4.5 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵：$A^{T}=A$ ，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$

•实对称矩阵一定可以对角化

•与实对称矩阵相似的对角矩阵是实对角矩阵（对角元为实数）

•存在正交的相似变换矩阵，使得实对称矩阵对角化

后两条隐含了如下含义：

•实对称矩阵的特征值都是实数

•实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交

第一条表示的是：

•对任意特征值λ，有 $\mathrm{r}(\lambda E-A)+\lambda$的重数$=n$ (矩阵阶数)

实对称矩阵特征值与特征向量

定理4.5.1 实对称矩阵的特征值均为实数.

证明思路 $A\xi=\lambda\xi$，

考虑 $A\xi$，凑成对称形式 $\bar{\xi}^{T}A\xi$，于是 $\bar{\xi}^{T}A\xi=\lambda\bar{\xi}^{T}\xi=\lambda\|\xi\|^2$

利用对称性 $(\overline{\bar{\xi}^{T}A\xi})^{T}=\bar{\xi}^{T}A\xi$，则 $\bar{\lambda}\|\xi\|^2=\lambda\|\xi\|^2$，即 $\bar{\lambda}=\lambda$.

$$(\overline{\bar{\xi}^{T}A\xi})^{T}=(\xi^{T}\bar{A}\bar{\xi})^{T}=(\xi^{T}A\bar{\xi})^{T}=\bar{\xi}^{T}A\xi$$

注意 当矩阵为实矩阵，特征值也是实数时，我们只考虑实的特征向量.

定理4.5.2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明思路 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$，$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，

将 $A\xi_1$，$A\xi_2$ 凑成对称形式 $\xi_1^{T}A\xi_2=\xi_2^{T}A\xi_1$，

于是 $\lambda_2\xi_1^{T}\xi_2=\lambda_1\xi_2^{T}\xi_1$，则 $(\lambda_2-\lambda_1)\xi_1^{T}\xi_2=0$，即 $\xi_1^{T}\xi_2=0$.

实对称矩阵可对角化

引理4.5.1 设有实n维单位列向量β，则必能找到n-1个向量与β一起构成由n个向量组成的标准正交向量组.

证明思路 用 $\beta, e_1, e_2, \dots, e_n$ 构成n个无关向量 $\beta, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$,

利用施密特正交化方法标准正交化：$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$, ($\beta_1=\beta$).

定理4.5.3 若A是实对称矩阵，则存在同阶的正交矩阵P使得P^TAP是实对角矩阵，从而实对称矩阵可对角化.

证明思路 数学归纳法：m+1阶矩阵A，$Aq_1=\lambda_1 q_1$, $Q_1=(q_1, q_2, \dots, q_{m+1})$正交阵

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_{m+1}^T \end{pmatrix} A(q_1, q_2, \cdots, q_{m+1}) = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_{m+1}^T \end{pmatrix} (\lambda_1 q_1, Aq_2, \cdots, Aq_{m+1}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & B & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

矩阵对称

B对称

进一步利用归纳假设：$Q_2^T B Q_2=\Lambda$，B为上述右下块，则

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}^T Q_1^T A Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \text{其中} P^T P = E$$

例4.5.1 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵 .

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\-1&\lambda-3&-1\\-2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\-1&\lambda-3&-1\\-2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-5),$$

解得特征值为 $\lambda=5,2,0$.

对 $\lambda=5$，由 $\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&2&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

对 $\lambda=2$，由 $\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&-1&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$

对 $\lambda=0$，由 $\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-1&-3&-1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$

由定理4.5.2知，ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，因此，只要将他们单位化. 取

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{\xi_1^T\xi_1}}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{\xi_2^T\xi_2}}\xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{\xi_3^T\xi_3}}\xi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3}&-2/\sqrt{6}&0\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(5,2,0)$.

例4.5.2 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，**求正交矩阵 *P*，使 $P^{T}AP$ 为对角矩阵 .**

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

解得特征值为 λ=2 (二重) , -7 。

对 λ=2, 由 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **得线性无关特征向量** $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$

标准正交化得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$

对 λ=-7，由 $\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ **得单位特征向量** $\eta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}.$

再令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-6&2&-\sqrt{5}\\3&4&-2\sqrt{5}\\0&5&2\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

则有 $P^{T}P=E$, $P^{T}AP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2,2,-7)$.

例4.5.3 设3阶实对称矩阵 A的秩为2，λ=6为A的二重特征值，若 $\alpha_1=(1,0,1)^T$, $\alpha_2=(1,3,-2)^T$ 都是A的属于 λ=6 的特征向量，求矩阵A .

解 因为 $r(A)=2$，所以 $|A|=0$，故 $\lambda=0$为A的特征值 .

设α_3是属于特征值0的特征向量，则由A为实对称矩阵的性质可知：α_3与属于特征值6的特征向量α_1, α_2 正交.

令$\alpha_3=(x_1, x_2, x_3)^T$，则由正交性得方程组 $\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_3)=x_1 \qquad\qquad +x_3=0,\\ (\alpha_2,\alpha_3)=x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$

解此方程组可得基础解系：$\alpha_3=(-1,1,1)^T$. 现在我们有

$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(6\alpha_1, 6\alpha_2, \theta)$，即 $A\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6&0\\0&18&0\\6&-12&0\end{pmatrix}.$

故 $$A=\begin{pmatrix}6&6&0\\0&18&0\\6&-12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&1\\1&-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&6&0\\0&18&0\\6&-12&0\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&1&4\\1&2&-1\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$