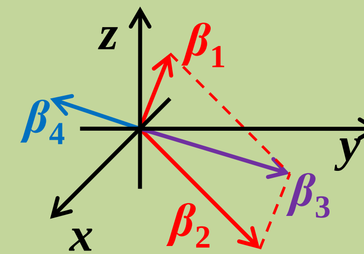
6.2 线性空间的基、维数与坐标

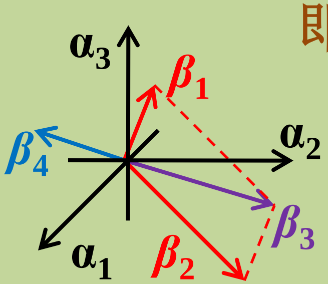
线性空间向量的数量化

为了表示三维空间中的向量，需要建立空间坐标系，于是空间中的向量可以用有序三元数组(x,y,z)来表示



为了表示各种抽象线性空间中的向量，也需建立某种坐标系，在此坐标系下，各种向量可以用有序的多元数组$(x_1, x_2, \dots, x_n)$来表示 .

分析三维空间利用坐标系来将向量如β与三元数组如(x_1, y_1, z_1)对应的特点，x_1, y_1, z_1本质是向量在三个坐标轴上的分量，

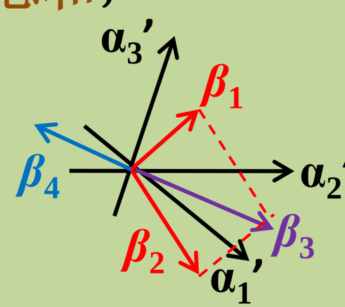


即x轴方向的x_1倍大小，y轴方向的y_1倍大小，z轴方向的z_1倍大小，

换种说法，若x,y,z轴方向的单位向量为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，

则β向量为α_1的x_1倍，α_2的y_1倍，α_3的z_1倍的总和，

即　$\beta = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2 + z_1\alpha_3$



我们也可以不用直角坐标系，改为建立仿射坐标系，于是向量的表示仍然利用坐标向量$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$，

即 $\beta = x_1'\alpha_1' + y_1'\alpha_2' + z_1'\alpha_3'$，然后用$(x_1', y_1', z_1')$表示向量$\beta$

建立坐标系，本质上是在向量集合中(线性空间)寻找一组极大无关的向量组

基与坐标的定义

定义6.2.1 (线性相关与线性无关) 已知$V(K)$是线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$是$V(K)$的一组向量，如果存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得$\sum k_i \alpha_i = 0$，则称该向量组线性相关，否则称为线性无关 .

易知：参见Ch2（ P_{59}~P_{60}基本结论(1)~(4)，P_{61}定理2.7.1）

(1) 由一个非零向量组成的向量组是线性无关的；

(2) 若一个向量组中含有零元，则此向量组必线性相关；

(3) 当$m\geqslant 2$时，向量组线性相关的充要条件是，其中至少有一个向量可以由该向量组中其余的向量线性表出；

(4) 若某向量组线性无关,则它的任意一部分组成的向量组(叫子向量组)也线性无关；若某向量组中有一个子向量组线性相关,则该向量组也线性相关 .

定义6.2.2 (维数) 设V是数域K上的线性空间，

(1)如果在V中可以找到任意多个线性无关的向量,则称V是无限维线性空间；

(2)如果存在有限多个向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$，$n \geqslant 1$满足：

1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关

2) V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性表出 .

则称V是有限维线性空间，称$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是$V$的一组基(或基底)，$\alpha_i$叫第$i$个基向量，基向量的个数$n$称为线性空间$V$的维数，记为$\dim(V)=n$，并称$V$是$n$维线性空间 .

* 线性空间V中的不同基所含的向量个数相同.

说明 V中两组基：

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \text{ 和 } \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

设$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, 显然两组基可以相互表示，即存在矩阵 $P\in \mathbf{R}^{n\times m}$, $Q\in \mathbf{R}^{m\times n}$ 使得

$$B=AP \quad , \quad A=BQ\ .$$

故 $A=BQ=APQ$, $B=AP=BQP$, 即 $PQ=E_n$, $QP=E_m$.

由矩阵乘积的秩关系有：

$$n=r(E_n)=r(PQ)\le r(P)\le m \quad , \quad m=r(E_m)=r(QP)\le r(Q)\le n\ .$$

即 $m=n$.

例6.2.1 设$K^{m\times n}$是例6.1.1给出的线性空间，由于$K^{m\times n}$ 中任一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 都可表示为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij},$$

其中 E_{ij} 表示在第 i 行，第 j 列交叉处的元素为1，其余元素均为 0的 $m\times n$的矩阵(称矩阵单位)，容易证得 $\{ E_{ij} : i=1,2, \dots ,m; j=1,2, \dots ,n \}$ 是线性无关的，所以$K^{m\times n}$是 $m\cdot n$ 维的 .

例6.2.2 设有例6.1.2中的线性空间 $P_n[x]$，注意到向量组$1, x, x^2, \dots , x^n$ 是线性无关的(易证)，且 $P_n[x]$ 中任一向量都可以表示为

$$p(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+ \dots + a_n\cdot x^n \ .$$

因此， $P_n[x]$ 是 $n+1$ 维的 .

例6.2.3 易见：齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系是其解空间的一组基.

例6.2.4 设C是复数域，若将其看做复线性空间，那么它是1 维的；若将其看做实线性空间，则它是2维的，因为 $\{1, i\}$ 是一组基 .

例6.2.5 用 $C_{[a, b]}$表示闭区间$[a,b]$上所有连续函数的集合，因无法找到有限个连续函数作为它的基，所以它是无限维的线性空间 .

定理6.2.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是n维线性空间V的一组基，对任意的$\alpha \in V$，α可以唯一地由这一组基线性表出 .

证明：设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n$,

$\alpha=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\dots+y_n\alpha_n$.

两式相减

$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\dots+(x_n-y_n)\alpha_n=0 .$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的线性无关性可知系数为0，即得

$x_1=y_1, x_2=y_2, \dots, x_n=y_n$， 即系数唯一 .

通过式子： $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n$,

向量 α 与有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 一一对应，于是向量可用数组表示 .

定义6.2.3 (坐标) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，对任意的$\alpha \in V$，若有一组有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n$使得α可表示为

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n ,$$

这组有序数就称为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$下的坐标，记为

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 或 \quad x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T .$$

基与坐标的关系可以简洁地用矩阵形式化表示：

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的关系也常用矩阵表示：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例6.2.6 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，则每个基向量可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_i = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + 0\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1\boldsymbol{\alpha}_i + 0\,\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \ldots + 0\boldsymbol{\alpha}_n$， 即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的坐标为 $(0,\ldots, 0,1,0,\ldots,0)$.由此我们可知，线性空间定义 (定义6.1.3) 中最后一条性质的必要性.

例6.2.7 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，则$n$个向量

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\ldots+a_{n1}\alpha_n,$$
$$\beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{n2}\alpha_n, \qquad (6.1)$$
$$\ldots\ldots \ \ldots\ldots \ \ldots\ldots$$
$$\beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n$$

是V的一组基的充要条件是，由它们的系数组成的行列式

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0 .$$

证明 由题意可知，只需证$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$线性无关即可. 设有一组常数$k_1, k_2, \ldots, k_n$使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_n\beta_n=0 . \qquad (6.2)$$

将式 (6.1) 代入 (6.2) 得

$$(k_1a_{11}+k_2a_{12}+\ldots+k_na_{1n})\alpha_1+(k_1a_{21}+k_2a_{22}+\ldots+k_na_{2n})\alpha_2 +\ldots+(k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\ldots+k_na_{nn})\alpha_n=0 .$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的线性无关性，上式中$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的系数都为零，即

$$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}=0, \\ k_1a_{21}+k_2a_{22}+\cdots+k_na_{2n}=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\cdots+k_na_{nn}=0. \end{cases}$$

而该方程组有唯一零解的充要条件是系数行列式$D=|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0$.

证法二: 等价$\Leftrightarrow(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)D,(\beta_1,\ldots,\beta_n)B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\Leftrightarrow DB=E\Leftrightarrow|D|\neq 0$

上面的例子实际上给出了从一个已知基构造另外基的方法：
新的基

$$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\,P,\quad (P\text{可逆})$$

P为从基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$的过渡矩阵

例6.2.8 在线性空间 $P_n[x]$ 中，多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

在基 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 下的坐标是 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$，若取另一组基

$$1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n,$$

则多项式$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 按泰勒公式展开为

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

因此，$p(x)$ 在新的一组基 $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ 下的坐标是

$$\left(p(a), p'(a), \frac{p''(a)}{2!}, \cdots, \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\right).$$

基变换与坐标变换

称P为从基底
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$到基底
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$的过渡矩阵

若有两组基 $\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots , \beta_n$,有关系:

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n) P ,$$

向量α用两组基表示为:

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+ \dots +x_n\alpha_n , \alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+ \dots +y_n\beta_n ,$$

则有关系:

$$\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是不同基下的坐标的关系为:

$$P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\text{或者}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

重要式子:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

定理6.2.2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 是n维线性空间V的两组基，并且

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P\ ,$$

基底变换公式

若V中任意元素α在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 和 $(y_1,y_2,\dots,y_n)$，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\text{或者}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

坐标变换公式

证明思路：由

$$\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

利用坐标的唯一性可得

$$P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\text{或者}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

基底变换公式：$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P$ ，$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}$

从基底$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 到基底 $\beta_1,\dots,\beta_n$的过渡矩阵：P

坐标变换公式：$y=P^{-1}x$ ，$x=Py$

数域上的线性空间$V(K)$与K^n的对应关系

线性空间	V	$\Leftrightarrow$	K^n
	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$	$\Leftrightarrow$	$e_1, e_2, \ldots, e_n$
向量	α	$\Leftrightarrow$	x
关系1	$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_n=\theta$	$\Leftrightarrow$	$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_r\beta_n=\theta$
关系2	$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_n$	$\Leftrightarrow$	$x=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_r\beta_n$
关系3	$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关	$\Leftrightarrow$	$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 线性无关
不同基与坐标	$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)P$	$\Leftrightarrow$	$y=P^{-1}x$ (坐标关系)

空间$\mathbf{R}^n$上的自然基:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

例6.2.9 设R^4中的向量α在基底$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$, $\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$， 求α在另一组基 $\beta_1=(2,1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,2,2)^T$, $\beta_3=(-2,1,1,2)^T$, $\beta_4=(1,3,1,2)^T$下的坐标 .

解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)A,$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)B.$$

于是 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A^{-1}B$,

其中 $P=A^{-1}B$ 为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵.

由坐标变换公式，α在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的新坐标是

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

计算可得

$$P^{-1}=B^{-1}A=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

故得 $x_1'=x_2-x_3+x_4$, $x_2'=-x_1+x_2$,

$x_3'=x_4$, $x_4'=x_1+x_3-x_4$.

例6.2.9 设R^4中的向量α在基底$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$, $\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，求α在另一组基 $\beta_1=(2,1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,2,2)^T$, $\beta_3=(-2,1,1,2)^T$, $\beta_4=(1,3,1,2)^T$下的坐标 .

解二：

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Ax,$$

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=Bx'.$$

可得*Ax=Bx'*，于是

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$