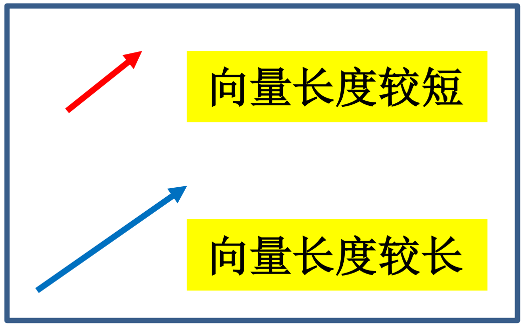
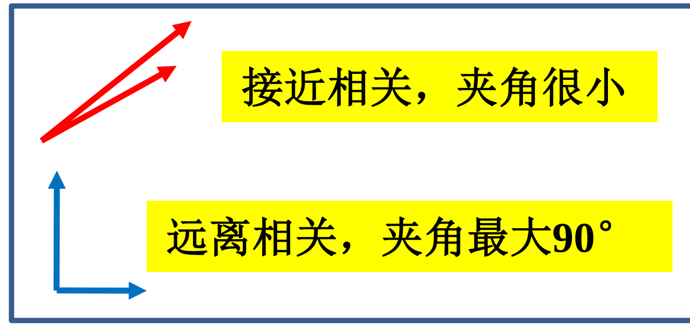
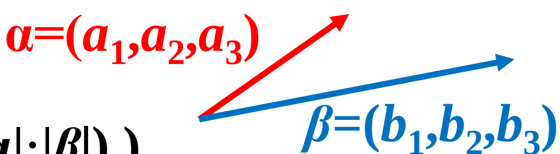
4.4 正交矩阵与施密特正交化方法

两个向量，除了线性相关、线性无关，还需要其它更多的信息，如向量长度，它们相关或无关的程度(接近相关还是远离相关).





从二维、三维向量的夹角关系我们知道可以用向量的内积来表示向量的长度和两个向量之间的夹角.



右图两个向量内积为：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

长度：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 夹角：α,β夹角$=\arccos((\alpha,\beta)/(|\alpha|\cdot|\beta|))$

定义4.4.1 (向量内积) 设α,β为n维向量，用列向量表示为$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$. 若$\alpha,\beta$为实向量，则称$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$为$\alpha,\beta$的实内积；若$\alpha,\beta$为复向量，则称 $a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n$ 为α,β的复内积；统称为向量的内积，记为(α,β)，并称 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量的长度或模；称模为1的向量为单位向量.

显然，实向量α,β的内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$；复向量$\alpha,\beta$的内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T\bar{\beta}$.

实内积的基本性质：

(1) $(\alpha, \beta)=(\beta,\alpha)$；

(2) $(k\alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$；

(3) $(\alpha+\gamma, \beta)=(\alpha, \beta)+(\gamma, \beta)$；

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$；$(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha = \theta$.

定义4.4.2 (向量夹角、向量正交) 若 $(\alpha, \beta)=0$，则称 α 和 β 正交或垂直. 若 α, β 均为非零实向量，则称 $\arccos(\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|})$ 为向量 α 和 β 的夹角.

显然， θ 与任意向量正交. 另外定义向量夹角的依据为

$$0 \leq \left\|\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \pm \frac{\beta}{\|\beta\|}\right\|^2 = (\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \pm \frac{\beta}{\|\beta\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \pm \frac{\beta}{\|\beta\|}) = 2 \pm 2\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}, \text{即} \left|\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\right| \leq 1$$

例4.4.1 若有两个不同的实向量 α_1, α_2 满足 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|>0$. 试证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 正交.

证明 由 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|>0$ 可知 $(\alpha_1, \alpha_1)=(\alpha_2, \alpha_2)>0$. 故有

$$(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1, \alpha_1)+(\alpha_2, \alpha_1)-(\alpha_1, \alpha_2)-(\alpha_2, \alpha_2)=(\alpha_2, \alpha_1)-(\alpha_1, \alpha_2)=0,$$

即 $\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 正交 .

例4.4.2 方程组$Ax=\theta$的解集即为与A的所有行向量正交的向量的集合.

解 将A写成按行分块的形式，$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}$，则 $Ax=\theta$ 即 $Ax=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\alpha_1^T x\\ \vdots\\ \alpha_n^T x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，

于是 $(\alpha_i, x)=\alpha_i^T x=0$, $i=1,2, \dots ,n$.

定义4.4.3 (正交向量组、法正交组) 若一个不含零向量的向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组；若一个正交向量组中的 向量均为单位向量，则该向量组称为标准向量组，简称法正交组.

例4.4.3 易验证$\mathbf{R}^n$中的基本向量组$e_1,e_2, \dots ,e_n$是法正交组.

定理4.4.1 正交向量组必线性无关.

说明 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+ \dots +k_m\alpha_m=\theta$. 则 $(k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m,\alpha_i)=(\theta, \alpha_i)=0$，

又 $(k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m,\alpha_i)=k_1 (\alpha_1,\alpha_i)+\dots+k_m(\alpha_m,\alpha_i)=k_i (\alpha_i,\alpha_i)=k_i \|\alpha_i\|^2 \Rightarrow k_i =0$

正交组的用途：快速求出β表示成$\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n$的线性组合.

例 将β表示成$\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合，其中

$\beta=(-5,5,-2)^T$, $\alpha_1=(1,2,-2)^T$, $\alpha_2=(2,-2,-1)^T$, $\alpha_3=(2,1,2)^T$.

常规解法：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，解一个方程组 .

利用正交组解法($\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$正交)：$x_i (\alpha_i ,\alpha_i)=(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3,\alpha_i)=(\beta,\alpha_i)$，

易求$(\alpha_i ,\alpha_i)=9,9,9$, $(\beta,\alpha_i)=9,-18,-9$，于是$x_i=1,-2,-1$.

无关组组合出正交组 —施密特正交化

定理4.4.2 (施密特(Schmidt)正交化) 由线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$可构造出与之等价的正交向量组$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. 并且$\xi_i$可以表示成$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$, $i=1,2,\dots,n$的线性组合.

说明 用构造法.

第一步，取$\xi_1=\alpha_1\neq\theta$.

第二步，取$\xi_2=\alpha_2-k_{21}\xi_1=\alpha_2-k_{21}\alpha_1$，要满足$\xi_1, \xi_2$ 构成正交组，即满足：$\xi_2\neq\theta$；$(\xi_2, \xi_1)=0$

(1) 若$\xi_2=\theta$，则$\xi_2=\alpha_2-k_{21}\alpha_1=\theta$，即$\alpha_1, \alpha_2$线性相关，矛盾.

(2) $(\xi_2, \xi_1)=(\alpha_2, \xi_1)-k_{21}(\xi_1, \xi_1)=0$，只要取$k_{21}=(\alpha_2, \xi_1)/(\xi_1, \xi_1)$.

依次下去到第 i 步之前，则我们已经由$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$构造出等价正交组$\xi_1, \dots, \xi_{i-1}$且$\xi_k$可表示成$\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k=1,2,\dots,i-1$的线性组合.

第i步，取 $\xi_i=\alpha_i-k_{i1}\xi_1-k_{i2}\xi_2-\dots-k_{i,i-1}\xi_{i-1}$ ，

要求满足$\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i$构成正交组，需 $\xi_i\neq\theta$；$(\xi_i, \xi_k)=0, k=1,\dots,i-1$

(1) 若$\xi_i=\theta$，因为ξ_k可以表示成$\alpha_1, \dots, \alpha_k$的线性组合，则

$\xi_i=\alpha_i-k_{i1}\xi_1-\dots-k_{i,i-1}\xi_{i-1}=\alpha_i-t_{i1}\alpha_1-\dots-t_{i,i-1}\alpha_{i-1}=\theta$, 即$\alpha_1, \dots,\alpha_i$线性相关,矛盾.

(2) $(\xi_i, \xi_k)=(\alpha_i, \xi_k)-k_{i1}(\xi_1, \xi_k)-\dots-k_{i,i-1}(\xi_{i-1}, \xi_k)=(\alpha_i, \xi_k)-k_{ik}(\xi_k, \xi_k)=0$,

只要取$k_{ik}=(\alpha_i, \xi_k)/(\xi_k, \xi_k)$, $k=1,2,\dots,i-1$.

一直下去, 最后构成正交组$\xi_1,\dots,\xi_n$.等价性由$\alpha_i=k_{i1}\xi_1+\dots+k_{i,i-1}\xi_{i-1}+\xi_i$可知.

注 由无关组$\alpha_1, \dots,\alpha_n$可构造出等价法正交组$\beta_1,\dots,\beta_n$，且β_i可由$\alpha_1,\dots, \alpha_i$表示.

例4.4.4 将3个线性无关4维向量组 {$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$} 标准正交化，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

解 先正交化，令

$$\xi_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\xi_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1-\frac{(\alpha_3,\xi_2)}{\|\xi_2\|^2}\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\\-1/2\end{pmatrix}.$$

再单位化，

$$\beta_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\qquad \beta_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \beta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\xi_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\0\\2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

得标准正交向量组为 {$\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\beta_3}$} .

定义4.4.4 (正交矩阵) 若实方阵A满足 $A^{T}A=E$，则称A为正交矩阵.

注 若A, B是同阶的正交矩阵，则AB也是正交矩阵 .

下面的矩阵都是正交矩阵：

$$E=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

例4.4.5 设$A=E-2vv^{T}\in R^{n\times n}$，其中$v\in R^{n}$, $v^{T}v=1$. 验证A是对称矩阵和正交矩阵 . 且当 $\|p\|=\|q\|$, $p\neq q$, $p,q,v=(p-q)/\|p-q\|$时，有

$$Ap=q\,,\quad Aq=p\,.$$

解 因为 $A^{T}=(E-2vv^{T})^{T}=E-2(vv^{T})^{T}=E-2vv^{T}=A$,

$$A^{T}A=(E-2vv^{T})^{T}(E-2vv^{T})=E-2vv^{T}-2vv^{T}+4v(v^{T}v)v^{T}=E\ ,$$

所以 A为对称和正交矩阵 .

当 $v=(p-q)/\|p-q\|$ 时，有

$$Ap=(E-2\frac{(p-q)(p-q)^{T}}{\|p-q\|^{2}})p=p-2\frac{(p-q)(p^{T}p-q^{T}p)}{(p-q)^{T}(p-q)}$$

$$=p-2\frac{(p^{T}p-q^{T}p)(p-q)}{2(p^{T}p-q^{T}p)}=p-(p-q)=q.\text{同理有}Aq=p.$$

正交矩阵的性质

定理4.4.3 对于方阵A，下列条件互为等价：

(1) A为正交矩阵；

(2) $A^T=A^{-1}$；

(3) $AA^T=E$；

(4) A的列向量构成标准正交列向量组；

(5) A的行向量构成标准正交行向量组.

证明 由(1) 可知$A^{-1}=A^T$，故(1)⇔(3)，从而得到(2)，故(1),(2),(3)相互等价.

将A按列分块为 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，

则

$$C=A^TA=(c_{ij})_{n\times n}=(\alpha_i^T\alpha_j)_{n\times n}.$$

由(1)得 $C=A^TA=E$，

即 $c_{ij}=\alpha_i^T\alpha_j=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots,n$，其中$\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0(i\neq j)$.

故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为法正交列向量组.

反之则有 $A^TA=(\alpha_i^T\alpha_j)_{n\times n}=E$，故(1)成立.

从而得 (1)⇔(4).

同理(3)⇔(5). 故(1),(2),(3),(4),(5)相互等价.

定理4.4.4 设A为n阶正交矩阵，λ为A的特征值，α为n维列向量，则有

(1) $|A|^2=1$;

(2) $(A\alpha)^{\mathrm{T}}(\overline{A\alpha})=\alpha^{\mathrm{T}}\overline{\alpha}$;

(3) $|\lambda|=1$.

证明 (1) 由正交矩阵的定义，$A^{\mathrm{T}}A=E$，得

$$|A|^2=|A||A|=|A^{\mathrm{T}}||A|=|A^{\mathrm{T}}A|=|E|=1 .$$

(2) 注意到 $\overline{A}$ 表示对A的每个元素取共轭，$\overline{\xi}$ 表示对ξ的每个元素取共轭，由矩阵运算性质可得

$$(A\alpha)^{\mathrm{T}}\overline{(A\alpha)}=\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(\overline{A}\overline{\alpha})=\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\overline{\alpha}=\alpha^{\mathrm{T}}E\overline{\alpha}=\alpha^{\mathrm{T}}\overline{\alpha}.$$

(3) 设ξ为A的属于λ的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$，于是

$$(A\xi)^{\mathrm{T}}\overline{(A\xi)}=(\lambda\xi)^{\mathrm{T}}\overline{(\lambda\xi)}=|\lambda|^2\xi^{\mathrm{T}}\overline{\xi}.$$

另一方面，注意到 $\xi\neq\theta$ 并应用(2)的结果得

$$(A\xi)^{\mathrm{T}}\overline{(A\xi)}=\xi^{\mathrm{T}}\overline{\xi}\neq 0.$$

所以 $|\lambda|^2\xi^{\mathrm{T}}\overline{\xi}=\xi^{\mathrm{T}}\overline{\xi}\neq 0.$ 两边除以 $\xi^{\mathrm{T}}\overline{\xi}$ 即得 $|\lambda|=1$.