6.5 线性变换的特征值和特征向量

线性变换的特征值特征向量是矩阵的特征值与特征向量的推广

定义6.5.1 (线性变换的特征值与特征向量) 设V是数域K上线性空间，T是V上的一个线性变换，若对K中的一个数λ，存在V的一个非零向量ξ，使得

$$T\xi = \lambda\xi \ ,$$

则称λ是线性变换T的一个特征值，ξ是T的属于λ的特征向量 .

定理6.5.1. 设V是数域K上线性空间，T是V上的一个线性变换，则T的属于特征值λ的所有特征向量和零向量一起构成了V的一个子空间，该子空间记为

$$V_\lambda=\{ \xi\in V：T\xi = \lambda\xi \} .$$

参见P_{104}
定理4.2.1

证明 直接验证 .

定义6.5.2 (特征子空间) 称V_λ为线性变换T对应于特征值λ的特征子空间 .

看数域K上的线性空间V与K^n的对应关系：

基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下

线性空间	V	$\longleftrightarrow$	K^n
线性变换	T	$\longleftrightarrow$	A
向量	ξ	$\longleftrightarrow$	x
	$T\xi$	$\longleftrightarrow$	Ax
关系1	$T\xi=\lambda\xi$	$\longleftrightarrow$	$Ax=\lambda x$
关系2	$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$	$\longleftrightarrow$	$k_1x_1+\cdots+k_rx_r=\theta$
关系3	$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$	$\longleftrightarrow$	$y=k_1x_1+\cdots+k_rx_r$
关系4	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$无关	$\longleftrightarrow$	$x_1,x_2,\cdots,x_r$无关

求T的特征值特征向量步骤

1. 取一组基，求T的矩阵A
2. 在数域K中计算特征多项式 $p(\lambda)=|\lambda E-A|$
3. 求 $p(\lambda)=0$ 的含于数域K的根（T的特征值）$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$
4. 解方程组 $(\lambda_i E-A)x=\theta$，求基础解系
5. 用基础解系做坐标求V的一个向量组，即V_{λ_i}的一组基

例6.5.1 设数域$K=R$，线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

求T的特征值和特征向量.

解 矩阵A的特征多项式是 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$,

所以矩阵A的全部特征值是 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$，它们都是实数，所以也是线性变换T的全部特征值.

对应于特征值 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$，求得齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=\theta$, $i=1,2$ 的一个基础解系为 $(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

因此，线性变换T属于特征值 -1 的两个线性无关的特征向量为：$\xi_1=\varepsilon_2-\varepsilon_1$, $\xi_2=\varepsilon_3$.

对应于 $\lambda_3=3$，求得齐次线性方程组 $(\lambda_3 E-A)x=\theta$ 的一个基础解系为 $(1,1,0)^T$.

因此，线性变换T属于特征值 3 的一个特征向量为 $\xi_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

例6.5.2 平面上的全体向量构成了实数域上的一个二维线性空间R^2，在直角坐标系下取单位向量e_1,e_2作为一组基. 设转角为θ的旋转变换T_θ:$R^2\to R^2$为：

$$T_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta , x\sin\theta+y\cos\theta) .$$

则T_θ是R^2上的线性变换 . T_θ在基e_1,e_2下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

A的特征多项式

$$p(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1.$$

如果 $\theta\neq n\pi$，该二次方程仅有复数根. 因R^2是实数域上的线性空间，故T_θ没有特征值，也没有特征向量 .

V取不同的基后，变换和向量所对应的矩阵和列向量：

		基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$	基$(\omega_1,\cdots,\omega_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$
	T	A	$B=P^{-1}AP$
	ξ	x	$y=P^{-1}x$
特征值	λ	λ	λ
关系	$T\xi=\lambda\xi$	$Ax=\lambda x$	$By=\lambda y(P^{-1}APP^{-1}x=\lambda P^{-1}x)$

定理6.5.2. 有限维线性空间上的线性变换的特征值和特征多项式与所选基底无关．

参见P_{109} 定理4.2.3

定理6.5.3. 设λ_1, λ_2, … , λ_s是线性变换T（或矩阵A）的s个互异的特征值，ξ_i是属于特征值λ_i (i=1,2,…,s)的特征向量，则ξ_1, ξ_2, … , ξ_s线性无关．

参见P_{114} 定理4.3.2

线性变换的最简表示

定义6.5.3(线性变换的最简表示).
设T是n维线性空间V上的一个线性变换，若T在某组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵为对角矩阵，则称$T$有最简表示 .

T有最简表示 $\longleftrightarrow$ T的某个基下的矩阵可对角化

定理6.5.4. n维线性空间V上的一个线性变换T有最简表示的充要条件是T有n个线性无关的特征向量.

参见P_{113} 定理4.3.1

推论6.5.5. 若线性变换T有n个互异的特征值，则T有最简表示.

参见P_{114} 推论4.3.3

定理6.5.6. 若λ_1, λ_2是线性变换T的两个不同的特征值，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是$T$的属于$\lambda_1$的线性无关的特征向量， $v_1, v_2, \ldots, v_t$是T的属于λ_2的线性无关的特征向量，则$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s; v_1, v_2, \ldots, v_t$线性无关 .

参见P_{115} 定理4.3.4

定理6.5.7. 若λ_0是线性变换T的s重特征值，则T的属于λ_0的特征向量中，线性无关的最大组包含的向量的个数不超过s.

参见P_{116} 定理4.3.5

定理6.5.8. n维线性空间上的线性变换T有最简表示 $\Leftrightarrow$ T有n个特征值(包括重数),且对T的每个s_i重特征值λ_i ,对应特征矩阵$\lambda_i E\text{-}A$的秩为$n\text{-}s_i$.

参见P_{116} 定理4.3.6

例6.5.3 设V上线性变换T在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

分别把V看作实线性空间和复线性空间，T是否有最简表示？
若有，则求其最简表示 .

解 若V是实线性空间， $p(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i)).$

因此在实数域上A没有特征值，故没有特征向量，从而T也没有特征值和特征向量，所以没有最简表示 .

若V是复线性空间，A有特征值$1+i$和$1-i$，这也是T的特征值，且都是单特征值，故T有最简表示 .

对应于特征值 $\lambda_1=1+i$ ，解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\theta$ ，得到相应的特征子空间的一个基础解系，$\xi_1=(i,1)^T$. 对应于特征值 $\lambda_2=1-i$ ，解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\theta$ ，得到相应的特征子空间的一个基础解系 $\xi_2=(-i,1)^T$. 二阶方阵A有两个线性无关的特征向量 ξ_1,ξ_2，所以A可以对角化 .

令
$$P=\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$
则
$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}.$$

注意到A是T在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$下的矩阵，令 $(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)P$，则$T$的最简表示为
$$(T\eta_1,T\eta_2)=(\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}.$$