习题四补充讲解(4)

27 解因为 A 的每一行之和都是 3，故 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 有 $A\xi_1=3\xi_1$，即 3 是特征值，

又 A 的特征值均为正整数，且 $|A|=3=3\times1\times1$，故还有二重特征值 1.

A 实对称可知属于 1 的特征向量与 ξ_1 正交

解 $(1,1,1)x=0$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，即为属于 1 的特征向量

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(3,1,1)$，于是

$$A=P\mathrm{diag}(3,1,1)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&2&2\\2&5&2\\2&2&5\end{pmatrix}$$

28 解因为 A 实对称，故 A 第一行等于第一列为 $(2,-1,2)$，又 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 为特征向量，

由 $(2,-1,2)\xi_1=0,(2,-1,2)\xi_2=2$，于是 $A\xi_1=0\times\xi_1,A\xi_2=2\xi_2$，即 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$

若 $\lambda_3\neq\lambda_1,\lambda_3\neq\lambda_2$ 则由 A 实对称可知 ξ_3 与 ξ_1,ξ_2 正交，若 $\lambda_3=\lambda_1$ 或 $\lambda_3=\lambda_2$ 用正交化也可得

ξ_3 与 ξ_1,ξ_2 正交，解方程组 $\begin{pmatrix}\xi_1^T\\\xi_2^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}x=\theta$ 得一非零解 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，于是 $\lambda_3=5$

令 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，故有

$$A=Pdiag(0,2,5)P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&0&1/2\\1/6&1/3&1/6\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&3&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

29* 证因为 $A^2=AA=A$，此即 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，

又 $r(A)=r((\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=r$，故 A 有 r 个属于特征值 1 的无关特征向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$，

标准正交化得 $\xi_1,\cdots,\xi_r$，并令 $U=(\xi_1,\cdots,\xi_r)$；另外由 $r(A)=r<n$ 可得 n-r 个

属于特征值 0 的标准正交的特征向量 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$，并令 $V=(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})$，

由 A 实对称可知 ξ_i 与 η_j 正交，故 $(U,V)=(\xi_1,\cdots,\xi_r,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})$ 为正交矩阵.

由前所知 $A(U,V)=(U,O)$，于是 $A=A(U,V)(U,V)^T=(U,O)\begin{pmatrix}U^T\\V^T\end{pmatrix}=UU^T$，且 $U^TU=E_r$