5.2 正定二次型

特殊二次型：

$$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}8&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8x^2+3y^2+2z^2>0,\text{当}x,y,z\text{不全为}0.$$

$$g(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}8&-8&8\\-8&11&-11\\8&-11&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad (\text{变换为}\begin{cases}x=x'+y',\\y=y'+z',\\z=z'\end{cases})$$

$$=8x'^2+3y'^2+2z'^2>0,\text{当}x,y,z\text{不全为}0.$$

称有这种性质的 *f(x,y,z)* 和 *g(x,y,z)* 为正定二次型 .

称正定二次型矩阵

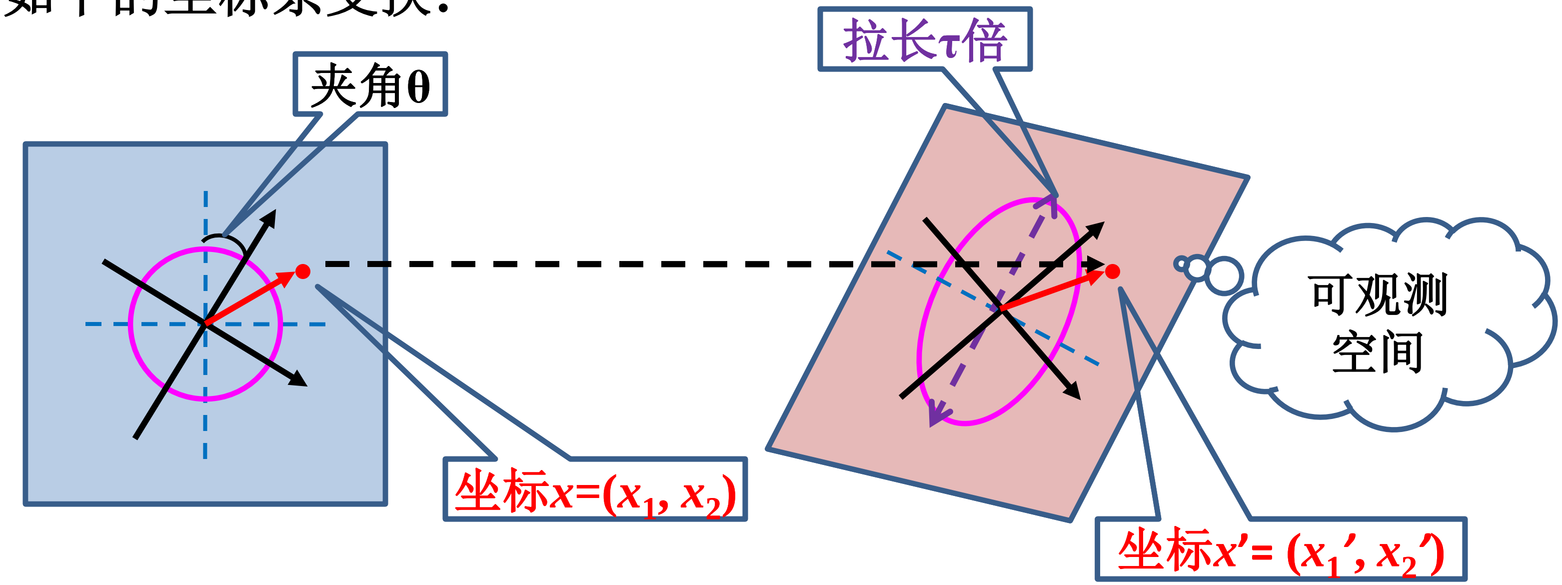
$$\begin{pmatrix}8&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}8&-8&8\\-8&11&-11\\8&-11&13\end{pmatrix}$$

为正定矩阵 .

正定矩阵的正惯性指数为阶数 .

变换后的内积形式及正定矩阵

考虑如下的坐标系变换：



坐标变换如下：

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \tau\sin^2\theta & (1-\tau)\sin\theta\cos\theta \\ (1-\tau)\sin\theta\cos\theta & \tau\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} x$$

上式可看成向量 x 到 x' 的变换。

向量 x' 到 x 的变换为：

$$x=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta/\tau & (1-1/\tau)\sin\theta\cos\theta\\ (1-1/\tau)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta/\tau\end{pmatrix}x'=Dx',|D|=1/\tau$$

用新的向量 x' 表示原来向量 x 的内积为：

$$(x,y)=x^Ty=x'^T D^T Dy'=x'^T Ay',A=D^TD,|D|\neq 0$$

相应地新的向量表示原来向量的长度和夹角的公式为：

$$\|x\|=\sqrt{x'^T Ax'},\alpha=\arccos\frac{x'^T Ay'}{\sqrt{x'^T Ax'}\times\sqrt{y'^T Ay'}}$$

其中的矩阵A有个基本特点：

$$x'^T Ax'=x^Tx>0,x'\neq 0$$

A 就是正定矩阵，x'^TAx' 就是正定二次型，正惯性指数为n

定义5.2.1 (正定二次型、正定矩阵) 设 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为实二次型，若当实向量 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{\mathrm{T}}Ax>0$，则称 f 为正定二次型，称 A 为正定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{\mathrm{T}}Ax<0$，则称 f 为负定二次型，称 A 为负定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{\mathrm{T}}Ax\geq0$，则称 f 为半正定二次型，称 A 为半正定矩阵；
当 $x\neq\theta$ 时都有 $x^{\mathrm{T}}Ax\leq0$，则称 f 为半负定二次型，称 A 为半负定矩阵 .

注 有时为了强调正定矩阵的对称性，也称对称正定矩阵 .

例5.2.1 说明 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ 为非正定矩阵 .

解 因为当 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\neq\theta$ 时，有

$$(x_1,x_2)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=2(x_1+0.5x_2)^2+1.5x_2^2>0,$$

故 A 正定 .因为 $(1,1)B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=6>0,(1,-1)B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-2<0,$ 故 B 非正定 .

例5.2.2 若 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 为非零矩阵，矩阵 $B=\begin{pmatrix}O&A\\A^{\mathrm{T}}&O\end{pmatrix}$，则必存在两个 $m+n$ 维的向量 α,β 使得 $\alpha^{\mathrm{T}}B\alpha>0$，$\beta^{\mathrm{T}}B\beta<0$.

解 因为 A 非零，故有向量 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 使得 $A\xi\neq\theta$，再令 $\eta=A\xi$，则有 $\eta^{\mathrm{T}}A\xi=\xi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\eta=\eta^{\mathrm{T}}\eta>0$. 现在令 $\alpha=\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}\eta\\-\xi\end{pmatrix}$,

则有 $\alpha^{\mathrm{T}}B\alpha=2\eta^{\mathrm{T}}A\xi>0$ ，$\beta^{\mathrm{T}}B\beta=-2\eta^{\mathrm{T}}A\xi<0$.

定义5.2.2 (矩阵的顺序主子式和主子式) 矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的左上角 i 行 i 列 $(1\le i\le n)$ 构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的 i 阶顺序主子式.

矩阵A的$i_1,i_2,\ldots,i_k$ 行和$i_1,i_2,\ldots,i_k$ 列 $(1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n)$ 的元素构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A的k阶主子式.

正定矩阵的判定

定理5.2.1 若A为n阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A 的特征值均为正；

(3) A的正惯性指数为n；

(4) A的各阶顺序主子式均为正 .

证明思路：

先证明(1)、(2)、(3)等价

$P^TAP=E,\ A=P^{-T}P^{-1}$

$x^TAx=x^TP^{-T}P^{-1}x=y^Ty>0$

(1) A为正定矩阵

$0<\xi^TA\xi=\lambda\xi^T\xi$

(2) A 的特征值均为正

(3) A的正惯性指数为n

推论5.1.5

(1) A为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ (4) A的各阶顺序主子式均为正

证明(1)、(4)等价

(1) => (4) 注意到A的左上块A_i是正定矩阵

$$0 < x^T A x = (y_1,\cdots,y_i,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (y_1,\cdots,y_i)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix} = y^T A_i y$$

故 $|A_i| = \prod \lambda(A_i) > 0$

(4) => (1) 利用归纳法：$n=m+1$

将 $A = \begin{pmatrix} A_m & u \\ u^T & s \end{pmatrix}$ **合同变换到对角矩阵，再看对角元是否都 >0**

$$\begin{pmatrix} P^T & 0 \\ -u^T A_m^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_m & u \\ u^T & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & -A_m^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T A_m P & 0 \\ 0 & s - u^T A_m^{-1} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

其中$P^TP=E$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$，$|A|=(\prod\lambda_i)d>0$，得到$d>0$，正惯性指数为 $m+1$

半正定矩阵的判定

定理5.2.2 若A为n阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：

(1) A为半正定矩阵；

(2) A 的特征值大于等于零；

(3) A的正惯性指数为 r(A)；

(4) A的各阶主子式非负 .

证明思路：

先证明(1)、(2)、(3)等价

$P^TAP=\mathrm{diag}(E_r,O)$,

$A=P^{-T}\mathrm{diag}(E_r,O)P^{-1}=P^{-T}\Lambda P^{-1}$

$x^TAx=x^TP^{-T}\Lambda P^{-1}x=y^T\Lambda y\geqslant 0$

(1) A为半正定矩阵

$0\leqslant \xi^TA\xi=\lambda\xi^T\xi$

(2) A 的特征值大于等于零

(3) A的正惯性指数为 r(A)

推论5.1.5

证明(1)、(4)等价

(1) A为半正定矩阵 ⇔ (4) A的各阶主子式非负

(1) => (4) 注意到A的行列均为$i_1,i_2,\ldots,i_k$ 的子式构成的矩阵A_k是半正定矩阵

$$0 \le x^T A x = (y_{i_1},0,\cdots,y_{i_2},\cdots,y_{i_k},\cdots)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_2} \\ \vdots \\ y_{i_k} \\ \vdots \end{pmatrix} = (y_{i_1},\cdots,y_{i_k})\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_k} \end{pmatrix} = y^T A_k y$$

故 $|A_k| = \prod \lambda(A_k) \geqslant 0$

(4) => (1) 利用归纳法：$n=m+1$

反证法证明 A是半正定的，或者等价地，A的特征值非负。

(i) 假设 A有特征值 $\lambda_1<0$，特征向量为 x，则有 $x^TAx=\lambda_1 x^Tx<0$，则x不含0分量，否则与下列式子矛盾 (不妨设最后一个分量为0)

$$0 > x^T A x = (x_1,\cdots,x_m,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1,\cdots,x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \ge 0$$

(ii) 因为 $|A| \geqslant 0$，所以A还有另一个特征值$\lambda_2 \leqslant 0$，对应与x正交的特征向量$y \neq \theta$。构造向量 $z=x+ty$，使得z含0分量，且有 $z^TAz=x^TAx+y^TAyt^2=\lambda_1 x^Tx+\lambda_2 t^2 y^Ty \leqslant \lambda_1 x^Tx<0$，与上面式子矛盾。

例5.2.3 用顺序主子式判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．又

$$\det(1)=|(1)_{1\times1}|=1>0,\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2>0,\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4>0,$$

各阶顺序主子式均>0，故A为正定矩阵．

例5.2.4 用特征值判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．又

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-3&\lambda-2\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda-4&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+2),$$

特征值为：$\lambda=2,\dfrac{5+\sqrt{17}}{2},\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$，均>0，故$A$为正定矩阵．

例5.2.5 用标准形判定A是否正定，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

解 显然，A为实对称矩阵．用合同变换法化成标准形

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-c_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

对角元素都 >0，得正惯性指数为3，故A为正定．

例5.2.6 t取何值时，二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+tx_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$$

是正定二次型？

解 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & t & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

用顺序主子式判别法：

$$\det(2)=2>0,\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & t\end{vmatrix}=2t-1>0,\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & t & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & t-0.5 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=2t-9>0.$$

解两个关于t的不等式得到解集：$t>4.5$，故当$t\in(4.5,+\infty)$时，该二次型为正定二次型．

例5.2.7 证明：A为正定矩阵当且仅当A有分解 $A=D^{T}D$ (D可逆) .

证明 设A为n阶矩阵，由定理5.2.1可知A为正定矩阵当且仅当A的正惯性指数为n. 即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{T}AP=E$.

令 $D=P^{-1}$，则D可逆，且有

$$D^{T}D=(P^{-1})^{T}P^{-1}=(P^{T})^{-1}EP^{-1}=(P^{T})^{-1}P^{T}APP^{-1}=A .$$

例5.2.8 证明：若实对称矩阵A满足关系式 $(A-E)(A-2E)=O$，则A正定.

证明 展开关系式得

$$A^{2}-3A+2E=O .$$

设λ是A的特征值，ξ是属于λ的特征向量，则有

$$(A^{2}-3A+2E)\xi=(\lambda^{2}-3\lambda+2)\xi=\theta .$$

得 $$\lambda^{2}-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0 .$$

此即A的特征值或是1或是2，均大于零，由定理5.2.1可知A是正定矩阵.

例5.2.9 若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 对称正定，证明：$(\alpha^{\mathrm{T}}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}A\beta)$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为任意列向量 .

证明 当$\alpha=\theta$时，结论显然 .

当$\alpha\neq\theta$时，令 $\xi=t\alpha+\beta$，则有

$$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=(t\alpha+\beta)^{\mathrm{T}}A(t\alpha+\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha t^2+2\alpha^{\mathrm{T}}A\beta t+\beta^{\mathrm{T}}A\beta .$$

由A的正定性，知 $\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha>0$，$\xi^{\mathrm{T}}A\xi\ge 0$，所以有

$$(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)t^2+(2\alpha^{\mathrm{T}}A\beta)t+(\beta^{\mathrm{T}}A\beta)\ge 0 .$$

再由二次方程根的判别准则得

$$\Delta=(2\alpha^{\mathrm{T}}A\beta)^2-4(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}A\beta)\le 0 ,$$

即

$$(\alpha^{\mathrm{T}}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}A\beta) .$$

证法二 当 $\alpha=\theta$ 或 $\beta=\theta$ 时，结论显然 .

当 $\alpha\neq\theta$，$\beta\neq\theta$ 时，令 $\xi=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}$,

则有

$$\xi^{\mathrm{T}}A\xi=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\right)^{\mathrm{T}}A\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}}-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\right)=2-2\frac{\alpha^{\mathrm{T}}A\beta}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}},$$

又由A的正定性，知 $\xi^{\mathrm{T}}A\xi\ge 0$，故 $2-2\dfrac{\alpha^{\mathrm{T}}A\beta}{\sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha}\cdot\sqrt{\beta^{\mathrm{T}}A\beta}}\ge 0$,

即

$$(\alpha^{\mathrm{T}}A\beta)^2\le(\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}A\beta) .$$