9 月 28 日作业分析

作业：习题二：22,30,35,37,40,43,20(2),26,28,29,31(2),32

习题二：30 绝大部分同学没有过程，直接写出 X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1} . 应该写出过程，有两种方法：

方法一：设未知量求逆矩阵. X 是块对角矩阵，直接得 $X^{-1}=\mathrm{diag}(A^{-1},B^{-1})$.

设 $Y^{-1}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$，由 $YY^{-1}=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AC_{21} & AC_{22} \\ BC_{11} & BC_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$，得方程组 $\begin{cases} AC_{21}=BC_{12}=E, \\ AC_{22}=BC_{11}=O. \end{cases}$

解得 $C_{22}=C_{11}=O$, $C_{21}=A^{-1}$, $C_{12}=B^{-1}$，即 $Y^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$. 同理可得 $Z^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

方法二：表示成简单的矩阵的乘积，再求逆. 易知 $X^{-1}=\mathrm{diag}(A^{-1},B^{-1})$.

因为 $Y=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$，故 $Y^{-1}=\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

因为 $Z=\begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}Y$，故 $Z^{-1}=Y^{-1}\begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

30 题也有同学将初等变换作用到块矩阵上，此法不宜使用. 可先针对普通矩阵，再用块矩阵验证.

例如：由 $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ b & c & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & -ca^{-1} & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & a^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & -b^{-1}ca^{-1} & b^{-1} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -b^{-1}ca^{-1} & b^{-1} \\ 0 & 1 & a^{-1} & 0 \end{array}\right)$，经验证

$\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$. 故有 $Z^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

35 有些同学没有证明 $|A|\neq 0$ 就直接得到 $|A|=1$，进而求 a_{11}。也有的同学讨论了 $|A|\neq 0$ 但推导过程有点乱。可如下：

解 因为 $A^*=A^T$，故 $AA^T=AA^*=|A|E$。该式子两边取行列式，得 $|A|^2=|A||A^T|=|AA^T|=||A|E|=|A|^3$，从而 $|A|=0$ 或 $|A|=1$。从 $AA^T=|A|E$，又有 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=|A|$。再由 $a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，故 $|A|=3a_{11}^2>0$。于是 $|A|=1$，$a_{11}=1/\sqrt{3}$.

40 (1)不少同学必要性证明过程有错，充分必要条件可合起来一起证明，见如下：

证明：$A=E-\alpha\alpha^T$，$\alpha\neq\theta$，则 $A^2=A \Leftrightarrow E-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-\alpha\alpha^T \Leftrightarrow \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=\alpha\alpha^T \Leftrightarrow (\alpha^T\alpha-1)\,\alpha\alpha^T=0 \Leftrightarrow \alpha^T\alpha=1$.

40 (2)大家都用 $A^2=A$ 反证 A 不可逆，也可以用非零解条件来证.

证明：$A=E-\alpha\alpha^T$，$\alpha\neq\theta$，且 $\alpha^T\alpha=1$，故 $A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=\alpha-\alpha=\theta$，即方程组 $Ax=\theta$ 有非零解，故 $|A|=0$，即 A 不可逆.

28(1) 有些同学证明 A-E 可逆过程有错，可如下：

证明：因为 $A+B=AB$，故 $(A-E)(B-E)=AB-A-B+E=E$，即 A-E 可逆，逆矩阵为 B-E .

另外 28(2)求 A 有两种方法：由 $A+B=AB$ 得到 $A=B(B-E)^{-1}$；或由 $(A-E)(B-E)=E$ 得到 $A=E+(B-E)^{-1}$.