9 月 14 日作业分析

作业：习题一：8,9,10,11　习题二：1,2,3,4,11,13,15,41, 6,7,9,14,38

习题二：2(1) 个别同学矩阵写成$\begin{vmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7\\2\\1\end{vmatrix}$，应该用圆括号或方括号，即$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$或$\begin{bmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$

3(2) 大部分同学用 $C^2=C$，得到 $C^n=C$. 可用结合律计算，如下

解：$C^n=(BA)(BA)\ldots(BA)=B(AB)(AB)\ldots(AB)A=B(AB)^{n-1}A=B\times 1^{n-1}\times A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

13 很多同学用 a_{ij},b_{ij},AB,BA 的(i,j) 元素的关系来分析，这样比较复杂. 可用 $A^T=A$, $B^T=-B$ 这样的性质，可如下证明

证明：已知 $A^T=A$, $B^T=-B$.

(1) $(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=-BA+AB=AB-BA$，故 $AB-BA$ 对称.

(2) $(AB)^T=-AB \Leftrightarrow B^TA^T=-AB \Leftrightarrow -BA=-AB \Leftrightarrow AB=BA$.

15 很多同学设未知量求出 B，再求$|B|$. 少数同学用逆矩阵求 B 再求 $|B|$. 可直接用关系式取行列式计算，计算如下

解：$BA=B+2E \Rightarrow B(A-E)=2E$，取行列式得 $|B|\,|A-E|=|2E|=4$，而 $|A-E|=2$，故 $|B|=2$.

6 很多同学计算出 $B^2=4B$，再求出 $B^n=4^{n-1}B$. 如 3(2)可用结合律计算.

解：$B^n=(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1))(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1))\ldots(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1))=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}((-3,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix})((-3,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix})\ldots((-3,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix})(-3,2,1)$

$=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}4^{n-1}(-3,2,1)=4^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1)=4^{n-1}\begin{pmatrix}-3&2&1\\-6&4&2\\-9&6&3\end{pmatrix}$.

- 两种方法的比较：可考虑 $A=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $B=(1,-1,2,-3,2,1,1,-1,-1,1)^T$，计算 $(BA)^n$

易知 $AB=9$, $BA=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\-1&-2&-3&-4&-5&-6&-7&-8&-9&-10\\2&4&6&8&10&12&14&16&18&20\\-3&-6&-9&-12&-15&-18&-21&-24&-27&-30\\2&4&6&8&10&12&14&16&18&20\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\-1&-2&-3&-4&-5&-6&-7&-8&-9&-10\\-1&-2&-3&-4&-5&-6&-7&-8&-9&-10\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{pmatrix}$

7 有同学矩阵初等变换与行列式表示搞混淆，具体见如下计算

$A+B=(\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)=(\alpha_1-\alpha_4,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)=(2\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)=\ldots$

与$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1-\alpha_4,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|2\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=\cdots$混淆

该题可如下计算：

解一：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|+|\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|+|\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_4,\alpha_1|$

$=2|A|+2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=4|A|=4\times 2=8$.

解法二：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|\alpha_1-\alpha_4,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=|2\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_4|=\times 2=8$.

解法三：

$$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|=|A|\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=|A|\times 4=8.$$

14(1) 大部分同学没有很好地利用块的特点，而是简单化地利用按行分块或按列分块. 可如下计算

解：$\left(\begin{array}{c|cc}1&-2&0\\0&1&1\\1&0&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}0&1\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(0,1)+\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\\0&3\end{pmatrix}$.