一次方程组(线性方程组)解的表达式与行列式

1、二元一次方程组解的表达式

二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1)$$

将方程组(1)的第一式乘以a_{22}，第二式乘以a_{12}得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

第一式减去第二式得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

类似地，方程组(1)的第二式乘以a_{11}减去第一式乘以a_{21}得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

合并后得方程组

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1,\end{cases} \qquad (2)$$

用符号表示就是 $\begin{cases}\Delta x_1=\Delta_1, \\ \Delta x_2=\Delta_2,\end{cases} \qquad (3)$

其中$\triangle=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，$\triangle_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，$\triangle_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$

2阶行列式

为了表示△的值受四个元素$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$的数值及前后位置的影响，我们用有位置的元素形式表示如下

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}, \begin{vmatrix}b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \begin{vmatrix}a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

我们现在得到方程组(1)的解的表达式

$$\begin{cases} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ x_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

其中：$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$

只要方程组(1)有解，解一定满足方程组(3)

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1, \\ \Delta x_2 = \Delta_2, \end{cases} \qquad (3)$$

若△ ≠0，则可验证 $\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \end{cases}$ 是方程组(1)的解，且唯一

若△=0，$\triangle_1$或$\triangle_2$ ≠0，则方程组(3)矛盾，一定无解

若$\triangle=\triangle_1=\triangle_2=0$，则方程组(1)中$a_{11}, a_{12}, b_1$与$a_{21}, a_{22}, b_2$成比例，方程组(1)只有一个独立方程，故有无穷多组解

2、三元一次方程组解的表达式与3阶行列式

三元一次方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{4}$$

将方程组(4)的后两式改写为

$$\begin{cases} a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2-a_{21}x_1, \\ a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3-a_{31}x_1, \end{cases}$$

用行列式表示解为

$$\begin{cases} x_2=\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x_3=\begin{vmatrix} a_{22} & b_2-a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3-a_{31}x_1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

将上述的解代入方程组(4)的第一式得

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 + a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 + a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} x_1 = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

移项后即为

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}\right) x_1 = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

下标调整后即为

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) x_1 = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

类似于2阶行列式，我们用下列形式表示上述组合项

3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

方程(5)用符号表示为： $\Delta x_1 = \Delta_1$ 同样方法可得：$\Delta x_2 = \Delta_2, \Delta x_3 = \Delta_3,$

于是我们得到方程组 $\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1, \\ \Delta x_2 = \Delta_2, \\ \Delta x_3 = \Delta_3, \end{cases}$ (6)

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

进一步方程组(6)的解为： $\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ x_3 = \Delta_3/\Delta, \end{cases}$ 其中△ ≠0

现在我们可得如下结论：

若△ ≠0，则可验证 $\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ x_3 = \Delta_3/\Delta, \end{cases}$ 是方程组(4)的解，且唯一

若△=0，$△_1$或$△_2$或$△_3$≠0，则方程组(6)矛盾，方程组(4)一定无解

若△=$△_1$=$△_2$=$△_3$=0，则方程组(4)可能无解，可能有无穷多组解

3、n元一次方程组解的表达式与n阶行列式

n元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{7}$$

如同三元一次方程的求解，将方程组(7)的后n-1式改写为

$$\begin{cases} a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2-a_{21}x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n-a_{n1}x_1, \end{cases}$$

用n-1阶行列式表示解$x_2, x_3, \ldots, x_n$，并代入(7)的第一式可得

$$\Delta x_1=\Delta_1,$$

n阶行列式

其中：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}, \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

进一步也可得： $\Delta x_2 = \Delta_2, \cdots, \Delta x_n = \Delta_n,$

于是我们有解：

$$\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta, \\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \Delta_n/\Delta, \end{cases}$$

其中：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

定义1.2.1 (n阶行列式) 设有n^2个可以进行加法和乘法运算的元素排成n行n列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称之为n阶行列式，它是一个算式，有时也用记号$|a_{ij}|_{n\times n}$表示这个n阶行列式. 其中a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ 称为该行列式的元素，其第一个足标i表示该元素在第i行，其第二个足标j表示该元素在第j列. 本教材中行列式的元素都是数（实数或复数），这时行列式是一个数值，该数值可归纳定义如下：

当$n=1$时，一阶行列式的值定义为 $D_1=\det(a_{11})=a_{11}$.

当$n\geq 2$时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$， 其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，

而

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称M_{ij}为元素a_{ij}的余子式，A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式. 显然M_{ij}为一个n-1阶的行列式，它是D_n中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列后得到的一个行列式.

例1.2.1 计算四阶行列式的值．$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解 按定义1.2.1

$$A=-2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=28-12+15=31.$$

* 四阶以上行列式不能用对角线法则

例1.2.2 右边行列式称为下三角行列式（当$i<j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线上方的元素全为0），按定义计算其值

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

同样可计算上三角行列式（当$i>j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线下方的元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式（当$i\neq j$时，$a_{ij}=0$，即主对角线以外的元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

定义1.2.2(基于逆序数的*n*阶行列式) 设有n^2个可以进行加法和乘法运算的元素排成*n*行*n*列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为***n*阶行列式**，它是一个算式，其结果定义为

$$D_n=\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n}(-1)^{\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n},$$

其中，$s_1,s_2,\ldots,s_n$取遍$1,2,\ldots,n$的所有*n*元排列，$\sum$是对这$n!$个排列求和，$\tau(s_1,s_2,\ldots,s_n)$是排列$s_1,s_2,\ldots,s_n$的逆序数（即排列$s_1,s_2,\ldots,s_n$中逆序数对个数）.

容易发现，和式中的$n!$项在不计正负号的情况下，其实是取遍在不同行不同列的*n*个元素的乘积 .

定义1.2.3(转置行列式) 设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们称*A'*为行列式*A*的转置行列式。

显然，*A'*是行列式*A*的行与列互换之后所得的行列式。通常*A*的转置行列式也用A^T来表示。