11 月 2 日作业分析

作业：习题四：14,17,18,21,22,23,24

习题四：14 可对角化的判断：(1) 可以用书上的 $r(\lambda E-A)$为 (n-λ 的重数)；(2) 可以用 $(\lambda E-A)x=\theta$ 的基础解系向量个数等于 λ 的重数. 以 14(2)判断$\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 5 & -3 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$可对角化为例求解如下：

解：$\begin{vmatrix}\lambda-4 & 2 & -1\\ -5 & \lambda+3 & 2\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -1\\ \lambda-2 & \lambda+3 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，故 A 的特征值为 2(二重), -3.

当 λ=2 时，$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -5 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$r(2E-A)=2\neq 3-2=1$，故不可对角化.

解法二：$\begin{vmatrix}\lambda-4 & 2 & -1\\ -5 & \lambda+3 & 2\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -1\\ \lambda-2 & \lambda+3 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，故 A 的特征值为 2(二重), -3.

当 λ=2 时，$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -5 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，可知只有一个无关特征向量，小于特征值重数，故不可对角化.

17 有两种证明方法，如下：

证：由 $A^2-3A+2E=O$ 可知有：$(E-A)(2E-A)=(2E-A)(E-A)=O$. 若 $E-A=O$ 或 $2E-A=O$ 结论显然.

否则由 $(E-A)(2E-A)=O$ 可知，矩阵 $2E-A$ 的非零列就是$(E-A)x=\theta$ 的非零解，即属于 λ=1 的特征向量，故 A 有至少 $r(2E-A)$个属于特征值 1 的无关特征向量，同理可得，

A 有至少 $r(E-A)$个属于特征值 2 的无关特征向量.

$r(2E-A)+r(E-A)=r(2E-A)+r(A-E)\geqslant r(2E-A+A-E)=r(E)=n$，故 A 有 n 个无关特征向量，可以对角化.

证法二：由 $A^2-3A+2E=O$ 可知有：$(E-A)(2E-A)=O$. 若 $E-A=O$ 或 $2E-A=O$ 结论显然.

否则有 $0=r(O)=r((E-A)(2E-A))\geqslant r(E-A)+r(2E-A)-n$，于是 $(n-r(E-A))+(n-r(2E-A))\geqslant n$.

显然 $(E-A)x=\theta$ 的基础解系含 $n-r(E-A)$个向量，即属于 λ=1 的无关特征向量有 $n-r(E-A)$个，

同理可得，属于 λ=2 的无关特征向量有 $n-r(2E-A)$个，

合起来有 n 个无关特征向量，故可以对角化.

21 有的同学用分量形式证明，也可以，两种证明方法如下：

证：$\|\beta_1+\beta_2\|^2+\|\beta_1-\beta_2\|^2=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_2)+(\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)$

$=(\beta_1,\beta_1)+2(\beta_1,\beta_2)+(\beta_2,\beta_2)+(\beta_1,\beta_1)-2(\beta_1,\beta_2)+(\beta_2,\beta_2)$

$=(\beta_1,\beta_1)+2(\beta_1,\beta_2)+(\beta_2,\beta_2)+(\beta_1,\beta_1)-2(\beta_1,\beta_2)+(\beta_2,\beta_2)=2(\beta_1,\beta_1)+2(\beta_2,\beta_2)=2(\|\beta_1\|^2+\|\beta_2\|^2)$.

证法二：设 $\beta_1=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\beta_2=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$，

则 $\beta_1+\beta_2=(a_1+b_1, a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$, $\beta_1-\beta_2=(a_1-b_1, a_2-b_2,\ldots,a_n-b_n)$.

于是

$\|\beta_1+\beta_2\|^2+\|\beta_1-\beta_2\|^2=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_2)+(\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)$

$=((a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2)+((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2)$

$=2(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+\ldots+a_n^2+b_n^2)=2((\beta_1,\beta_1)+(\beta_2,\beta_2))=2(\|\beta_1\|^2+\|\beta_2\|^2)$.