3.1 高斯消元法与矩阵的行变换

一般的线性方程组表示为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

方程组(3.1)的向量形式：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b, \tag{3.2}$$

其中向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

方程组(3.1)的矩阵形式：

$$Ax = b, \tag{3.4}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

称*A*为方程组(3.1)的系数矩阵，*x*为未知向量，*b*为右端向量.
使方程组(3.4)成立的已知向量称为该方程组的解向量.
系数矩阵与右端向量构成*B*=(*A*,*b*)称为该方程组的增广矩阵.
$(s_1,\ldots,s_n)$代替$(x_1,\ldots,x_n)$后方程组成立，称$x_1=s_1,\ldots,x_n=s_n$为方程组的一个解.
方程组的所有解所成的集合称为方程组的解集.

定义3.1.1 (同解方程组) 具有相同解集的两个方程组称为同解方程组.

解方程组可用增广矩阵初等行变换，见第二章初等变换部分的例子：

解如下方程组:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5 & (1) \\ 2x_1+3x_2+2x_3=2 & (2) \\ 4x_1+3x_2+8x_3=-14 & (3) \end{cases}$$

增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{array}\right)$$

(2)-(1) , (3)-2(1):

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5 & (1) \\ 2x_2-x_3=7 & (2) \\ x_2+2x_3=-4 & (3) \end{cases}$$

r_2-r_1 , r_3-2r_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(1)-(3) , (2)-2(3):

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=-1 & (1) \\ -5x_3=15 & (2) \\ x_2+2x_3=-4 & (3) \end{cases}$$

r_1-r_3 , r_2-2r_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(2) ÷ (-5):

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=-1 & (1) \\ x_3=-3 & (2) \\ x_2+2x_3=-4 & (3) \end{cases}$$

$r_2 \div (-5)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ x_3 = -3 & (2) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

(2) $\leftrightarrow$ (3):　　　$r_2 \leftrightarrow r_3$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 & (1) \\ x_2 + 2x_3 = -4 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(1)-(3) , (2)-2(3):　　　$r_1 - r_3$, $r_2 - 2r_3$:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 & (1) \\ x_2 = 2 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(1) $\div$ 2:　　　$r_1 \div 2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & (1) \\ x_2 = 2 & (2) \\ x_3 = -3 & (3) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

例3.1.1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-5, \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2+8x_3=-14. \end{cases}$

解 此方程组的系数矩阵、未知向量、右端向量分别为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

对其增广矩阵作初等行变换

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=-3. \end{cases}$

即得方程组的解为 $\boldsymbol{x_1=1}$ **,** $\boldsymbol{x_2=2}$ **,** $\boldsymbol{x_3=-3}$ **.**

例3.1.2 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

解 对此方程组的增广矩阵作初等行变换

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\div(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\div(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1+x_4=2, \\ x_2+x_4=1, \\ x_3+x_4=1. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1=2-x_4, \\ x_2=1-x_4, \\ x_3=1-x_4. \end{cases}$

令 $x_4=t$ 为任意实数，则方程组有无穷多组解，该方程组的解为
$x_1=2-t$, $x_2=1-t$, $x_3=1-t$ ($t\in\mathbf{R}$) .

例3.1.3 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=10. \end{cases}$

解 对此方程组的增广矩阵作初等行变换

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & -7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-7)]{r_4-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+11r_2]{\substack{r_1-8r_2 \\ r_3+2r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+5r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

最后得到方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=2, \\ x_2-x_3=1, \\ x_3=1, \\ 0=4. \end{cases}$

此为矛盾方程组，故该方程组无解 .

* 高斯消元法的矩阵表示

我们再来看一种特别的方法解方程组

例 3.2.1 解下列方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

解 对此方程组的增广矩阵作初等行变换

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right),$$

最后得到方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_2 - x_3 = -5, \\ 4x_3 = 4. \end{cases}$$

用代入法容易解得此方程组的解为 $x_1=1$, $x_2= -2$, $x_3=1$.

我们再来看一种特别的方法解方程组

例 3.2.2 解下列方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

解 考虑系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

所以有
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU.$$

易知：*Ax*=*b*，即为 *LUx*=*b* . 令 *y*=*Ux*，则易解*Ly*=*b*得*y*，也易解 *Ux*=*y*得*x*，最后得到方程组的解*x* .

下面分两步求解方程组：

第一步：代入法解方程组 ***Ly*=*b***，即

$$\begin{cases} y_1 & = 3, \\ y_1 + y_2 & = -2, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 & = 0. \end{cases}$$

易得解为：$\boldsymbol{y_1=3}$ **,** $\boldsymbol{y_2= -5}$ **,** $\boldsymbol{y_3= 4}$ **.**

第二步：代入法解方程组 ***Ux*=*y***，即

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 3, \\ 2x_2 - x_3 & = -5, \\ 4x_3 & = 4. \end{cases}$$

易得解为：$\boldsymbol{x_1=1}$ **,** $\boldsymbol{x_2= -2}$ **,** $\boldsymbol{x_3=1}$ **.** **此即为原方程组的解.**

当我们将行变换用左乘初等矩阵来表示时，就得到了第二种解方程组的方法，这也是计算机解方程组的通用方法.

以前面讨论的方程组为例：
$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2, \\ 4x_1+6x_2+8x_3=0. \end{cases}$$

行变换解方程组：

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)=U,$$

再用代入法解方程组：$\boldsymbol{Ux=y}$，其中 $\boldsymbol{y}=(3,-5,4)^{T}$.

用左乘初等矩阵表示：

$$E(3,2(-2))E(3,1(-2))E(2,1(-1))B=U,$$

表示矩阵***B***：

$$B=E(2,1(-1))^{-1}E(3,1(-2))^{-1}E(3,2(-2))^{-1}U=E(2,1(1))E(3,1(2))E(3,2(2))U$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 2 & 1 \end{pmatrix}U=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}U=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & 4 \end{pmatrix}=LU.$$

用代入法解方程组：$\boldsymbol{Ly=b}$ 可解得 $\boldsymbol{y}=(3,-5,4)^{T}$. 再解方程组 $\boldsymbol{Ux=y}$.