软件工程统计方法

随机变量及其分布（一）

陈振宇

南京大学软件学院

Email:zychen@software.nju.edu.cn

Homepage:software.nju.edu.cn/zychen

内容提纲

- 统计学导论
- 描述统计
- 概率计算基础
- 随机变量及其分布
- 统计量及其抽样分布
- 参数估计
- 参数假设检验
- 非参数假设检验
- 方差分析
- 回归分析

1 本节内容

- 随机变量
- 分布函数
- 数学期望
- 方差
- 常用分布
- 二维随机向量

2 随机变量

引入随机变量是研究随机现象统计规律性的需要. 为了便于数学推理和计算, 有必要将随机试验的结果数量化, 使得可以用高等数学课程中的理论与方法来研究随机试验, 研究和分析其结果的规律性, 因此, 随机变量是研究随机试验的重要而有效的工具。

Definition 1 (随机变量) 设E为随机试验, 它的样本空间为$\Omega = \{e\}$. 若对于每一个样本点$e \in \Omega$, 都有唯一确定的实数$X(e)$与之对应, 则称$X(e)$是一个随机变量, 可简记为X。

随机变量常用使用大写字母X, Y, Z等表示。

概 率 分 布

Example 1 将一枚硬币抛掷3次, 我们感兴趣的是三次投掷中, 出现H的总次数, 而对H,T出现的次序不关心. 以X记三次投掷中出现H的总次数, 那么对于样本空间$S=\{e\}$中的每一个样本点e, X都有一个值与之对应, 即有

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
X值	3	2	2	2	1	1	1	0

我们注意到, 随机变量的取值随试验的结果而定, 而试验的各个结果出现有一定的概率, 因而随机变量的取值有一定的概率. 如, 当且仅当事件$A=\{HHT,HTH,THH\}$发生时有$\{x=2\}$, 而且$P(A)=\frac{3}{8}$,则$P\{x=2\}=\frac{3}{8}$。

将3个球随机地放入三个框中，如何描述随机事件和定义随机变量？

概 率 分 布

Definition 2 (概率分布) 若L是一个实数集合, 将X在L上取值写成$\{X \in L\}$,它表示事件$A = \{e|X(e) \in L\}$, 即A是由S中使得$X(e) \in L$的所有样本点e所组成的事件, 此时有$P\{X \in L\} = P(A) = P\{e|X(e) \in L\}$. $P\{X \in L\}$称为随机变量X的概率分布。

随机变量的分类:

- 离散型随机变量, 连续型随机变量, 混合型随机变量。
- 一元随机变量, 多元随机变量(向量)。

3 分布函数

Definition 3 (分布函数) 对于随机变量X和任意实数x，称函数$F(x) = P(X \le x)$为随机变量X 的分布函数. 它在点x处的值是事件$\{X \le x\}$的概率。

分布函数$F(x)$的性质:

1. 归一性：$0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$, 且

$$F(-\infty) = lim_{x\to-\infty}F(x) = 0, F(+\infty) = lim_{x\to+\infty}F(x) = 1$$

2. 单调不减性：若$x_1 \le x_2$, 则有$F(x_1) \le F(x_2)$;
3. 右连续性：对任意$x_0 \in R$, 有

$$F(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} F(x)$$

离散随机变量

Definition 4 (离散型随机变量) 一个随机变量的一切可能的取值为有限个或可列无穷多个, 则称它为离散型随机变量。

Definition 5 (概率分布(分布律)) X是一个离散型随机变量, 其一切可能值为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 且$X$取各值时的概率为

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$$

其中$P(x_k) \geq 0, (k = 1, 2, \cdots)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Definition 6 有了离散随机变量的分布律, 可以通过下式求得分布函数:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

显然这时$F(x)$是一个跳跃函数。我们可以用分布律或分布函数来描述离散型随机变量。

例子

Example 2 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四组信号灯, 每组信号灯以$\frac{1}{2}$的概率允许或禁止汽车通过. 以X表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯的组数(设各组信号灯的工作是相互独立的), 求X的分布律。

解: 以p表示每组信号灯禁止汽车通过的概率, 易知X的分布律为

X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

以$p=\frac{1}{2}$代入得

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

试写出相应的分布函数和画出相应的分布函数图.

4 数学期望

问题的提出: 在一些实际问题中, 我们需要了解随机变量的分布函数外, 更关心的是随机变量的某些特征。

例如:

- 在评定某地区粮食产量的水平时, 最关心的是平均产量;
- 在检查一批棉花的质量时, 既需要注意纤维的平均长度, 又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度;
- 考察南京市区居民的家庭收入情况, 我们既知家庭的年平均收入, 又要研究贫富之间的差异程度。

离散随机变量数学期望

设离散型随机变量X的概率分布为$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots$, 如果无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数的和为随机变量X的数学期望(或均值), 记作$E(X)$或EX, 即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{1}$$

数学期望

Example 3 甲乙射击比赛, 各射击*100*次, 其中甲乙的成绩如下:

环数	*8*	*9*	*10*	环数	*8*	*9*	*10*
甲次数	*10*	*80*	*10*	乙次数	*20*	*65*	*15*

计算他们的平均环数.

甲平均环数计算:

$$\frac{8*10+9*80+10*10}{100}=8*\frac{10}{100}+9*\frac{80}{100}+10*\frac{10}{100}=9$$

乙平均环数计算:

$$\frac{8*20+9*65+10*15}{100}=8*\frac{20}{100}+9*\frac{65}{100}+10*\frac{15}{100}=8.95$$

所以甲的成绩好于乙的成绩.

对于甲来说$\frac{10}{100},\frac{80}{100},\frac{10}{100}$分别为8, 9, 10环的命中概率; 对于乙来说$\frac{20}{100},\frac{65}{100},\frac{15}{100}$分别为8, 9, 10环的命中概率。因此我们通过概率得到数学期望的概念。

数学期望的性质

数学期望的性质:

1. 对于常数C, 有$E(C)=C$;
2. 对于常数C及随机变量X, 有$E(CX)=CE(X)$;
3. 设X和Y为两个随机变量, 则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;
4. 设随机变量X和Y独立, 则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

后两个性质是关于二维随机变量，我们在稍后证明。

Theorem 1 设$Y=g(X)$是随机变量X的函数, g是连续函数. 若X为离散型随机变量, 分布律为$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots,n,\cdots$, 如果级数$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛, 则

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

例如$Y=X+2, Y=X^2$等等。

5 方差

设有一批灯泡寿命为: 一半约950小时, 另一半约1050小时, 平均寿命为1000小时; 另一批灯泡寿命为: 一半约1300小时, 另一半约700小时, 平均寿命为1000小时.
单从平均寿命这一指标无法判断, 进一步考察灯泡寿命X与均值1000小时的偏离程度.

Definition 7 (方差) 设X是一随机变量, 如果数学期望$E[X-E(X)]^2$存在, 则称之为X的方差, 记作$Var(X)$或$D(X)$. $\sqrt{Var(X)}$或$\sqrt{D(X)}$称为X 的标准差.

方差的计算式是: $Var(X)=EX^2-(EX)^2$.

方差的性质:

1. 设C是常数，则$Var(C)$=0;
2. 设X是随机变量, C是常数, 则$Var(X+C)=Var(X)$, $Var(CX)=C^2Var(X)$.
3. 设随机变量X与Y相互独立, 则$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$.

第三个性质关于二维变量，我们在稍后证明。

6 伯努利分布

伯努利分布（Bernoulli distribution），又名两点分布或0-1分布，是一个离散型概率分布，为纪念瑞士科学家雅各布·伯努利而命名。伯努利试验是只有两种可能结果的单次随机试验。

Definition 8 (伯努利分布) 对于一个随机试验, 如果它的样本空间只包含两个元素, 即$\Omega = \{e_1, e_2\}$, 我们总能在Ω上定义一个服从伯努利分布(又称*0-1*分布)的随机变量. 它的概率分布为:

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = q, p + q = 1$$

来描述这个随机试验的结果。

例如, 对新生婴儿的性别进行登记, 检查产品的质量是否合格, 某车间的电力消耗是否超过负荷以及前面多次讨论过的"抛硬币"试验等都可以用伯努利分布的随机变量来描述. 伯努利分布是经常遇到的一种分布。

数字特征:

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$
$$E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

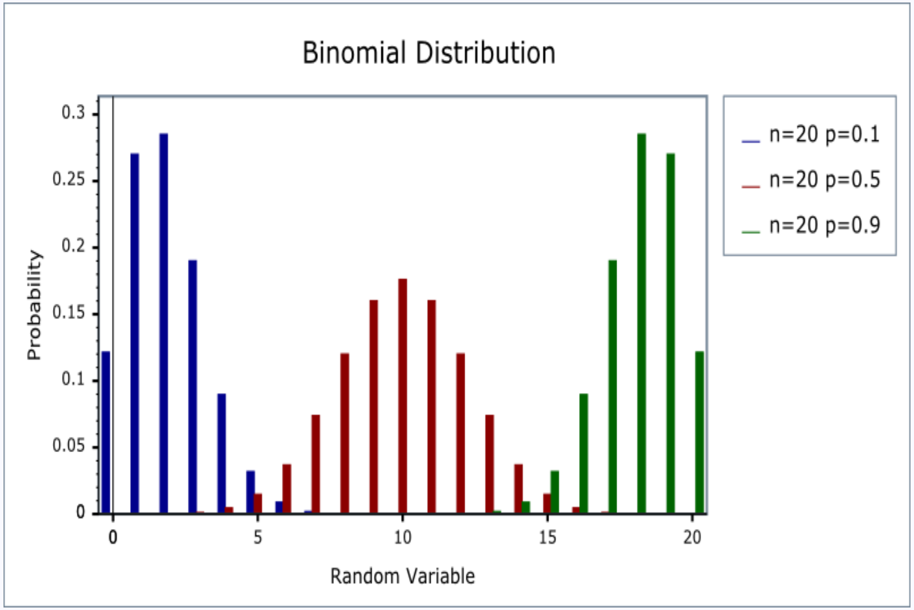
7 二项分布

二项分布（Binomial Distribution）是n个独立的伯努利试验中成功的次数的离散概率分布。

Definition 9 设事件A在任一次试验中出现的概率为p, 则在n重伯努利试验中事件A 发生的次数k的取值为$1, \cdots, n$且它的概率分布为:

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 1, 2, \cdots, n)$$

则称X服从参数为n, p的二项分布,记为$X \sim \mathbb{B}(n, p)$.



二项分布

数字特征: $X=\sum_{i=1}^n X_i$, 其中X_i服从0-1分布.

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=np$$

$$Var(X)=Var(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n Var(X_i)=np(1-p)$$

Example 4 按规定, 某种型号电子元件的使用寿命超过*1500*小时的为一级品. 已知某一大批产品的一级品率为*0.2*, 现在从中随机地抽查*20*只. 问*20*只元件中恰有k只($k=0,\cdots,20$)为一级品的概率是多少?

这是不放回抽样. 但由于这批元件的总数很大, 且抽查的元件的数量相对于元件的总数来说又很小, 因而可以当作放回抽样来处理, 这样做会有一些误差, 但误差不大. 我们将检查一只元件看它是否为一级品看成是一次试验, 检查20只元件相当于做20重伯努利试验.

以X记20只元件中一级品的只数, 那么, X是一个随机变量, 且有$X\sim\mathbb{B}(20,0.2)$. 即得所求概率为

$$P\{X=k\}=C_{20}^k(0.2)^k(0.8)^{20-k}$$

二项分布

Example 5 某人进行射击, 设每次射击的命中率为*0.02*, 独立射击*400*次, 试求至少击中两次的概率.

将一次射击看成是一次试验. 设击中的次数为X, 则$X \sim \mathbb{B}(400, 0.02)$. X的分布律为

$$P\{X = k\} = C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k}$$

即得所求概率为

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972$$

小概率事件是指一次试验中发生的概率很小的事件. 但从理论上讲, 一个事件发生的概率不论多小, 只要不断重复试验下去, 事件迟早会出现的, 概率是1.

其实际意义是, 我们可以借助它判断事情的真实性. 因为根据实际推断原理, 小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的. 而某一认为概率很小的事件, 居然在一次试验中发生了, 人们就有理由怀疑其正确性.

二项分布

Example 6 设有80台同类型设备, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是0.01, 且一台设备的故障能由一个人处理. 考虑两种配备维修工人的方法, 其一是由4人维护, 每人负责20台; 其二是由3人共同维护80台. 试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

按第一种方法. 以X记"第1人维护的20台中同一时刻发生故障的台数", 以$A_i(i=1,2,3,4)$表示事件"第i人维护的20台中发生故障不能及时维修", 则知80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\}$$

而$X \sim \mathbb{B}(20, 0.01)$, 故有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 0.0169$$

按第二种方法. 以Y记80台中同一时刻发生故障的台数. 此时, $Y \sim \mathbb{B}(80, 0.01)$, 故80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} = 1 - \sum_{i=0}^{3} C_{80}^{i}(0.01)^{i}(0.99)^{80-i} = 0.0087$$

我们发现, 在后一种情况尽管任务重了(每人平均维护约27台), 但工作效率不仅没有降低, 反而提高了.

8 泊松分布

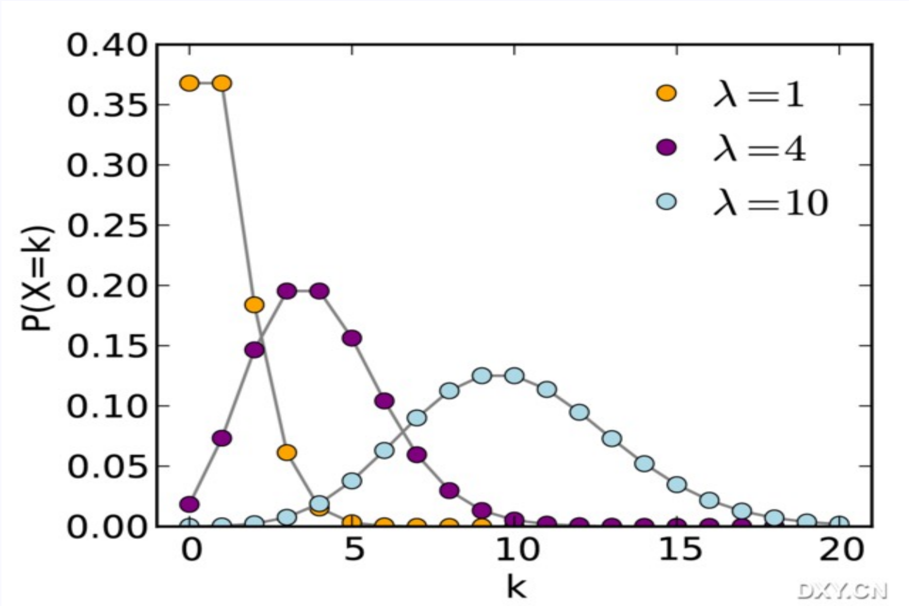
泊松分布（Poisson Distribution）是法国数学家泊松于1837年引入的。泊松分布适合于描述单位时间内随机事件发生的次数的概率分布。如某一服务设施在一定时间内受到的服务请求的次数，电话交换机接到呼叫的次数、汽车站台的候客人数、机器出现的故障数、自然灾害发生的次数、DNA序列的变异数、放射性原子核的衰变数等等。

Definition 10 如果随机变量X 的概率分布为:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$$

则称X服从参数为λ的泊松分布, 记为$\pi(\lambda)$.

泊 松 分 布



Example 7 设某汽车停靠站候车的人数为$X \sim \pi(\lambda)$, $\lambda = 4.5$. 求
(1) 求至少有两人等车的概率;
(2) 已知至少有两人候车; 求恰有两人候车的概率.

解: $P(X=k) = \frac{4.5^k}{k!}e^{-4.5}$, 则

$$(1)P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-4.5}(1+4.5) = 0.9389$$

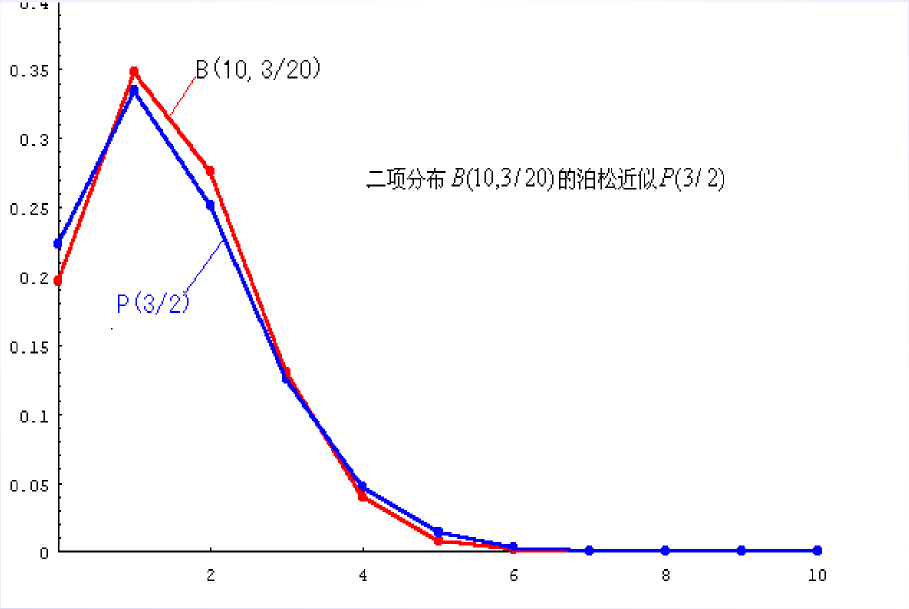
$$(2)P(X=2|X \geq 2) = \frac{P(X=2)}{P(X \geq 2)} = 0.1198$$

泊松逼近

在很多应用问题中, 我们常常这样的伯努利试验, 其中, 相对地说, n大, p小, 而乘积$\lambda = np$大小适中. 在这种情况下, 有一个便于使用的近似公式.

Theorem 2 (泊松逼近) 在伯努利试验中, 以p_n代表事件A在试验中出现的概率, 如果$np_n \to \lambda$, 则当$n \to \infty$时,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{B}(n, p_n) = \pi(\lambda)$$



泊松逼近

回顾二项分布定义：

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, p=\frac{\lambda}{n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\frac{n!}{n^k(n-k)!}\right]}_{F}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to\exp(-\lambda)}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]}_{\to 1}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to\exp(-\lambda)}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\exp(-\lambda)
\end{aligned}$$

泊松逼近

Example 8 假如生三胞胎的概率为10^{-4}, 求在*100000*次生育中, 有*0, 1, 2*次生三胞胎的概率.

解: 这可以看作伯努利试验; $n = 100000$, $p = 0.0001$, 所求的概率直接计算为

$$\mathbb{B}(0; 100000, 0.0001) = 0.000045378$$
$$\mathbb{B}(1; 100000, 0.0001) = 0.00045382$$
$$\mathbb{B}(2; 100000, 0.0001) = 0.0022693$$

这时也可用泊松逼近, $\lambda = np = 10$, 而

$$\pi(0; 10) = 0.00004540$$
$$\pi(1; 10) = 0.0004540$$
$$\pi(2; 10) = 0.002270$$

泊松分布数字特征

Theorem 3 设$X \sim \pi(\lambda)$, 则$E(X) = \lambda$.

证:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Theorem 4 设$X \sim \pi(\lambda)$, 则$Var(X) = \lambda$.

证:

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

9 几何分布

几何分布（Geometric distribution）在伯努利试验中得到一次成功所需要的试验次数X.

Example 9 从生产线上随机抽产品进行检测, 设产品的次品率为p, $0<p<1$, 若查到一只次品就得停机检修, 设停机时已检测到X只产品, 试写出X的概率分布律。

设A_i为第i个抽到正品事件, A_i相互独立, 则

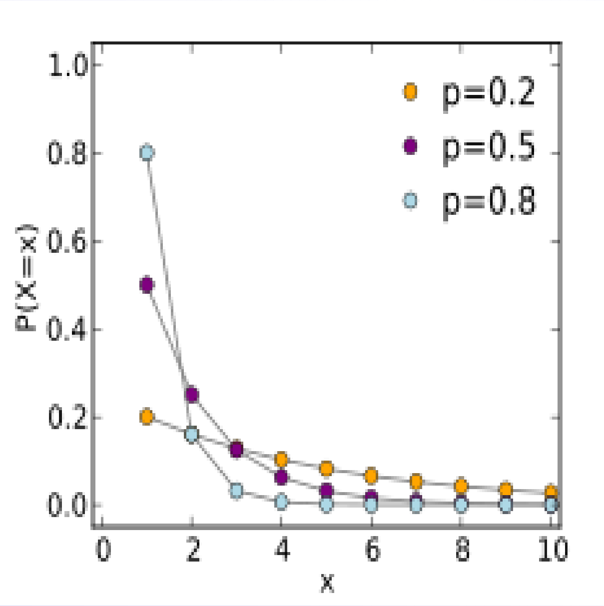
$$P\{X=n\}=P\{A_1,\cdots,A_{n-1}\overline{A_n}\}=(1-p)^{n-1}p$$

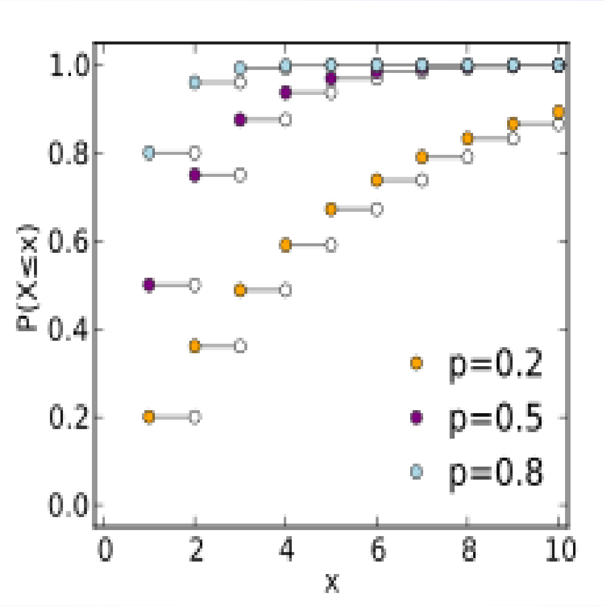
Definition 11 (几何分布) 如果随机变量X的概率分布为:

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p, n=1,2,\cdots,0<p<1$$

则称X服从几何分布, 记为$X\sim\mathbb{G}(p)$

几 何 分 布





几何分布

几何分布的数学期望($q=1-p$):

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} ipq^{i-1}$$

$$=1p+2pq+3pq^2+\cdots+kpq^{k-1}+\cdots$$
$$=p(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots)$$

令$S=1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots$, $qS=1q+2q^2+3q^3+\cdots+kq^k+\cdots$

$$S-qS=(1-q)S=1+q+q^2+\cdots+q^k+\cdots=\frac{1}{1-q}$$

所以$S=\frac{1}{(1-q)^2}$,

$$E(X)=pS=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

几 何 分 布

几何分布的方差($q=1-p$):

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty} i^2pq^{i-1}$$

$$=p(1+2^2q+3^2q^2+\cdots+k^2q^{k-1}+\cdots)$$

令$S=1+2^2q+3^2q^2+\cdots+k^2q^{k-1}+\cdots$, 对$T'=S$, 即$T$关于$q$求一阶导得$S$

$$T=q+2q^2+3q^3+\cdots+kq^k+\cdots=\frac{q}{(1-q)^2}$$

则$S=T'$,

$$S=T'=\frac{(1-q)^2+2(1-q)q}{(1-q)^4}=\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{1+q}{(1-q)^3}$$

所以$E(X^2)=pS=\frac{2-p}{p^2}$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

几何分布

在伯努利试验中, 等待首次成功的时间t服从几何分布。现在假定已知在前m次试验中没有出现成功, 那么为了达到首次成功所再需要的等待时间t'也还是服从几何分布, 与前面的失败次数m无关, 形象化地说, 就是把过去的经历完全忘记了。

Definition 12 (无记忆) 对于一个非负随机变量X, 如果对于任意$s, t \geq 0$有

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \tag{2}$$

则我们称X是无记忆的。

$$P\{X \leq n\} = 1 - q^n, P\{X > n\} = q^n$$

$$P\{X > n\} = \sum_{i=n+1}^{\infty} pq^{i-1} = pq^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{pq^n}{1-q} = q^n$$

因此无记忆性是几何分布所具有的一个有趣的性质。

10 超几何分布

一批产品共N件，含M件是次品，随机地从这N件产品中抽取n件产品，求恰有k件次品的概率。

Definition 13 (超几何分布) 如果随机变量X的概率分布为:

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=1,2,\cdots,n$$

其中N,M,n均为正整数, 且$M \le N, n \le N$,则称X 服从参数为N,M,n的超几何分布, 记为$X \sim \mathbb{H}(N,M,n)$.

超几何分布

我们把二项分布与超几何分布作一比较。N件产品，有M件次品和$N-M$件正品。如果每抽一件产品放回后，再抽下一件产品，如此有放回地随机地抽取n件，这是n重伯努利试验，那么所抽的n件产品的次品数$X \sim \mathbb{B}(n, \frac{M}{N})$。当$N >> n$时，我们可以采用二项分布近似超几何分布。

超几何分布、二项分布和泊松分布都是重要的离散型随机变量的概率分布. 有时, 他们的概率计算会十分繁冗. 当试验次数n很大时, 可以推导出这三个分布间有一种近似关系式

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

这里, 第一个等式要求n很大, 且n/N较小, 取$p = M/N$即成立. 第二个等式要求n很大时成立. 实际使用时, $n \geq 20$即可, 当$n \geq 50$时, 效果更好. 而泊松分布可通过查表计算, 比较简单.