5.1.2 二次型的标准形

对二次型

$$f(x,y,z)=x^2-2xy+8xz+y^2+8yz+4z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

作变换 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt6}x'+\dfrac{1}{\sqrt2}y'+\dfrac{1}{\sqrt3}z',\\ y=\dfrac{1}{\sqrt6}x'-\dfrac{1}{\sqrt2}y'+\dfrac{1}{\sqrt3}z',\\ z=\dfrac{2}{\sqrt6}x'-\dfrac{1}{\sqrt3}z',\end{cases}$

得

$$f(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=8x'^2+2y'^2-4z'^2=g(x',y',z').$$

原二次型现在简化成了只有平方项的简单二次型(二次型的标准形)

$$f(x,y,z)=g(x',y',z')=8x'^2+2y'^2-4z'^2\ .$$

可用矩阵表示变换：

$$f(x,y,z)=(x',y',z')P^{\mathrm T}\begin{pmatrix}1&-1&4\\-1&1&4\\4&4&4\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=8x'^2+2y'^2-4z'^2,\text{其中}P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

若变换为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$， 其中 $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，

则二次型简化成如下标准形

$$f(x,y,z) = (x'',y'',z'')Q^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}Q\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = x''^2 + 4y''^2 - 16z''^2 = h(x'',y'',z'').$$

二次型可以简化成不同的标准形：

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 8x'^2+2y'^2-4z'^2 = g(x',y',z') \\ &= x''^2+4y''^2-16z''^2 = h(x'',y'',z''). \end{aligned}$$

定义5.1.3 (线性变换、非退化线性变换) 称如下的变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的一个线性变换.

若线性变换的系数行列式

$$|P| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则称该线性变换为非异线性变换或非退化线性变换.

若 $|P|=0$，则称该线性变换为奇异线性变换或退化线性变换.

若 P 为正交矩阵，则称该线性变换为正交变换.

定义5.1.4 (合同、合同变换) 设A和B是两个同阶方阵，若存在一个可逆矩阵P，使得有$B=P^{T}AP$，则称A合同于B. 称B为A的合同矩阵，而称P为A到B的合同变换矩阵.

矩阵的合同关系是一个等价关系：

满足： (1) 自反性：A与A合同；(2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同；

(3) 传递性：若A与B合同，B与C合同，则A与C合同.

二次型的简化

定义5.1.5 (二次型的标准形) 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化线性变换后得到一个只包含变量平方项的二次型 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ny_n^2$，称为原二次型的标准形 .

定理5.1.1 存在非退化的线性变换将实二次型化为标准形，且平方项系数可以任意次序排列；存在可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为实对角矩阵，且对角元素可以任意次序排列.

证明 由于实二次型的非退化线性变换与实对称矩阵的合同变换等价，故我们只证明第二个结论：存在可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为实对角矩阵.

设对称阵$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，则由定理4.5.3 可知存在正交阵$P$，使得

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

即P将A合同变换为实对角矩阵.

再令 $D=(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})$，其中$(i_1,i_2,\dots,i_n)$为$(1,2,\dots,n)$的一个排列，则有

$$(PD)^{\mathrm{T}}A(PD)=D^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)D=\mathrm{diag}(\lambda_{i1},\lambda_{i2}, \dots ,\lambda_{in}),$$

故对角元素可任意排列.

化标准形——正交变换法

（即实对称矩阵的正交对角化）

实二次型：$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=x^TAx$

正交变换法化实二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形的步骤：

(1) 求解矩阵A的特征方程 $|\lambda E-A|=0$，解得特征值 $\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$；

(2) 对每一个特征值 $\lambda=\lambda_i$ (s_i重)，求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E-A)\,x=\theta$$

的基础解系(即特征向量的极大无关组) $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{isi}$，并标准正交化为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{isi}$；

(3) 将标准正交化的特征向量作为列构成正交矩阵

$$P=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

则非退化线性变换 $x=Py$ 将实二次型 $f(x)$ 化为标准形

$$f(x)=g(y)=y^T\Lambda y,$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r)$。

例5.1.3 用正交变换将实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形，并给出相应的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^T Ax,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ -1 & 1 & 4\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

求A的特征值和标准正交的特征向量. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -4\\ 1 & \lambda-1 & -4\\ -4 & -4 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+8)=0.$$

解得特征值为 $\lambda=2,4,-8$.

对 $\lambda=2$，可求得单位特征向量 $\eta_1=\sqrt{2}^{\,-1}(-1,1,0)^T$.

对 $\lambda=4$，可求得单位特征向量 $\eta_2=\sqrt{3}^{\,-1}(1,1,1)^T$.

对 $\lambda=-8$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\sqrt{6}^{\,-1}(-1,-1,2)^T$.

令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

则有 $P^TP=E$, $P^TAP=\mathrm{diag}(2,4,-8)$. 故在线性变换

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3,\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3,\\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_3,\end{cases}$$

下，原实二次型化成的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+4y_2^2-8y_3^2$.

例5.1.4 用正交变换将实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形，并给出相应的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^T Ax, \quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

求A的特征值和标准正交的特征向量. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ \lambda-1 & \lambda & 1\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0.$$

解得特征值为 λ=1(二重),-2 .

对 λ=1，可求得相互正交的单位特征向量 $\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$

对 λ=-2，可求得单位特征向量 $\eta_3=\sqrt{3}^{\,-1}(-1,1,1)^T$.

令

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

则有 $P^TP=E$, P^TAP=diag(1,1,-2). 故在线性变换

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\ x_3=\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\end{cases}$$

下，原实二次型化成的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

化标准形——配方法（利用配方依次消去交叉项）

配方法化实二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形的步骤：

反复对可能出现的以下两种情况进行处理：

情况1 式中有非零平方项，例如若非零平方项为 $a_{11}x_1^2$，则将式中所有

含 x_1 的项配成一个平方项 $a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$，并令非退化线性变换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

则可将原式化为不含 x_1 也不含 y_1 的交叉项的式子。

情况2 式中无非零平方项，这时我们可以用一个线性变换配出平方项。例如，若有非零交叉项为 $2a_{12}x_1x_2$，则作如右边的非退化线性变换就可将原式化为含有 y_1, y_2 的平方项的式子，再按情况1进行处理。

$$\begin{cases} x_1 = y_1+y_2, \\ x_2 = y_1-y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \cdots\cdots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

每配成一个平方项，就必须消去一个元素如与 x_1 相关的所有项（包括平方项和交叉项），直到一系列的变换将所有的交叉相均消去即成标准形。

例5.1.5 用配方法将例5.1.3中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 逐次对一个平方项及与该平方项有关的交叉项进行配方

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2 \\ &= (x_1-x_2+4x_3)^2+16x_2x_3-20x_3^2 \\ &= (x_1-x_2+4x_3)^2-20(x_3-0.4x_2)^2+3.2x_2^2 . \end{aligned}$$

从而立即得到原二次型的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-20y_2^2+3.2y_3^2$.

所用线性变换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 4x_3, \\ y_2 = x_3 - \dfrac{2}{5}x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

例5.1.6 用配方法将例5.1.4中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 该二次型不含平方项，先做一个非退化线性变换从交叉项中产生平方项. 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3 \\ &= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-2(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2(y_2-y_3)^2+2y_3^2. \end{aligned}$$

从而求得原二次型的标准形为：$g(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$.

所用线性变换为

$$\begin{cases} z_1 = y_1 = 0.5x_1 + 0.5x_2, \\ z_2 = y_2 - y_3 = 0.5x_1 - 0.5x_2 - x_3, \\ z_3 = y_3 = x_3. \end{cases}$$

注1：配方过程中所用的线性变换都必须是非退化的 .

例子可见 习题五的 2(4)

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$ ，

不能直接用变换：$y_1=x_1+x_2, y_2=x_2+x_3, y_3=x_3+x_4, y_4=x_4+x_1$，因为变换$y=Px$

是退化线性变换，变换矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是不可逆的，即 $|P|=0$.

应该先展开式子，再进行配方消交叉项：

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_4+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2$,

$=2(x_1+0.5x_2+0.5x_4)^2+1.5(x_2+(2/3)x_3-(1/3)x_4)^2+(4/3)(x_3+x_4)^2$

$=2y_1^2+1.5y_2^2+(4/3)y_3^2$,

其中：$y_1=x_1+0.5x_2+0.5x_4, y_2=x_2+(2/3)x_3-(1/3)x_4, y_3=x_3+x_4, y_4=x_4$.

化标准形——合同变换法

（对称进行行列初等变换化对角阵）

合同变换法化实二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形的原理：

设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

作一次如下的对称性的变换：

(1) 假设$a_{11}\neq 0$，进行列变换：将第2列减去第1列的 a_{12}/a_{11}倍，则第一行的a_{12}消为0，再进行相应的行变换（第2行减去第1行的a_{12}/a_{11}倍），则第一列的a_{12}也消为0。依次进行消第一行和第一列的a_{13}项, a_{14}项，…，直到第一行和第一列的非对角元全部消为0 .

(2) 若$a_{11}=0$，则将某个非零对角元通过行交换和列交换移到左上角的位置。如$a_{kk}\neq 0$，交换1行和k行，再交换1列和k列即可 .

(3) 若对角元都是0，但是有非对角元非零，则将该非对角元加到对角元，利用列加到列，对称地再行加到行. 如$a_{ij}\neq 0$，将j列加到i列，j行加到i行，再将i行i列现在的非零元$2a_{ij}$用(2)的方法移到左上角位置即可 .

合同变换法化实二次型 $f(x)=x^TAx$ 为标准形：

对矩阵 $B=\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$

对k=1,2,…,n，做一系列初等列变换，消去k行的所有非零元素。再对称地消去k列的所有非零元素，最后得到矩阵

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T & \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} P^T AP \\ P \end{pmatrix}$$

其中 Λ 为对角矩阵，而 P 为非退化线性变换矩阵，变换为 $x=Py$.
原二次型化为标准形：

$$f(x) = g(y) = y^T\Lambda y \, .$$

例5.1.7 用合同变换法将例5.1.3中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2$$

化为标准形并指出所用的线性变换.

解 该实二次型的矩阵形式为

$$f(x) = x^T Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

做如下合同变换：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-4c_1]{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & -20 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -20 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -12 & -20 \\ \hline 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -12 & -20 \\ \hline 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & 16 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

则在线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = y_2 - 3y_3, \\ x_3 = y_2 - 2y_3, \end{cases}$$

下，原二次型化成的标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-4y_2^2+16y_3^2$.

注2：合同变换法还可以将一个复对称矩阵化为复对角矩阵，从而复二次型可以经合同变换化为标准形。