矩阵代数式

矩阵方阵的乘幂：方阵多次相乘 $A^{k+1}=A^kA$, 并令$A^0=E, A^1=A$

方阵乘幂的性质： $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$

方阵的代数式： $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$,

$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$,

$(A+\lambda E)^2=A^2+2\lambda A+\lambda^2E$.

矩阵无交换律,不能象普通数的代数式那样交换和展开:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2\neq A^2+2AB+B^2,$$

$$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2\neq A^2-B^2.$$

矩阵多项式

但是对于一元矩阵多项式，有如下交换律：（专指方阵）

$$A^k A^l = A^{k+l} = A^l A^k\,,\quad k,l=1,2,3,\cdots,\text{其中}A^0 = E$$

$$A^k E = EA^k, k=1,2,3,\cdots,$$

$$f(A)g(A) = g(A)f(A),$$

$$\text{其中}f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E, g(A) = b_m A^m + \cdots + b_1 A + b_0 E.$$

一元矩阵多项式可以象普通数的代数式那样交换和展开:

若有：
$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n), \end{aligned}$$

则有：
$$\begin{aligned} f(A) &= a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E \\ &= a_n (A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_n E). \end{aligned}$$

例2.2.6 由 $f(x)=2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$,

可得 $f(A)=2A^2+5A-3E=(2A-E)(A+3E)$.

*** 矩阵多项式还可用二项式公式化简，如：**

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^n$$

$$=(E+A)^n=E+C_n^1A+C_n^2A^2+C_n^3O+\cdots$$

$$=E+nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$