4.1 相似矩阵

矩阵分解经常能解决很多问题，我们要考虑一种特殊的矩阵分解：

$$A = P\Lambda P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

这种分解非常有用，可以在某种情况下简化矩阵，如计算A^m，

$$A^m = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} = P\Lambda^m P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

定义4.1.1 (相似矩阵) 对于同阶方阵A与B，如果存在可逆矩阵P，使得

$$B=P^{-1}AP,$$

则称A相似B，记为$A \sim B$. 称B为A的相似矩阵，而称P为A到B的相似变换矩阵.

容易证明，相似矩阵满足等价关系的三个性质：

(1) 自反性：对任意矩阵A，都成立 $A \sim A$；
(2) 对称性：若$A \sim B$，则$B \sim A$；
(3) 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

此外，相似矩阵之间也有许多共同的性质：

性质1 若$A \sim B$，则 $|A|=|B|$，从而A与B可逆性相同 .

证明 由$B=P^{-1}AP$得 $|B|=|P^{-1}|\,|A|\,|P|=|P|^{-1}|A|\,|P|=|A|$.

性质2 若$A \sim B$，且A或B可逆，则$A^{-1} \sim B^{-1}$.

证明 若$A \sim B$，则由性质1知A与B同为不可逆或同为可逆. 在A或B为可逆的情形，对等式 $B=P^{-1}AP$ 两边取逆矩阵得 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

性质3 若$A \sim B$, 则$A^n \sim B^n$, $kA \sim kB$, 其中n为自然数，k 为任意实数.

证明 因为$A \sim B$,所以存在可逆矩阵P使$P^{-1}AP=B$,于是对任何正整数 n, 有
$B^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\ldots(P^{-1}AP)=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A\ldots(PP^{-1})AP=P^{-1}A^nP$,
即$A^n \sim B^n$.另外易知 $kB=P^{-1}(kA)P$.

性质3 在求矩阵的正整数幂时非常有用, 且看下面的例子.

例4.1.1 若$P^{-1}AP$为对角矩阵，其中

$$P=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix},$$

试求 A^n (n为正整数) .

解 容易求得 $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ **，于是**

$$B=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

由 $P^{-1}AP=B$ 得 $A=PBP^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}A^n &= (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^n\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+2}+(-1)^{n+1} & 4(2^n+(-1)^{n+1})\\ -2^n+(-1)^n & -2^n+4(-1)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

性质4 若$A \sim B$，则 , $f(A) \sim f(B)$ ，其中 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ 为任意多项式 .

证明 由$B=P^{-1}AP$ 可得

$$
\begin{aligned}
f(B) &= a_n B^n+a_{n-1}B^{n-1} + \ldots + a_1 B + a_0 E \\
&= a_n(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\ldots(P^{-1}AP) + \ldots + a_1 P^{-1}AP + a_0 P^{-1}EP \\
&= P^{-1}(a_n A^n+a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E)P = P^{-1}f(A)P ,
\end{aligned}
$$

即 $f(A) \sim f(B)$.

相似矩阵有它的几何意义，在第六章将看到相似矩阵是同一个线性变换在不同坐标系下的表示 (定理6.4.6) .