习题二补充讲解(3)

补充题：设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用此极大无关组表示其余向量。

解：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&1\\2&-2&1&0&1\\-1&1&1&-3&0\\3&-3&0&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5\}$ 为一个极大无关组，并有 $\alpha_2=-\alpha_1$，$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_3$.

44 证 必要性：$r(A)=r$ 可知存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 C_1,C_2，使得 $A=C_1\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}C_2$，

将 C_1,C_2 分块为 $C_1=(P_{m\times r},\tilde{P}_{m\times(m-r)}),C_2=\begin{pmatrix}Q_{r\times n}\\\tilde{Q}_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$，则有

$A=C_1\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}C_2=(P_{m\times r},O)\begin{pmatrix}Q_{r\times n}\\\tilde{Q}_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}=P_{m\times r}Q_{r\times n}$，且 $r=r(A)\le r(P_{m\times r})\le r$，

故 $r(P_{m\times r})=r$，同理 $r(Q_{r\times n})=r$

充分性：$r(P_{m\times r})=r$ 可知存在一系列的行初等变换使得 $P_{m\times r}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}=C_1P_{m\times r}$，

同理 $Q_{r\times n}\xrightarrow{c}(E_r,O)=Q_{r\times n}C_2$. 其中 C_1,C_2 可逆，故

$r(A)=r(C_1AC_2)=r(C_1P_{m\times r}Q_{r\times n}C_2)=r(\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix})=r$

49 证 $A\in\mathbf{R}^{n\times m},B\in\mathbf{R}^{m\times n},AB=E$，故有 $n=r(E)=r(AB)\le r(B)\le n$，

即 $r(B)=n$，等于 B 的列数，于是 B 的列向量无关

52 证 若有一个向量 α_j 可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表示，即

$\alpha_j=k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}$，则 $k\ne0$，否则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j$ 线性相关，

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，矛盾. 故有 $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{j-1}}{k}\alpha_{j-1}+\frac{1}{k}\alpha_j$.

假设 α_r 可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示，r>j，则有

$\alpha_r=t\beta+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{r-1}\alpha_{r-1}=(t_1-\frac{tk_1}{k})\alpha_1+\cdots+t_{r-1}\alpha_{r-1}$，

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，引出矛盾. 故不可能有两个向量可由其前面的向量表示

53(2) 解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故$r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$

从行简化梯形矩阵可看出 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$为一个极大无关组

56 解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right)$，当$a+1=0$时，

从行简化梯形阵可知β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示，故 A,B 不等价.

当$a+1\neq 0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的一个极大无关组，

而 $|(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=6\neq 0$，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也为向量组

$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的一个极大无关组，故 A,B 等价

58 证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的极大无关组，因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$有相同的秩，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$也是向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$的极大无关组，故$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$线性表示，

从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$等价

60 证 因为 A 组能由 B 组线性表示，故 B 的极大无关组也是{A,B}的极大无关组.
于是$r(A,B)=r(B)$，又$r(A)=r(B)$，故 A 组的极大无关组也是{A,B}的
极大无关组，故 B 组也能由 A 组表示.，于是 A 与 B 等价