1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式，二元一次方程组

二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0.7 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$ 表示一个数或式子

计算： $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

-5 **-10** **-5**

考虑方程组： $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 2x-3y=1, \end{cases}$ 看到： $\begin{cases} x=\Delta_1/\Delta, \\ y=\Delta_2/\Delta, \end{cases}$ 是方程组的解

定义1.1.1 (二阶行列式) 将4个可以进行乘法与加法运算的元素*a*,*b*,*c*,*d*排成两行两列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc,$$

并称之为二阶行列式. 行列式也可简记为Δ、*D*等.

考虑方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1.1)$$

定理1.1.1 对方程组 (1.1) 有如下结论：

(1) 若$\Delta \neq 0$，则方程组 (1.1) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta$, $x_2=\Delta_2/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 Δ_1 , Δ_2不全为零，则方程组 (1.1) 无解 .

(3) 若$\Delta= \Delta_1= \Delta_2=0$，则方程组 (1.1) 有无穷多组解 .

其中：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

证明：(1) 直接验证：$(a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2)/\Delta=(a_{11}(b_1a_{22}-b_2a_{12})+a_{12}(a_{11}b_2-a_{21}b_1))/\Delta$
$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})b_1/\Delta=b_1$, 同理可验证第二个方程成立。

(2) 方程1×a_{22}减去方程2×a_{12}得到：$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$,
方程2×a_{11}减去方程1×a_{21}得到：$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$,
即：$\Delta x_1=\Delta_1$, $\Delta x_2=\Delta_2$ ， 两个式子中必有一个不满足，无解。

(3) $\Delta=0$ 表示Δ内两行成比例，故$\Delta= \Delta_1= \Delta_2=0$表示 $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$,

即方程组只有一个独立方程，故有无穷多组解。

例1.1.1 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$

解 因系数行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0,$

故方程组有唯一的一组解：$x_1 = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \dfrac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

例1.1.2 解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0. \end{cases}$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

故方程组有无穷多组解。实际上，方程组只含有一个方程 $x_1+2x_2=-1$ 。
由此可知，方程的解可表为 $x_1=-(2x_2+1)$，x_2可取任意值。

例1.1.3 解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 4, \\ 6x_1 + 10x_2 = 2. \end{cases}$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$

可见方程组无解。事实上第一个方程与第二个方程是矛盾的。

含矛盾的方程组
称为不相容方程组。

1.1.2 三阶行列式

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1.5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1.5 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

对角线法则 (Sarrus法则)

计算：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

27　**4**　**37**　**-9**

考虑方程组：$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$　易知：$\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ x_3 = \Delta_3/\Delta, \end{cases}$　是方程组的解

定义1.1.2 (三阶行列式)　设有9个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix},$$

并称之为三阶行列式，其中a_{ij} (i,j=1,2,3) 为该行列式的元素 .

考虑方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

定理1.1.2 对方程组 (1.9)，有

(1) 若$\Delta \neq 0$，则方程组 (1.9) 有唯一的解：$x_1=\Delta_1/\Delta, x_2=\Delta_2/\Delta, x_3=\Delta_3/\Delta$.

(2) 若$\Delta=0$，但 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为0，则方程组 (1.9) 无解 .

(3) 若$\Delta= \Delta_1= \Delta_2=\Delta_3=0$，则方程组 (1.9) 可能无解也可能有无穷多组解 .

其中：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

证明略。以下例子给出定理1.1.2的各种情况。

定理1.1.2中(2)的情况，见方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

解 易知
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故方程组无解。易知方程1+方程2得：$x_1+x_3=1$，与方程3矛盾。

例1.1.4 解三元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=1. \end{cases}$

解 因系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0,$

故方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{4}.$$

例1.1.5 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$

解 显然，4个行列式均为零，即$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ 。而方程组与方程 $x_1+2x_2+x_3=1$ 同解，因此原方程组有无穷多组解，其解可表示为：$x_1=1-2x_2-x_3$，其中x_2, x_3取任意值。

例1.1.6 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$

解 易知系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$

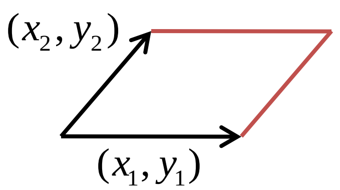
且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

但该方程组无解，因为方程组的三个方程是矛盾的。

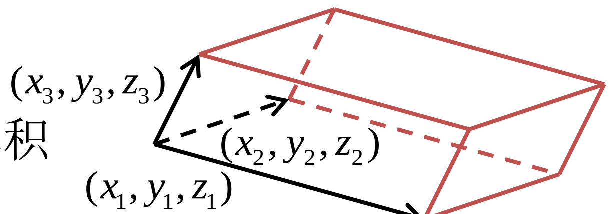
行列式的几何意义：

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 表示平行四边形面积



逆时针面积为正

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ 表示平行六面体体积

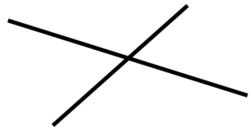


右手向体积为正

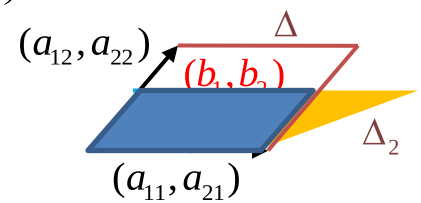
定理的几何解释：

定理1.1.1： $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases}$ 即为 $x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,

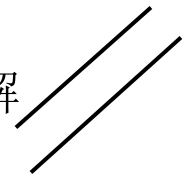
$\Delta \neq 0$时有唯一解



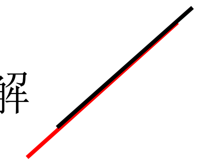
$$\begin{cases} x=\Delta_1/\Delta, \\ y=\Delta_2/\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{cases}$$



$\Delta=0$,但Δ_1或$\Delta_2 \neq 0$时无解

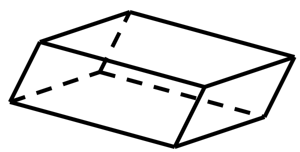


$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$时有无穷多组解

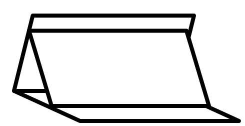


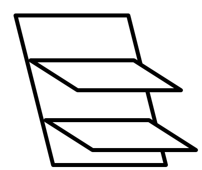
定理1.1.2：

$\Delta \neq 0$时有唯一解



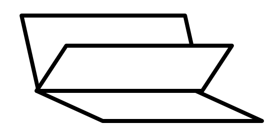
$\Delta=0$,但有$\Delta_i \neq 0$时无解





$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$

无穷多组解



无解