9 月 7 日作业分析

作业：习题一：2(2),3(1)~(5),5(1)(3),6(1)(3),4(1)(3)(4),7(1)~(4)(6)

5(3),4(3) 直接或者经过变换成为范德蒙德行列式，很多同学没有使用，可直接用

6(1) 很多同学计算代数余子式 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 再计算结果，有的使用余子式没有考虑符号，$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$ 可组成一个 4 阶行列式计算，更加简单更不容易算错，如下

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\1&3&-2&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\overset{c_4+c_3}{=}\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\-5&1&3&-1\\1&3&-2&0\\1&-5&3&0\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=}\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\-2&2&2&0\\1&3&-2&0\\1&-5&3&0\end{vmatrix}=24.$$

6(3) 基本能计算出来，但是有些同学用了行或列的 1/x 或 1/y 倍加到某行或列来消去某些元素，没有考虑到 x,y 为 0 时的情况，可如下计算

$$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{\underset{c_3-c_4}{=}}\begin{vmatrix}x&1&0&1\\x&1-x&0&1\\0&1&y&1\\0&1&y&1-y\end{vmatrix}\overset{c_1\div x}{\underset{c_3\div y}{=}}xy\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&1-x&0&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1-y\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2-c_1\\c_4-c_1}}{\underset{c_4-c_3}{=}}xy\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-x&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&-y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

4(4) 有的同学用 $c_{i+1}+(1/\lambda)c_i$, $i=1,2,\dots,n-1$ 来简化行列式，有些甚至用 λc_2+c_1, $\lambda c_3+c_2,\dots$简化，都存在一个 $\lambda=0$ 的问题，可设法消去 λ 来避免 $1/\lambda$ 倍分母为零的问题，可如下

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}\overset{c_i+\lambda c_{i+1}}{\underset{i=n-1,n-2,\dots,1}{=}}\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i}&\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^{n-1-i}&\sum_{i=0}^{n-2}a_i\lambda^{n-2-i}&\cdots&\lambda^2+a_1\lambda+a_2&\lambda+a_1\end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i},a_0=1.$$

7(4) 计算得较好，但是可以思路更广一些，可如下简化计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}\overset{r_i-r_2}{\underset{i=3,4,\dots,n}{=}}\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\0&-2&-2&\cdots&-2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=(n-2)!\times(-2).$$