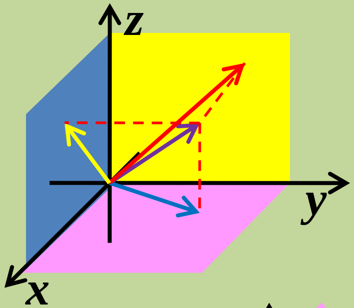
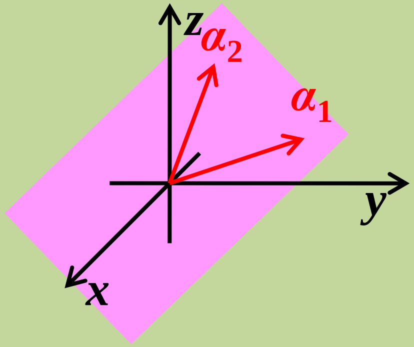
6.3 线性空间的子空间

子空间的概念

三维空间中有时需要考虑坐标平面：
xy-平面，yz-平面，xz-平面，然后考虑
空间中向量在这些平面的投影．
这些xy-平面，yz-平面，xz-平面就是子空间．



三维空间还可以考虑过原点的其它平面，
如两个无关向量 α_1, α_2 构成的平面，这也是子空间．



若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是空间$V$的一组基，由部分基向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ 构成的空间 $\{ k_1\alpha_{i1}+k_2\alpha_{i2}+\ldots+k_r\alpha_{ir} \mid k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{R} \}$ 就称为空间V的子空间．

定义6.3.1 (子空间) 设W是数域K上的线性空间V的一个非空子集，若W关于V上的加法和数乘也构成数域K上的一个线性空间，则称W是V的一个线性子空间，简称子空间，记为$W \subseteq V$，若$W \neq V$，记为$W \subset V$．

子空间的判定

定理6.3.1 线性空间V的一个非空子集W是V的子空间的充要条件是

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in W$，有$\alpha+\beta \in W$，即对加法封闭；

(2) 对任意的$\alpha \in W$, $\lambda \in K$，有 $\lambda\alpha \in W$，即对数乘封闭 .

定理6.3.2 线性空间V的一个非空子集W是V的子空间的充要条件是

对任意的 $\alpha, \beta \in W$, $\lambda, \mu \in K$，有$\lambda\alpha+\mu\beta \in W$.

上述两个定理容易验证。

每个线性空间V都有两个子空间：零子空间$\{0\}$和自身V，称为平凡子空间，其余子空间称为非平凡子空间(或真子空间) .

定义6.3.2 设V是数域K上的线性空间，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in V$，由这组向量所有可能的线性组合构成的集合

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)=\{\alpha \mid \alpha=\sum k_i \alpha_i, k_i \in K, i=1,2,\dots,s\}$$

是非空集合，且构成V的子空间，称为由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$生成的子空间，记作

$$\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \quad 或 \quad L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$$

特别地，零子空间是由零向量生成的子空间 $\mathrm{span}\{0\}$.

齐次方程组 $Ax=\theta$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 的解集是$\mathbf{R}^n$的一个子空间，称为解空间 .

子空间构造子空间

定义6.3.3 (子空间的交与和) 设W_1与W_2是数域K上线性空间V的两个子空间，定义W_1与W_2的交为

$$W_1 \cap W_2 = \{ \alpha \mid \alpha \in W_1 , \alpha \in W_2 \},$$

W_1与W_2的和为

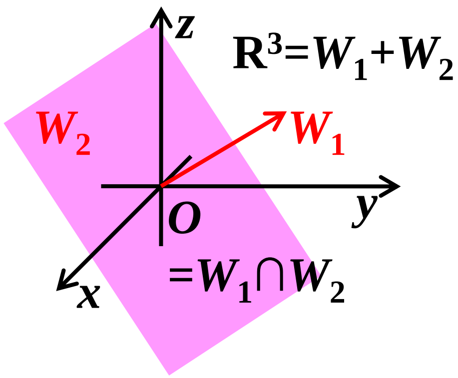
$$W_1 + W_2 = \{ \gamma \mid \gamma = \alpha + \beta , \text{对所有} \alpha \in W_1 , \beta \in W_2 \}.$$

定理6.3.3 数域K上线性空间V的两个子空间W_1与W_2的交与和仍是V的子空间.

说明：$\alpha , \beta \in W_1 , W_2 \Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta \in W_1 , W_2$；

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 , \beta = \beta_1 + \beta_2 , \Rightarrow \lambda\alpha + \mu\beta = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) \in W_1 + W_2$

例6.3.1 $\mathbf{R}^3$中子空间W_1直线，W_2垂直平面，
则 $W_1\cap W_2=\{0\}$, $W_1+W_2=\mathbf{R}^3$.



子空间的交与和满足交换律和结合律：子空间$W_1,W_2,W_3\subseteq V$

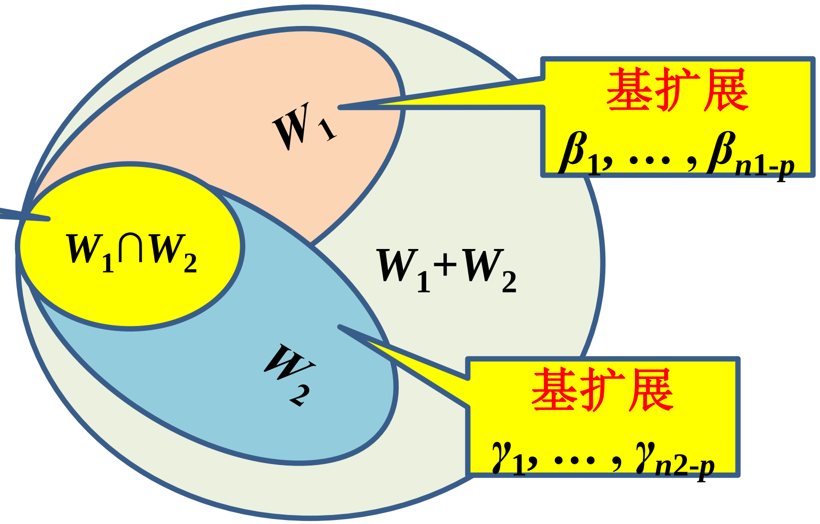
$$W_1+W_2=W_2+W_1\ ,$$
$$(W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)\ ,$$
$$W_1\cap W_2=W_2\cap W_1\ ,$$
$$(W_1\cap W_2)\cap W_3=W_1\cap(W_2\cap W_3)\ .$$

多个子空间的交与和：子空间$W_1,W_2,\ldots,W_m\subseteq V$

$$W_1\cap W_2\cap\ldots\cap W_m=(W_1\cap W_2\cap\ldots\cap W_{m-1})\cap W_m\ ,$$
$$W_1+W_2+\ldots+W_m=(W_1+W_2+\ldots+W_{m-1})+W_m\ .$$

定理6.3.4 若W_1 , W_2是线性空间V的两个有限维子空间，则

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2) .$$



证明思路:

证A:$\alpha_1,\dots,\alpha_p$, $\beta_1,\dots, \beta_{n1-p}$, $\gamma_1,\dots,\gamma_{n2-p}$
是W_1+W_2的一组基 .

显然A可表示任意向量 .
下面证A无关性：

$k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p}+t_1\gamma_1+\dots+t_{n2-p}\gamma_{n2-p}=\theta$

即 $k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p} \in W_1$

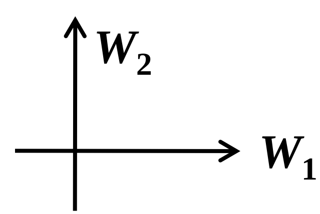
$=-t_1\gamma_1-\dots-t_{n2-p}\gamma_{n2-p} \qquad \in W_2$

$=c_1\alpha_1+\dots+c_p\alpha_p \qquad \in W_1\cap W_2$

故 $c_1\alpha_1+\dots+c_p\alpha_p +t_1\gamma_1+\dots+t_{n2-p}\gamma_{n2-p}=\theta$， W_2的基向量无关

得到 $c_1=\dots=c_p=t_1=\dots=t_{n2-p}=0$，进一步：$k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p+s_1\beta_1+\dots+s_{n1-p}\beta_{n1-p}=\theta$

得到 $k_1=\dots=k_p=s_1=\dots=s_{n1-p}=0$



注意：$W_1\cup W_2$通常不是子空间(W_1,W_2包含除外)

定义6.3.4 (直和) 若W_1+W_2中任一向量只能唯一地表示为子空间W_1的一个向量与子空间W_2的一个向量的和，则称W_1+W_2是直和(或直接和)，记为$W_1 \oplus W_2$或$W_1 \dot{+} W_2$．若$W=W_1 \oplus W_2$，则称在W内W_1是W_2的补空间，或W_2是W_1的补空间．

定理6.3.5 W_1+W_2是直和的充要条件是 $W_1 \cap W_2=\{0\}$．

证明思路：若$W_1 \cap W_2=\{0\}$，$\gamma=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$，$\xi=\alpha_1-\alpha_2=\beta_2-\beta_1 \in W_1 \cap W_2=\{0\}$
若W_1+W_2是直和, $\alpha \in W_1 \cap W_2$,则 $-\alpha \in W_1 \cap W_2$, $\alpha+(-\alpha)=0=0+0$, $\alpha=0$

推论6.3.6 W_1+W_2是直和的充要条件是 $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$．

证明：由定理6.3.5，定理6.3.4直接得到

定义6.3.5 设$W_1, W_2, \ldots, W_m$是线性空间V的子空间，若

(1) $W_1+W_2+\ldots+W_m=V$；

(2) $W_1 \cap W_2=\{0\}$, $(W_1+W_2) \cap W_3=\{0\}$, …, $(W_1+W_2+\ldots+W_{m-1}) \cap W_m=\{0\}$,

则称V是$W_1, W_2, \ldots, W_m$的直和，记作

$$V=W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m\ .$$

例6.3.2 设F^n是数域F上的n维列向量空间，A是F上的n阶方阵，令

$$V_1=\{ Ax : 任给x\in F^n \}, \quad V_2=\{ x : Ax=0 , x\in F^n \},$$

试证: (1) V_1,V_2是F^n的子空间; (2) 若A是幂等矩阵, 即$A^2=A$, 则$F^n=V_1\oplus V_2$.

证明 (1) 易见V_1,V_2都是F^n的非空子集，对任意 $k,l\in F$ 和任意 $x, y\in F^n$, 因

$$kAx+lAy=A(kx+ly)\in V_1 ,$$

故V_1是F^n的子空间;

任给 $\xi, \eta\in V_2$，有 $A\xi=0$, $A\eta=0$，且对任意 $k,l\in F$，有

$$A(k\xi +l \eta)=kA\xi+lA\eta=0 ,$$

故 $k\xi +l \eta\in V_2$，即V_2是F^n的子空间 .

(2) 当A是幂等矩阵时，将F^n中任一向量表示成：$x=Ax+(x-Ax)$，注意到$Ax\in V_1$，以及因 $A(x-Ax)=Ax-A^2x=0$，得 $x-Ax\in V_2$，所以$F^n\subseteq V_1+V_2$，从而 $F^n =V_1+V_2$.

设ξ是$V_1\cap V_2$中的任一向量，因$\xi\in V_1$，所以存在 $\eta\in F^n$ 使得$\xi=A\eta$. 又因 $\xi\in V_2$，所以 $A\xi=0$，于是 $\xi=A\eta =A^2\eta=A(A\eta)=A\xi=0$，即$V_1\cap V_2=\{0\}$，所以$F^n=V_1\oplus V_2$.