5.1.1 二次型的定义

考虑平面二次曲线方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 .$$

和空间二次曲面方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 .$$

此类方程都涉及式子 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ，该式子称为二次型，可用矩阵来研究.

例5.1.1 二次曲线方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 . \qquad (5.1)$$

表示或椭圆、或双曲线、或抛物线、或退化的点和直线.

解 题中的二次曲线方程可表示成

$$f(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0, \quad \text{不妨设} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq O.$$

若 $a_{12}=0$，可令 $\theta=0$，否则令 θ 满足：
$$\begin{cases} \sin 2\theta = \dfrac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}, \\ \cos 2\theta = \dfrac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}. \end{cases}$$

计算可得 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$

先做旋转变换 $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$

此时方程为

$$g(x',y') = (x',y',1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_{13} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

令 $d_1 = \begin{cases} -b_{13}/\lambda_1, & \text{若}\lambda_1 \neq 0, \\ 0, & \text{若}\lambda_1 = 0, \end{cases}$ $d_2 = \begin{cases} -b_{23}/\lambda_2, & \text{若}\lambda_2 \neq 0, \\ 0, & \text{若}\lambda_2 = 0. \end{cases}$ 再作平移变换 $\begin{cases} x' = x'' + d_1, \\ y' = y'' + d_2, \end{cases}$

方程可化为

$$h(x'',y'') = \begin{cases} \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 = 0, & \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \\ 2b_{13}x'' + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 = 0, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \\ \lambda_1 x''^2 + 2b_{23}y'' + \lambda_3 = 0, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

若 λ_1, λ_2 同号，但与 $-\lambda_3$ 异号，则方程(5.1)为矛盾方程；
若 λ_1, λ_2 同号，但 $\lambda_3=0$，则方程(5.1)退化为一个点；
若 $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3$ 同号，则方程(5.1)表示椭圆；
若 λ_1, λ_2 异号，但 $\lambda_3=0$，则方程(5.1)退化为两条直线；
若 λ_1, λ_2 异号，但 $\lambda_3\neq 0$，则方程(5.1)表示双曲线；
若 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=0$，则方程(5.1)表示抛物线.

定义5.1.1 (二次型) 含有n个变量的在某个数域上的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
&+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

称为二次型； 若全部 $a_{ij}\in \mathbf{R}$，则称式(5.2)中的f 为实二次型；若全部 $a_{ij}\in \mathbf{C}$，则称式(5.2)中的f 为复二次型 .

* 本书主要考虑实二次型.

(5.2)式中令 $a_{ji}=a_{ij}$，则二次型 f 可改写为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n \\
& + \ldots\ \ldots\ \ldots \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2 .
\end{aligned}
$$

可用矩阵表示为: $f(x_1, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$，称为二次型 f 的矩阵表示，其中

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$， 则

f 与对称矩阵 A 一一对应.

定义5.1.2 (二次型的矩阵) 称二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$$

中的对称矩阵A为二次型 f 的矩阵，A的秩称为二次型 f 的秩.

例5.1.2 求二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$$

的矩阵表示.

解 容易写出 $f(x_1, x_2, x_3) = x^{\mathrm{T}}Ax$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$