2.4 初等变换与初等矩阵

初等变换：
- 行交换
- 行乘以一个非零数
- 行的倍数加到另一行

或者：
- 列交换
- 列乘以一非零数
- 列的倍数加到另一列

初等变换可简化矩阵：

尽可能变换成对角元素为1，其余元素为0

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div (-8)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss消去法与矩阵的初等变换

解如下方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 & (2) \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -14 & (3) \end{cases}$$

简化书写：矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{array}\right)$$

借用行列式符号

(2)-(1) , (3)-2(1):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 & (1) \\ 2x_2 - x_3 = 7 & (2) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (3) \end{cases}$$

r_2-r_1 , r_3-2r_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(1)-(3) , (2)-2(3):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ -5x_3 = 15 & (2) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (3) \end{cases}$$

r_1-r_3 , r_2-2r_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(2) $\div$ (-5):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ x_3 = -3 & (2) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (3) \end{cases}$$

$r_2 \div (-5)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ x_3 = -3 & (2) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(2) ↔(3): $r_2 \leftrightarrow r_3$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(1)-(3) , (2)-2(3): $r_1 - r_3$, $r_2 - 2r_3$:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 & (1) \\ x_2 = 2 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(1) ÷ 2: $r_1 \div 2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & (1) \\ x_2 = 2 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

定义2.4.1 (初等变换) 下面三种对矩阵的变换，统称为矩阵的初等变换：

(1) 对调变换：互换矩阵 i , j 两行(列)，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) .

(2) 数乘变换：用任意数 $k \neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行(列)，记作 kr_i (kc_i) .

(3) 倍加变换：把矩阵的第 i 行(列)的k倍加到第 j 行(列)，其中k为任意数，记作r_j+kr_i (c_j+kc_i) .

定义2.4.2 (初等矩阵) 将单位矩阵 E，做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵，对应于三类初等行(列)变换，有如下三种类型的初等矩阵 .

(1) 初等对调矩阵

对调E的i、j行
或者对调E的i、j列

$$E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array},$$

(2) 初等倍乘矩阵

E*的*i*行乘以*k
或者*E*的*i*列乘以*k*

$$E(i(k))=\left(\begin{array}{ccccc}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array},$$

i*行上元素*k

(3) 初等倍加矩阵

***E*的*j*行*k*倍加到*i*行**
或者*E*的*i*列*k*倍加到*j*列

$$E(i,j(k))=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}&&i\text{ 列}&&j\text{ 列}&&\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\end{array},$$

(*i*, *j*)元素是*k*

例2.4.1 计算矩阵与初等矩阵的乘积：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

再看矩阵的初等变换与初等矩阵左乘右乘结果：

以右边矩阵为例： $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

比较行变换与左乘初等矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad E(1,2)A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

比较列变换与右乘初等矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+2c_3}\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad AE(1,2)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

更加直观地看：

$A = EA,$ 即 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

从左边行变换 $r_1 \leftrightarrow r_2$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$ 即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$A = AE,$ 即 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

从右边列变换 $c_1 + 2c_3$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ 即 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

定理2.4.1 (初等变换与初等矩阵) 设 A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于A的右边乘以一个相应n阶初等矩阵.

证明　只须具体验证即可，此处只举一种情形. A按行分块，A施行第三种初等行变换，将 A的第 j行乘 k倍加到i行上，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\text{而}E(i,j(k))A=\begin{pmatrix}1&&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&1&\cdots&k&\\ &&&\ddots&\vdots&\\ &&&&1&\\ &&&&&\ddots&\\ &&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}.$$

注：定理中相应初等矩阵表示同样的初等变换作用到E后的初等矩阵。

初等变换和分块矩阵结合来考虑例2.2.7的证明 思路.

P_{33}中例2.2.7原题为：证明 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

矩阵变换 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ -1 & b \end{pmatrix}$,

没有乘法交换，即可推广到分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}$,

取行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} \overset{\text{行倍加}}{=} \left|\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -E \end{vmatrix}.$$

定义2.4.3 (行(列)等价矩阵，等价矩阵) 如果A经过有限次初等行变换变成矩阵B，称矩阵 A与B行等价，记作 $A \xrightarrow{r} B$；若矩阵 A经有限次初等列变换变成矩阵 B， 称矩阵A与B列等价，记作 $A \xrightarrow{c} B$；若矩阵 A经有限次初等列变换变成矩阵 B， 称矩阵A与B列等价，记作$\boldsymbol{A \rightarrow B}$.

矩阵的等价具有一般等价关系的3个性质：

(1) 自反性：A与其自身等价；
(2) 对称性：若A与B等价，则B与A等价；
(3) 传递性：若A与B等价且B与C等价，则A与C等价 .

零行(列)：矩阵A中元素全为零的行(列).

非零行(列)：矩阵A中元素不全为零的行(列).

定义2.4.4 (梯形矩阵，矩阵的标准形) 若矩阵A满足下面两个条件：

(1) 若有零行，则零行全部在下方，

(2) 从第一行起将，每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加，

则称A为行梯形矩阵. 若A还满足：

(3) 非零行的第一个非零元素为1，且 "1"所在的列的其余元素全为零，

则称A为行简化梯形矩阵. 类似可定义列梯形矩阵与列简化梯形矩阵 .

若矩阵A既是行简化梯形矩阵，又是列简化梯形矩阵，则称A是标准形矩阵，矩阵的标准形可写为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

行梯形如：$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，行简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

列梯形如：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2.1 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，列简化梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 17 & 7\frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

标准形如：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

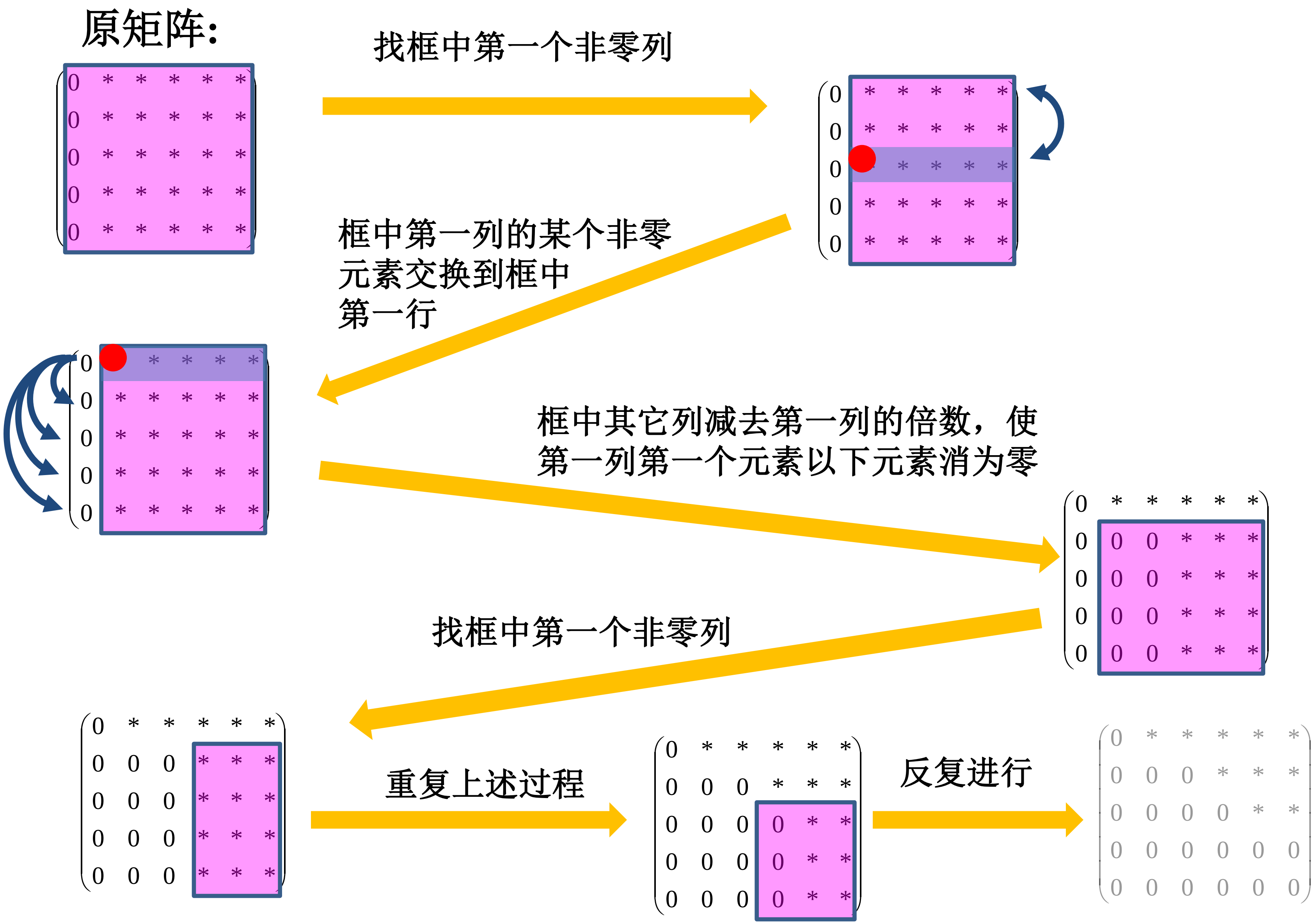
定理2.4.2 (矩阵的化简) 设 A为 $m\times n$矩阵，

(1) 存在m阶初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$使$P_sP_{s-1}\ldots P_2P_1A$ (即对A施行有限次的初等行变换) 成为$m\times n$阶行简化梯形矩阵 .

也存在n阶初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_t$使$AQ_1Q_2\ldots Q_t$ (即对A施行有限次的初等列变换) 成为$m\times n$阶列简化梯形矩阵 .

(2) 可以经过有限次的初等行变换和初等列变换，将矩阵A化为标准形 .

初等变换化行梯形、行简化梯形的说明



进一步化为行简化梯形

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

每一行非零行除以非零行首元素，化非零行首为**1**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第二行乘以某个倍数加到第一行上，消去行首**1**上面的元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其它行乘以某个倍数加到它上面的所有行，消去该行行首**1**上的元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例2.4.2 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 3 & -5 & 7\\ 2 & 3 & -7 & 8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$可经下列初等行变换化为行简化梯形矩阵．

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 3 & -5 & 7\\ 2 & 3 & -7 & 8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -7 & 8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -8 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

最后得到的矩阵是一个行简化梯形矩阵，相应的初等变换矩阵为

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

验算可得

$$P_4P_3P_2P_1A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 5\\ 1 & 3 & -5 & 7\\ 2 & 3 & -7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$