2. 1 矩阵和n维向量的概念

定义2.1.1(矩阵) 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$排成$m$行$n$列数表，外加括号，写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵. 这里用A表示定义中的矩阵. 这$m\times n$个数叫做矩阵A的元素，a_{ij}是矩阵A的第i行第j列元素.

元素都是实数的矩阵叫做实矩阵，元素都是复数的矩阵叫做复矩阵.

用符号$R^{m\times n}$或$M_{m\times n}(R)$表示全体$m\times n$实矩阵的集合.

当$m=n$时，$m\times n$矩阵A称为n阶方阵. $m\times n$矩阵和n阶方阵可表示为$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$， 也可记为$A_{m\times n}$，A_n等.

定义2.1.2 (n维向量) n个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad 或 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为**n维向量**，前者称为**行向量**，后者称为**列向量**，$a_i(i=1,2,\ldots,n)$ 称为**第i个分量或坐标**，分量都是实数的向量称为**实向量**，实向量的全体用$\mathbf{R}^n$表示；分量都是复数的向量称为**复向量**，复向量的全体用$\mathbf{C}^n$表示.

矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$的第i行的元素所成的行向量$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$称为它的第$i$个行向量.

同样，第j列元素所成的列向量 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 称为它的第j个列向量.

常用粗体英文字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$等表示矩阵，用小写粗体希腊字母$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$等表示向量.

零矩阵：所有元素为零的矩阵，m行n列的零矩阵记为$O_{m\times n}$或O .

零向量：所有分量为零的向量称为零向量，用希腊字母θ表示，有时也记为**0**.

对角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i\neq j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

若对角矩阵A中的$a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=k$，则称$A$为**数量矩阵**，当$k=1$时，称为**单位矩阵**，记为$E$或$I$.

例如 $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

上三角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i>j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=0, i<j$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

对称矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=a_{ji}$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

反对称矩阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，且有$a_{ij}=-a_{ji}$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$是对称矩阵，　$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \end{pmatrix}$是反对称矩阵.

矩阵相等：矩阵A和B的行数和列数分别相等，并且对应的元素也都相等.

向量相等：向量α 与β同为行向量或列向量，分量个数相等，且对应分量也相等. 或者两个向量作为矩阵来看相等.

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为A的**转置矩阵**，记为 A^T (或A')：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义2.1.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

称为方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式，记为 $|A|$. 如果 $|A|\neq 0$，则称矩阵A是非异矩阵，如果 $|A|=0$，则称矩阵A是奇异矩阵或退化矩阵.

2. 2 矩阵运算

2.2.1 矩阵的加法运算

两个矩阵相加减：对应元素相加减

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

例2.2.1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

注意：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵加减是向量加减的推广

向量加减

$$(1,2) + (7,-5) = (8,-3), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

定义2.2.1 (加法) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵A与B的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，记为 $A+B$：

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \quad .$$

加法最基本性质：

1. 交换律： $A+B=B+A$.
2. 结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. 零矩阵：对任一矩阵A，$A+O=O+A$ (O与A是同型矩阵) .
4. 负矩阵：对任一矩阵$A=(a_{ij})$，可定义 $-A=(-a_{ij})$，称$-A$为A的负矩阵，显然有 $A+(-A)=O$.

定义矩阵的减法为：$A-B=A+(-B)$.

即：$(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

2.2.2 矩阵的数乘运算

一个数乘以矩阵：该数乘以每个元素

$$2\times\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -6\\ 6 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

数乘矩阵是向量倍数的推广

数乘向量 $3\times(1,2)=(3,6)$ ， $2\times\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$

定义2.2.2 (矩阵的数乘) 数k与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘的积定义为 $(ka_{ij})_{m\times n}$， 记为 kA：

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}\ .$$

数乘最基本性质：

1. **结合律： $(kl)A=k(lA)=l(kA)$.**
2. **分配律： $k(A+B)=kA+kB$， $(k+l)A=kA+lA$， 其中k,l均为实数，A,B均为$m\times n$矩阵 .**
3. **$1\cdot A=A$ ； $0\cdot A=O$.**
4. **$(-1)A=-A$.**

例2.2.2 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$ 且 **3*A*-2*X*=*B*，求矩阵*X* .**

解 在 **3*A*-2*X*=*B*** 两端同时加上 **(-3*A*)** 得

$$-2X=B-3A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix},$$

两端再乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 得 $X=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$

例2.2.3 (方阵的数乘与其行列式) 已知矩阵 *A* 是五阶方阵，且 |*A*|=2，
则 $|2A|=2^5|A|=32\times 2=64$.

一般，若 *A* 是*n*阶方阵，*k*为任意数，则有 $|kA|=k^n|A|$.

2.2.3 矩阵的乘法运算

两个矩阵相乘：左边矩阵的每一行与右边矩阵每一列对应元素相乘的和构成矩阵的元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3+2\times1 & 1\times1+2\times(-1) \\ 2\times3+1\times1 & 2\times1+1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

例2.2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -28 \\ -28 & 36 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}$$

注意： $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

矩阵乘法是向量内积的推广

向量内积 $(1,2)\times\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$ ， $(1,2)\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

变换组合导出矩阵的乘法

向量α=(*x*,*y*)变换到α′= (*x*′,*y*′)：

$$T_1:\begin{cases} x'=b_{11}x+b_{12}y \\ y'=b_{21}x+b_{22}y \end{cases} \quad \text{对应矩阵：} B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

向量α′= (*x*′,*y*′)变换到α″= (*x*″,*y*″):

$$T_2:\begin{cases} x''=a_{11}x'+a_{12}y' \\ y''=a_{21}x'+a_{22}y' \end{cases} \quad \text{对应矩阵：} A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

向量(*x*,*y*) 到(*x*″,*y*″)的变换组合:

$$T:\begin{cases} x''=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y \\ y''=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y \end{cases} \quad \text{对应矩阵：} C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

变换的符号表示: $\alpha'=T_1\alpha \quad , \quad \alpha''=T_2\alpha' \quad \Rightarrow \quad \alpha''=T_2T_1\alpha=T\alpha$

对应矩阵的表示: $B \quad , \quad A \quad \Rightarrow \quad A\times B=C$ 进一步若：$\alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\alpha'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\alpha''=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

则有： $\alpha'=B\alpha \quad , \quad \alpha''=A\alpha' \quad \Rightarrow \quad \alpha''=AB\alpha=C\alpha$

定义2.2.3 (矩阵的乘法) 设 $A=(a_{ij})_{m\times l}$， $B=(b_{ij})_{l\times n}$， 则A与B的乘积AB定义为 $C=(c_{ij})_{m\times n}$， 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\ ,\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

乘法最基本性质： 证明见后面

1. 结合律： $(AB)C=A(BC)$.
2. 数乘结合律： $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.
3. 分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$.

此外，还有 $AO=OA=O$, $AE=EA=A$, 其中O为零矩阵，E为单位矩阵.

例2.2.5 设 $A=(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n), B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ ，求 AB 和 BA .

解

$$AB=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n), BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1\ a_2\cdots\ a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}.$$

例2.2.7 证明 $|AB|=|A|\,|B|$.

证明 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times n}$， 记$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=|A|\times|B|,$$

对D_{2n}作一系列变换：

a_{11}所在行加上 a_{11}倍b_{11}行，再加上a_{12}倍b_{21}行，…，加上a_{1n}倍b_{n1}行，则第1行的$a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}$消为0，第1行后面的0变为$c_{11},c_{12},\ldots,c_{1n}$

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

进一步：消去$a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n},a_{31},a_{32},\ldots,a_{nn}$，得到如下行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right|=|AB|,$$

于是 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

进一步可得：$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\ldots|\boldsymbol{A}_k|$.

矩阵乘法的一些特点

矩阵与单位矩阵相乘不变：

左乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

右乘单位矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

矩阵与对角矩阵相乘：

左乘对角矩阵：行作用

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} & 7a_{14} & 7a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} & 2a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

右乘对角矩阵：列作用

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a_{11} & 4a_{12} & -3a_{13} \\ 8a_{21} & 4a_{22} & -3a_{23} \\ 8a_{31} & 4a_{32} & -3a_{33} \\ 8a_{41} & 4a_{42} & -3a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & 4y & -3z \end{pmatrix}$$

矩阵乘法无交换律

例2.2.5中 $AB \neq BA$

方阵乘法的例子：

$$AB=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 10\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

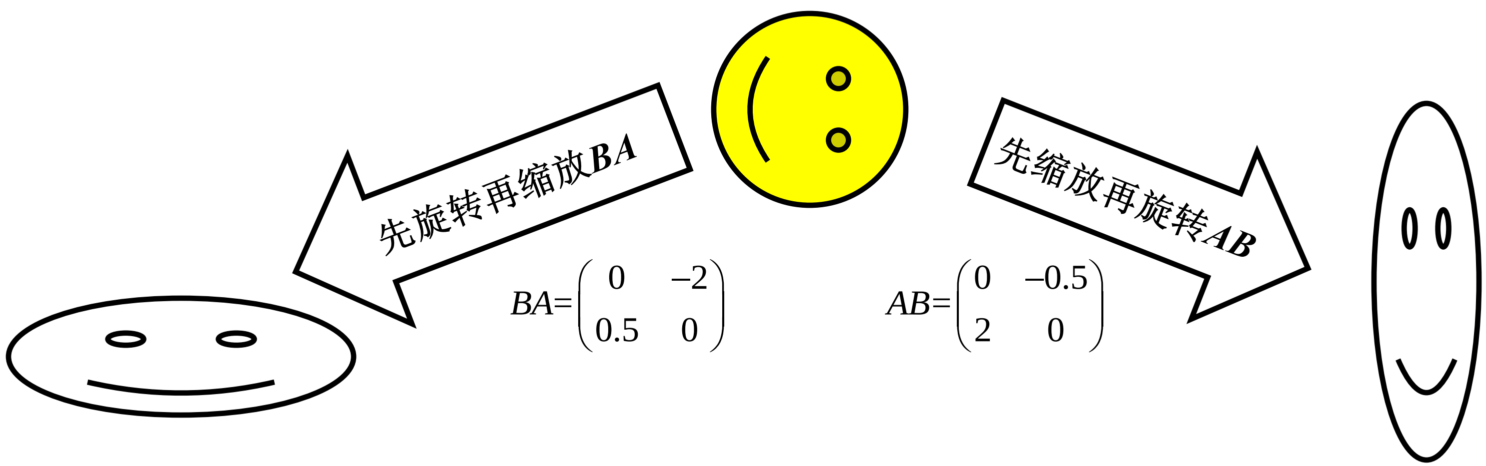
$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -1\\ 10 & -1\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

几何说明：

$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 表示图形逆时针旋转90°

$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$ 表示图形缩放：水平2倍，垂直0.5倍



$BA=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0.5 & 0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}0 & -0.5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

矩阵乘法无消去律

矩阵乘法：

$AB=O \not\Rightarrow A=O$或$B=O$　　见例子 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

矩阵乘法不满足消去律：

例子：$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

其中：$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

但是：$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

矩阵乘法的结合律和分配率

矩阵乘法的结合律：

$$(AB)C=A(BC)\quad,\quad k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

说明：比较 (i,j) 元素，以 $(AB)C=A(BC)$ 为例

AB的 (i,k) 元素 $\sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sk}$　$(AB)C$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sk})c_{kj}$

BC的 (s,j) 元素 $\sum_{k=1}^{p} b_{sk}c_{kj}$　$A(BC)$的 (i,j) 元素 $\sum_{s=1}^{l} a_{is}(\sum_{k=1}^{p} b_{sk}c_{kj})$

$$\sum_{\substack{s=1,2,\ldots,l\\k=1,2,\ldots,p}} a_{is}b_{sk}c_{kj}$$

矩阵乘法的分配律：

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(B+C)A=BA+CA$$

说明：比较 (i,j) 元素，以$A(B+C)=AB+AC$为例

$A(B+C)$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$　$AB+AC$的 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj}$

2.2.4 转置矩阵的性质

矩阵转置：行变列，列变行

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

定义2.1.3 (转置矩阵) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列互换后得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为A的转置矩阵，记为 A^T (或A')：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置基本性质：

1. $(A^T)^T=A$ ； $|A^T|=|A|$ ；
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$ ；
3. $(kA)^T=kA^T$ (k,l均是数)；
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

说明：比较 (i,j) 元素，以$(AB)^T=B^TA^T$ 为例

$(AB)^T$ 的 (i,j) 元素$=AB$的(j,i)元素$= \sum_{k=1}^{l} a_{jk}b_{ki}$

B^TA^T的 (i,j) 元素$=B$的i列与A的j行相乘$= \sum_{k=1}^{l} b_{ki}a_{jk}$

例2.2.8 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ **，求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.**

解　法一： $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 16 & 1\\ 28 & 19\end{pmatrix},$

所以 $(AB)^T=\begin{pmatrix}2 & 16 & 28\\ 1 & 11 & 19\end{pmatrix}.$

法二： $(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 16 & 28\\ 1 & 11 & 19\end{pmatrix}.$