习题三补充讲解(2)

9 证 “=>” $\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\theta, Ax=\theta$ 同解，故有 $r(N(\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix}))=r(N(A))$，于是 $r(\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix})=r(A)$，

则 $r((A^T,b))=r(\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix})=r(A)=r(A^T)$，故 $A^T y=b$ 有解

“<=” 因为 $A^T y=b$，故 $\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} A \\ y^T A \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} E \\ y^T \end{pmatrix} Ax$，于是

$\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} Ax \\ b^T x \end{pmatrix}=\theta, Ax=\theta$ 同解

10 解 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，$Ax=\theta$ 的基础解系为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，则有 $r(A)=n-r$

于是 $r((A,A))=r((A,O))=r(A)$，故 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\theta$ 的基础解系向量个数为 n+r

考虑向量组 $\eta_1=\begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix},\cdots,\eta_n=\begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix},\eta_{n+1}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \theta \end{pmatrix},\cdots,\eta_{n+r}=\begin{pmatrix} \alpha_r \\ \theta \end{pmatrix}$

有 $(A,A)\begin{pmatrix} e_i \\ -e_i \end{pmatrix}=\theta,(A,A)\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \theta \end{pmatrix}=A\alpha_j=\theta$，另外

$k_1\eta_1+\cdots+k_{n+r}\eta_{n+r}=\begin{pmatrix} \beta+k_{n+1}\alpha_1+\cdots+k_{n+r}\alpha_{n+r} \\ -\beta \end{pmatrix}=\theta$，其中 $\beta=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

可得 $\beta=\theta,k_{n+1}\alpha_{n+1}+\cdots+k_{n+r}\alpha_{n+r}=\theta$，故 $k_i=0,i=1,\cdots,n+r$

于是 $\eta_1,\cdots,\eta_{n+r}$ 线性无关，为 $(A,A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\theta$ 的解的极大无关组，即基础解系

12 证 $A\in R^{r\times n},B\in R^{(n-r)\times n}$ 行满秩，故 $r(A)=r,r(B)=n-r$，于是 $Ax=\theta$ 基础解系

向量个数为 $n-r$，设 $B^T=(b_1,\cdots,b_{n-r})$，则 $AB^T=O,r(B^T)=r(B)=n-r$

可得 $b_i,i=1,\cdots,n-r$ 为 $Ax=\theta$ 的 $n-r$ 个线性无关解，故 B^T 列构成基础解系

同理可得 A^T 列构成 $Bx=\theta$ 的基础解系

15 证 将 A 按行分块，$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$，考虑 $B_i=\begin{pmatrix} \alpha_i \\ A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix},i=1,\cdots,n-1$，则 $|B_i|=0$

将 $|B_i|$ 按第 1 行展开，有 $|B_i|=a_{i1}M_1+a_{i2}(-1)^{1+2}M_2+\cdots+a_{in}(-1)^{1+n}M_n=\alpha_i\xi=0$，

其中 $\xi=(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^T$，即 $A\xi=\theta$

因为 A 行满秩，故 $r(A)=n-1$，则 $A\xi=\theta$ 基础解系只有一个向量，且

A 的所有 n-1 阶子式 M_i 中必有某个非零，故 $\xi\neq\theta$，故 ξ 为方程组的基础解系

16 解 显然 $Ax=\theta,Bx=\theta$ 的解分别是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_3\beta_1+k_4\beta_4$，则 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=\theta$ 的解满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$，

即 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -k_3 \\ -k_4 \end{pmatrix}=\theta$，解方程 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -k_3 \\ -k_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

故通解为 $k\alpha_2$，基础解系为 α_2