基本计算

(1) 初等行变换化行梯形矩阵、行简化梯形
(2) 初等变换记录变换矩阵
(3) 线性无关向量组正交化

用途

(1) 解方程组（齐次、非齐次）

(2) 计算行列式

(3) 求矩阵的秩

(4) 求逆矩阵

(5) 判断相关性、求一个极大无关组

(6) 求特征向量（相似对角化、正交对角化）

(7) 化标准形

(8) 求子空间的交与和

(9) 求线性变换的像空间与核空间

(10)* 扩展子空间的基

判定问题

(1) 判定可逆：定义、可逆矩阵乘积、$|A| \neq 0$

(2) 判定向量组相关无关：定义、r(A)=n、某向量可表示则相关

(3) 判定方程组可解：定义(存在x使得$Ax=b$)、$r(A)=r(A|b)$

(4) 判定矩阵相似于对角阵：定义、s重特征值有s个无关特征向量

(5) 判定正交矩阵：定义、正交阵乘积、$A^{-1}=A^T$、列标准正交、行标准正交

(6) 判定矩阵正定：定义、 $\lambda_i>0$、正惯性指数为n、顺序主子式>0

(7) 判定线性空间：定义

(8) 判定空间的基（或极大无关组）：定义、$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P$、生成空间极大无关组

(9) 判定子空间：加法数乘封闭、线性组合封闭

(10)判定线性变换：定义

不变性

(1) 初等变换不改变矩阵的秩

(2) 初等行变换不改变列向量间的关系：相关性、组合关系

(3) 相似变换不改变矩阵的特征值

(4) 合同变换不改变矩阵的惯性指数

重要关系

(1) 行等价：B=PA，其中P可逆

(2) 列等价：B=AQ，其中Q可逆

(3) 矩阵等价：B=PAQ，其中P、Q可逆

(4) 相似：$B=P^{-1}AP$，其中P可逆

(5) 合同：$B=P^{T}AP$，其中P可逆

(6) V与K^n的关系

V	基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$	基$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P$
向量α	坐标 x	坐标 $y=P^{-1}x$
线性变换T	矩阵 A	矩阵 $B=P^{-1}AP$
$T\alpha=\lambda\alpha$	$Ax=\lambda x$	$By=\lambda y$

重要性质

(1) A可逆⇔A非奇异⇔$|A|\neq 0$⇔$Ax=\theta$只有零解

(2) A可逆⇔$A=P_1P_2\ldots P_s$，其中 P_i 为初等矩阵

(3) $AA^*=A^*A=|A|E$，$A^*=(A_{ij})^T$

$\sum_k a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|$，$\sum_k a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}|A|$

(4) $r(A^T)=r(-A)=r(kA)=r(A)$，其中$k\neq 0$

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$，$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

(5) $r(A)=r(A|b)$时，方程组$Ax=b$有解；$r(A)<r(A|b)$时，无解

(6) A有n个(包括重数)特征值，且$1\leqslant\lambda_i$的无关特征向量个数$\leqslant\lambda_i$的重数

(7) 正交向量组线性无关

(8) 不同特征值的特征向量无关；若是实对称矩阵则特征向量正交

(9) 矩阵相似于对角阵⇔有n个无关特征向量

$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，$P=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，其中$\lambda_i$为特征值，$\xi_i$为特征向量

(10) 无关向量组可化为正交向量组（施密特正交化）

(11) 实对称矩阵可正交对角化

(12) 二次型可化为规范形；实对称矩阵合同于对角阵$\mathrm{diag}(E_p, -E_{r-p}, O_{n-r})$

(13) A正定⇔$\lambda_i(A)>0$⇔A正惯性指数为n⇔A顺序主子式>0

(14) $W\subseteq V$为子空间⇔W对加法和数乘封闭⇔对任意 $\alpha, \beta\in W$, $\lambda,\mu\in K$,有$\lambda\alpha+\mu\beta\in W$

(15) T为V上线性变换⇔对任意 $\alpha,\beta\in W$, $\lambda\in K$, 有$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$，$T(\lambda\alpha)=\lambda T\alpha$