12 月 12 日作业分析

作业：习题六 2,4,5,7,8,10,12,14,15,16,17

习题六 2 有些同学证明线性空间只证明加法和数乘的封闭性，应该进一步验证加法和数乘满足线性空间的加法和数乘的性质。

2 证明{sin t, … ,sin nt}为一组基时，很多同学没有证明{sin t, … ,sin nt}线性无关性及求 c_k 的公式，可如下：

设 $c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt=\theta$，两边积分

$$\int_0^{2\pi}\sin mt(c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt)dt=\sum_{i=1}^{n}c_i\int_0^{2\pi}\sin mt\sin itdt=\pi c_m=0, m=1,2,\cdots,n.$$

即 $c_m=0, m=1,2,\cdots,n.$，故$\{\sin t, c_2\sin 2t,\cdots,\sin nt\}$线性无关。

同时也可知：$c_k=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ktdt, k=1,2,...,n.$

4 大家都是由 $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3,\\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4,\\ \beta_1+2\beta_2=\alpha_3,\\ \beta_2+2\beta_3=\alpha_4,\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}\beta_1=4\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3\text{-}2\alpha_4,\\ \beta_2=\text{-}2\alpha_1\text{-}4\alpha_2+\alpha_4,\\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2,\\ \beta_4=\alpha_2+2\alpha_3,\end{cases}$，于是 $\boldsymbol{\Phi}$ 到 $\boldsymbol{\Psi}$ 过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}4&\text{-}2&1&0\\8&\text{-}4&2&1\\1&0&0&2\\\text{-}2&1&0&0\end{pmatrix}$，

当原来的式子较复杂时，可处理如下：

由 $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3,\\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4,\\ \beta_1+2\beta_2=\alpha_3,\\ \beta_2+2\beta_3=\alpha_4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3,\\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4,\\ \alpha_3=\beta_1+2\beta_2,\\ \alpha_4=\beta_2+2\beta_3,\end{cases}$，此即 $(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_3,\beta_4,\beta_1+2\beta_2,\beta_2+2\beta_3)$，

故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&2&1\\1&0&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，

于是 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&2&1\\1&0&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$

7 有些同学证明有些问题，可如下：

证：设 $\dim V_1=\dim V_2=n$，并设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 为 V_1 的一组基，$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 为 V_2 的一组基.

因为 $V_1\subset V_2$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 表示，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)P$.

若 P 不可逆，则存在向量 $x\neq 0$，使得 $Px=0$，

于是 $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)x=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)Px=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)0=0$，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性相关，与 V_1 的基矛盾，故 P 可逆.

于是$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P^{-1}$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可表示 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$，为 V_2 的一组基，故 $V_1\supset V_2$.

再由 $V_1\subset V_2$，可得 $V_1=V_2$.

8 有些同学未证直和。可如下证明：

证：设 n 阶方阵空间为 L，则任取 $A\in L$,令 $B=\dfrac{1}{2}(A+A^T), C=\dfrac{1}{2}(A\text{-}A^T)$，则有 $A=B+C$，

且有 $B^T=\dfrac{1}{2}(A+A^T)=B, C^T=\dfrac{1}{2}(A^T\text{-}A)=-C$. 故 $B\in L_1, C\in L_2$ ，于是 $L=L_1+L_2$.

下面证 $L=L_1\oplus L_2$. 任取 $A\in L_1\cap L_2$,则有性质 $A^T=A$ 和 $A^T=\text{-}A$，

于是 $A=\text{-}A=O$，即 $L_1\cap L_2=\{O\}$，于是可知 $L=L_1\oplus L_2$.

10 有些同学(2)没有分 M 可逆与否，(4)、(5)没有指明是否单射，是否满射。可如下求解：

解：(2) T 显然是映射，且 T(A+B)=M(A+B)=MA+MB=T(A)+T(B)，T(kA)=M(kA)=kMA=kT(A)，故 T 为线性映射.

当 M 可逆时，T(A)=T(B)=C，即 MA=MB=C，故左乘 M 的逆可得 $A=B=M^{-1}C$，故是单射也是满射.

当 M 不可逆时，存在非零列向量 x，使得 Mx=0，故设 A=(x,x,…,x)，有 MA=O=MO，故不是单射.

再取列向量 y 使得 r(M,y)>r(M)，C=(y,y,…,y)，则不存在 A 使得 T(A)=MA=C，故也不是满射.

(4) 设 k=1+i，z=1-i，则 T(kz)=T(2)=2，kT(z)=(1+i)(1+i)=2i≠T(kz)，故不是线性映射.

由于 $T(z_1)=T(z_2)=z_3$，故 z_1=(z_3 的共轭)=z_2，故 T 是单射也是满射.

(5) T(2(1,0,0))=T(2,0,0)=(4,2,0)≠2T(1,0,0)=2(1,1,0)，故不是线性映射. 由 T(1,0,0)=T(-1,2,0)知 T 不是单射.

由 $T(x,y,z)=(x^2,x+y,z)\neq(-1,0,0)$知 T 不是满射.

14 很多同学直接得到关系 $AP=PA \Leftrightarrow A=kE$ 或者 $P^{-1}AP=A \Leftrightarrow A=kE$，应该详细证明，可如下：

证：充分性：T 是数乘变换，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为任意一组基，则有

$$T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)=(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots, k\varepsilon_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)kE,$$

T 的矩阵都相同，为 kE 。

必要性：T 在任意一组基下的矩阵都相同，为 A，利用不同基下矩阵的关系，对任意可逆矩阵 P，有 $P^{-1}AP=A$，即 $AP=PA$。

先取 $P=E(i(-1))$, $i=1,2,\dots,n$，可得 A 的非对角元为 0。再取 $P=E(1,i)$, $i=1,2,\dots,n$，可得 A 对角元都相同，故 $A=kE$，进一步，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为任意一组基，则

$$T\alpha = T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)kE\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k\alpha,$$

可得 T 为数乘变换。

15 有些同学没有指定基就直接给出矩阵，实际用了自然基，要指明。有些同学称$(x_1, x_2, x_3)^T$ 为基底，概念错误。

17 很多同学(3)、(4)没有做，整个 17 题可如下求解：

解：(1) 由条件得 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4') = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P,$

故在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4'$ 下的矩阵为 $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2/3 & -14/3 & 10/3 & 10/3 \\ 8/3 & -56/3 & 40/3 & 40/3 \\ 2/3 & 13/3 & -11/3 & -14/3 \end{pmatrix}.$

(2) 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

于是对应于 A 的前 2 列的 $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2$ 构成像空间的基，即像空间为 $\operatorname{span}\{T\varepsilon_1, T\varepsilon_2\}$。

而 $Ax=\theta$ 的基础解系为 $(-2,-3/2,1,0)^T$, $(-1,-2,0,1)^T$，可作为核空间的基的坐标，故核空间为

$\operatorname{span}\{-2\varepsilon_1 - \frac{3}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3, -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4\}.$

(3) 记核空间的基向量 $n_1 = -2\varepsilon_1 - \frac{3}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3, n_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$,

因为 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,n_1,n_2) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P_1$, 而 $|P_1|=1\neq 0$，

故$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, n_1, n_2\}$ 构成了 V 的一组基，且 T 在这组基下的矩阵为 $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 9/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(4) 因为 $(T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)P_2$, ，而 $|P_2|=2\neq 0$，故$\{T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$构成了 V 的一组基，且 T 在这组基下的矩阵为 $P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 9/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$