习题一补充讲解：

3（6）解 $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\underset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ u & v \end{vmatrix} = (ay-bx)(cv-du)$

4（2）证明

$$\text{左式} \overset{2,3\text{列加到第1列}}{=} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b & c \\ 1+a+b+c & b & 1+c \end{vmatrix} \overset{c_1 \div (1+a+b+c)}{=} (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1+b & c \\ 1 & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2-b\cdot c_1 \\ c_3-c\cdot c_1}}{=} (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{右式}$$

4（5）证明一： $(a-b)D_n \overset{(a-b)\times c_1}{=} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab & 0 & \cdots & 0 \\ a-b & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & ab & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b^2 & ab & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{前行列式}:c_2-bc_1,c_3-bc_2,\cdots,c_n-bc_{n-1}}{\underset{\text{后行列式}:c_2-ac_1,c_3-ac_2,\cdots,c_n-ac_{n-1}}{=}} a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b \end{vmatrix} = a^{n+1} - b^{n+1}$$

故 $D_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

证明二： $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$，故

$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n$，从而有

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \cdots = a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

证明三： $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$，再用数学归纳法

5（2）解

$$\begin{vmatrix} x&a&b&c\\ a&x&c&b\\ b&c&x&a\\ c&b&a&x\end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+r_3\\ r_2+r_4}}{=} \begin{vmatrix} x+b&a+c&x+b&a+c\\ a+c&x+b&a+c&x+b\\ b&c&x&a\\ c&b&a&x\end{vmatrix} \overset{\substack{c_3-c_1\\ c_4-c_2}}{=} \begin{vmatrix} x+b&a+c&0&0\\ a+c&x+b&0&0\\ b&c&x-b&a-c\\ c&b&a-c&x-b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+b&a+c\\ a+c&x+b\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-b&a-c\\ a-c&x-b\end{vmatrix}=((x+b)^2-(a+c)^2)((x-b)^2-(a-c)^2)=0,$$

故解为 $x+b=\pm(a+c), x-b=\pm(a-c)$ 即

$$x=-b+a+c, x=-b-a-c, x=b+a-c, x=b-a+c$$

6（2）解

$$D \overset{\substack{c_1-xc_2\\ c_1-yc_3}}{\underset{c_1-zc_3}{=}} \begin{vmatrix} 1-x^2-y^2-z^2 & x & y & z\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{vmatrix}=1-x^2-y^2-z^2=1$$

故有 $x^2+y^2+z^2=0$，于是有 $x=y=z=0$

7（5）解

4(5)特例

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+1&1&0&\cdots&0\\ 1+0&2&1&\cdots&0\\ 0&1&2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&1&0&\cdots&0\\ 1&2&1&\cdots&0\\ 0&1&2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1&1&0&\cdots&0\\ 0&2&1&\cdots&0\\ 0&1&2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1&1&0&\cdots&0\\ 1&2&1&\cdots&0\\ 0&1&2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_2\\ \cdots\cdots\\ r_n-r_{n-1}}}{=} \begin{vmatrix} 1&1&0&\cdots&0\\ 0&1&1&\cdots&0\\ 0&0&1&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1，\text{故}$$

$$D_n=1+D_{n-1}=\cdots=n-1+D_1=n+1$$

法二：求出递推式：$D_n\text{-}D_{n-1}=D_{n-1}\text{-}D_{n-2}$，$D_n$ 为等差数列，公差为 1

12 证明　显然 f(x)是 x 的多项式，故 f(x)连续可微。

又 $f(0)=\begin{vmatrix} 1&-1&-1\\ 1&-2&-2\\ 1&-3&-3\end{vmatrix}=0, f(1)=\begin{vmatrix} 1&0&1\\ 1&-1&1\\ 1&-2&1\end{vmatrix}=0$,由罗尔定理，存在

$\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$