#### 5.1.3 二次型的规范形

#### 标准形中找最简单且唯一的形式——规范形

实二次型:  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T A x$ 的标准形

$$g(y_1,y_2,...,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+...+d_ny_n^2$$

最简形式为:  $\pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm ... \pm y_r^2$  其中: r为二次型的秩

若是复二次型:最简形式可最终化为

若是实二次型:最简形式只能化为

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2$$
  
 $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$ 

定义5.1.6 ( $\underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{y}})$ 二次型的规范形) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化的实线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$
,  $r \le n$ ,

称为原二次型的<mark>实规范形,r</mark>称为该二次型的秩;

复二次型经过非退化的复线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2$$
,  $r \le n$ ,

称为原二次型的复规范形,r称为该二次型的秩.

#### 二次型的规范形存在定理

#### 定理5.1.2 存在非退化的复线性变换将复二次型化为复规范形

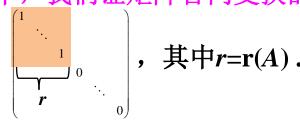
$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2$$
;

存在复可逆矩阵将复对称矩阵合同变换为  $\operatorname{diag}(E_r, O_{n-r})$ ,其中r为二次型矩阵的秩.

#### 证明思路:

两个结论等价,只要证其中的一个,我们证矩阵合同变换的结论.

分2步将复对称矩阵A合同变换为



(1) 合同变换为 对角矩阵:

$$P^{T}AP = \begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $b_{ii} \neq 0$ 

(2) 合同变换 为规范形:

$$\begin{bmatrix}
1/\sqrt{b_{11}} & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & 1/\sqrt{b_{rr}} & & \\
& & & 1 & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{bmatrix}^{T} \begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & b_{rr} & & & \\
& & & 0 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & 0
\end{pmatrix}$$

## 定理**5.1.3** (惯性定理) 存在非退化的实线性变换将实二次型化为实规范形 $z_1^{2+}...+z_p^{2}-z_{p+1}^{2}...-z_r^{2}$ ;

存在实可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为  $\operatorname{diag}(E_p, -E_{r-p}, O_{n-r}),$ 其中r为二次型矩阵的秩,p是唯一确定的.

#### 证明思路:只证矩阵合同变换的结论.实对称矩阵 $A, \mathbf{r}(A) = r$ .

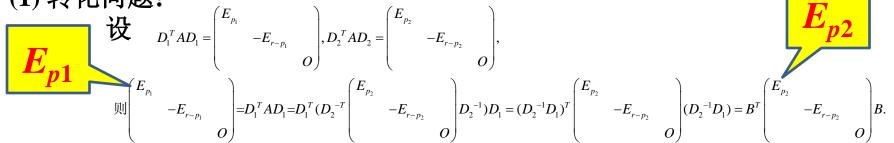
存在性分2步:

(1) 合同变换为 对角矩阵: <sub>P<sup>T</sup>AP=</sub>

其中 $b_{11}>0,...,b_{pp}>0$ ,而 $b_{p+1,p+1}<0,...,b_{rr}<0$ .

#### 唯一性: 反证法

(1) 转化问题:



(2) 证明 $p_1 \neq p_2$  时将出现矛盾: 不妨设  $p_1 > p_2$ ,且有可逆矩阵 B 使得

$$egin{pmatrix} E_{p_1} & & & & \ & -E_{r-p_1} & & \ & & O \end{pmatrix} = B^T egin{pmatrix} E_{p_2} & & & \ & -E_{r-p_2} & \ & & O \end{pmatrix} B.$$

利用二次型的值来导出矛盾:

$$\begin{bmatrix}
E_{p_1} \\
x^T
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
E_{p_1} \\
-E_{r-p_1} \\
O
\end{bmatrix} x = x^T B^T \begin{bmatrix}
E_{p_2} \\
-E_{r-p_2} \\
O
\end{bmatrix} Bx = y^T \begin{bmatrix}
E_{p_2} \\
-E_{r-p_2} \\
O
\end{bmatrix} y.$$

#### 希望有:

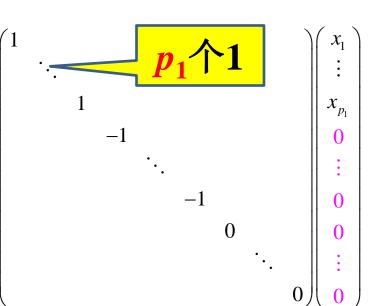
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{p1}^2 \ge 0$$

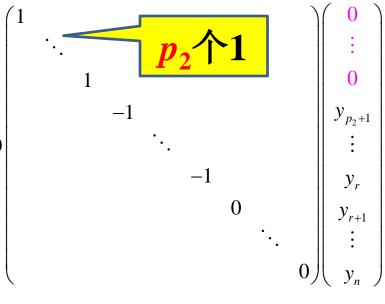
$$(x_1, \dots, x_{p_1}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$$

### $p_1>p_2$

$$=(0,...,0,y_{p_2+1},...,y_r,y_{r+1},...,y_n)$$

#### 其中 y=Bx 的前 $p_2$ 个方程为:





# 定义5.1.7 (正惯性指数、负惯性指数) 若实二次型的实规范形为 $z_1^{2+}...+z_p^{2}-z_{p+1}^{2}-...-z_r^{2}$ , $r \leq n$ , 则称p为原二次型的正惯性指数;称r-p为原二次型的负惯性指数.

- 推论5.1.4 若实二次型矩阵 A 合同于对角矩阵  $B=\operatorname{diag}(b_{11},...,b_{nn})$ ,则正对角元个数为实二次型的正惯性指数,负对角元个数为实二次型的负惯性指数,非零对角元个数为二次型的秩.
- 证明思路: 若 $b_{i1i1}, \ldots, b_{ipip}$ 都>0, $b_{ip+1,ip+1}, \ldots, b_{irir}$ 都<0,其余对角元为0,则有  $B_2 = C^T B C = \operatorname{diag}(b_{i1i1}, \ldots, b_{ipip}, b_{ip+1,ip+1}, \ldots, b_{irir} 0, \ldots, 0)$   $= \operatorname{diag}(s_1^2, \ldots, s_p^2, -s_{p+1}^2, \ldots, -s_r^2, 0, \ldots, 0)$ ,其中  $C = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ . 进一步有  $\Lambda^T B_2 \Lambda = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ ,其中  $\Lambda = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_r, 1, \ldots, 1)$ .
- 推论5.1.5 实二次型矩阵 A 的正特征值个数为正惯性指数,负特征值个数为负惯性指数,非零特征值个数为二次型的秩.
- 证明思路: A实对称,存在正交矩阵P使得 $P^TAP=P^{-1}AP=$ diag( $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ),再用推论5.1.4的结论.

#### 例5.1.8 求实二次型

 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ = $2x_1^2$ - $4x_1x_2$ - $12x_1x_3$ + $8x_1x_4$ + $9x_2^2$ + $18x_2x_3$ - $10x_2x_4$ + $23x_3^2$ - $20x_3x_4$ + $4x_4^2$ 的惯性指数.

解 用合同变换法求该二次型的标准形,易知二次型矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & 4 \\ -2 & 9 & 9 & -5 \\ -6 & 9 & 23 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

对矩阵A对称地进行列和行的初等变换如下

$$A \xrightarrow{c_{2}+c_{1}}_{c_{3}+3c_{1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{2}+r_{1}}_{r_{3}+3r_{1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{3}-\frac{3}{7}c_{2}}_{c_{4}+\frac{1}{7}c_{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{26}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & -1 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_{3}-\frac{3}{7}c_{2}}_{r_{4}+\frac{1}{7}r_{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{4}-\frac{17}{26}c_{3}} \xrightarrow{r_{4}-\frac{17}{26}c_{3}}_{0} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{149}{26} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{4}-\frac{17}{26}c_{3}}_{0} \xrightarrow{r_{4}-\frac{17}{26}c_{3}}_{0}$$

故正惯性指数为3,负惯性指数为1.

#### 例5.1.9 求实二次型

 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ 的惯性指数.

#### 解 易知二次型矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们只要求A的特征值.由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 8) = 0$$

解得特征值为  $\lambda=-2,4+2\sqrt{2},4-2\sqrt{2}$ . 故正惯性指数为2,负惯性指数为1.