10 月 12 日作业分析

作业：习题二：45,46,47,48,50,51,39,54,55,57,59,62

习题二：45 有些同学直接写出表达式：$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，需要写出步骤。可有两种方法：

解法一：设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，得方程组 $\begin{cases} x_1 & =2, \\ 2x_1+2x_2 & =2, \\ 3x_1+3x_2+3x_3 & =6. \end{cases}$ 解得 $x_1=2, x_2=-1, x_3=1$，即 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

解法二：$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\beta^T)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 即得 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

***很多行向量的题目可以用转置成列向量来求解。**

47 有些同学直接用行列式 $\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{vmatrix}=-t(p-1)$ 判断相关性，缺少依据。可如下：

解：不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列向量，则有 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\theta$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\theta$ ，从而当且仅当 $\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{vmatrix}=-t(p-1)=0$ 时方程组有非零解. 故 $t=0$ 或 $p=1$ 时，β_1,β_2,β_3 线性相关，否则线性无关 .

47 有些同学做得不对。可如下：

证明：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，则有 $D=|A^TA|=|A^T|\cdot|A|=|A|^2$，故 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq0$ $\Leftrightarrow$ $D=|A|^2\neq0$.

50 有些同学证明错误。可如下：

证明：设 β 为任意 n 维列向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ 为 $n+1$ 个 n 维的列向量. 由于向量个数大于维数，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ 线性相关. 由条件，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关，故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 唯一线性表示.

39 该题有两种证明，见如下：

证法一：此法也用于 62 题的证明。由 $m=r(E_m)=r(AB)\leqslant r(A)\leqslant n$，$n=r(E_n)=r(BA)\leqslant r(A)\leqslant m$，故 $m=n$，于是 $B=A^{-1}$.

证法二：不妨设 $m>n$，将 A, B 分块为：$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, B=(B_1,B_2)$, 其中，$A_1\in R^{n\times n}$, $A_2\in R^{(m-n)\times n}$, $B_1\in R^{n\times n}$, $B_2\in R^{n\times(m-n)}$.

由 $AB=E_m$，得 $AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_{m-n} \end{pmatrix}$. 于是 $A_1B_1=E_n$, $A_1B_2=O$, $A_2B_2=E_{m-n}$.

由 $A_1B_1=E_n$，得 A_1 可逆，故 $B_2=A_1^{-1}A_1B_2=A_1^{-1}O=O$，于是 $A_2B_2=A_2O=O\neq E_{m-n}$，矛盾. 故 $m=n$,于是 $B=A^{-1}$.

55 大家都是先求 $r(A)=2$，再求 $r(B)=2$ 得关系式，再用 β_3 可表示求出 a, b。该题 β_3 的表示与 r(A)可同时求出，如下：

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right)$, 故 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2, b=5$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 5-a/3 \end{pmatrix}$, $r\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$, 故 $a=15$.

57 该题有两种证明，见如下：

证法一：由 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, … , $\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ 可得 $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2-\beta_1$, … , $\alpha_n=\beta_n-\beta_{n-1}$. 于是 $\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$ 与 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ 等价，故秩相同.

证法二：不妨设向量为列向量，则有 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\underset{i=n-1,\cdots,2}{\xrightarrow{c_{i+1}-c_i}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 故 $r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，即 $r\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$.

59 该题有两种证明，见如下：

证法一：因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 均可由向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$ 表示，故有：$r_1\leqslant r_3$, $r_2\leqslant r_3$, 即 $\min\{r_1,r_2\}\leqslant r_3$.

不妨设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r1}$ 和 $\beta_1,\dots,\beta_{r2}$ 分别是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 的极大无关组，则向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$ 和向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r1},\beta_1,\dots,\beta_{r2}$ 等价，故：$r_3=r\{\alpha_1,\dots,\alpha_{r1},\beta_1,\dots,\beta_{r2}\}\leqslant r_1+r_2$.

证法二：不妨设为列向量,并设 $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $B=(\beta_1,\dots,\beta_t)$,则 $r_1=r(A)\leqslant r(A,B)=r_3$, $r_2=r(B)\leqslant r(A,B)=r_3$,即 $\min\{r_1,r_2\}\leqslant r_3$.

$$r_3=r(A,B)\leq r(\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix})=r(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix})=r(A)+r(B)=r_1+r_2.$$