初等变换法求逆矩阵

求逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$

初等行变换

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right).$$

初等列变换

$$\begin{pmatrix}A\\ E\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}3 & 4\\ 2 & 3\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-c_1}\left(\begin{array}{cc}3 & 1\\ 2 & 1\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1-3c_2}\left(\begin{array}{cc}0 & 1\\ -1 & 1\\ \hline 4 & -1\\ -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 1 & -1\\ \hline -1 & 4\\ 1 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[-c_2]{c_1+c_2}\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline 3 & -4\\ -2 & 3\end{array}\right).$$

最终都得到A的逆矩阵： $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$

初等变换法解矩阵方程

解矩阵方程：*AX=B*，其中 $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10&1\\5&-1\end{pmatrix}.$

初等行变换

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&10&1\\2&3&5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&5&2\\2&3&5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&5&2\\0&1&-5&-5\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&10&7\\0&1&-5&-5\end{array}\right).$$

得到*AX=B*的解： $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&7\\-5&-5\end{pmatrix}.$

解矩阵方程：*XA=B*，矩阵*A*，*B*同上

初等列变换

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}3&4\\2&3\\\hline 10&1\\5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-c_1}\left(\begin{array}{cc}3&1\\2&1\\\hline 10&-9\\5&-6\end{array}\right)\xrightarrow{c_1-3c_2}\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&1\\\hline 37&-9\\23&-6\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\1&-1\\\hline -9&37\\-6&23\end{array}\right)\xrightarrow[-c_2]{c_1+c_2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline 28&-37\\17&-23\end{array}\right).$$

得到*XA=B*的解： $X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}28&-37\\17&-23\end{pmatrix}.$

转置求解：*A*$^{\mathrm{T}}$*X* $^{\mathrm{T}}$=*B*$^{\mathrm{T}}$

$$(A^T,B^T)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&2&10&5\\4&3&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&-1&9&6\\4&3&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(-1)r_1\\(-1)r_2}]{r_2+4r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-9&-6\\0&1&-37&-23\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&28&17\\0&1&-37&-23\end{array}\right).$$

得到*XA=B*的解： $X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}28&-37\\17&-23\end{pmatrix}.$

初等变换法求逆矩阵的原理

定理2.6.4 (矩阵的分解) 设A为$m\times n$矩阵，r(A)=r，则存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得$A=P\Lambda Q$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

证明：A 经过一系列的初等行变换等价于左乘初等矩阵$P_s\ldots P_2P_1A$，再经过一系列的初等列变换得$P_s\ldots P_2P_1AQ_1Q_2\ldots Q_t$，最后可化为标准型$\Lambda$.初等矩阵可逆，故有：

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_s^{-1}\Lambda Q_t^{-1}\ldots Q_2^{-1}Q_1^{-1}=P\Lambda Q\ .$$

推论2.6.5 任一n阶可逆矩阵A均可以表示成有限个n阶初等矩阵的乘积。进一步，任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵，也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

推论2.5.3

一系列的初等行(列)变换等价于左(右)乘可逆矩阵

A可逆，考虑初等行变换化为单位阵E

$$A \xrightarrow{P_1} A_1 \xrightarrow{P_2} A_2 \xrightarrow{P_3} \cdots \xrightarrow{P_k} A_k = E, \qquad P_i\text{为初等矩阵，}$$

变换等价于左乘初等矩阵 $P_k \cdots P_2 P_1 A = E.$

由此可知： $P_k \cdots P_2 P_1 = A^{-1}.$

同样的变换作用于 (A,E) $(A,E) \xrightarrow{P_1} (A_1, S_1) \xrightarrow{P_2} = \cdots \xrightarrow{P_k} (A_k, S_k) = (E, S_k).$

等价于 $P_k \cdots P_2 P_1 (A,E) = (P_k \cdots P_2 P_1 A, P_k \cdots P_2 P_1) = (E, A^{-1}) = (E, S_k).$

一系列初等行变换也等价于左乘可逆矩阵

$$(A,E) \xrightarrow{r} (E, A^{-1}) \quad \text{等价于} \quad A^{-1}(A,E) = (A^{-1}A, A^{-1}) = (E, A^{-1})$$

同样道理，初等列变换化A为单位阵E也可得A^{-1}

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{等价于} \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} AA^{-1} \\ A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

推广到解矩阵方程：

$$(A,E)\xrightarrow{r}(E,A^{-1}) \quad 等价于 \quad A^{-1}(A,E)=(A^{-1}A,A^{-1})=(E,A^{-1})$$

推广到解方程 ***AX*=*B***：

$$(A,B)\xrightarrow{r}(E,A^{-1}B) \quad 等价于 \quad A^{-1}(A,B)=(A^{-1}A,A^{-1}B)=(E,A^{-1}B)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix} \quad 等价于 \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix} AA^{-1} \\ A^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

推广到解方程 ***XA*=*B***：

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix} \quad 等价于 \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix} AA^{-1} \\ BA^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

例2.6.10 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$

解

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{r_2/(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right).$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

例2.6.11 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，求矩阵X .

解 将方程变形为：$(A-2E)X=A$ ，进一步用初等行变换

$$(A-2E,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&-1&0&-4&3&2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right).$$

于是 $$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

定理2.6.6 设A是$m\times n$矩阵，P,Q分别是m阶和n阶可逆矩阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

证明：由于可逆矩阵P,Q可以表示为有限个初等矩阵的乘积，而初等变换又不改变矩阵的秩，故结论成立。

例2.6.12 证明：任一秩为r的$m\times n$矩阵A总可表示为r个秩为1的矩阵的和.

证明　因为 $r(A)=r$，故存在m阶和n阶可逆矩阵P和Q，使得

$$A=P\Lambda Q=P(E_{11}+E_{22}+\ldots+E_{rr})Q,$$

其中，E_{ii} (i=1,2, …,r) 是(i, i)元素为1，其它元素为0的$m\times n$矩阵.

由上式可得

$$A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\ldots+PE_{rr}Q.$$

再由定理2.6.6知 $r(PE_{ii}Q)=r(E_{ii})=1$，故结论成立.