习题四补充讲解(2)

10 证因为 $B-\lambda_1\lambda_2\lambda_3E=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)$，故

$$B\xi_i-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\xi_i=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)\xi_i=(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)(\lambda_i-\lambda_3)\xi_i=\theta$$

即 $B\xi_i=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\xi_i, i=1,2,3$，故其线性组合 $\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 也满足 $B\eta=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\eta$. 又 ξ_1,ξ_2,ξ_3 属于 A 的不同特征值，故线性无关，于是非零线性组合 $\eta\neq\theta$，故为 B 的特征向量

13 证设 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1, A\xi_2=\lambda_2\xi_2, A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_3(\xi_1+\xi_2)$，又

$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$ 故有 $(\lambda_1-\lambda_3)\xi_1+(\lambda_2-\lambda_3)\xi_2=\theta$

假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 ξ_1,ξ_2 无关，故有 $\lambda_1-\lambda_3=\lambda_2-\lambda_3=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 矛盾

故有 $\lambda_1=\lambda_2$

15 解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 5 & 3\\ -10 & \lambda+9 & 6\\ 6 & -6 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$，

则特征值为 $\lambda=1,2,-1$，对应特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-2&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$，即 $A=P\Lambda P^{-1}$，于是

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-2&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+(-1)^n\begin{pmatrix}-2&2&1\\-4&4&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

16 解因为 A~B，于是 $tr(A)=tr(B),|A|=|B|$，即 $a+6=2a+8, 8a=4(8a-2b)$

故得 $a=-2,b=-6$，即有 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\1&-7&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&-6\\0&2&-4\end{pmatrix}$

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\-1&\lambda-3&0\\-1&7&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+2)$

得 A 特征值 $\lambda=2,4,-2$，对应特征向量 $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

B 有相同特征值 $\lambda=2,4,-2$，对应特征向量 $\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $Q_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}, Q_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q_1^{-1}AQ_1=Q_2^{-1}BQ_2=\Lambda=\mathrm{diag}(2,4,-2)$

再令 $P=Q_1Q_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\3&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$