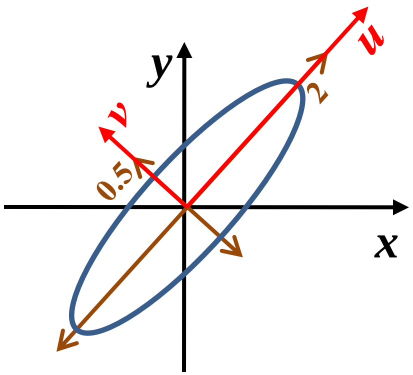
4.2 特征值与特征向量

已知方阵A，求λ和$\xi \neq \theta$，满足 $A\xi = \lambda\xi$，称为特征值问题.

特征值　　特征向量

几何变换与特征值问题

用 $A = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$ 表示图形几何变换 $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y, \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y. \end{cases}$



则效果为 u,v方向上的拉伸。

当用 u,v坐标时，变换为 $\begin{cases} u' = 2u, \\ v' = 0.5v. \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

u,v这两个拉伸方向用向量ξ,η表示时，将满足 $A\xi=2\xi$, $A\eta=0.5\eta$，拉伸倍数2和0.5为A的特征值，对应拉伸方向$\xi=(1,1)^T$和$\eta=(-1,1)^T$为A的属于2和0.5的特征向量。

相似变换与特征值问题

从相似矩阵这一节内容中，我们看到，若有 $A=P\Lambda P^{-1}$，或者 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中Λ为对角矩阵，则A^m就很容易求出，为$A^m=P\Lambda^m P^{-1}$.

考虑斐波那契(Finonacci)数列：

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, ……

递推公式为：$F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, n=1,2,3, …… .

利用矩阵发现该数列有如下关系

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

故有

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}, \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}.$$

为求A^n，需求矩阵 P 使得：$A = P\Lambda P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

将$A=P\Lambda P^{-1}$，改写成：$AP=P\Lambda$，再令$P=(\xi, \eta)$，于是有：

$$(A\xi, A\eta)=(\xi, \eta)\Lambda=(\lambda_1\xi, \lambda_2\eta),$$

即：　$A\xi=\lambda_1\xi$，$A\eta=\lambda_2\eta$.　　λ_1, λ_2为特征值，ξ, η为特征向量 .

如何计算特征值、特征向量？

计算 $A\xi=\lambda\xi \Leftrightarrow (\lambda E-A)\xi=\theta \Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$.

计算前述几何变换矩阵 A 的特征值问题：

(1) 求特征值λ：计算 $|\lambda E-A|=0$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5/4 & -3/4\\ -3/4 & \lambda-5/4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-2\\ -3/4 & \lambda-5/4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1/2)=0.$$

得特征值 $\lambda=2$和$\lambda=1/2$.

(2) 求特征向量ξ：解齐次方程组$(\lambda E-A)\xi=\theta$.

$\lambda=2$时，解得 $(2E-A)\xi=\theta$ 的解为 $\xi=k_1(1,1)^T$.

$\lambda=1/2$时，解得 $(0.5E-A)\eta=\theta$ 的解为 $\eta=k_2(-1,1)^T$.

计算前述斐波那契数列相关矩阵 A 的特征值问题：

(1) 求特征值λ：计算 $|\lambda E-A|=0$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-\lambda-1)=0.\quad \text{解得特征值：}\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(2) 求特征向量ξ：解齐次方程组$(\lambda E-A)\xi=\theta$.

$\lambda_1=(1+\sqrt{5})/2$时，解得 $(\lambda_1E-A)\xi=\theta$ 的解为 $\xi=k_1(\lambda_1,1)^T$.

$\Lambda_2=(1-\sqrt{5})/2$时，解得 $(\lambda_2E-A)\eta=\theta$ 的解为 $\eta=k_2(\lambda_2,1)^T$.

特征值、特征向量一些概念

定义4.2.1 (特征值、特征向量) 设 A 是实数域R或复数域C上的一个方阵，$\lambda \in C$，若存在非零向量 ξ 使得 $A\xi = \lambda \xi$，则称 λ 为矩阵 A 的特征值，称 ξ 为A 的属于特征值 λ 的特征向量 .

定理4.2.1 设方阵 A 有特征值 λ，ξ_1, ξ_2 为属于 λ 的特征向量，则它们的任意不等于零向量的线性组合 $\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ ($k_1, k_2 \in R$) 仍是属于 λ 的特征向量 .

证明：直接验证 $A\eta = k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 = k_1\lambda\xi_1 + k_2\lambda\xi_2 = \lambda \eta$.

定义4.2.2 (特征多项式、特征方程、特征矩阵) $|\lambda E-A|$ 称为A的特征多项式；$|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程 . 方程 $|\lambda E-A|=0$ 的解称为A的特征根，而 $\lambda E-A$ 称为A的特征矩阵 .

* A的特征根与A的特征值相同，以后看成等价概念，不再区分 .

求特征值、特征向量的步骤

求矩阵A的全部特征值和特征向量的计算步骤：

(1) 计算行列式 $|\lambda E-A|$，并求出 $|\lambda E-A|=0$ 的全部根，即A的特征值；

(2) 对于每个特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=\theta$ 的一个基础解系$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{si}$；

(3) 写出A属于 λ_i 的全部特征向量为：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_{si}\alpha_{si}$，其中 $k_1, k_2, \dots, k_{si}$ 为不全为零的任意常数。

注：4.3节有结论：对于重特征值 λ，所属的无关特征向量个数≤λ的重数。
上述是求特征值的常规步骤,有时需要直接解$Ax=\lambda x$,如$A=\alpha\beta^T$ (例4.2.4)

例4.2.1 求矩阵*A*的全部特征值和特征向量，其中 $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}.$

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ \lambda-6 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-4)^2$$

得*A*的两个特征值为：λ=6,4(二重) .

对于 λ=6，解齐次方程组 (6E-A)x=θ， 由

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：α_1=(1,0,1)^T . 故属于特征值6的全部特征向量为：$k_1\alpha_1$，其中k_1为任意非零常数.

对于λ=4，解齐次方程组 (4E-A)x=θ， 由 $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_1]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：α_2= (2,1,0)^T ，α_3= (-1,0,1)^T .
故属于特征值4的全部特征向量为：$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中k_2,k_3为不全为零的任意常数.

例4.2.2 求矩阵*A*的全部特征值和特征向量，其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&0&2\\3&-4&5\end{pmatrix}.$

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\-2&\lambda&-2\\-3&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-1\\\lambda-4&\lambda&-2\\\lambda-4&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-2)^2$$

得*A*的两个特征值为：λ=4,2(二重) .

对于 $\lambda=4$，解齐次方程组 $(4E-A)x=\theta$，由 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&4&-2\\-3&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：$\alpha_1=(1,1,1)^T$. 故属于特征值4的全部特征向量为：$k_1\alpha_1$，其中k_1为任意非零常数.

对于$\lambda=2$，解齐次方程组 $(2E-A)x=\theta$，由 $\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&2&-2\\-3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：$\alpha_2=(-1,0,1)^T$.

故属于特征值2的全部特征向量为：$k_2\alpha_2$，其中k_2为任意非零常数.

例4.2.3 求矩阵*A*的全部特征值和特征向量，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5)$$

得*A*的两个特征值为：λ=1,2±*i* .

对于 λ=1，解齐次方程组 (*E*-*A*)*x*=θ，由 $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：$\alpha_1=(-1,0,1)^T$. 故属于特征值1的全部特征向量为：$k_1\alpha_1$，其中k_1为任意非零实常数.

对于λ=2+*i*，解齐次方程组 ((2+*i*)*E*-*A*)*x*=θ，由

$$\begin{pmatrix}i&1&-1\\-1&1+i&-1\\-1&1&i\end{pmatrix}\xrightarrow[(-i)r_1]{\substack{r_2-ir_1\\r_3-ir_1}}\begin{pmatrix}1&-i&i\\0&1&-1+i\\0&1-i&2i\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-(1-i)r_2]{r_1+ir_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1+i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得该齐次方程组的一个基础解系为：$\alpha_2=(1,1-i,1)^T$.

故属于特征值2+*i* 的全部特征向量为：$k_2\alpha_2$，其中k_2为任意非零复常数.

对于λ=2-*i*，对刚得到的结果 ((2+*i*)*E*-*A*)$\alpha_2=\theta$ 两边取共轭得 ((2-*i*)*E*-*A*) $\bar{a}_2=\theta$. 故$\bar{a}_2=(1,1+i,1)^T$是((2-*i*)*E*-*A*)*x*=θ的一个非零解. 又易知r((2-*i*)*E*-*A*)=2，故$\bar{a}_2$是((2-*i*)*E*-*A*)*x*=θ的一个基础解系. 从而属于特征值2-*i*的全部特征向量为：$k_3\bar{a}_2$，其中k_3为任意非零复常数.

有时需要使用非常规步骤来求特征值与特征向量 .

例4.2.4 求$E+xy^T$的特征值与特征向量，其中 E 为 n 阶单位矩阵，
$x=(x_1, \dots , x_n)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1 , \dots , y_n)^{\mathrm{T}}$.

求解思路:

简化问题：$(xy^{\mathrm{T}}) \xi= \lambda\xi \quad \Leftrightarrow \quad (E+xy^{\mathrm{T}}) \xi= (\lambda+1) \xi$；$(\xi \neq \theta)$

讨论 $(xy^{\mathrm{T}}) \xi= \lambda\xi$，$(x\neq \theta , y\neq \theta)$：即 $(y^{\mathrm{T}}\xi) x = \lambda\xi$ ，分 $y^{\mathrm{T}}\xi=0$ 和 $y^{\mathrm{T}}\xi \neq 0$;

当 $y^{\mathrm{T}}\xi=0$ 时，$\lambda=0$ ，于是解方程组 $y^{\mathrm{T}}\xi=0$ 求得 ξ;

当 $y^{\mathrm{T}}\xi \neq 0$ 时，$x = (\lambda/y^{\mathrm{T}}\xi)\xi$ ，$\lambda\neq 0$ ，可取 $\xi=x$ 并保证 $\lambda=y^T\xi \neq 0$.

解：当 $x=\theta$ 或 $y=\theta$ 时，$E+xy^T=E$，故特征值为 $\lambda=1$ (n重)，属于该特征值的特征向量为 $k_1e_1+\dots+k_n e_n$, $k_1,\dots,k_n$不全为零 .

当 $x\neq\theta, y\neq\theta$ 时，由于 $(xy^T)\xi=\lambda\xi$ 等价于$(E+xy^T)\xi=(\lambda+1)\xi$，所以我们先考虑矩阵 $A=xy^T$ 的特征值与特征向量 .

考虑：$(xy^T)\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq\theta$， 此即 $(y^T\xi)x=\lambda\xi$ ，$x\neq\theta,\xi\neq\theta$.

当 $y^T\xi=0$ 时, 有$\lambda\xi=\theta$, 故 $\lambda=0$. 因为$y\neq\theta$,故$r(y^T)=1$，解方程组 $y^T\xi=0$ 得基础解系 $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1}$，易知为 $(xy^T)\xi=\lambda\xi$ 的属于$\lambda=0$的极大无关特征向量组 .

当$y^T\xi\neq0$ 时, 有$x=(\lambda/y^T\xi)\xi$, 故$\lambda\neq0$. 可取 $\xi=x$代入$(xy^T)\xi=\lambda\xi$得$\lambda=y^Tx=y^T\xi\neq0$.

若$y^Tx=0$，则没有满足$y^T\xi\neq0$ 的特征向量ξ和非零特征值λ .

否则若$y^Tx\neq0$ ，则有非零特征值$\lambda=y^Tx$ 和特征向量$\xi=x$.

综上可得，$E+xy^T=E+A$的特征值与特征向量为：

当$x=\theta$或$y=\theta$时,特征值为 $\lambda=1$(n重),属于该特征值的特征向量为 $k_1e_1+\dots+k_n e_n$, $k_1,\dots,k_n$不全为零 .

当$x\neq\theta,y\neq\theta$且$y^Tx\neq0$ 时，特征值为 $\lambda=1+y^Tx$ (单重)和$\lambda=1$ (n-1重)，其中属于$\lambda=1+y^Tx$的特征向量为 $kx,k\neq0$，而属于$\lambda=1$的特征向量为 $k_1\xi_1+\dots+k_{n-1}\xi_{n-1}$, 其中$\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$为$y^T\xi=0$的基础解系，$k_1,\dots,k_{n-1}$不全为零 .

当 $x\neq\theta,y\neq\theta$且$y^Tx=0$ 时，特征值为 $\lambda=1$ (n重)，对应的特征向量为$k_1\xi_1+\dots+k_{n-1}\xi_{n-1}$ ，$k_1,\dots,k_{n-1}$不全为零 .

例4.2.5 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}.$

求*A*的全部特征值和*B*=5*A*的全部特征值.

解 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\2&\lambda-1&-2\\-2&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-1&-2\\\lambda-2&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda-2)$$

得*A*的特征值为：1 , -1 , 2 .

$$B=5A=\begin{pmatrix}5&5&5\\-10&5&10\\10&5&0\end{pmatrix},$$ **由**

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-5&-5\\10&\lambda-5&-10\\-10&-5&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-10&-5&-5\\0&\lambda-5&-10\\\lambda-10&-5&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-25)(\lambda-10)$$

得*B*的特征值为：5 , -5 , 10 .

由上例看到*B*=5*A*，而*B*的特征值也正好是*A*的特征值的5倍.其实我们有下列定理说明矩阵特征值的关系正好是矩阵的关系.

定理4.2.2 若 $f(x)$为x的多项式，矩阵A有特征值λ，则$f(A)$有特征值$f(\lambda)$.

证明 设 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$，$\xi$为$A$的属于特征值$\lambda$的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$，于是有

$$
\begin{aligned}
f(A)\,\xi &= (a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\dots+a_1A+a_0E\,)\,\xi \\
&=a_mA^m\xi+a_{m-1}A^{m-1}\xi+\dots+a_1A\xi+a_0\xi \\
&=a_m\lambda^m\xi+a_{m-1}\lambda^{m-1}\xi+\dots+a_1\lambda\xi+a_0\xi \\
&=(a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\dots+a_1\lambda+a_0\,)\,\xi = f(\lambda)\xi\,.
\end{aligned}
$$

故 $f(\lambda)$为 $f(A)$ 的特征值，且 ξ 也是$f(A)$的属于$f(\lambda)$的特征向量 .

注1 若定理4.2.2中矩阵A的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$ (包括相同的特征值)，则$f(A)$的所有特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2), \dots ,f(\lambda_n)$. 结论的证明见后面若尔当标准形和奇异值分解一节.

注2 若n阶可逆方阵A的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$ (包括相同的特征值)，则 $\lambda_i\neq 0$, $i=1,2,\dots,n$，且矩阵A^{-1}的所有特征值为 λ_1^{-1}, $\lambda_2^{-1},\dots, \lambda_n^{-1}$.

注3 不可逆方阵A必有0特征值.

说明 注2：$A\xi_i = \lambda_i\xi_i$ （$\xi_i \neq \theta$）$\Rightarrow \xi_i = \lambda_i A^{-1}\xi_i \Rightarrow \lambda_i\neq 0$.

注3：$|A|=0 \Rightarrow Ax=\theta$有非零解$\xi\neq\theta$，即$A\xi = 0\xi$.

例4.2.6 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}$.

的特征值为 1 , -1 , 2， 求 $B=A^2+2A+E$ 和 $C=A^2$ 的全部特征值.

解 显然 1 , -1 , 2 是A的全部特征值，由定理4.2.2知，$B=f(A)=A^2+2A+E$ 有特征值 $f(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$，因为 $f(1)=4$, $f(-1)=0$, $f(2)=9$，故 4 , 0 , 9 为B的特征值，且是B的全部特征值.

同样，1^2 , $(-1)^2$, 2^2，即1(二重)和4也是C的全部特征值.

矩阵关系与特征值关系的相关内容还有：

定理4.2.3 相似矩阵具有相同的特征多项式，从而它们具有相同的特征值.

证明 若$A\sim B$，则存在可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$，于是

$$|\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|.$$

即B与A有相同的特征多项式，它们当然有相同的特征值.

注意： 特征多项式相同≠>矩阵相似，见 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

特征多项式均为 $(\lambda-1)^2$，但不相似($P^{-1}EP=E\neq B$).

定义4.2.3(迹) 定义 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的迹.

定理4.2.4 若n阶矩阵A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$，则有

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \quad , \quad |A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \ .$$

证明 因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\ldots+(-1)^n\Pi\lambda_i$，
取 $\lambda=0$ 可得 $|-A|=(-1)^n\Pi\lambda_i$，即 $|A|=\Pi\lambda_i$.
进一步比较上式两边λ的n-1次项系数，由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a_{11})\begin{vmatrix}\lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{32} & \lambda-a_{33} & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}-(-a_{12})\begin{vmatrix}-a_{21} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{31} & \lambda-a_{33} & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n3} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+(-a_{13})\begin{vmatrix}-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{31} & -a_{32} & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+\ldots$$

$$=(\lambda-a_{11})\begin{vmatrix}\lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{32} & \lambda-a_{33} & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+P_{n-2}(\lambda)=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\begin{vmatrix}\lambda-a_{33} & -a_{34} & \cdots & -a_{3n}\\ -a_{43} & \lambda-a_{44} & \cdots & -a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n3} & -a_{n4} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+(\lambda-a_{11})P_{n-3}(\lambda)+P_{n-2}(\lambda).$$

故有 $|\lambda E-A|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\ldots(\lambda-a_{nn})+P'_{n-2}(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots$,
于是 $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$，即 $\mathrm{tr}(A)=\Sigma\lambda_i$.

推论4.2.5 相似矩阵有相同的迹和相同的行列式.

证明 由定理4.2.3知相似矩阵有相同的特征值，设为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，再由定理4.2.4知它们的迹和行列式分别为 $\Sigma\lambda_i$ 和 $\Pi\lambda_i$.

例4.2.7 设 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ b & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ 10 & 12 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ 相似，求a , b 的值.

解 由于相似矩阵有相同的迹和行列式，故由3+a+1=-2+12+(-5) 可得a=1. 将 a=1 代入矩阵，再由行列式相等，得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ b & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & 6 \\ 10 & 12 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 20,$$

即有 4(5-b)=20，解得 b=0 . 故有 a=1 , b=0 .

例4.2.8 设A^*为3阶矩阵A的伴随矩阵, A^*的特征值为-1,2,-2, 求$A+E$的特征值.

解 设A^*的特征值为$\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$，由 $A^*A=AA^*=|A|E$

可知 $|A^*||A|=||A|E|=|A|^3$，故有 $|A^*|=|A|^2=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，从而 $|A|=\pm 2$.

设ξ_1, ξ_2, ξ_3分别为A^*的属于$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的特征向量，则有$A^*\xi_i=\lambda_i\xi_i$, i=1,2,3, 左乘A得 $|A|\xi_i=\lambda_i A\xi_i$，即 $A\xi_i=(|A|/\lambda_i)\,\xi_i$，故

$$(A+E)\,\xi_i=(|A|/\lambda_i)\,\xi_i+\xi_i=(1+|A|/\lambda_i)\,\xi_i,\ i=1,2,3,$$

从而 $A+E$ 的特征值为 -1 , 2 , 0 或 3 , 0 , 2 .

例4.2.9 设A为3阶矩阵，ξ_1, ξ_2, ξ_3为3个线性无关的向量，且有关系：

$$A\xi_1=-3\xi_1+2\xi_2-\xi_3,\ A\xi_2=6\xi_1+\xi_2+2\xi_3,\ A=\xi_1+\xi_2+3\xi_3,$$

求矩阵A的特征值与特征向量.

解 设$P=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则有

$$AP=(-3\xi_1+2\xi_2-\xi_3, 6\xi_1+\xi_2+2\xi_3, \xi_1+\xi_2+3\xi_3)=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix}-3 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=PB.$$

又因为ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关，故P可逆，于是有 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$.

现在求B特征值特征向量. 由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -6 & -1\\ -2 & \lambda-1 & -1\\ 1 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -6 & -1\\ -\lambda-5 & \lambda+5 & 0\\ 1 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

解得特征值为： $\lambda = -5,2,4$.

对λ=-5，由$\begin{pmatrix}-2 & -6 & -1\\ -2 & -6 & -1\\ 1 & -2 & -8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -4.6\\ 0 & 1 & 1.7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}46\\ -17\\ 10\end{pmatrix}$.

对λ=2，由$\begin{pmatrix}5 & -6 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

对λ=4，由$\begin{pmatrix}7 & -6 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

因为由$B\alpha=\lambda\alpha$可得$AP\alpha=PB\alpha=\lambda P\alpha$, 故$A$有特征值 λ= -5,2,4,对应特征向量$P\alpha_1,P\alpha_2,P\alpha_3$.

定理4.2.6 设A是一个块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

则A的特征多项式是 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 的特征多项式的乘积，于是$A_1, A_2, \ldots, A_m$的所有特征值就是A的所有特征值.

证明 将单位矩阵E按分块形式写成

$$E=\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m \end{pmatrix}$$

则

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda E_1-A_1 & & & \\ & \lambda E_2-A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_m-A_m \end{pmatrix}$$

因此

$$|\lambda E-A|=|\lambda E_1-A_1||\lambda E_2-A_2| \cdots |\lambda E_m-A_m| .$$

例4.2.10 设$A\in \mathbf{R}^{m\times n}$, $B\in \mathbf{R}^{n\times m}$，证明

$$\lambda^n|E_m-AB|={}^m|E_n-BA|\ .$$

证明 容易验证

$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

因$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}$可逆，由上式可知$\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}$相似，从而有

$$\left|\lambda E_{m+n}-\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}\right|=\left|\lambda E_{m+n}-\begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}\right|,$$

即

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda E_m-AB & O \\ -B & \lambda E_n \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} \lambda E_m & O \\ -B & \lambda E_n-BA \end{pmatrix}\right|,$$

故 $\lambda^n|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|\lambda E_n-BA|$.

由例4.2.10 可知，AB与BA有相同的非零特征值，且$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

因为：$\lambda^n|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|\lambda E_n-BA|=\lambda^k g(\lambda)$，则$|\lambda E_m-AB|=\lambda^{k-n}g(\lambda)$, $|\lambda E_n-BA|=\lambda^{k-m}g(\lambda)$.