习题四补充讲解(1)

2(2)解当 n=2k 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda &&&&& -1\\ &\ddots &&& \iddots & \\ && \lambda & -1 && \\ && -1 & \lambda && \\ & \iddots &&& \ddots & \\ -1 &&&&& \lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{r_i+r_{2k+1-i}\\ i=1,\cdots,k}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1 &&&&& \lambda-1\\ &\ddots &&& \iddots & \\ && \lambda-1 & \lambda-1 && \\ && -1 & \lambda && \\ & \iddots &&& \ddots & \\ -1 &&&&& \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^k(\lambda+1)^k$$

$\lambda=1$(k 重) ， $\lambda=-1$(k 重)

当 $\lambda=1$ 时，

$$E-A=\begin{pmatrix}1 &&&&& -1\\ &\ddots &&& \iddots & \\ && 1 & -1 && \\ && -1 & 1 && \\ & \iddots &&& \ddots & \\ -1 &&&&& 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 &&&&& -1\\ &\ddots &&& \iddots & \\ && 1 & -1 && \\ && 0 & 0 && \\ & \iddots &&& \ddots & \\ 0 &&&&& 0\end{pmatrix}$$

易知特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}e_k\\ e_1\end{pmatrix},\cdots,\xi_k=\begin{pmatrix}e_1\\ e_k\end{pmatrix}$

同理当 $\lambda=-1$ 时，特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-e_k\\ e_1\end{pmatrix},\cdots,\eta_k=\begin{pmatrix}-e_1\\ e_k\end{pmatrix}$

当 n=2k+1 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda &&&&& -1\\ &\ddots &&& \iddots & \\ && \lambda && -1 & \\ &&& \lambda-1 && \\ && -1 && \lambda & \\ & \iddots &&& \ddots & \\ -1 &&&&& \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^{k+1}(\lambda+1)^k$$

$\lambda=1$(k+1 重) ， $\lambda=-1$(k 重)

当 $\lambda=1$ 时，特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}\theta\\ 1\\ \theta\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}e_k\\ 0\\ e_1\end{pmatrix}\cdots,\xi_{k+1}=\begin{pmatrix}e_1\\ 0\\ e_k\end{pmatrix}$

同理当 $\lambda=-1$ 时，特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-e_k\\ 0\\ e_1\end{pmatrix},\cdots,\eta_k=\begin{pmatrix}-e_1\\ 0\\ e_k\end{pmatrix}$

3 解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 3 & 1\\ -4 & \lambda+3 & 3a+1\\ 1 & -1 & \lambda-a-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-a)$

(1) $a=1$ 时，特征值：$\lambda=1$(二重)$,\lambda=3$

$\lambda=1$ 时，$E-A\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ 时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 特征向量 $k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

(2) $a=3$时，特征值：$\lambda=3$(二重), $\lambda=1$

$\lambda=3$时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量$k_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$时，$E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量$k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

(3) $a\neq1, a\neq3$时，特征值：$\lambda=1,3,a$

$\lambda=1$时，$E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=3$时，$3E-A\to\begin{pmatrix}1&0&(1-3a)/2\\0&1&(1-a)/2\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量$k_2\begin{pmatrix}3a-1\\a-1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=a$时，$aE-A\to\begin{pmatrix}1&0&-8/(a-1)\\0&1&(3a-11)/(a-1)\\0&0&0\end{pmatrix}$特征向量$k_3\begin{pmatrix}8\\11-3a\\a-1\end{pmatrix}$

6 证设$\begin{pmatrix}O&A\\A^T&O\end{pmatrix}$属于$\lambda_0$的特征向量为$\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}O&A\\A^T&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}$，

即$\begin{cases}A\xi=\lambda_0\eta\\A^T\eta=\lambda_0\xi\end{cases}$，于是有$A^TA\xi=A^T(\lambda_0\eta)=\lambda_0A^T\eta=\lambda_0^2\xi$，

又若$\xi=\theta$，则有$\theta=\lambda_0\eta$，而$\lambda_0\neq0$，故$\eta=\theta$，于是$\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}=\theta$矛盾

故$\xi\neq\theta$为A^TA特征向量，λ_0^2为A^TA特征值