习题二补充讲解(2)

20(1) 解 显然 $(A,E)\xrightarrow{r}(PA,P)$，其中 PA 为行简化梯形. 行初等变换如下

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}-5 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5\end{array}\right)$$

则有 $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}, PA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$

27 解 因为$|A|=-2, AA^*=|A|E=-2E$，对 $A^*BA=2BA-8E$ 左乘 A,右乘 A^{-1}得

$AA^*BAA^{-1}=2ABAA^{-1}-8AA^{-1}$，即$-2B=2AB-8E$，进一步有$(A+E)B=4E$，

于是
$$B=(A+E)^{-1}4E=4(A+E)^{-1}=4\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

34 解 由 $ABA=C$ 可得$|A||B||A|=|C|=1$，

又$|A|=-4$，故$|B|=1/16$，且 $B=A^{-1}CA^{-1}$，

故 $B^{-1}=AC^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$，则 $B^*=|B|B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

36 解 因为$A^*=|A|A^{-1}$，故$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A=|A^{-1}|A$，其中$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-2$

求 A 如下

$$(A^{-1},E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{r_2-2r_3\\ r_2+r_3\\ r_2\div 2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -0.5 & -1.5 & -2.5\\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

即 $A=\begin{pmatrix}-0.5 & -1.5 & -2.5\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，故 $(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$

42 证 A 可逆则$|A|\neq 0$，且 $A^*=|A|A^{-1}$，故 A^*可逆且$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$.

又$(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}A$，得到$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$