3.4 线性方程组解的结构

先考虑较简单的齐次方程组的解集及表示.

3.4.1 齐次方程组解的结构

求解齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+7x_3-4x_4=0 \end{cases}$

初等行变换化行简化梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4-4r_1 \\ r_5-2r_1}]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4-r_2 \\ r_5-3r_2 \\ r_2\div(-2)}]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

考虑非零行

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$,非首元素的列$\begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,取负下接基本向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解集为 $\boldsymbol{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2}$, $\boldsymbol{k_1,k_2 \in \mathbf{R}}$.

定理3.4.1 若α_1, α_2是方程组 $Ax=\theta$ 的解，则其线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是该方程组的解.

证明 直接验证：$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2=k_1\theta+k_2\theta=\theta$.

定义3.4.1 (齐次线性方程组、基础解系) 右端为零的线性方程组称为齐次线性方程组；能线性表示出齐次方程组所有解的极大无关向量组称为该齐次线性方程组的基础解系.

定义3.4.2 (方程组的特解、通解) 方程组的某一个解称为方程组的特解；方程组所有的解的集合称为方程组的通解.

齐次方程组除了零解，我们更加关心它的非零解.

定理3.4.2 设 $A\in R^{m\times n}$，若$r(A)=n$，则$Ax=\theta$ 只有零解；若$r(A)<n$，则$Ax=\theta$ 有非零解.

证明 由定理3.3.1知，当 $r(A)=n$时，$Ax=\theta$只有唯一解$x=\theta$，即零解.
当$r(A)<n$时，$Ax=\theta$有无穷多解，故除零解外还有非零解.

例3.4.1 判别下列齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

是否有非零解.

解 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其秩为3，所以方程组只有零解(列向量线性无关).

推论3.4.3 方程组 $Ax=\theta$，$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

证明 由定理3.4.2，$Ax=\theta$有非零解$\Leftrightarrow \mathrm{r}(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$.

推论3.4.4 若$A\in \mathbf{R}^{m\times n}$，且 $m<n$，则 $Ax=\theta$有非零解.

证明 由定理3.4.2直接可得方程组有非零解.

例3.4.2 讨论含参的3元方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解的条件.

解 计算系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda.$$

易知当λ=0时方程组有非零解，当$\lambda \neq$0时，方程组只有零解.

例3.4.3 求解下列齐次方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

解 将系数矩阵*A*化为行简化梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是我们得到简化的同解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

再改写上述方程组为(将行简化梯形矩阵每行最左边的1所在列以外的列对应的变量移到方程组右边)

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

分别令x_2, x_4为$x_2=s, x_4=t,\ s,t\in \mathbf{R}$，则可得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = s - t, \\ x_2 = s, \\ x_3 = 2t, \\ x_4 = t, \end{cases} \qquad s,t \in \mathrm{R}.$$

前述例子中，简化的同解方程组中有些变量需要移到方程组的右边，并设为自由参数，而有些变量则保留在左边. 这些保留在左边的变量正好是行简化梯形矩阵每一行最左边的1对应的变量，称为非自由变量；哪些移到右边的变量则是行简化梯形矩阵最左边的1以外的列对应的变量，可以任意取值，称为自由变量.

看下面例子：

方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 \qquad + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

解

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}, \text{即} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4, \\ x_3 = 2x_4. \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

非自由变量

自由变量

非自由变量
对应非零行首元素1

自由变量

写成向量形式：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

合并：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

定理3.4.5 A经过适当的初等行变换可以化为如下形式的行简化梯形矩阵：

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & 0 & d_{1i_2+1} & \cdots & 0 & d_{1i_r+1} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{2i_2+1} & \cdots & 0 & d_{2i_r+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{ri_r+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i_2 & i_2+1 & \cdots & i_r & i_r+1 & \cdots & n \end{matrix}\end{array}, \tag{3.6}$$

其中最后一行是矩阵所在列的列标号. 对n-r个自由变量$x_2,\ldots,x_{i2-1}, x_{i2+1}, \ldots, x_{ir-1}, x_{ir+1}, \ldots, x_n$分别取$n$-$r$组数据 (1,0,…,0) , (0,1,0,…,0) , … , (0,…,0,1)，则可得n-r组非自由变量$x_1, x_{i2},\ldots, x_{ir}$的值，从而构成 n-r组方程组的解，设该n-r组解的解向量为：$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$，则它们就是方程组$Ax=\theta$的一个基础解系. 方程组的通解为：

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}，其中k_1,\ldots,k_{n-r}\in \mathbf{R}为任意常数.$$

证明思路: (3.6)对应于方程组

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1i_2+1}x_{i_2+1} + \cdots + d_{1i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{1n}x_n = 0, \\ \qquad x_{i_2} + d_{2i_2+1}x_{i_2+1} + \cdots + d_{2i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{2n}x_n = 0, \\ \qquad x_{i_3} + d_{3i_3+1}x_{i_3+1} + \cdots + d_{3i_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{3n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_{i_r} + d_{ri_r+1}x_{i_r+1} + \cdots + d_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

进一步，将自由变量移到方程组的右边，得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -d_{12}x_2 - \cdots - d_{1i_2+1}x_{i_2+1} - \cdots - d_{1i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{1n}x_n, \\ x_{i_2} = -d_{2i_2+1}x_{i_2+1} - \cdots - d_{2i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{2n}x_n, \\ x_{i_3} = -d_{3i_3+1}x_{i_3+1} - \cdots - d_{3i_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{3n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_{i_r} = -d_{ri_r+1}x_{i_r+1} - \cdots - d_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

对n-r个自由变量$x_2,\ldots, x_{i2-1}, x_{i2+1}, \ldots , x_{ir-1}, x_{ir+1}, \ldots , x_n$分别取$n$-$r$组数据(1,0,…,0) , (0,1,0,…,0) , … , (0,…,0,1)代入(3.7)，可得n-r组非自由变量x_1, $x_{i2},\ldots, x_{ir}$的值，从而构成n-r组方程组的解，其解向量为：$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$.

下面证明$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$ 为一个基础解系.

即证明：

(1) $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$线性无关.

(2) 方程组的任意解β都是$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$的线性组合.

$$设x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i_2} \\ x_{i_2+1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ x_{i_r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},则\alpha_1=\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_{i_2-1}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. 有k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ k_1 \\ \vdots \\ * \\ k_{i_2-1} \\ \vdots \\ * \\ k_{i_r+1-r} \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即 $k_1=k_2=\ldots=k_{n\text{-}r}=0$，于是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n\text{-}r}$ 线性无关 .

$$\text{设}x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i_2} \\ x_{i_2+1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ x_{i_r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\text{若有一解向量}\beta=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{i_2} \\ s_{i_2+1} \\ \vdots \\ s_{i_r} \\ s_{i_r+1} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},\ \text{因为}\alpha_1=\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_{i_2-1}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令}\gamma=s_2\alpha_1+\cdots+s_{i_2+1}\alpha_{i_2-1}+\cdots+s_n\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix} t_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ t_{i_2} \\ s_{i_2+1} \\ \vdots \\ t_{i_r} \\ s_{i_r+1} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},$$

显然β,γ都满足方程组(3.7)，而且(3.7)右边自由变量的值相同，于是非自由变量的值也相同，即t_i=s_i , 也即β=γ= $s_1\alpha_1+s_2\alpha_2+\ldots+s_{n-r}\alpha_{n-r}$.

注1 若系数矩阵简化后的行简化梯形矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2,r+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -d_{1,r+2} \\ \vdots \\ -d_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-r} = \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

是齐次方程组的一个基础解系.

注2 若齐次方程组有非零解，则该方程组的基础解系并不唯一. 事实上，若齐次方程组 $Ax=\theta$ 有基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$，则 $2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_{n-r}$ 和 $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-r}$ 均为原齐次方程组的基础解系 .

推论3.4.6 若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(N(A))=n$，其中 $N(A)$ 表示 $Ax=\theta$ 的基础解系为列构成的矩阵.

证明: 由定理3.4.5的结论，若 $\mathrm{r}(A)=r$，则其基础解系含 $n-r$ 个向量，即 $\mathrm{r}(N(A))=n-r$.

例3.4.4 求齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的基础解系及通解.

解 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一个基础解系为 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

于是所求通解为 $\boldsymbol{x = k\alpha}$ **,** $\boldsymbol{k \in \mathbf{R}}$ **.**

例3.4.5 求齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+7x_3-4x_4=0 \end{cases}$$

之前已介绍

的基础解系.

解 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4-4r_1 \\ r_5-2r_1}]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4-r_2 \\ r_5-3r_2 \\ r_2\div(-2)}]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

容易求得一个基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例3.4.6 求齐次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系.

解 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-4r_1}]{r_1\div 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+6.5r_3]{\substack{r_1-r_2 \\ r_1-10r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

取自由变量 x_2 为1，解得基础解系为 $\alpha=(2,1,0,0)^T$.

例3.4.7 证明：若 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，则

$$r(A^*)=\begin{cases} n，若 \ r(A)=n, \\ 1，若 \ r(A)=n-1, \\ 0，若 \ r(A)\le n-2 . \end{cases}$$

证明 当$r(A)\le n-2$时，有$A^*=O$，故$r(A^*)=0$.

当 $r(A)=n$时，有 $|A|\neq 0$，再由 $AA^*=|A|E$可得$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，从而有$r(A^*)=n$.

当$r(A)=n-1$时，有$A^*\neq O$，且$Ax=\theta$的基础解系向量个数为1，再由

$AA^*=|A|E=O$可知$r(A^*)=1$.

例3.4.8 已知向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^n$ 线性无关，且α_1, α_2为方程组$A^{\mathrm{T}}x=\theta$的基础解系，α_2, α_3为方程$B^{\mathrm{T}}x=\theta$的基础解系，其中$A \in \mathbf{R}^{n\times m}$，$B \in \mathbf{R}^{n\times p}$，求$\mathrm{r}((A,B))$.

解 显然 $A^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，而 $B^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解为 $x=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，其中$k_1,k_2,t_1,t_2$为任意实数.

现在考虑方程组

$$\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta. \qquad (1)$$

则该方程组的通解是方程组$A^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解和方程组 $B^{\mathrm{T}}x=\theta$ 的通解的交集. 即满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$$

的所有的组合. 改写上述式子如下

$$k_1\alpha_1+(k_2-t_1)\alpha_2-t_2\alpha_3=\theta,$$

则由向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性无关性，必有 $k_1=t_2=0$，$k_2=t_1$，故方程组(1)的通解为 $k_2\alpha_2$，基础解系为α_2，由推论3.4.6可知方程组(1)的系数矩阵秩为 $n-1$.

现在我们有

$$r((A,B)) = r((A,B)^T) = r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = n-1.$$

3.4.2 非齐次方程组解的结构

解非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad +3x_3=0, \\ 2x_1+x_2 \quad +9x_3=-6, \\ x_1+5x_2=6. \end{cases}$

初等行变换
化行简化梯形

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

求一个特解，取 x_1=-4, x_2=2，其余为0，即x_3=0 .则特解为 $\eta=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

再求相应齐次方程组的通解 $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad +3x_3=0, \\ 2x_1+x_2 \quad +9x_3=0, \\ x_1+5x_2=0. \end{cases}$

导出方程组

利用前面初等行变换的结果中的第一块，得到通解 ***k*α,**其中 $\alpha=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

合起来得到非齐次方程组的通解： ***η*+*k*α , *k*∈R .**

例3.4.9 找出方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ \ +3x_3=0, \\ 2x_1+x_2 \ \ +9x_3=-6, \\ x_1+5x_2=6 \end{cases}$$

的两个特解并讨论它们的差的性质.

解 容易验证 $\boldsymbol{\eta}_1$=(1,1,-1)$^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$=(-4,2,0)$^{\mathrm{T}}$ 是原方程组的两个特解，两特解的差为 $\boldsymbol{\eta}$=(5,-1,-1)$^{\mathrm{T}}$，也容易验证它是对应齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ \ +3x_3=0, \\ 2x_1+x_2 \ \ +9x_3=0, \\ x_1+5x_2=0 \end{cases}$$

的解.

定理3.4.7 若$A\eta=b$ ($b\neq\theta$)，则$Ax=b$ 的通解可以表示为

$$\eta+\alpha,$$

其中α为 $Ax=\theta$的解. 若$Ax=\theta$ 的基础解系为$\alpha_1,\dots,\alpha_r$，则 $Ax=b$ 的通解为：$\eta+k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r$，其中$k_1,\dots,k_r\in R$为任意实数 .

证明 由$A(\eta+\alpha)=A\eta+A\alpha=b+\theta=b$，故$\eta+\alpha$为$Ax=b$的解.

设β为$Ax=b$的任意一个解，则$A(\beta-\eta)=A\beta-A\eta=b-b=\theta$，即$\beta-\eta$为$Ax=\theta$的一个解，设为α，则有$\alpha=\beta-\eta$，即$\beta=\eta+\alpha$.

综合上述，通解为：$\eta+\alpha=\eta+k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r$.

例3.4.10 求右边非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+x_3=6, \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=12, \\ 4x_1+6x_2-x_3+2x_4=18. \end{cases}$$

解 对增广矩阵做初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & -1 & 2 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2\div(-2)]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2 \\ r_4-r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

令$x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解：$\eta=(0,3,0,0)^T$. 对应齐次方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=(-2,3/2,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,0,1)^T$.

于是所求通解为：$x=\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

例3.4.11 将向量β表示为向量组 { $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ } 的线性组合，其中

$$\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\\mu\\2\end{pmatrix}.$$

解 此即求解

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

或者等价地求解方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1-2x_2+x_3=2,\\ 2x_1+3x_2+\mu x_3=0,\\ x_1+x_2+2x_3=-1.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&-2&1&2\\2&3&\mu&0\\1&1&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\2&3&\mu&0\\\lambda&-2&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\0&1&\mu-4&2\\0&-2-\lambda&1-2\lambda&2+\lambda\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+(\lambda+2)r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&6-\mu&-3\\0&1&\mu-4&2\\0&0&(\mu-6)(\lambda+2)+5&3(\lambda+2)\end{array}\right)=B_1.$$

当 $(\mu-6)(\lambda+2)+5=0$ 时，显然有$\lambda\neq-2$，故有$2=r(A)<r(B)=3$，所以此时无解.

当 **(*μ*-6)(*λ*+2)+5≠0 时，或者*λ*=-2，或者*λ*≠-2, *μ*≠6-5/(*λ*+2)，均有**

$$B_1 \xrightarrow{r_3\div((\lambda+2)(\mu-6)+5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6-\mu & -3 \\ 0 & 1 & \mu-4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+(4-\mu)r_3]{r_1+(\mu-6)r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \\ 0 & 1 & 0 & -1-\dfrac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5} \end{array}\right).$$

即方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}, \\ x_2 = -1-\dfrac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}, \\ x_3 = \dfrac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}. \end{cases}$$

故当且仅当*λ* =-2或*λ* ≠-2 , *μ* ≠6-5/(*λ*+2) 时，*β*可由线性表示，且线性组合

$$\beta = -\frac{15}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\alpha_1 - \left(1+\frac{3(2\lambda-1)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\right)\alpha_2 + \frac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)(\mu-6)+5}\alpha_3$$

是唯一的 .

3.5* 线性最小二乘法

矛盾方程组$Ax=b$无解，此时我们在所有x的取值中找最接近方程组$Ax=b$的解，即找误差向量$r=Ax-b$长度最小的x，这就是方程组$Ax=b$的**最小二乘解**. 该解其实就是法方程 $A^TAx=A^Tb$ 的解.

定理3.5.1 线性方程组$Ax=b$的法方程 $A^TAx=A^Tb$ 总有解. 当A列满秩时，法方程有唯一解，否则有无穷多组解.

定理3.5.2 x是线性方程组$Ax=b$的最小二乘解的充要条件是x是法方程$A^TAx=A^Tb$的解.

例3.5.1 求右边方程组的最小二乘解
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=12, \\ x_1-3x_2-2x_3=-6. \end{cases}$$

解 将方程组写成矩阵形式：$Ax=b$，其中
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

其法方程为：$A^TAx=A^Tb$. 求解法方程

$$\left(A^TA, A^Tb\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & -1 & 36 \\ -5 & 15 & 8 & 12 \\ -1 & 8 & 7 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

故方程组的最小二乘解为：$x=(5,3,-1)^T$.