n阶行列式的性质

定理1.2.1. 行列式与它的转置行列式的值相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例验证:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

定理1.2.2. 对调两行(列)的位置，行列式的值相差一个负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

推论1.2.3. 两行(列)相等的行列式的值为0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

推论1.2.4.行列式可以按任一行(列)展开.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ik}A_{ik} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

实例验证：

- 对角线法则计算
- 按第2行展开
- 按第3列展开

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

按一行或一列展开的特点：

按第二行展开

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

定理1.2.5. 行列式的任一行(列)元素的公因子可以提到行列式外面.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 10 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$10 \times \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

推论1.2.6. 若行列式某两行(列)对应元素成比例，则行列式的值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

包括k为0

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 20 & -40 & 10 \end{vmatrix}$$

定理1.2.7. 行列式的第*i*行(列) 的每一个元素都可以表示为两数的和，则该行列式可以表示为两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1+3 & -5+2 & 3-4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

定理1.2.8. 将行列式的任意一行(列) 乘以数k加到另一行(列)上去，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例验证：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2-2\times 1 & -4-2\times(-5) & 1-2\times 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

定理1.2.9. 行列式任一行(列) 的元素与另一行(列)元素的代数余子式对应乘积之和为零. 即，若设 $A=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}A, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}A, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\right)$$

说明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk}=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=A$$

元素替换：

$a_{j1}\to a_{i1},\ldots,a_{jn}\to a_{in}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

用行列式性质简化
行列式计算

将一行或一列化为大量的0，然后展开计算

计算中行列式变换的表示：

- k乘以第j行（列）加到第i行（列）：r_i+kr_j（c_i+kc_j）
- 交换i行（列）与j行（列）：$r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）
- 第i行（列）提出公因子k：$\frac{1}{k}r_i$（$\frac{1}{k}c_i$） 或 $r_i \div k$（$c_i \div k$）

书上P_9例1.2.1

解：

$$D \overset{c_2+c_4}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_3+r_2}{\overset{r_1+2r_2}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1}{=} -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(4-35) = 31$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$