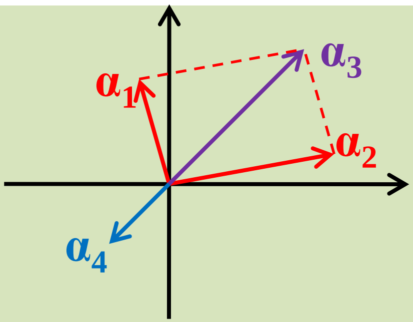
6.1 线性空间的定义

线性空间的直观概念

二维空间：

二维向量 $\alpha_1(x_1, y_1), \alpha_2(x_2, y_2), \alpha_3(x_3, y_3), \alpha_4(x_4, y_4)$

有加减有数乘：$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$, $-0.5\alpha_3=\alpha_4$

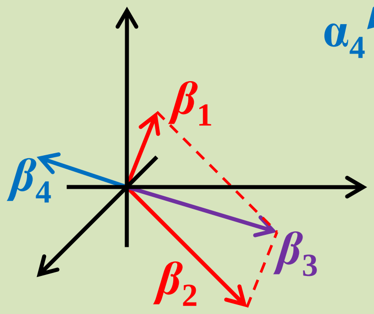


三维空间：

三维向量 $\beta_1(x_1, y_1, z_1), \beta_2(x_2, y_2, z_2)$,

$\beta_3(x_3, y_3, z_3), \beta_4(x_4, y_4, z_4)$

有加减有数乘：$\beta_1+\beta_2=\beta_3$, $-0.5\beta_3=\beta_4$



其它集合：

学习成绩的集合：(数,理,化,语,英)，分数区间[0,100]

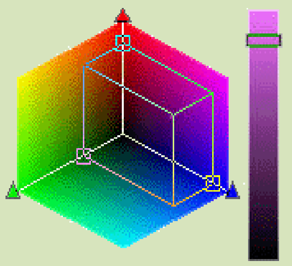
平时分α,期中分β,期末分γ,总评分$\xi=0.2\alpha+0.3\beta+0.5\gamma$

三原色构成的颜色的集合：

(红,绿,蓝)，颜色值的区间[0,1]

颜色1:α,颜色2:β,

两种颜色等比例混合的颜色$\gamma=0.5\alpha+0.5\beta$



上述集合的特点：元素可加减，可数乘——线性空间

线性空间的定义

定义6.1.1 (数环) 设$\mathcal{R}$是非空数集，其中任何两个数之和、差与积仍属于$\mathcal{R}$ (即$\mathcal{R}$关于加、减、乘法运算是封闭的)，则称$\mathcal{R}$是一个数环 .

数环是对具有整数最基本性质的数集合的统称 .

如：整数集Z，偶数集，$\{ k\pi \mid k\in Z \}$，$\{0\}$.

数环的简单性质：

(1) 任何数环必含0

(2) 若 $a\in \mathcal{R}$，则 $-a\in \mathcal{R}$

定义6.1.2 (数域) 若K是至少含有两个互异数的数环，且其中任何两数a与b之商 $(b\neq 0)$ 仍属于K，则称K是一个数域 .

数域是对具有有理数最基本性质的数集合的统称 .

如：有理数集Q，实数集R，复数集C，$\{ a+b\sqrt{2} \mid a,b\in Q \}$.

数域的简单性质：

(1) 数域关于加减乘除(分母不为零)四则运算是封闭的

(2) 任何数域K中必含有0与1

(3) 若$a\neq 0$，则有$1/a=a^{-1}\in K$

定义6.1.2 (线性空间) 设V是一个非空集合,K是一个数域, V满足以下两个条件:

(1) 在V中定义了一个封闭的加法运算，即当$x, y\in V$时，有唯一的$z\in V$与之对应，记为 $z=x+y\in V$，且此加法运算满足下面4条性质：

1) $x+y=y+x$ (交换律)；

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (结合律)；

3) 存在零元素$0\in V$，对V中任一元素x都有 $x+0=x$；

4) 存在负元素：对任一元素$x\in V$，存在一个元素$y\in V$，使得 $x+y=0$，称y为x的负元素(或相反元素)，记为$-x$，即 $x+(-x)=0$.

(2) 在V中定义一个封闭的数乘运算，即当$x\in V, \lambda\in K$时，有唯一的$z\in V$与之对应，记为 $z=\lambda x$，且此数乘运算满足下面4条性质：

1) $(\lambda+\mu)\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}+\mu\mathrm{x}$ (分配律)；

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (数因子分配律)；

3) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (结合律)；

4) $1\cdot x=x$ 。

其中x, y, z是V中任意元素,λ , μ是数域K中任意数，1是数域K中的单位数 . 我们称V是数域K上的线性空间，也称向量空间，记为$V(K)$. 当K是实数域R时, 称V为实线性空间；当K是复数域C时, 称V为复线性空间. 元素也称向量 .

例6.1.1 由数域K中的数构成$m\times n$矩阵的全体，对通常意义下的矩阵加法和数乘运算，构成K上的线性空间，记为$K^{m\times n}$或$\mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

例6.1.2 在实数域R上，次数不超过 n 的一元多项式全体 (包括 0)：

$$P_n[x]=\{ a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 : a_n, a_{n-1}, \ldots , a_0\in \mathrm{R} \}$$

按多项式相加和数乘的规则，容易验证满足线性空间的所有要求.

例6.1.3 数域 K 按其自身的加法与乘法构成 K 上的线性空间.

例6.1.4 设 $V=\mathrm{R}_+$ 为正实数集, 其加法和数乘运算定义为

$$a\oplus b=ab,\ a,b\in \mathrm{R}_+ \quad , \quad \lambda\circ a=a^{\lambda}, \lambda\in \mathrm{R}, a\in \mathrm{R}_+ .$$

对任意$a,b\in \mathrm{R}_+, \lambda, \mu\in \mathrm{R}$，可以验证$V=\mathrm{R}_+$ 对这两种运算满足线性空间的10条要求:

(1) 对加法封闭：$a\oplus b=ab\in \mathrm{R}_+$;

(2) 对数乘封闭：$\lambda\circ a=a^{\lambda} \in \mathrm{R}_+$;

(3) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$；

(4) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a(bc)=a\oplus(b\oplus c)$；

(5) $a\oplus 1=a\cdot 1=a$，即$1\in \mathrm{R}_+$是$V=\mathrm{R}_+$的零元素；

(6) $a\oplus (1/a)=a\cdot(1/a)=1$，即$\mathrm{R}_+$中任一元素$a$有负元$1/a$；

(7) $\lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ (ab)=(ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} =(\lambda\circ a)\oplus(\lambda\circ b)$；

(8) $(\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu} =(\lambda\circ a)\oplus(\mu\circ a)$；

(9) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^{\mu} =(a^{\mu})^{\lambda} = a^{\lambda\mu} =(\lambda\mu)\circ a$；

(10) 对R中的1，有$1\circ a=a^1=a$.

因此，$V=\mathrm{R}_+$ 是实线性空间 .

例6.1.5 设P为平面上全体向量组成的集合，在P上定义通常意义下的向量加法和如下的数乘：

$$\lambda \circ a=0,\ \lambda \in K,\ a \in P.$$

虽然P对两种运算封闭，但由于 $1\circ a=0\neq a$， 故P不是线性空间.

* 线性空间也称为向量空间，线性空间中的每个元素也称为向量.

* 对同一个集合，若定义不同的线性运算（即线性空间上的加法与数乘运算），就构成不同的线性空间. 线性运算是线性空间的本质属性，它反应了线性空间中元素之间的代数结构.

相同的集合不同的线性运算

(1) V_1： R^2中通常定义的加法和数乘：

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2);\ k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2).$$

(2) V_2： R^2中如下定义的加法和数乘：

$$(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2+a_1b_1);\ k\circ(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2+(k(k-1)/2)a_1^2).$$

线性空间的性质

性质1 线性空间的零元素是唯一的.

说明：$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$

性质2 线性空间中任一元素的负元是唯一的.

说明：$x_1+x=\mathbf{0},\ x_2+x=\mathbf{0}$,

则 $x_1=x_1+\mathbf{0}=x_1+(x_2+x)=x_1+(x+x_2)=(x_1+x)+x_2=\mathbf{0}+x_2=x_2$

性质3 设 $0, 1, -1, \lambda\in K$, $x, -x, \mathbf{0}\in V$，则有

(1) $0x=\mathbf{0}$;

(2) $(-1)x=-x$;

(3) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(4) 若 $\lambda x=\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $x=\mathbf{0}$.

说明： (1) $x+0x=(1+0)x=1x=x$, $0x=0x+(x+(-x))=(x+0x)+(-x)=x+(-x)=\mathbf{0}$

(2) $x+(-1)x=(1+(-1))x=0x=\mathbf{0}$，$(-1)x=((-1)x+x)+(-x)=\mathbf{0}+(-x)=-x$

(3) $\lambda\mathbf{0}=\lambda(x+(-1)x)=\lambda x+\lambda(-1)x=\lambda x+(-\lambda)x=(\lambda+(-\lambda))x=0x=\mathbf{0}$

(4) 假设 $\lambda\neq 0$，则 $x=1x=((1/\lambda)\lambda)x=(1/\lambda)(\lambda x)=(1/\lambda)\mathbf{0}=\mathbf{0}$

只含一个元素的线性空间称为零空间，即只含零元素 $\{\mathbf{0}\}$.