习题三补充讲解(1)

3 证 易知若 x 满足 $Ax=\theta$，必有 $A^TAx=A^T\theta=\theta$. 反之若 x 满足 $A^TAx=\theta$，设 $Ax=y=(y_1,\cdots,y_m)^T$，则 $y^Ty=x^TA^TAx=0$，故 $y=\theta$，即 $Ax=\theta$.故同解

6 证 “=>” $\sum_{i=1}^{n}b_i=(x_1-2x_2+x_3)+\cdots+(-2x_1+x_2+x_n)=0$

“<=”

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & & & b_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & -2 & b_{n-1} \\ -2 & 1 & & & 1 & b_n \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & & & b_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & -2 & b_{n-1} \\ & 0 & 0 & & 0 & \sum_{i=1}^{n}b_i \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & & & b_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & -2 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \end{array}\right),$$

而 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$，可得 $r(A)=n-1$，故 $r(A)=r((A,b))$，方程组有解