Notas Análisis Topológico de Datos

Larruz Castillo Oscar André
Jorge Eduardo Gutiérrez Jiménez

1 de noviembre de 2025

Antes de iniciar con las notas del curso, es importante que se tengan en cuenta las definiciones necesarias de teoría de grupos, pues trabajaremos con estas después.

Definición 0.1. *Un grupo es una tercia ordenada* $(A, *, 0_A)$*, donde se cumple que:*

1. A *es un conjunto*
2. 0_A *es un elemento de* A
3. * *es una función cuyo dominio es* $A \times A$*, y cuyo contradominio es* A*, y que cumple que:*
    a) * *es asociativa.*
    b) *Para toda* $a \in A$ *se cumple que* $0_A * a = a * 0_A = a$*.*
    c) *Para toda* $a \in A$*, existe* $b \in A$ *tal que* $b * a = a * b = 0_A$*.*

Definición 0.2. *Un grupo* $(A, *; 0_A)$ *es llamado abeliano si la función* $*$ *es conmutativa.*

Definición 0.3. *Sea* $(A, *, 0_A)$ *un grupo. Decimos que* B *es subrgupo de* A *si ocurre que* $B \subseteq A$ *y* $(B, *_{\restriction A}, 0_A)$ *es un grupo; y lo denotamos como* $B \leq A$*.*

Notación 0.4. *A partir de ahora, a un grupo* $(A, +, 0_A)$ *lo denotaremos solo como* A*, al elemento* 0_A *como* 0*, a la función* $*$ *con la suma, y denotaremos* $\sum_{i=1}^{n} a = a^n$*.*

Definición 0.5. *Sea* A *un grupo, y sea* $a \in A$*. Definimos el orden de* a *como el mínimo natural tal que* $a^n = 0$*, en caso de que dicho natural no exista, decimos que el orden de* a *es infinito; denotamos el orden de* a *como* $ord(a)$

Vistos los conceptos sobre los que se va a trabajar, empezaremos con algunas definiciones.

Definición 0.6. *La torsión de un grupo abeliano* A *es el subgrupo* B *de* A *que cumple que, para todo* $b \in B$*, tenemos que* $ord(b) < \infty$*. Denotamos así a este grupo como* $T(A)$*.*

Definición 0.7. *Un grupo abeliano* A *es llamado libre de torsión si* $T(A) = \{0\}$*, o equivalentemente, si para todo* $a \in A$*,* $ord(a) = \infty$