10 月 26 日作业分析

作业：习题四：1,2(1),4,5,7,8,9,11,12

习题四：4 用同学这样使用行列式 $|\lambda E\text{-}A|^{\mathrm{T}}$，应该用 $|(\lambda E\ \text{-}A)^{\mathrm{T}}|$，可如下：

证：因为 $|\lambda E\text{-}A^{\mathrm{T}}|=|(\lambda E\ \text{-}A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E\text{-}A|$，故 A 与 A^{T} 有相同的特征值. 但是特征向量不一定相同，反例如下：

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，于是特征向量有 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=0\times\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，和 $A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

7 有同学用式子 $(\lambda E\text{-}A)\ \xi=\theta$ 来证明结论，如下：

$(\lambda_1E\text{-}A)\xi=\theta$，$(\lambda_2E\text{-}B)\xi=\theta$. 则有 $((\lambda_1+\lambda_2)E\text{-}(A+B))\xi=((\lambda_1E\text{-}A)+(\lambda_2E\text{-}B))\xi=\theta$，

和 $(\lambda_1\lambda_2E\text{-}\ AB)\xi=(\lambda_2(\lambda_1E\text{-}A)+A(\lambda_2E\text{-}B))\xi=\theta$. 结论得证.

这样要复杂一些，可直接用定义式子 $A\xi=\lambda\xi$，证明如下：

证：设 $A\xi=\lambda_1\xi$，$B\xi=\lambda_2\xi$. 则有 $(A+B)\xi= A\xi+B\xi =(\lambda_1+\lambda_2)\xi$，$AB\xi=A(\lambda_2\xi)= \lambda_2\, A\xi =\lambda_1\lambda_2\, \xi$. 结论得证.

8 该题有两种解法，如下：

解：设矩阵为 A，则 tr(A)=-4+a-2=-1-2-3，$|A|$=5a-17b+28=(-1)(-2)(-3)=-6，解得 a=0, b=2 .

解法二：设矩阵为 A，则 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&1\\-1&\lambda-a&4\\3&-b&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+(6-a)\lambda^2+(3-6a+4b)\lambda-5a+17b-28$.

将 λ=-1,-2,-3 代入特征多项式，得 $\begin{cases}13b-26=0,\\3a+9b-18=0,\\4a+5b-10=0.\end{cases}$，解得 a=0, b=2 .

12 有的做错，很多证明的结论不严格，即证明 AB 的特征值是 BA 的特征值，反之亦然，但是没有考虑到重特征值情况. 例如特征值为 1,1,2 和 1,2,2，不能算特征值完全相同. 可仿照例 4.2.10 证明：

证：易知 $\begin{pmatrix}E&-A\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB&O\\B&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&O\\B&BA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-A\\O&E\end{pmatrix}$，

因 $\begin{pmatrix}E&-A\\O&E\end{pmatrix}$ 可逆，由上式可知 $\begin{pmatrix}AB&O\\B&O\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}O&O\\B&BA\end{pmatrix}$ 相似，

从而 $\left|\lambda E_{2n}-\begin{pmatrix}AB&O\\B&O\end{pmatrix}\right|=\left|\lambda E_{2n}-\begin{pmatrix}O&O\\B&BA\end{pmatrix}\right|$，即 $\begin{vmatrix}\lambda E-AB&O\\-B&\lambda E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E&O\\-B&\lambda E-BA\end{vmatrix}$，

故 $\lambda^n|\lambda E\text{-}AB|=\lambda^n|\lambda E\text{-}BA|$. 由多项式相等性质，有 $|\lambda E\text{-}AB|=|\lambda E\text{-}BA|$，故特征值相同.