2.7.3 极大无关组与向量组的秩

矩阵的秩就是反映矩阵的行中有多少个是独立的行，其余则是多余的. 同样，矩阵的秩也反映了矩阵的列中有多少是独立的列.

我们不仅需要了解有多少个独立的行(列)，还想知道

- 有哪些独立的行(列)?
- 最多个数的独立行(列)有哪些？
- 这些最多个数的独立行(列)对于所有的行(列)有什么重要性？

其中，最多个数的独立行(列)有更大的重要性，因为它的一部分也是独立行(列)，它的个数反映了独立行(列)的个数，进一步它能表示出所有的行(列).

* 为方便起见，今后我们一般考虑矩阵的列，或者列向量.

列向量组构成的矩阵对应的最大独立列称向量组的极大无关组.

$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\}, A=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$中1, 2, 4列为最大独立列，故$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$为一个极大无关组.

另外1, 3, 4列也是最大独立列，故$\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$也为一个极大无关组.

定义2.7.4 (极大无关组) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是某一向量组的部分组，满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关；

(2) 在原向量组中任取向量α，向量组$\alpha_1,\alpha_2, \dots, \alpha_r,\alpha$都线性相关，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_r$是原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

由定义可知，仅含有零向量的向量组没有极大无关组，而一个线性无关的向量组的极大无关组即是其本身.

定理2.7.7 设$\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_{ir}$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的一个极大线性无关组，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$中任一向量均可由$\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_{ir}$线性表示，且表示法唯一.

推论2.7.8 向量组与它的任意一个极大无关组等价.

推论2.7.9 一个向量组的各个极大无关组之间是等价的.

推论2.7.10 两个向量组等价的充要条件是一组的一个极大无关组与另一组的一个极大无关组等价.

证明：由定理2.7.2和极大无关组的定义立即得到定理2.7.7的结论.

由定理2.7.7 容易得出推论2.7.8，推论2.7.9，推论2.7.10.

例2.7.12 求向量组α_1, α_2, α_3 的极大线性无关组，其中

$$\alpha_1=(1,1,0),\quad \alpha_2=(1,0,0),\quad \alpha_3=(0,1,0).$$

解 显然$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，所以$\alpha_1$, α_2, α_3线性相关，又易见α_1与α_2线性无关. 故α_1,α_2是一个极大无关组，同理可知 α_1,α_3；α_2,α_3 也都是极大无关组.

极大无关组的判别： 设 α_1, α_2, …, α_r 是某一向量组的部分组，满足

(1) α_1, α_2, …, α_r线性无关；

(2) 在原向量组中任一向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性表示.

若向量组比较复杂，如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

如何求 α_1, α_2, α_3, α_4的极大线性无关组?

用初等变换简化后再求极大无关组.

初等行变换与列向量组

考虑m维的列向量组：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，

构成矩阵：$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

初等行变换不改变列向量组的组合关系：

初等行变换：$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma) \to (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \eta)$

则有：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=\theta \Leftrightarrow k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_n\beta_n=\theta$，

$\gamma=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n \Leftrightarrow \eta=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_n\beta_n$.

$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$极大无关组$\Leftrightarrow \beta_1,\ldots,\beta_r$是$\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$极大无关组

说明：$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \eta)=P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma)$，$P$可逆.

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma)=P^{-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \eta)$.

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n=\theta \Leftrightarrow P(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n)=\theta$

$\gamma=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n \Leftrightarrow P\gamma=P(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n)$

$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r\}$的无关性相同，且表示其它向量的表达式相同

应用：初等行变换求向量组的极大无关组和组合关系

例2.7.13 (改动)设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

求向量组 α_1 , α_2 , α_3 , α_4, α_5 的一个极大无关组，并用此极大无关组表示其余向量 。

解:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&5\\0&1&0&-1&2\\0&0&1&-1&-3\\2&-1&3&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&5\\0&1&0&-1&2\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 (α_1 , α_2 , α_3) 为一个极大无关组，并有

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\ ,\quad \alpha_5=5\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3\ .$$

例 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\6\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\\-4\end{pmatrix},$$

求向量组 α_1 , α_2 , α_3 , α_4, α_5 的一个极大无关组，并用此极大无关组表示其余向量 。

解:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&1&4&2\\2&2&4&6&-2\\-1&1&-4&1&3\\1&0&3&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 (α_1 , α_2 , α_4) 为一个极大无关组，并有

$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$ ， $\alpha_5=5\alpha_2-2\alpha_4$.

线性无关列向量组与组合出来的向量组

考虑m维的线性无关列向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$，

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 组合出新的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ 如下：

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots c_{n2}\alpha_n, \\ \qquad \vdots \\ \beta_k = c_{1k}\alpha_1 + c_{2k}\alpha_2 + \cdots c_{nk}\alpha_n, \end{cases}$$

用矩阵表示：$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} = AC,$

则有：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ 线性相关$\Leftrightarrow$ C的列线性相关$\Leftrightarrow$$\mathbf{r}(C)<k$，

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关$\Leftrightarrow$ C的列线性无关$\Leftrightarrow$$\mathbf{r}(C)=k$.

进一步：$k>n$时，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ 一定线性相关 .

证明思路：$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+ \ldots +\lambda_k\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow C(\lambda_1,\lambda_2, \ldots ,\lambda_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\theta}$

定理2.7.11 一个向量组的各个极大无关组所含向量的个数相同。

证明： 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 及向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 都是某一个向量组的极大无关组，不妨设都是列向量组，并记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$，$B=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 表示，故 $r \leqslant s$，否则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关，与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是极大无关组矛盾。

同理 $s \leqslant r$。故 $s=r$.

定义2.7.5 (向量组的秩) 向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个极大无关组所含向量的个数定义为该向量组的秩，记为

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}.$$

规定仅含零向量的向量组的秩为0.

定理2.7.12 设 A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; B: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是两个同维数的向量组，若向量组 A 可以由向量组 B 线性表示，则必有

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \leq r\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}.$$

进一步有：等价的向量组必有相同的秩.

证明： A 和 B 的极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$，则 $r \leq s$.

例2.7.14 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

按*a*,*b*的不同取值，指出向量组 α_1 , α_2 , α_3 , α_4 的一个极大无关组以及秩 *r*.

解:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}.$$

1) $a\neq 1,b\neq 2$时，极大无关组为该向量组本身，*r*=4 .

2) $a\neq 1,b=2$时，一个极大无关组为 α_1 , α_2 , α_3 ，*r*=3 .

3) $a=1,b\neq 2$时，一个极大无关组为 α_1 , α_2 , α_4 ，*r*=3 .

4) $a=1$且$b=2$时，一个极大无关组为 α_1 , α_2 ，*r*=2 .

例2.7.15 设n个n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关，

$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$， $k_1,k_2,\dots,k_n$ 全不为零.

证明：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$中任意$n$个向量都线性无关.

证法一思路：用定义 $l_1\alpha_1 + \dots + l_{i-1}\alpha_{i-1} + l_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + l_{n+1}\alpha_{n+1} = \theta$，将 α_{n+1}代换掉，得到 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的组合，再由系数为零得出$l_i$全为0。

证法二思路：用秩

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n+1})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & k_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_i \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & k_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & k_n \end{pmatrix}=A_0B,$$

$|A|=|A_0B|=|A_0||B|=(-1)^{i+n}k_i\,|A_0|\neq 0$, $r(A)=n$.

证法三思路：用向量组等价A:$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n+1}$；$B$:$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$，

$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$ 可知B能表示A，

$\alpha_i = k_i^{-1}(\alpha_{n+1} - k_1\alpha_1 - \dots - k_{i-1}\alpha_{i-1} - k_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - k_n\alpha_n)$ 可知A能表示B.

思考：该题是否可推广到m维？是否可再推广到A_0相关，A秩不变？

可推广到m维(用法一或法三)；可推广到A_0相关，A秩不变(用法三)

矩阵的行秩、列秩和矩阵的秩

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的列向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 的秩称为矩阵A的列秩；A的行向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ 的秩称为矩阵A的行秩 .

定理2.7.13 任一矩阵的秩与其列秩、行秩均相等.

证明：设$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$， $r(A)=r$，并设r阶子式 $D_r\neq 0$，则 D_r 所在的 r 个列向量线性无关，又由A中所有 $r+1$ 阶子式全为零，知A中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关。因此 D_r 所在的 r 个列向量是A的列向量组的一个极大无关组，所以列向量组的秩等于r。由$r(A)=r(A^T)=r$可知，A^T列向量组的秩也即A行向量组的秩为r.

注：由于矩阵的行秩、列秩、秩相等，故对于$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$下列记号表示相同含义：

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = r(A)=r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

矩阵和、积的秩的关系

定理2.7.14 (1) $\mathrm{r}(A+B) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

(2) $\mathrm{r}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$;

(3) 若A , B均为n阶方阵，则$\mathrm{r}(AB) \geqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$.

证明：(1) 作矩阵$(A+B,B)$，应用初等列变换可得 $(A+B,B) \rightarrow (A,B)$，于是有 $\mathrm{r}(A+B) \leqslant \mathrm{r}(A+B,B)=\mathrm{r}(A,B) \leqslant \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

(2) 设$\mathrm{r}(A)=r_1$,$\mathrm{r}(B)=r_2$，又设A的行梯形矩阵为A_0，B的列梯形矩阵为B_0，则存在可逆矩阵P和Q使$A=PA_0$, $B=B_0Q$，因为$AB=PA_0B_0Q$，所以$\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A_0B_0)$. 由于$A_0$只有$r_1$个非零行，$B_0$只有$r_2$个非零列，所以$A_0B_0$至多有$r_1$个非零行和$r_2$个非零列，故

$\mathrm{r}(A_0B_0) \leqslant \min\{ r_1,r_2 \}=\min\{ \mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B) \}$.

即得 $\mathrm{r}(AB) \leqslant \min\{ \mathrm{r}(A) , \mathrm{r}(B) \}$

(3) 应用初等行变换可得 $\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$,于是有

$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}$的最高阶非零子式在$\begin{pmatrix} B & E \\ O & A \end{pmatrix}$中对应的子式也非零)

$$= r\begin{pmatrix} B & E \\ -AB & O \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} O & E \\ AB & O \end{pmatrix} = r(AB)+n.$$

定理中的(1)、(2) 还可以用极大无关组和向量组的秩证明

(1) $r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)$;

(2) $r(AB) \leqslant \min\{r(A),r(B)\}$;

(1) 设A , B均是$m \times n$矩阵，$r(A)=r_1, r(B)=r_2$，将A , B按列分块为
$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$，$B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.
于是 $A+B=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$.
不妨设A和B的列向量组的极大无关组分别是$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r1}$和 β_1, $\beta_2, \dots, \beta_{r2}$， 则 $A+B$ 的列向量组可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r1}, \beta_1$, $\beta_2, \dots, \beta_{r2}$ 线性表示，由定理2.7.12，有
$r(A+B) \leqslant r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r2}\} \leqslant r_1+r_2=r(A)+r(B)$.

(2) 设A , B分别是$m \times n$, $n \times s$矩阵，

将A按列分块，则

$$AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

所以，AB的列向量组可由A的列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性表示. 从而 $r(AB)=(AB)$的列秩$\leqslant r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}=r(A)$. 类似地，将B按行分块，可得 $r(AB) \leqslant r(B)$.

综合上述证得 $r(AB) \leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.

(3) $r(AB) \geq r(A)+r(B)-n$ 中A , B可以不是方阵，其中n为A的列数 .

矩阵秩的关系

$0 \leqslant r(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$;

$r(A^{T})=r(A)$;

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$;

$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{ r(A) , r(B) \}$; (n为A的列数)

$\max\{ r(A) , r(B) \}\leqslant r((A , B))\leqslant r\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}= r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$;

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$. (P , Q非奇异)