习题六补充讲解(3)

11 解 (1) 设 $s_0\alpha+s_1T\alpha+\cdots+s_{k-1}T^{k-1}\alpha=\theta$，对该式两边分别作用 $T^{k-1},T^{k-2},\cdots,T,E$ 得

$$\begin{cases} & & s_0T^{k-1}\alpha & =\theta \\ & s_0T^{k-2}\alpha & +s_1T^{k-1}\alpha & =\theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_0\alpha \quad s_1T\alpha & \cdots & s_{k-1}T^{k-1}\alpha & =\theta \end{cases}$$，因为 $T^{k-1}\alpha\neq\theta$，故可得 $\begin{cases} s_0=0 \\ \vdots \\ s_{k-1}=0 \end{cases}$

于是 $\alpha,T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha$ 无关

(2) 易知

$$T(\alpha,T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha)=(T\alpha,T^2\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha,\theta)=(\alpha,T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha)\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix},$$

故 $T$ 在基 $\alpha,T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$

13 解 (1) 已知 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$，且有

$$T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix})=T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)S)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)B,$$

故 $T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)S)=T((\eta_1,\eta_2,\eta_3)C^{-1}S)=(T(\eta_1,\eta_2,\eta_3))C^{-1}S=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)B$，

即 $T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)BS^{-1}C$

于是 $T$ 在基 $\Psi$ 下的矩阵是 $A=BS^{-1}C=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -5 & 5 & 3\\ 6 & -5 & -2\end{pmatrix}$

(2) $T(\eta_1)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}-3\\ -5\\ 6\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C\begin{pmatrix}-3\\ -5\\ 6\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 9\end{pmatrix}$，故坐标为 $\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 9\end{pmatrix}$

补充题：

* 已知线性空间 $V$，$V$ 上的线性变换 $T$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -3 & -12 & 2\end{pmatrix}$，试求 $T$ 的象空间与核空间的基，并将象空间与核空间的基分别扩展成 $V$ 下的基。

解：因为 $T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$，故 $A$ 列向量的极大无关组对应于象空间的基，$Ax=\theta$ 的基础解系对应于核空间的基。

由 $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -3 & -12 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/3\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故对应于 $A$ 的前 2 列 $T\varepsilon_1,T\varepsilon_2$ 构成象空间的基，

同时基础解系为 $\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$，故 $\eta=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2+3\varepsilon_3$ 为核空间的基

因为 $\begin{vmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & -12 & 1\end{vmatrix}=9\neq0,\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\neq0$，故 $T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 $\eta,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 均为 $V$ 的基 .