第7章　内积空间 简介

线性空间中，也可以引入内积，从而可以更精细地确定向量之间的关系。

一般线性空间的向量关系：相关与无关

内积空间的向量关系：　　增加了向量的夹角，度量了无关的程度，
并引入了正交这种极易处理的向量关系

1、内积空间

定义抽象的内积（内积最根本的性质）：

⑴ $(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$；　　⑵ $(\alpha_1+\alpha_2, \beta)=(\alpha_1, \beta)+(\alpha_2, \beta)$；

⑶ $(\lambda\alpha, \beta)=\lambda(\alpha, \beta)$；　　⑷ $(\alpha, \alpha)\geq 0$，$(\alpha, \alpha)=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$，

由此引出：

长度：$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha, \alpha)}$；　夹角：$\theta=\arccos((\alpha, \beta)/(\|\alpha\| \cdot \|\beta\|))$

正交：$(\alpha, \beta)=0$

定义7.1.1 (实内积与欧氏空间).

设V是实数域**R**上的线性空间，对V中的任意两个向量 α, β，由某种规则确定了一个实数，记为 (α, β) ，并满足下列条件：

(1) 对称性：$(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$ ；

(2) 可加性：$(\alpha_1+\alpha_2, \beta) =(\alpha_1, \beta) +(\alpha_2, \beta)$ ；

(3) 齐次性：$(\lambda\alpha, \beta) =\lambda (\alpha, \beta)$，对任意的$\lambda\in \mathbf{R}$；

(4) 非负性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当$\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha) =0$，

则实数(α, β) 就称为向量 α, β 的实内积，有时简称内积 .

定义了实内积的实数域**R**上的线性空间 为实内积空间，并称有限维实内积空间为欧几里得 (Euclid) 空间，简称欧氏空间 .

实内积的性质：

(1) $(\alpha, \beta+\gamma)= (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$ ；

(2) $(\alpha, \lambda\beta) =\lambda (\alpha, \beta)$；

(3) $(\alpha, 0) =0=(0, \beta)$ ；

(4) $$(\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j(\alpha_i, \beta_j) = (a_1, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} (\alpha_1,\beta_1) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m,\beta_1) & \cdots & (\alpha_m,\beta_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

例7.1.1. 在$\mathbf{R}^3$中定义实内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta = |\alpha|\,|\beta| \cos\theta = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 ,$$

则$\mathbf{R}^3$构成一个欧几里得空间 .

例7.1.2. 闭区间 $[a,b]$ $(b>a)$ 上的实连续函数的全体按通常意义的加法和数乘运算构成无穷维线性空间 $C_{[a,b]}$，对 $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$，定义内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x .$$

容易验证上述内积满足实内积定义的要求，则 $C_{[a,b]}$ 就成为实内积空间 .

定义7.1.2 (长度、范数).

设V是实内积空间，$\alpha\in V$，则称 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量的长度或范数 .

定义7.1.3 (夹角).

设V是实内积空间，有非零向量$\alpha, \beta\in V$，则它们的夹角θ定义为

$$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}, \qquad 0\le\theta\le\pi.$$

定义7.1.4 (正交).

设有向量$\alpha, \beta\in V$，若$(\alpha, \beta)=0$，则称α与β正交（垂直），记为 $\alpha\perp\beta$.

定理7.1.1. $\alpha\perp\beta \iff \|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

定义7.1.5(正交向量组).

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是实内积空间中的一组非零向量，若它们两两正交，则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是一个正交向量组 .

定理7.1.2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是一个正交向量组，则它们线性无关 .

2、内积的坐标表示

用坐标来表示内积

若$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n,$

则$(\alpha,\beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i, \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i,) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_j)x_i y_j = X^T AY,$

其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$

称*A*为基底 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的度量矩阵，也称为格拉姆（Gram）矩阵 .

定理7.2.1. 度量矩阵是对称正定矩阵 .

定理7.2.2. 欧氏空间中两组不同基底下的度量矩阵是合同的 .

3、欧氏空间的标准正交基

定义7.2.1(标准正交基).

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间的一组基，如果在这组基下的度量矩阵是单位矩阵，则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是标准正交基 .

度量矩阵为单位矩阵 E，即

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \ j=1,2,\ldots,n, \ i \neq j,$$

这表示：基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的向量 α_i 都是单位向量，且两两正交 .

普通的基底可以构造出标准正交基：

用施密特（**Schmidt**）正交化方法 . 类似于$\mathbf{P}_{120}$的定理**4.4.2**

定理7.2.3. 任意基底可构造出标准正交基 .

定理7.2.4. 欧氏空间必有正交基和标准正交基 .

标准正交基下内积公式简单：$(\alpha, \beta) = X^T Y$，$(\alpha_i, \alpha) = x_i$.

4、欧氏空间中的正交变换

正交变换：$(T(x), T(y))=(x,y)$，是旋转变换的扩展，保持向量夹角不变

定义7.2.2(正交变换).

设V是一个欧氏空间，T是V上的线性变换，如果对于任何向量$x,y\in V$，变换T恒能使下式成立：

$$(T(x), T(y))=(x,y),$$

则称T是V上的正交变换.

定理7.2.5. 设T是欧氏空间V上的线性变换，下面写出的任一条件都是使T成为正交变换的充要条件：

(1) T使向量长度保持不变，即对任何$x\in V$，有 $(T(x), T(x))=(x,x)$；

(2) 任一组标准正交基经T变换后的像仍是一组标准正交基;

(3) T在任一组标准正交基下的矩阵A是正交矩阵 .

5、欧几里得空间的同构

同构：数据和作用对应相同，即可相互翻译的两种数学描述。

同构是等价关系

定义7.3.1(线性空间的同构).

数域K上的两个线性空间V和W称为同构，如果由V到W有一个一一映射 f 满足以下两个条件：

⑴ $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$；

⑵ $f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

这里$\alpha,\beta\in V$, $k\in K$，这样的映射 f 称为同构映射 .

定义7.3.2(欧几里得空间的同构).

欧氏空间V和W称为同构的，如果由V到W有一个一一映射 f 满足以下三个条件：

⑴ $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$；

⑵ $f(k\alpha)=kf(\alpha)$；

⑶ $(f(\alpha), f(\beta)) = (\alpha,\beta)$.

这里$\alpha,\beta\in V$, $k\in K$，这样的映射 f 称为V到W的同构映射 .

- K上n维线性空间V同构于K^n .
- K上n维欧氏空间V同构于K^n .

数域K上的线性空间V与K^n的对应关系：同构

基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下

线性空间	V	$\longleftrightarrow$	K^n
向量	ξ	$\longleftrightarrow$	x
基向量	$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$	$\longleftrightarrow$	$e_1,e_2,\cdots,e_n$
关系1	$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$	$\longleftrightarrow$	$k_1x_1+\cdots+k_rx_r=\theta$
关系2	$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$	$\longleftrightarrow$	$y=k_1x_1+\cdots+k_rx_r$
关系3	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$无关	$\longleftrightarrow$	$x_1,x_2,\cdots,x_r$无关

欧氏V与K^n的对应关系：同构

基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下，度量矩阵$A$

关系4	(α,β)	$\longleftrightarrow$	x^TAy