5.1.3 二次型的规范形

标准形中找最简单且唯一的形式——规范形

实二次型：$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x^TAx$的标准形

$$g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2$$

最简形式为：$\pm y_1^2\pm y_2^2\pm\ldots\pm y_r^2$　　其中：r为二次型的秩

若是复二次型：最简形式可最终化为　$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_r^2$

若是实二次型：最简形式只能化为　$y_1^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_r^2$

定义5.1.6 (实(复)二次型的规范形) 实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经过非退化的实线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

称为原二次型的实规范形，r称为该二次型的秩；

复二次型经过非退化的复线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

称为原二次型的复规范形，r称为该二次型的秩 .

二次型的规范形存在定理

定理5.1.2 存在非退化的复线性变换将复二次型化为复规范形

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_r^2\ ;$$

存在复可逆矩阵将复对称矩阵合同变换为 $\mathrm{diag}(E_r\,,O_{n-r})$，
其中 r为二次型矩阵的秩.

证明思路：

两个结论等价，只要证其中的一个，我们证矩阵合同变换的结论.

分2步将复对称矩阵A合同变换为 $\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，其中$r$=r($A$) .

(1) 合同变换为对角矩阵：

$$P^TAP=\begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

，其中 $b_{ii}\neq 0$

(2) 合同变换为规范形：

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{b_{11}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{b_{rr}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{b_{11}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{b_{rr}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

定理5.1.3 (惯性定理) 存在非退化的实线性变换将实二次型化为实规范形

$$z_1^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2\dots-z_r^2\ ;$$

存在实可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为 diag(E_p , -E_{r-p} , O_{n-r})，其中 r为二次型矩阵的秩，p是唯一确定的 .

证明思路：只证矩阵合同变换的结论. 实对称矩阵 A , r(A)=r .

存在性分2步：

(1) 合同变换为对角矩阵：

$$P^TAP=\begin{pmatrix} b_{11} &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && b_{pp} &&&&& \\ &&& b_{p+1,p+1} &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& b_{rr} && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_1^2 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && s_p^2 &&&&& \\ &&& -s_{p+1}^2 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -s_r^2 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}=B\ ,$$

其中 $b_{11}>0,\dots,b_{pp}>0$，而 $b_{p+1,p+1}<0,\dots,b_{rr}<0$.

(2) 合同变换为规范形：

$$\begin{pmatrix} 1/s_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1/s_r &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1^2 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && s_p^2 &&&&& \\ &&& -s_{p+1}^2 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -s_r^2 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1/s_r &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

唯一性：反证法

(1) 转化问题：

E_{p1} E_{p2}

设 $D_1^T A D_1 = \begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix}, D_2^T A D_2 = \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix},$

则 $\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix} = D_1^T A D_1 = D_1^T \left(D_2^{-T} \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} D_2^{-1} \right) D_1 = (D_2^{-1} D_1)^T \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} (D_2^{-1} D_1) = B^T \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} B.$

(2) 证明 $p_1 \neq p_2$ 时将出现矛盾： 不妨设 $p_1 > p_2$，且有可逆矩阵 B 使得

$$\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} B.$$

E_{p2}

利用二次型的值来导出矛盾：

E_{p1}

$$x^T \begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{r-p_1} & \\ & & O \end{pmatrix} x = x^T B^T \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} Bx = y^T \begin{pmatrix} E_{p_2} & & \\ & -E_{r-p_2} & \\ & & O \end{pmatrix} y.$$

希望有：

$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p1}^2 \geq 0$

$$(x_1,\ldots,x_{p_1},0,\ldots,0,0,\ldots,0)\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

p_1 个 1

$$p_1 > p_2$$

$-y_{p2+1}^2-\ldots-y_r^2 \leq 0$

$$=(0,\ldots,0,y_{p_2+1},\ldots,y_r,y_{r+1},\ldots,y_n)\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{p_2+1} \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

p_2 个 1

其中 $y=Bx$ 的前 p_2 个方程为：

$$\begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1p_1}x_{p_1}=0, \\ \quad\vdots \\ b_{p_21}x_1+\cdots+b_{p_2p_1}x_{p_1}=0, \end{cases} \qquad p_2<p_1$$

$x_1,\ldots,x_{p1}$ 有非零解 .

定义5.1.7 (正惯性指数、负惯性指数) 若实二次型的实规范形为

$$z_1^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2-\dots-z_r^2\ ,\quad r\leqslant n,$$

则称p为原二次型的正惯性指数; 称$r-p$为原二次型的负惯性指数 .

推论5.1.4 若实二次型矩阵 A 合同于对角矩阵 $B=\mathrm{diag}(b_{11},\dots,b_{nn})$，则正对角元个数为实二次型的正惯性指数，负对角元个数为实二次型的负惯性指数，非零对角元个数为二次型的秩 .

证明思路：若$b_{i1i1}, \dots ,b_{ipip}$都>0，$b_{ip+1,ip+1}, \dots , b_{irir}$ 都<0，其余对角元为0，则有 $B_2=C^TBC=\mathrm{diag}(b_{i1i1}, \dots ,b_{ipip} , b_{ip+1,ip+1}, \dots , b_{irir}\ 0, \dots ,0)$

$=\mathrm{diag}(s_1^2, \dots , s_p^2 , -s_{p+1}^2, \dots , -s_r^2, 0, \dots ,0)$，其中 $C=(e_{i1},e_{i2}, \dots ,e_{in})$.

进一步有

$\Lambda^TB_2\Lambda=\mathrm{diag}(1, \dots ,1,-1, \dots ,-1,0, \dots ,0)$,其中$\Lambda=\mathrm{diag}(1/s_1,\dots,1/s_r, 1,\dots,1)$.

推论5.1.5 实二次型矩阵 A 的正特征值个数为正惯性指数，负特征值个数为负惯性指数，非零特征值个数为二次型的秩 .

证明思路：A实对称，存在正交矩阵P使得$P^TAP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n)$，再用推论5.1.4的结论 .

例5.1.8 求实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$=2x_1^2-4x_1x_2-12x_1x_3+8x_1x_4+9x_2^2+18x_2x_3-10x_2x_4+23x_3^2-20x_3x_4+4x_4^2$$

的惯性指数.

解 用合同变换法求该二次型的标准形，易知二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & 4 \\ -2 & 9 & 9 & -5 \\ -6 & 9 & 23 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

对矩阵*A*对称地进行列和行的初等变换如下

$$A \xrightarrow[c_4-2c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+3c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+3r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+\frac{1}{7}c_2]{c_3-\frac{3}{7}c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{26}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & -1 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+\frac{1}{7}r_2]{r_3-\frac{3}{7}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4-\frac{17}{26}c_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{149}{26} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{17}{26}r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{149}{26} \end{pmatrix}.$$

故正惯性指数为3，负惯性指数为1 .

例5.1.9 求实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+8x_1x_4+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

的惯性指数.

解 易知二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

我们只要求 A的特征值．由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-4 & -2\\ -3 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-8\lambda+8)=0$$

解得特征值为 λ**=-2,4+2√2,4-2√2 . 故正惯性指数为2，负惯性指数为1 .**