习题五补充讲解(3)

7 证任取 $x\neq\theta$，则 $Ax\neq\theta$，否则 A 的列向量线性相关，与 A 列满秩矛盾.

令 $y=Ax$，则 $x^TBx=x^TA^TAx=y^Ty=y_1^2+\cdots+y_m^2>0$，故 $B=A^TA$ 对称正定.

11 证任取 $x\neq\theta$，则 $y=Px\neq\theta$，由 A 正定性，可知

$x^T(P^TAP)x=y^TAy>0$，即 P^TAP 正定.

反之任取 $x\neq\theta$，则 $x^T(P^TAP)x=(Px)^TA(Px)>0$，故 $Px\neq\theta$，即

$Px=\theta$ 没有非零解，于是 P 可逆.

14(3)解二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1/2&\cdots&1/2\\1/2&1&\cdots&1/2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1/2&1/2&\cdots&1\end{pmatrix}$，则解特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1/2&\cdots&-1/2\\-1/2&\lambda-1&\cdots&-1/2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1/2&-1/2&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-\frac{n+1}{2})\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&\lambda-1/2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-1/2\end{vmatrix}=(\lambda-\frac{n+1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})^{n-1},$$

得特征值 $\lambda=\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}$，均大于 0，故正定

15(2)解二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}t+1&-1&0\\-1&t+2&-1\\0&-1&t+1\end{pmatrix}$，解特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-t-1&1&0\\1&\lambda-t-2&1\\0&1&\lambda-t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-t-1&1&0\\0&\lambda-t-2&1\\-(\lambda-t-1)&1&\lambda-t-1\end{vmatrix}=(\lambda-t-1)(\lambda-t)(\lambda-t-3),$$

得特征值 $\lambda=t,t+1,t+3$，由正定得 $\begin{cases}t>0\\t+1>0\\t+3>0\end{cases}$，故必须 $t>0$.

16 证令 $A_I=\begin{pmatrix}a_{i_1i_1}&a_{i_1i_2}&\cdots&a_{i_1i_r}\\a_{i_2i_1}&a_{i_2i_2}&\cdots&a_{i_2i_r}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i_ri_1}&a_{i_ri_2}&\cdots&a_{i_ri_r}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}\neq\theta,y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，其中 $y_j=\begin{cases}x_k, & j=i_k\\0, & j\neq i_k\end{cases}$，

则 $x^TA_Ix=y^TAy>0$，故 A_I 正定，于是 $|A_I|>0$.

18 证 $A=B^2,B$ 正定，则 $B^{-T}AB^{-1}=E$，A 对称且正惯性指数为阶数，故 A 正定.

若 A 正定，则存在正交阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},\lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>0$.

令 $B=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^T$，则 B 正定，且 $B^2=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2Q^T=Q(Q^TAQ)Q^T=A$.

19 证因为 A 正定，故 A 合同于 E，即存在可逆 $C,C^TAC=E$，再令 $B_2=C^TBC$，

则 $B_2^T=C^TBC=B_2$，故有正交阵 Q，使得 $Q^TB_2Q=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

令 $P=CQ$，则有 $P^TAP=Q^TEQ=E,P^TBP=Q^TB_2Q=\Lambda$.

23 证因为 $\begin{pmatrix}E&0\\x^TA^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A&x\\x^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&A^{-1}x\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A&0\\0&x^TA^{-1}x\end{pmatrix}$，故 $\begin{vmatrix}-A&x\\x^T&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-A&0\\0&x^TA^{-1}x\end{vmatrix}=|-A|x^TA^{-1}x$

即 $f(x_1,\cdots,x_n)=|-A|x^TA^{-1}x=x^T((-1)^n|A|A^{-1})x$，因为 A 正定，故 $|A|>0$，且当 $x\neq\theta$ 有

$x^T(|A|A^{-1})x=|A|(A^{-1}x)^TA(A^{-1}x)>0$，故 n 偶数时，$f(x_1,\cdots,x_n)=x^T(|A|A^{-1})x$ 正定

n 奇数时，$f(x_1,\cdots,x_n)=x^T(-|A|A^{-1})x$ 负定