

## 基于局部波动率模型的上证 50ETF 期权定价研究

王西梅<sup>1,2</sup>, 赵延龙<sup>1,2</sup>, 史若诗<sup>1,2</sup>, 包莹<sup>3</sup>

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190; 2. 中国科学院大学 数学科学学院, 北京 100190; 3. 中国工商银行总行 风险管理部, 北京 100032)

**摘 要** 局部波动率模型被广泛运用于风险管理、期权定价等领域, 该模型不仅可以描述波动率微笑、期限结构等实际现象, 同时能保证市场的完备性. 研究局部波动率模型的核心目标是对隐含波动率进行建模. 本文分别通过参数法和非参数法对隐含波动率建模, 不仅保证了波动率曲面的无套利性, 同时给出了非参数法求解局部波动率的显式表达式, 从而消除了近似误差, 得到较为光滑的波动率曲面. 此外, 本文基于局部波动率模型对我国上证 50ETF 指数期权的定价进行了实证研究, 分别从样本内定价误差、样本外定价误差、套期保值效果三个方面分析比较了该模型的定价效果. 实证结果显示: 对样本内数据, 非参数法拟合的定价结果优于参数方法; 对样本外数据以及套期保值效果来说, 参数法取得的效果较好. 特别地, 隐含波动率建模方法无论是对期权定价还是套期保值, 效果均优于直接根据市场数据建模的结果, 样本内定价误差可减少一半以上, 均方误差可降低 1~2 个数量级.

**关键词** 期权定价; 隐含波动率; 局部波动率模型; 参数估计

## Empirical analysis of Shanghai 50ETF options pricing based on local volatility model

WANG Ximei<sup>1,2</sup>, ZHAO Yanlong<sup>1,2</sup>, SHI Ruoshi<sup>1,2</sup>, BAO Ying<sup>3</sup>

(1. LSC, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;  
2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;  
3. Risk Management Department, Industrial and Commercial Bank of China, Beijing 100032, China)

**Abstract** Local volatility model is widely used in the fields of risk management, options pricing, etc. The model can not only describe the “smile” and the term structure of volatility, but can also ensure the completeness of the market. The core goal of local volatility research is to calculate the implied volatility. In this paper, the implied volatility surfaces are built with both parametric and non-parametric methods to obtain smoother volatility surfaces. Parametric method can ensure the absence of arbitrage. Meanwhile, a closed form of solving the local volatility model with non-parametric method is proposed, which can eliminate the approximation error. In addition, the pricing of Shanghai 50ETF option in China based on the local volatility model is studied by comparing effects of the models from aspects of in-the-sample, out-of-the sample and hedging pricing errors. The empirical results show that the non-parametric method is better than the parametric method for errors in-the-sample; the parametric method has better results for out-of-sample and hedging effects. Particularly, both the options pricing and hedging effects of the implied

收稿日期: 2018-06-05

**作者简介:** 王西梅 (1993–), 女, 汉, 陕西西安人, 博士, 研究方向: 金融建模, 资产定价, 风险管理, E-mail: xmwang@amss.ac.cn; 赵延龙 (1980–), 男, 汉, 山东济南人, 博士生导师, 研究方向: 集值辨识, 金融建模, E-mail: ylzha@amss.ac.cn; 史若诗 (1996–), 女, 汉, 山西太原人, 硕士研究生, 研究方向: 金融建模, 风险管理, E-mail: shiruoshi18@mails.ucas.ac.cn; 包莹 (1980–), 女, 汉, 山东济南人, 博士, 研究方向: 金融建模, 资产定价, 风险管理, E-mail: baoying@icbc.com.cn.

**基金项目:** 国家重点研发计划项目 (2018YFA0703800); 国家自然科学基金 (61622309)

**Foundation item:** National Key R&D Program of China (2018YFA0703800); National Natural Science Foundation of China (61622309)

**中文引用格式:** 王西梅, 赵延龙, 史若诗, 等. 基于局部波动率模型的上证 50ETF 期权定价研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(10): 2487–2501.

**英文引用格式:** Wang X M, Zhao Y L, Shi R S, et al. Empirical analysis of Shanghai 50ETF options pricing based on local volatility model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(10): 2487–2501.

volatility modeling methods are better than un-modeled method in the aspects that the pricing errors can be decreased by more than half and the mean square error can be reduced by 1~2 orders of magnitude.

**Keywords** options pricing; implied volatility; local volatility model; parameter estimation

## 1 引言

2015 年 2 月 9 日, 我国首支场内指数期权——上证 50ETF 期权正式上线, 标志着我国期权衍生品市场开始正式向多元化投资与风险管理新时代迈进。然而目前金融市场仍存在定价结果不稳定等诸多问题。因此, 寻找适合我国市场运行机制的期权定价模型, 对期权进行科学有效的定价具有重要的理论研究意义和应用指导价值。

法国数学家 Louis Bachelie 最早运用随机游走理论来描述股票价格的运行规律, 直到 Black 和 Scholes 假设期权的标的资产服从对数正态分布, 提出经典的 Black-Scholes (BS) 期权定价模型<sup>[1]</sup>, 掀起了华尔街第二次革命。基于该模型的欧式期权, 亚式期权, 障碍期权等各类奇异期权定价方法至今仍被业界广泛使用。

但是在实际应用中, BS 模型仍存在一些弊端。BS 模型假设波动率是常数, 不能适应实际金融市场的变化、解释隐含波动率的期限结构和微笑现象<sup>[2]</sup>。因此, 为了更好地描述资产运动情况, 刻画波动率特征, 一直有很多学者对 BS 模型做相应的改善, 使得新模型能够更好地描述市场特征, 特别是对隐含波动率微笑的解释。按照对波动率建模的方式, 将这些模型分为两类, 第一类模型假设波动率是标的资产和时间的随机过程的随机波动率模型<sup>[3-5]</sup>, 第二类假设波动率是标的资产和时间的确定性函数的局部波动率模<sup>[6-9]</sup>。

随机波动率模型假设波动率单独服从一个随机扩散过程。<sup>[3]</sup>最早提出随机波动率模型, 随后, 人们对波动率的随机过程进行了一些改进, 使波动率具有均值回复性且恒为正值。最著名的随机波动率模型是 Heston 模型<sup>[4]</sup>和 SABR 模型<sup>[10]</sup>。此外, 当市场中发生一些突发事件时, 人们通常在随机波动率模型中引入跳过程来描述这种情况<sup>[11-13]</sup>。但是, 由于随机波动率模型引入了除了标的资产外其他的非交易风险, 即波动率风险, 打破了市场的完备性<sup>[14]</sup>, 同时, 随机波动率模型中需要校准的参数较多, 这给该模型的使用带来了一定难度。

局部波动率模型通过引入一个确定性函数来描述波动率, 这个函数被称为局部波动率函数。该函数通过隐含波动率曲面来求解, 可以更精确地抓住波动率随着执行价格和到期日变化的特点。由于未引入随机变量, 局部波动率模型保证了市场的完备性。Gatheral<sup>[15]</sup>证明了当期限趋于无穷时, 模型的隐含波动率趋于参数化的隐含波动率。因此, 局部波动率模型深受业界喜爱。

构造隐含波动率曲面是研究局部波动率模型的关键<sup>[16]</sup>。现有文献中关于隐含波动率曲面构造的方法, 可分为两大类, 一类是参数法, 另一类是非参数法。对于参数法, Dumas<sup>[17]</sup>假设对于隐含波动率是价值状态 (moneyness) 和到期日的二次函数, 但是他们没有考虑到隐含波动率的无套利条件<sup>[18]</sup>。Gatheral<sup>[19]</sup>在证券公司工作时提出随机波动率激发 (stochastic volatility inspired) 模型。在文献<sup>[20]</sup>中, Gatheral 限制了模型的参数以保证模型的无套利性, 并将该模型推广到一系列 SVI 模型 (surface stochastic volatility inspired), 这些曲面不存在日历价差套利和蝶式价差套利<sup>[21]</sup>。由于 SSVI 模型在保证在无套利的同时, 对隐含波动率曲面有较好的拟合效果, 该模型被业界广泛使用。

对于非参数法, 也有很多插值、拟合算法, 比如三次样条法<sup>[22]</sup>、B-样条法<sup>[23]</sup>、径向基函数法<sup>[24,25]</sup>。但是这些方法都是在固定到期日的基础上, 对隐含波动率曲线进行建模, 即在价格维度上对隐含波动率曲线进行建模。Duchon<sup>[26]</sup>提出了薄板样条方法 (thin plate spline), 该方法针对整个曲面构造函数, 不仅能够通过调整光滑化参数控制波动率曲面的光滑度, 而且非参数的函数形式能通过显式表达式求解<sup>[27]</sup>, 极大优化了局部波动率曲面的求解过程。TPS 可以通过对二维隐含波动率曲面进行建模, 减少参数近似求解引起的误差, 同时可以进一步推导局部波动率函数的显式形式。

国内学者也一直在研究期权定价问题<sup>[28-30]</sup>, 这些研究均以我国国情实证为基础, 研究结果具有借鉴意义。针对上证 50ETF 的研究中, 曹睿成<sup>[31]</sup>分别用 BS 模型, AHBS 模型, GARCH 模型, SV (Heston) 模型对上证 50ETF 进行定价, 结论显示 Heston 模型定价结果最精确, 适合期权市场; 其次是 AHBS, BS 模型; GARCH 模型定价误差最大。宋焕雨<sup>[32]</sup>通过 BS 模型、二叉树、蒙特卡罗、有限差分方法对上证 50ETF 进行定价, 但这些方法只能跟踪定价趋势, 并不能准确进行定价。杨霭<sup>[33]</sup>比较了 Heston, SABR 两种随机波

动率模型对上证 50ETF 期权的定价, 但定价相对误差高达 19%。对于隐含波动率的构建, 陈思<sup>[34]</sup>比较了五种构建隐含波动率曲面的方法, 但这些方法并没有考虑套利问题, 也并未研究 SSVI 模型与 TPS 模型构建隐含波动率曲面的方法。

本文分别基于参数 SSVI 模型和非参数 TPS 模型对隐含波动率进行拟合, 给出 TPS 计算局部波动率的显式表达式, 从而进一步对我国上证 50ETF 进行定价。SSVI 模型的优势在于在拟合隐含波动率的同时, 避免了波动率曲面出现日历价差套利、蝶式价差套利机会。相比于 SVI 模型, SSVI 模型对隐含波动率的拟合效果更光滑。TPS 是对不同到期日和不同执行价格的隐含波动率曲面建立二维模型, 并且模型中的参数有显式表达式, 这给计算局部波动率带来了很大的便利性, 可以同时减少拟合中的参数估计误差以及偏导数的数值求解误差。另外, TPS 方法对隐含波动率拟合的光滑性可以通过参数  $\lambda$  来控制。我们比较了这两种建模方法与未对隐含波动率曲面进行建模, 直接用市场数据求解波动率的计算结果, 可以看出, 未建模所得的局部波动率对执行价格和到期时间的变化非常敏感, 因此波动率曲面会出现剧烈震荡。更进一步, 我们比较了参数法、非参数法、未建模方法对我国上证 50ETF 期权的定价与套期保值效果, 结果表明, 参数以及非参数法拟合后的曲面在样本内定价, 样本外定价, 以及套期保值效果上均优于未建模方法。另外, 对于样本内定价效果来说, 非参数 TPS 方法的定价效果在一定程度上优于 SSVI 模型。

文章结构安排如下: 第 2 部分介绍了局部波动率模型的定价方法; 第 3 部分介绍了隐含波动率的参数化方法; 第 4 部分介绍了隐含波动率的非参数化方法; 第 5 部分比较了参数 SSVI 模型, 非参数 TPS 模型对隐含波动率的拟合效果, 以及这两种拟合方法与近似方法对局部波动率曲面的计算结果, 同时比较了不同方法下局部波动率模型对我国上证 50ETF 期权进行的定价结果; 第 6 部分, 对全文进行总结, 并给出对我国期权市场的一些建议。

## 2 基于局部波动率模型的定价方法

Dupire<sup>[6]</sup> 提出的局部波动率模型表达如下,

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma_{\text{loc}}(S(t), t)S(t)dW(t),$$

其中  $S(t)$  为标的资产,  $r(t)$  为瞬时无风险收益率,  $W(t)$  为布朗运动,  $\sigma_{\text{loc}}(S(t), t)$  为局部波动率函数。该模型在两方面弥补了 BS 模型的不足: 1) 局部波动率模型的漂移项是关于时间的函数, 而非常数, 这可以解释收益率的期限结构问题。2) 波动项  $\sigma_{\text{loc}}(S(t), t)$  是标的资产和时间的确定性函数<sup>1</sup>。根据风险中性定价公式以及 Fokker-Planck 方程, 可推导出局部波动率与期权价格满足以下偏微分方程:

$$\sigma_{\text{loc}}^2(S(t), t) = \frac{2\left(\frac{\partial C(t, T, S(t), K)}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}\right)}{K^2 \frac{\partial^2 C(t, T, S(t), K)}{\partial K^2}} \Big|_{K=S(t), t=T}, \quad (1)$$

其中  $C(t, T, S(t), K)$  表示到期日为  $T$ , 敲定价格为  $K$  的欧式看涨期权在  $t$  时刻的价格,  $S(t)$  表示当前时刻  $t$  标的资产的价格。公式 (1) 在理论上给出了根据看涨期权市场价格计算局部波动率的方法, 即通过期权价格分别对到期日和行权价计算导数可以求出局部波动率。但是在实际市场报价上, 期权价格往往是通过其对应的隐含波动率进行报价。此外, 公式 (1) 中的分母是期权价格的二阶偏导, 这使得局部波动率对执行价格的变化非常敏感, 市场上微小的扰动或者套利情况都会导致公式 (1) 出现负的  $\sigma_{\text{loc}}^2(S(t), t)$ , 因此不能进一步求解波动率 (文献 [35])。根据 BS 期权定价公式以及链式法则, 公式 (1) 可转换为 (见 [36, 37]),

$$\sigma_{\text{loc}}^2(S(t), t) = \frac{\Sigma^2 + 2\Sigma\tau\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\tau} + rK\frac{\partial\Sigma}{\partial K}\right)}{\left(1 - \frac{Ky}{\Sigma}\frac{\partial\Sigma}{\partial K}\right)^2 + K\sigma\tau\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial K} - \frac{1}{4}K\sigma\tau\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial K}\right)^2 + K\frac{\partial^2\Sigma}{\partial K^2}\right)} \Big|_{K=S(t), t=T}. \quad (2)$$

其中  $y = \ln(K/(S_0 e^{rt}))$ ,  $\Sigma$  是隐含波动率  $\Sigma(K, T)$  的缩写。根据公式 (2) 可以通过对隐含波动率的各阶导数进行差分近似, 从而计算局部波动率。用隐含波动率 (implied volatility) 来计算局部波动率的方法称为直接法 (可简称为 IMP 方法)。通常, 关于隐含波动率的一阶导数有三种近似方法<sup>[38]</sup>:

### 1) 向前差分法

根据向前差分法, 隐含波动率关于时间, 执行价格的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\tau} = \frac{\Sigma(\cdot, \tau + \delta) - \Sigma(\cdot, \tau)}{\delta} + O(\delta),$$

1. 若假设收益率  $\mu(t)$ , 波动率  $\sigma_{\text{loc}}(S(t), t)$  为常数, 局部波动率模型退化为 BS 模型。

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial K} = \frac{\Sigma(K+h, \cdot) - \Sigma(K, \cdot)}{h} + O(h),$$

其中,  $\delta, h$  分别为时间, 价格维度的步长,  $O(\cdot)$  表示同阶无穷小.

### 2) 向后差分法

根据向后差分法, 隐含波动率关于时间, 执行价格的一阶偏导数分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} &= \frac{\Sigma(\cdot, \tau) - \Sigma(\cdot, \tau - \delta)}{\delta} + O(\delta), \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial K} &= \frac{\Sigma(K, \cdot) - \Sigma(K - h, \cdot)}{h} + O(h).\end{aligned}$$

### 3) 中心差分法

根据中心差分法, 隐含波动率关于时间, 执行价格的一阶偏导数分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} &= \frac{\Sigma(\cdot, \tau + \delta) - \Sigma(\cdot, \tau - \delta)}{2\delta} + O(\delta^2), \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial K} &= \frac{\Sigma(K + h, \cdot) - \Sigma(K - h, \cdot)}{2h} + O(h^2).\end{aligned}$$

可以根据不同的边界条件和精度要求, 选择不同的差分方法, 对一阶导数进行逼近.

二阶导数一般使用中心差分法进行逼近, 隐含波动率的二阶偏导数可以写为

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial K^2} = \frac{\Sigma(K + h, \cdot) - 2\Sigma(K, \cdot) + \Sigma(K - h, \cdot)}{h^2} + O(h^2).$$

对于某个交易日, 市场上只有有限个到期日和行权价格对应的隐含波动率报价. 在计算局部波动率时, IMP 方法通过直接对隐含波动率的各阶导数进行近似, 代入公式 (2), 从而计算局部波动率. IMP 方法是最简单直接的计算局部波动率的方法.

IMP 是直接利用市场上的数据进行计算, 得到的波动率结果会出现剧烈震荡. 因此在计算局部波动率之前, 首先要对市场数据进行插值或者拟合, 得到较为光滑的隐含波动率曲面. 常用的拟合方法有参数法和非参数法. 参数法是指对于隐含波动率, 行权价, 到期日之间构造二次函数等非线性模型, 分析模型中各个参数的意义, 通过求解参数对隐含波动率进行建模. 非参数法是指用样条, 回归等方法, 构造光滑曲面去拟合市场上的隐含波动率函数. 我们将在以下两节中分别介绍这两种拟合隐含波动率的方法. 表 1 列出了通过局部波动率模型对期权进行定价的主要步骤.

表 1 局部波动率模型定价算法

<b>第一步: 数据预处理</b>
对曲面进行无套利处理, 去除异常报价点
<b>第二步: 拟合隐含波动率曲面</b>
参数法/非参数法拟合隐含波动率曲面
1) 参数校准
2) 曲面拟合
<b>第三步: 计算局部波动率</b>
将隐含波动率曲面代入公式 (2) 中计算局部波动率
<b>第四步: 定价衍生品</b>
根据蒙特卡罗前向法或者偏微分方程后向法定价场外衍生品

## 3 局部波动率模型的参数定价方法

本节主要介绍基于 SVI 与 SSVI 模型对隐含波动率拟合算法. Gatheral 在美林证券公司工作时首次提出了 SVI 模型, 该模型对隐含波动率进行了平滑. 对于固定到期日, 隐含方差 (隐含波动率的平方) 相对于对数价值状态呈“两端近似线性, 中间有一定弯曲”的形态. 当执行价格  $|K| \rightarrow \infty$  时, 隐含方差关于对数价值状态  $x = \log(K/F)$  成线性变化, 其中  $F = Se^{rt}$ . SVI 模型有以下表达式,

$$w(x, t) = a + b(\rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2}), \quad (3)$$

其中  $a > 0, b \geq 0, |\rho| \leq 1, m, \sigma$  为依赖时间的参数,  $w(x, t) = \sigma^2(x, t)t$ , 代表隐含方差. SVI 模型中的 5 个参数分别描述了隐含波动率曲线的形状, 具体地:

- $a$ : 描述波动率曲线的水平位置, 当  $a$  增加时, 波动率曲线整体向上平移;
- $b$ : 刻画了左右两翼之间的夹角的大小, 当  $b$  增加时, 曲线左右两翼倾斜度增加, 两翼之间的夹角变小;
- $\sigma$ : 描述了曲线拐点的光滑程度, 当  $\sigma$  增大时, 曲线拐点更光滑;
- $\rho$ : 刻画了曲线的倾斜程度, 当  $\rho$  增加时, 左翼斜度下降, 右翼倾斜度增加, 曲线逆时针旋转;
- $m$ : 描述了曲线的平移程度, 即偏离  $y$  轴的程度, 当  $m$  增加时, 曲线向右平移.

SVI 模型中有 5 个参数需要校准. 简单的最小二乘法对初值的依赖性很强. 文献 [39] 提出了 Quasi-Explicit 优化法, 将 SVI 模型进行参数降维, 大幅提高了运算效率和参数拟合的稳定性, 本文给出了 Quasi-Explicit 方法估计参数的显式解形式, 具体步骤可见附录.

尽管 SVI 模型能较好拟合隐含波动率的形状, 但该模型并未考虑如何避免日历价差套利和蝶式价差套利. Gatheral 在 2014 年提出了 surface SVI (SSVI) 模型. 这是一类 SVI 模型, 可以避免隐含波动率曲面出现日历价差套利以及蝶式价差套利. 对于任意到期日  $\tau > 0$ , 定义平价期权的隐含方差为  $\theta_t := \sigma_{BS}(0, t)t$ , 由于到期日为零的平价期权价值也为零, 因此  $\theta_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_t = 0$ .

**定义 1** (文献 [20]):  $\mathbb{R}^+$  是全体正实数集合. 设  $\varphi$  是一条  $\mathbb{R}^+$  到  $\mathbb{R}^+$  的光滑函数, 且极限  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_t \varphi(\theta_t) \in \mathbb{R}$  存在. SSVI 模型为:

$$w(x, t) = \frac{\theta_t}{2} \{1 + \rho \varphi(\theta_t)x + \sqrt{(\varphi(\theta_t)x + \rho)^2 + (1 + \rho)^2}\}. \quad (4)$$

$\varphi(\theta_t)$  的取值形式通常有两种, 第一种是 Heston 参数形式的函数,

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{\lambda \theta} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\lambda \theta}}{\lambda \theta} \right\},$$

其中  $\lambda > 0$ . 另一种形式是 Power-law 参数形式的函数,

$$\varphi(\theta_t) = \eta \theta_t^{-\gamma},$$

其中  $\eta > 0, 0 < \gamma < 1$ . 要保证 SSVI 不存在日期套利的同时, 还能避免蝶式价差套利, 公式 (4) 需要满足以下条件,

$$\begin{cases} \partial_t \theta_t \geq 0, \\ 0 \leq \partial_\theta (\theta \varphi(\theta)) \leq \frac{1}{\rho^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \varphi(\theta), \\ \varphi(\theta)(1 + |\rho|) < 4, \\ \theta \varphi(\theta)^2 (1 + |\rho|) \leq 4. \end{cases}$$

对于 SSVI 模型, 为了使模型在较好地拟合市场数据的同时, 满足以上无套利条件, 可以对参数校准的方法加以优化, 具体有以下几步:

- 根据市场隐含波动率价格, 通过 BS 公式计算期权价格;
- 用最小二乘法极小化 SVI 模型拟合的期权价格和市场期权价格之间的误差和, 求得的 SVI 模型参数估计值;
- 以 SVI 模型的参数估计值作为 SSVI 模型的参数初值, 对每个到期日的隐含方差参数进行校准, 并对可能出现蝶式价差套利的情况进行惩罚.

#### 4 局部波动率模型的非参数定价方法

我国上证 50ETF 期权每个交易日的报价都是按照不同的到期日和不同的执行价格提供市场数据的, 并且每个到期日所对应的执行价格不同<sup>2</sup>. 对于这种类型的数据, 如果用一般的双线性或者双样条函数去拟合, 会因为数据量小而得到较差的拟合效果. 薄板样条函数 (thin plate splines) 方法可以针对这种数据进行拟合, 并且得到的拟合结果较好. TPS 方法最早是由 Buhmann<sup>[25]</sup> 提出的, 他认为拟合离散的二维数据, 正像弯曲一个金属薄板, 因此以这个物理过程命名. 该算法实际上是定义在一个二维区域上的三次多项式插值函数, 是自然三次样条函数的推广, 具体可参考文献 [40].

2. 按照当月, 下月, 当季, 下季共有四个到期日, 对每个到期日, 有 5 到 13 个执行价格.

TPS 方法可以在一定的限制下, 以最小的曲率穿过所有样本点. 如果定义样条函数为  $f(x, y)$ , 弯曲能量  $J$  为以下方程

$$J = \int \int_{R^2} \left( \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy,$$

通过最小化以下目标函数  $E$  来确定  $f(x, y)$  的表达形式.

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - z_i)^2 + \lambda J, \quad (5)$$

其中  $z_i$  指坐标  $(x_i, y_i)$  对应的样本点的值.  $\lambda$  称为光滑参数, 当  $\lambda = 0$ , 函数  $f(\cdot, \cdot)$  能穿过所有的样本点, 称为薄板样条插值. 当  $\lambda > 0$ , 函数  $f(\cdot, \cdot)$  的曲率增加, 同时被光滑化. 更一般地, 当  $\lambda \rightarrow \infty$ , 所拟合的函数成为一张薄板平面. 在实际应用中,  $\lambda$  可以根据不同的需求选择, 以此来控制函数  $f(\cdot, \cdot)$  拟合结果的光滑性. 简单来说, 如果二元函数弯曲能  $J$  为零, 所拟合曲面为一张平面  $f(x, y) = a + bx + cy$ ; 如果数据不是落在一张平面上,  $J$  不等于零.

实际上, TPS 方法是一种径向基 (radial basis function) 函数方法, 对于大量散乱点插值, RBF 的方法可以得到令人满意的效果. 记  $r$  为两点之间的距离,  $\phi(\cdot)$  为一元函数, TPS 的径向基函数形式为

$$\phi(\cdot) = \begin{cases} |r|^{2k-d} \ln|r|, & d = 2m, \\ |r|^{2k-d}, & d = 2m + 1, \end{cases}$$

其中  $m \in \mathbf{N}^+$ ,  $\mathbf{N}^+$  表示正整数集.  $d$  为变量个数,  $k$  为求偏导数的阶次. 具体地, 对于二元函数  $f(x, y)$ , 对应的 TPS 函数可以写成以下形式,

$$f(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n a_j A_{i,j} + \sum_{j=1}^3 b_j B_{i,j}, \quad (6)$$

其中

$$A_{i,j} = \begin{cases} \|(x, y) - (x_i, y_i)\|^2 \ln \|(x, y) - (x_i, y_i)\|, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

$$B_{i,(1:3)} = (1, x_i, y_i).$$

等式 (6) 右边的第二项保证了 TPS 方法有唯一解<sup>[34,38]</sup>. 使目标函数 (4) 最小的向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  满足以下方程:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = (\mathbf{A} + n\lambda \mathbf{I})\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b}, \\ 0 = \mathbf{B}^T \mathbf{a}, \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ . 可通过对  $\mathbf{B}$  进行 QR- 分解估计参数  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{Q}_1 | \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中  $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ ,  $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-3)}$ ,  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . 分别对等式 (7) 左乘  $\mathbf{Q}_2^T$ ,  $\mathbf{Q}_1^T$ , 可得  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的表达式为:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}_2^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 + n\lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Q}_2^T \mathbf{z}, \\ \mathbf{b} = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{z} - \mathbf{A} \mathbf{a}). \end{cases}$$

因此 TPS 函数表达形式可以写为:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \|(x, y) - (x_i, y_i)\|^2 \ln \|(x, y) - (x_i, y_i)\| + b_0 + b_1 x + b_2 y.$$

在市场隐含波动率报价中, 不同的执行价和不同的到期日对应的隐含波动率是不同的, 从而形成了隐含波动率曲面  $\Sigma(K_i, T_j)$ . 在用 TPS 方法构造隐含波动率曲面时, 由于执行价格和到期日的单位不同, 在设计算法时, 首先对这两个变量进行标准化. 给定波动率曲面上的  $n$  个点,  $\Sigma(K_i, T_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_2$ , 计算

$$x_i = \frac{K_i}{K_{\max}}, \quad y_i = \frac{T_i}{T_{\max}},$$

其中

$$K_{\max} = \max(K_1, K_2, \dots, K_{n_1}), \quad T_{\max} = \max(T_1, T_2, \dots, T_{n_2}).$$

然后将  $x_i, y_i, \Sigma(x_i, y_i)$  代入 TPS 模型中计算参数, 从而推导函数  $\Sigma(x, y)$  的表达形式. 方程 (2) 中各阶偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial K} \Sigma(K, T) = \frac{\partial}{\partial x} \Sigma(x, y) \Big|_{x=\frac{K}{K_{\max}}, y=\frac{T}{T_{\max}}} \cdot \frac{1}{K_{\max}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial K^2} \Sigma(K, T) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Sigma(x, y) \Big|_{x=\frac{K}{K_{\max}}, y=\frac{T}{T_{\max}}} \cdot \frac{1}{K_{\max}^2}, \\ \frac{\partial}{\partial T} \Sigma(K, T) = \frac{\partial}{\partial y} \Sigma(x, y) \Big|_{x=\frac{K}{K_{\max}}, y=\frac{T}{T_{\max}}} \cdot \frac{1}{T_{\max}}, \end{cases}$$

其中,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1 n_2} a_i (x - x_i) [1 + \ln \| (x - x_i, y - y_i) \|_2^2 + b_1], \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1 n_2} a_i (x - x_i) [1 + \ln \| (x - x_i, y - y_i) \|_2^2 + b_2], \\ \frac{\partial}{\partial y} \Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1 n_2} a_i \left[ 1 + \ln \| (x - x_i, y - y_i) \|_2^2 + \frac{2(y - y_i)^2}{\| (x - x_i, y - y_i) \|_2^2} \right]. \end{cases}$$

该解析形式的偏导数代入方程 (2), 即可计算局部波动率.

## 5 实证结果比较

### 5.1 数据介绍

选取 2016 年 1 月 4 日到 2018 年 2 月 28 日期间, 共 525 个交易日, 25201 个看涨期权数据进行定价研究<sup>3</sup>. 为了更有效地进行定价的实证分析, 对数据进行以下步骤的筛选,

- 暂不考虑分红在内, 剔除不满足以下无套利条件的期权:

$$C(t, \tau) \geq \max(0, S_t - Ke^{-r\tau}).$$

- 期权到期日前的最后交易时间可能会出现投机等现象, 剔除掉剩余期限少于一个星期 (5 天) 的期权数据<sup>4</sup>.
- 为保证数据的有效性, 减少对期权定价不连续的影响, 去除掉交易价格低于 0.0003 (元) 的期权, 同时取执行价格间隔为 0.05 的期权作为研究对象.

通过以上步骤筛选得到 17124 个期权数据. 无风险利率  $r$  取 2016 年 1 月 3 日到 2018 年 2 月 28 日期间每个估值日当天的上海银行间拆放利率 (SHIBOR) 隔夜利率. 将期权按照虚实程度和到期日分类. 定义期权的虚实程度为这个期权的执行价格与当天标的价格的比例 ( $K/S$ ), 如果  $K/S < 0.97$ , 称为实值期权 (in-the-money); 如果  $K/S > 1.03$ , 就称为虚值期权 (out-of-the money); 如果  $0.97 \leq K/S \leq 1.03$ , 称为平值期权 (at-the-money). 对于上证 50ETF 期权, 每个交易日, 合约的到期日都有四个, 分别为当月, 下月以及随后的两个季月, 称为当月合约, 下月合约, 当季合约, 下季合约. 所以, 根据这两个分类标准可以将期权分为 12 个种类.

表 2 列出了对期权数据的统计结果. 对于每个到期日的期权, 第一行表示期权价格的平均值, 随着虚值程度的增加, 期权价格逐渐降低; 第二行表示期权的交易情况, 可以看出, 平值期权的交易量最大, 虚值期权次之, 实值期权交易量最小. 第三行表示期权合约在所对应的种类中占的比重. 通过简单的计算, 实值, 平值, 虚值合约占总合约的比重相当, 分别为 31.23%, 32.38%, 36.39%; 按照期权到期日分类, 当季合约数量最多, 所占比例为 32.45%, 下月和下季合约数量相当, 分别为 24.99%, 24.13%, 当月合约所占比例最少, 仅占合约

3. 在交易量大并且套利机会很少的情况下, 市场上的看涨期权与看跌期权的价格符合平价公式, 并且两者的隐含波动率差距很小. 但是 50ETF 的看涨期权波动率与看跌期权的隐含波动率相差很大, 需要单独研究两种期权的定价方法.

4. 本文计算日期的惯例都使用的是交易日.

总数的 18.43%. 图 1 展示了 2018 年 2 月 8 日看涨期权隐含波动率, 无论是当月, 下月, 当季, 下季的期权, 隐含波动率都有“微笑”或者“偏斜”的现象.

表 2 上证 50ETF 期权的统计性质

到期日	虚实程度 ( $K/S$ )		
	$\leq 0.97$	$(0.97, 1.03)$	$\geq 1.03$
当月合约	0.2611	0.0392	0.0055
	(6,724)	(43,137)	(12,539)
	{29.28%}	{32.79%}	{37.93%}
下月合约	0.2501	0.0580	0.0143
	( 3,419)	(14,293)	(6,485)
	{27.04%}	{34.94%}	{38.02}%
当季合约	0.2774	0.0926	0.0364
	(787)	(2,282)	(1,837)
	{35.00%}	{27.32%}	{37.68%}
下季合约	0.2383	0.1299	0.0779
	(524)	(1,309)	(1,498)
	{31.99%}	{36.23%}	{31.78%}

表 2 列出了看涨期权平仓价的平均值, 小括号中是期权交易量的平均值, 大括号是合约总量的百分比.

5.2 计算局部波动率

本节根据 SVI, SSVI 以及 TPS 方法对隐含波动率的拟合, 进一步计算局部波动率曲面. 同时比较未建模的隐含波动率与这些方法的计算结果. 选取 2018 年 2 月 8 日当天期权收盘价数据, 分别对比参数法 SVI 与 SSVI 对隐含波动率的拟合效果, 以及非参数法 TPS 在不同  $\lambda$  下的拟合结果. 对于参数法, 表 3 和表 4 分别列出了 SVI 和 SSVI 模型的参数估计以及隐含方差的误差平方和 (sum of square errors). 图 2 展示了 SVI 和 SSVI 方法对 2018 年 2 月 8 日下月, 当季合约隐含波动率的拟合效果. 可以看出, 除了当季合约, 对于其他合约 SVI 模型的 SSE 略小于 SSVI 模型. 从数据的拟合效果来讲, SVI 比 SSVI 方法的拟合效果更好, 这是由于 SSVI 方法在拟合数据时, 为了排除了日历价差套利和蝶式价差套利的可能, 牺牲了一定的精确性. 在误差相差不大的情况下, SSVI 方法较为合适.

表 3 SVI 模型参数校准结果

	$a$	$b$	$m$	$\rho$	$\sigma$	SSE
当月合约	0.0017	0.0302	0.0031	-0.0917	0.0621	$5.65 \times 10^{-7}$
下月合约	0.0052	0.0588	-0.0343	-0.4084	0.0543	$2.30 \times 10^{-5}$
当季合约	0.0180	0.0613	0.0136	-0.2135	0.0627	$2.45 \times 10^{-6}$
下季合约	0.0309	0.0877	0.0046	-0.3995	0.0611	$1.10 \times 10^{-6}$

表 4 SSVI 模型参数校准结果

	$a$	$b$	$m$	$\rho$	$\sigma$	SSE
当月合约	0.0018	0.0294	0.0046	-0.0765	0.0604	$5.80 \times 10^{-7}$
下月合约	0.0041	0.0574	0.0093	-0.1285	0.0715	$3.16 \times 10^{-5}$
当季合约	0.0110	0.0868	0.0174	-0.1353	0.1275	$2.13 \times 10^{-6}$
下季合约	0.0180	0.1241	0.0238	-0.1601	0.1468	$1.81 \times 10^{-6}$

图 3 展示了 TPS 方法对 2018 年 2 月 8 日下月, 当季合约隐含波动率的拟合效果. 当  $\lambda = 0$  时, 曲线经过所有的点, 但拟合效果并不光滑. 当  $\lambda$  逐渐增大时, 曲线变的光滑. 当  $\lambda = 0.001$  时, 隐含波动率曲线的平滑性最好.

经过对隐含波动率曲线拟合的比较, 分别选取 SSVI 模型, TPS 参数  $\lambda = 0.001$  的隐含波动率拟合结果构造局部波动率. 同时, 我们还比较了未建模的隐含波动率曲线计算局部波动率的结果与参数以及非参数法建模结果, 记该方法为 IMP. 图 4 分别为 SSVI, TPS, IMP 得到的局部波动率曲面, 分别记为 SSVI-LV, TPS-LV, IMP-LV. 可以看出, TPS-LV 曲面较为光滑, 这是由于 TPS 方法在拟合隐含波动率时通过调整  $\lambda$

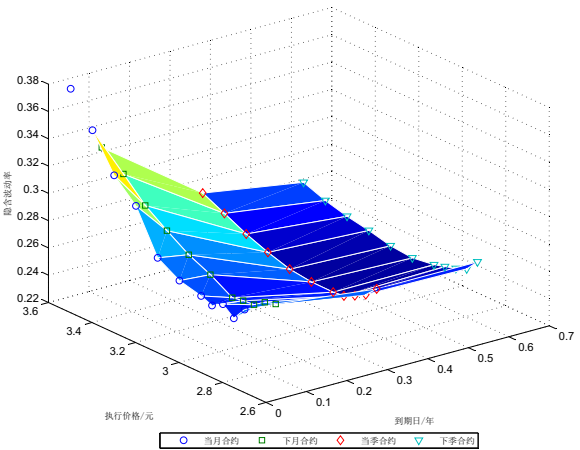


图 1 2018 年 2 月 8 日看涨期权隐含波动率曲面



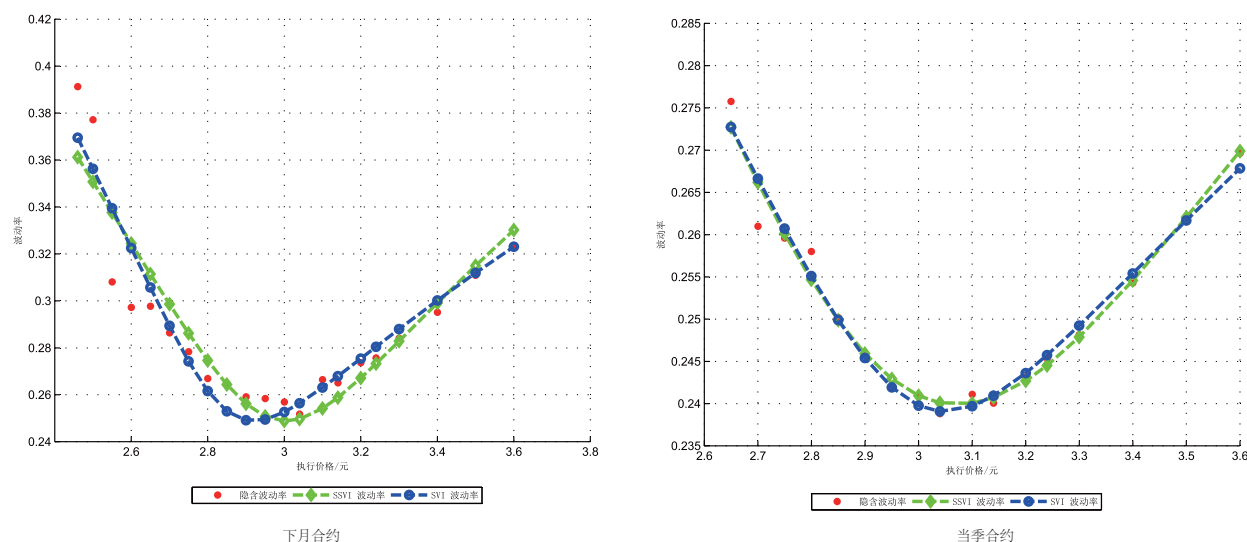


图 2 参数法隐含波动率拟合结果

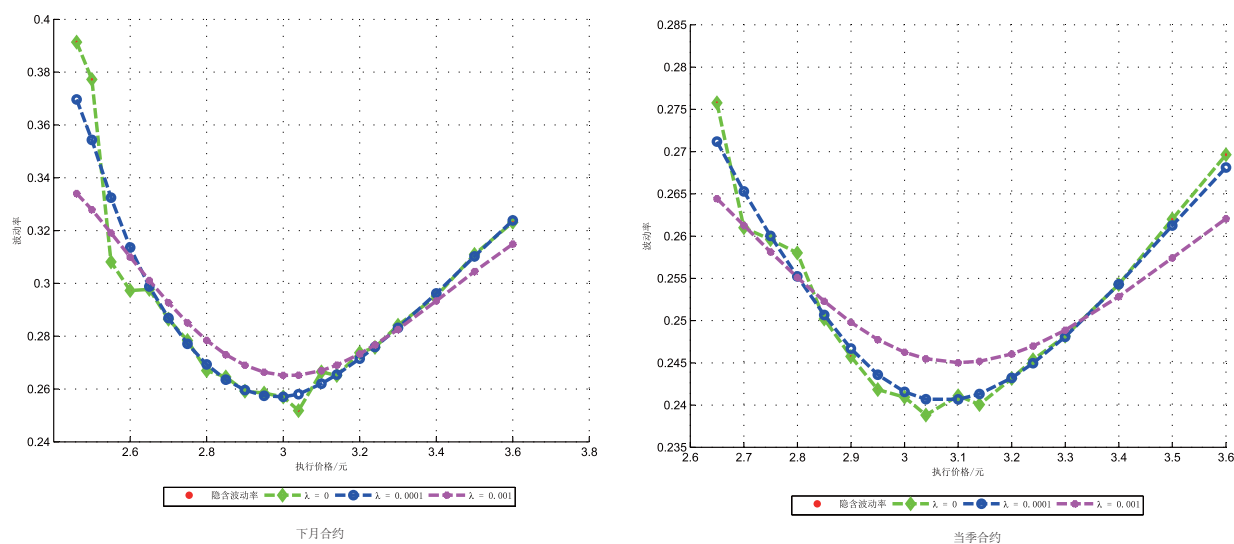


图 3 非参数法隐含波动率拟合结果

构建了相对光滑的隐含波动率曲线, 并且计算局部波动率时隐含波动率的各阶导数有显式形式, 减少了近似误差. SSVI-LV 曲面出现了较大的凸起, 但与 IMP-LV 曲面相比, 仍然较为光滑. SSVI-LV 曲面的凸起点, 一方面由于 SSVI 模型对隐含波动率拟合时, 平滑性不够, 隐含波动率关于执行价格的二阶导数变化非常大, 导致局部波动率模型也会出现剧烈的变化; 另一方面, 由于 SSVI 模型是对固定的到期日建模, 模型中的参数均依赖于到期日, 但是参数关于到期日并没有显式的关系式, 使得通过 SSVI 模型求解局部波动率模型的各阶导数时, 必须使用有限差分法对导数进行近似, 这也会增加局部波动率的误差. IMP-LV 是在未对曲面进行任何处理的情况下计算局部波动率, 曲面呈震荡形式.

### 5.3 定价结果比较

为了对定价结果进行分析, 本节首先给出以下两个指标作为测量标准:

1) 平均相对误差 (mean percentage error)

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{T_j} \sum_{K_i} \frac{C^{\text{model}}(K_i, T_j) - C^{\text{market}}(K_i, T_j)}{C^{\text{market}}}$$

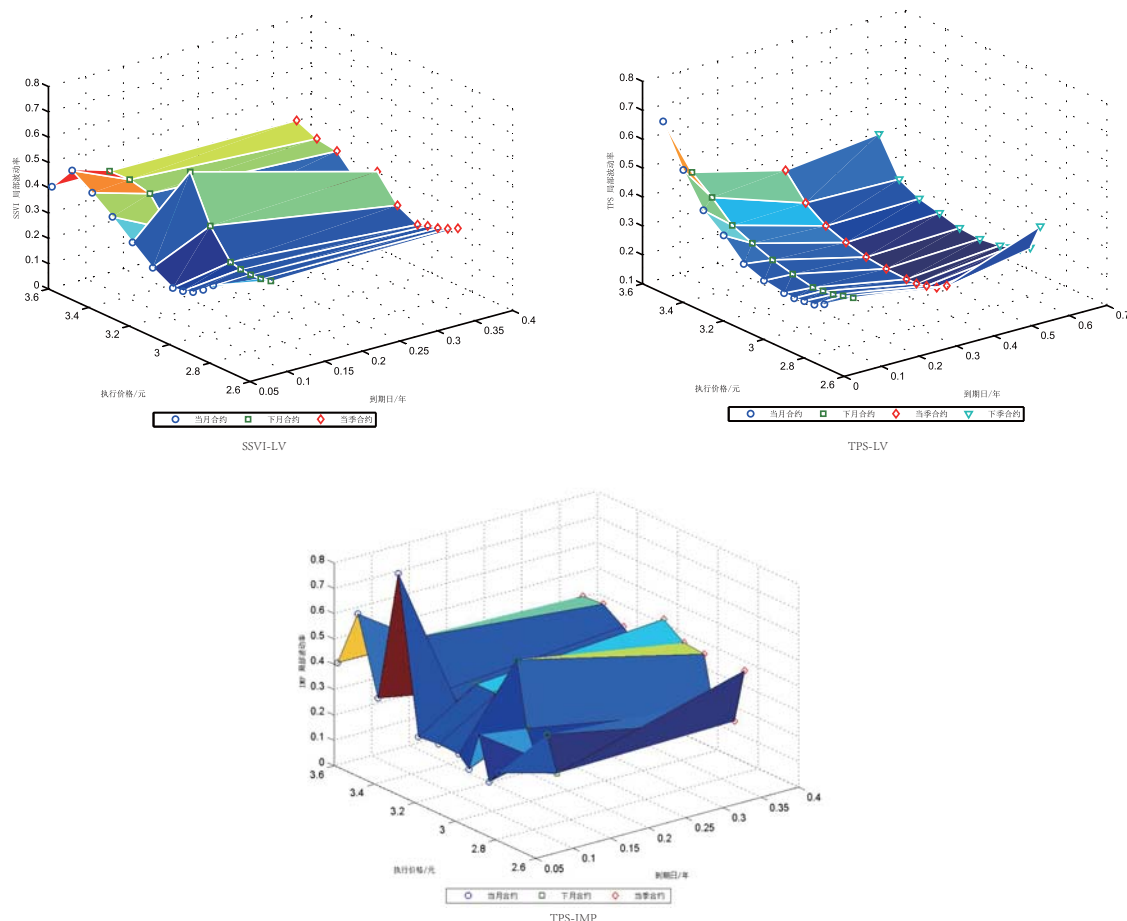


图 4 局部波动率拟合结果

## 2) 均方误差 (mean square error)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{T_i} \sum_{K_i} (C^{\text{model}}(K_i, T_j) - C^{\text{market}}(K_i, T_j))^2.$$

MPE 注重测量定价误差大小和方向, MSE 注重测量定价误差的幅度.

基于三种不同计算局部波动率的方法 (即 SSVI-LV, TPS-LV 以及 IMP-LV), 结合后向蒙特卡罗方法, 对 2016 年 1 月 4 日至 2018 年 2 月 28 日期间的 17124 个期权样本进行定价<sup>5</sup>. 表 5 列出了在各个样本类别中, 三种方法的样本内定价误差 (即用当日的期权数据估计参数和波动率, 并计算当日的期权价格). 通过比较可以得出以下几个结论:

1) 随着合约期限的增长, 定价误差越来越小 (尤其是对于虚值期权). 这是由于在对局部波动率处理时, 需要对边界情形进行插值, 外插引起的波动率误差会影响定价结果. 随着到期时间变长, 这种边界插值的影响会变小, 所以定价误差也会因此变小.

2) 虚值期权的定价误差普遍高于实值期权和平价期权. 但有一点例外, 当到期期限为当月时, TPS 和 SSVI 两种拟合方法对虚值期权的定价误差高于直接计算波动率的误差. 这是由于对于虚值期权来说, 交易到期日短, 拟合方法对波动率的拟合引起的定价误差大于由于局部波动率不光滑所引起的误差, 期限短的虚值期权, 若不对数据进行拟合, 定价的相对误差会更低.

3) TPS-LV 方法往往会高估对实值期权, 而低估了虚值期权的价格. SSVI-LV 方法在短期高估了期权价格, 而在长期低估了期权价格. 总体来看, 对于样本内定价, TPS-LV 方法的定价平均误差最小, 总体样本平均误差为 -4.01%, 整体低估了期权价格, 其次是 SSVI-LV 方法, 总体样本平均误差为 8.65%, 整体高估了期权价格. IMP-LV 的定价误差最大, 为 15.36%, 是 TPS-LV 方法的近四倍, 是 SSVI-LV 方法的近两倍.

5. 蒙特卡罗次数为 200 次.

表 5 上证 50ETF 看涨期权样本内定价误差

到期日	虚实程度 ( $K/S$ )	估计方法		
		SSVI-LV	TPS-LV	IMP-LV
当月合约	$\leq 0.97$	-0.0166 ( $3.67 \times 10^{-4}$ )	0.0047 ( $9.35 \times 10^{-5}$ )	-0.0065 ( $1.90 \times 10^{-4}$ )
	(0.97, 1.03)	0.1901 ( $1.59 \times 10^{-4}$ )	0.0412 ( $4.71 \times 10^{-5}$ )	0.1950 ( $1.93 \times 10^{-4}$ )
	$\geq 1.03$	0.3180 ( $3.04 \times 10^{-5}$ )	-0.2813 ( $6.76 \times 10^{-6}$ )	0.0379 ( $2.05 \times 10^{-4}$ )
下月合约	$\leq 0.97$	0.0153 ( $1.02 \times 10^{-2}$ )	0.0032 ( $1.28 \times 10^{-4}$ )	0.0376 ( $3.19 \times 10^{-3}$ )
	(0.97, 1.03)	0.1748 ( $8.30 \times 10^{-4}$ )	-0.0155 ( $5.28 \times 10^{-5}$ )	0.3140 ( $1.09 \times 10^{-2}$ )
	$\geq 1.03$	0.5035 ( $3.21 \times 10^{-4}$ )	-0.1304 ( $2.23 \times 10^{-5}$ )	0.8966 ( $1.63 \times 10^{-3}$ )
当季合约	$\leq 0.97$	-0.0234 ( $5.95 \times 10^{-3}$ )	0.0009 ( $2.57 \times 10^{-4}$ )	-0.0283 ( $1.12 \times 10^{-2}$ )
	(0.97, 1.03)	0.0793 ( $2.16 \times 10^{-3}$ )	-0.0206 ( $1.52 \times 10^{-4}$ )	0.2016 ( $1.01 \times 10^{-1}$ )
	$\geq 1.03$	-0.1144 ( $9.10 \times 10^{-4}$ )	-0.0457 ( $8.09 \times 10^{-5}$ )	0.3799 ( $2.05 \times 10^{-2}$ )
下季合约	$\leq 0.97$	-0.0699 ( $3.18 \times 10^{-2}$ )	0.0019 ( $4.76 \times 10^{-4}$ )	-0.0739 ( $2.65 \times 10^{-2}$ )
	(0.97, 1.03)	-0.0429 ( $1.82 \times 10^{-2}$ )	-0.0179 ( $3.16 \times 10^{-4}$ )	-0.0382 ( $1.06 \times 10^{-2}$ )
	$\geq 1.03$	0.0245 ( $1.18 \times 10^{-2}$ )	-0.0222 ( $2.82 \times 10^{-4}$ )	-0.0723 ( $2.19 \times 10^{-2}$ )
平均值		8.65% ( $6.89 \times 10^{-3}$ )	-4.01% ( $1.60 \times 10^{-4}$ )	15.36% ( $1.74 \times 10^{-2}$ )

注: 表 5 列出了 SSVI-LV 方法, TPS-LV, IMP-LV 方法分别对 17124 个全样本期权估值的 MPE 和 MSE (小括号中的数为 MSE)。

4) 从均方误差来看, 定价结果的稳定性由高到低排序为 TPS, SSVI, 直接法, IVS-LV 的均方误差分别比 TPS-LV, SSVI-LV 高了 1~2 数量级。

对模型定价误差的判断不能仅仅依赖于样本内定价误差的结果, 还需要对样本外定价误差进行分析。记估值日当天为  $t$ , 我们基于估值日前一天, 即第  $t-1$  天的隐含波动率, 估计 IMP, SSVI, TPS 模型的参数以及波动率, 从而估计第  $t$  天的期权价格<sup>6</sup>。表 6 列出了期权定价的样本外定价误差<sup>7</sup>。同样本内定价结果相同, 随着距到期时间的增长, 定价误差逐渐减少。对于不同到期日的期权合约, 虚值期权的定价普遍较高。同时随着到期时间的增长, SSVI-LV 方法对价格会出现低估现象, 而其他两种方法均对期权价格低估。根据样本平均误差来看, SSVI-LV 方法对期权价格的定价误差, 均方误差最小, TPS-LV 模型次之, IMP-LV 方法效果最差。IMP-LV 方法的全样本平均误差比 SSVI-LV 模型, TPS-LV 模型分别高了近五十倍, 三倍。

表 6 上证 50ETF 看涨期权样本外定价误差

到期日	虚实程度 ( $K/S$ )	估计方法		
		SSVI-LV	TPS-LV	IMP-LV
当月合约	$\leq 0.97$	0.1520 ( $2.38 \times 10^{-3}$ )	0.1756 ( $3.76 \times 10^{-3}$ )	0.1644 ( $2.28 \times 10^{-3}$ )
	(0.97, 1.03)	0.1776 ( $4.24 \times 10^{-4}$ )	0.2128 ( $3.72 \times 10^{-4}$ )	0.3819 ( $4.49 \times 10^{-4}$ )
	$\geq 1.03$	-0.1753 ( $6.88 \times 10^{-5}$ )	-0.1991 ( $5.67 \times 10^{-5}$ )	0.0756 ( $1.24 \times 10^{-4}$ )
下月合约	$\leq 0.97$	0.0995 ( $4.86 \times 10^{-3}$ )	0.2200 ( $5.65 \times 10^{-3}$ )	0.2639 ( $9.13 \times 10^{-3}$ )
	(0.97, 1.03)	0.1585 ( $1.94 \times 10^{-3}$ )	0.3476 ( $8.69 \times 10^{-3}$ )	0.6511 ( $1.57 \times 10^{-2}$ )
	$\geq 1.03$	0.1955 ( $3.77 \times 10^{-4}$ )	0.2748 ( $5.23 \times 10^{-4}$ )	1.1150 ( $1.02 \times 10^{-3}$ )
当季合约	$\leq 0.97$	-0.0590 ( $1.15 \times 10^{-2}$ )	0.2282 ( $1.39 \times 10^{-2}$ )	0.2455 ( $2.73 \times 10^{-2}$ )
	(0.97, 1.03)	-0.0441 ( $3.61 \times 10^{-3}$ )	0.3259 ( $6.71 \times 10^{-3}$ )	0.5610 ( $8.04 \times 10^{-3}$ )
	$\geq 1.03$	-0.1950 ( $1.87 \times 10^{-3}$ )	0.2084 ( $2.51 \times 10^{-3}$ )	0.8112 ( $1.01 \times 10^{-2}$ )
下季合约	$\leq 0.97$	-0.0999 ( $1.58 \times 10^{-2}$ )	0.0585 ( $1.88 \times 10^{-2}$ )	0.1904 ( $2.80 \times 10^{-2}$ )
	(0.97, 1.03)	-0.0895 ( $8.07 \times 10^{-3}$ )	0.0785 ( $1.19 \times 10^{-2}$ )	0.3563 ( $1.64 \times 10^{-2}$ )
	$\geq 1.03$	-0.0160 ( $8.55 \times 10^{-3}$ )	0.1029 ( $7.44 \times 10^{-3}$ )	0.4793 ( $1.11 \times 10^{-2}$ )
平均值		0.87% ( $4.95 \times 10^{-3}$ )	16.95% ( $6.69 \times 10^{-3}$ )	44.13% ( $1.08 \times 10^{-2}$ )

注: 表 6 列出了 SSVI-LV 方法, TPS-LV, IMP-LV 方法分别对 17124 期权样本样本外平均相对误差 (MPE), 小括号中的数为平均均方误差 (MSE)。

6. 由于 SSVI 模型对不同到期日的参数都不同, 这里在估计第  $t$  的期权价格时, 取的参数为第  $t-1$  天相同到期日类型的参数 (比如同为当月到期期权)。如果不在同种到期日类型的期权, 则去掉对此种期权价格的计算。

7. 用 IMP 方法进行样本外定价, 同 SVI, TPS 方法类似, 但是由于 IMP 方法没有未知参数, 因此略有不同。在本文中, 我们用估值日前一天的隐含波动率曲面作为已知波动率, 对其进行插值得到估值日当天的输入, 从而估计期权价格。

从样本内来看非参数的 TPS-LV 的误差远远小于直接法的 IMP-LV, 总体平均值显示样本内非参数方法显著优于直接法和参数法, 但是样本外并没有这么清晰的显著差异, 特别是短期的当月合约, 引起这种差异性的原因主要以下两点:

1) 样本内定价是根据当天的数据估计出参数和隐含波动率, 所以由于插值等原因造成的误差较小, 三种模型的差异较为显著. 而样本外定价是使用前一天的数据, 对估值日当天价格的预测, 在距离到期日时间较短时, 会由于外推、拟合等原因造成一定的误差, 因此三种方法的样本外定价效果差异不大 (三种方法的定价误差都偏大). 但是随着距离到期日时间的增长, 这种误差会逐渐减小, 参数以及非参数处理后得到的波动率估计值的优势会逐渐显现出.

2) 期限较短时, 对应的隐含波动率需要外推计算而得, 外推造成的误差会导致定价结果不准确.

此外, 评估局部波动率模型的对冲能力是风险管理中的重要因素. 期权价格在进行投资组合对冲风险管理中具有关键作用. 对冲即建立投资组合头寸来避免标的资产未来的变化. 考虑单一资产的自融资对冲策略, 对冲误差有如下定义 ([17, 40])

$$\epsilon_t = (C_{t+\Delta t}^{\text{market}} - C_t^{\text{market}}) - (C_{t+\Delta t}^{\text{model}} - C_t^{\text{model}}),$$

其中  $C_t^{\text{market}}$  指  $t$  时刻的期权市场报价,  $C_t^{\text{model}}$  指  $t$  时刻的期权模型价格,  $\delta t$  为时间间隔, 本文取一个交易日. 表 7 为三种模型对冲误差的均方误差根 (RMSE). 可以看出, 虽然三种方法的局部波动率对期权定价结果都存在系统性偏差, 但是模型的对冲效果说明他们的误差是比较稳定的. 同样样本外定价结果类似, SSVI-LV 的对冲效果最好, RMSE 为 0.0607, TPS-LV 的对冲效果次之, RMSE 为 0.0741, IMP-LV 的对冲误差最差, RMSE 为 0.1294.

表 7 对冲比较结果

到期日	虚实程度 ( $K/S$ )	估计方法		
		SSVI-LV	TPS-LV	IMP-LV
当月合约	$\leq 0.97$	0.0467	0.0582	0.0202
	(0.97, 1.03)	0.0174	0.0146	0.0202
	$\geq 1.03$	0.0118	0.0106	0.0202
下月合约	$\leq 0.97$	0.0667	0.0342	0.0792
	(0.97, 1.03)	0.0507	0.1269	0.0792
	$\geq 1.03$	0.0216	0.0294	0.0792
当季合约	$\leq 0.97$	0.0930	0.1126	0.2116
	(0.97, 1.03)	0.0564	0.0725	0.2116
	$\geq 1.03$	0.0403	0.0478	0.2116
下季合约	$\leq 0.97$	0.1276	0.1589	0.2065
	(0.97, 1.03)	0.0935	0.1281	0.2065
	$\geq 1.03$	0.1034	0.0957	0.2065
平均值		0.0607	0.0741	0.1294

6 结论与建议

本文基于局部率模型对我国上证 50ETF 期权进行定价研究, 给出了非参数方法计算局部波动率的显式形式, 并且比较了非参数, 参数, 以及未对隐含波动率建模, 直接通过市场隐含波动率数据计算局部波动率, 进一步定价的效果. 结果显示, 参数法, 非参数法建模的定价效果均优于直接使用市场隐含波动率建模的效果, 且对于样本内定价误差来说, 具有显式表达形式的非参数定价效果比参数法误差降低了一倍, 均方误差缩小了 1~2 个数量级.

通过本文的研究, 可以发现期权市场报价点的缺少会使得在计算波动率曲面时, 由于插值 (外推或者内插) 引起的误差会导致曲面的不光滑, 因而隐含波动率对执行价格维度或者时间维度的偏导数变化十分剧烈, 局部波动率关于这些因素的变化很敏感. 所以, 为了更好地构建隐含波动率曲面, 应该适当地增加期权报价点; 同时, 为了能对期权进行有效地套期保值, 仍应该继续加速我国其他的期权的上市, 进一步丰富期权的种类, 继续完善期权市场.

## 参考文献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637–654.
- [2] Wu P, Elliott R J. A simple efficient approximation to price basket stock options with volatility smile[J]. *Annals of Finance*, 2017, 13(1): 1–29.
- [3] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. *Journal of Finance*, 1987, 42(2): 281–300.
- [4] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatilities with applications to bond and currency options[J]. *Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327–343.
- [5] Wang X M, He X K, Bao Y, et al. Parameter estimates of Heston stochastic volatility model with MLE and consistent EKF algorithm[J]. *Science China (Information Sciences)*, 2018, 61: 042202:1–042202:17.
- [6] Dupire B. Pricing with a smile[J]. *Risk Magazine*, 1994, 7: 18–20.
- [7] Derman E, Kani I. Riding on a smile[J]. *Risk*, 1994, 7: 32–39.
- [8] Rebonato R. Volatility and correlation: The perfect hedger and the fox[M]. 2nd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [9] Hu B. Local volatility model with stochastic interest rate[D]. Toronto: York University, 2015.
- [10] Hagan P S, Kumar D, Andrew S L, et al. Managing smile risk[J]. *Wilmott*, 2002, 1: 84–108.
- [11] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. *Management Science*, 2002, 48(8): 1086–1101.
- [12] Chiang M H, Li C Y, Chen S N. Pricing currency options under double exponential jump diffusion in a Markov-modulated HJM economy[J]. *Review of Quantitative Finance & Accounting*, 2016, 46(3): 459–482.
- [13] Jacquier E, Polson N, Sokolov V. Sequential bayesian learning for Merton's jump model with stochastic volatility[J]. 2016, arXiv:1610.09750.
- [14] Dupire B. Model art[J]. *Risk*, 1993: 118–124.
- [15] Gatheral J, Jacquier A. Convergence of Heston to SVI[J]. *Quantitative Finance*, 2011, 11(8): 1129–1132.
- [16] Reisch D, Uwe W. FX Volatility smile construction[J]. *Wilmott*, 2012, 2012(60): 58–69.
- [17] Dumas B, Fleming J, Whaley R E. Implied volatility functions: Empirical tests[J]. *The Journal of Finance*, 1998, 53(6): 199–233.
- [18] Wang X M, Zhao Y L, Bao Y. Arbitrage-free conditions for implied volatility surface by Delta[J]. *The North American Journal of Economics and Finance*, 2018. doi: 10.1016/j.najef.2018.08.011.
- [19] Gatheral J. A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives[R]. Madrid: Global Derivatives & Risk Management, 2004.
- [20] Gatheral J, Jacquier A. Arbitrage-free SVI volatility surfaces[J]. *Quantitative Finance*, 2014, 14(1): 59–71.
- [21] Hull J. Options, futures, and other derivatives[M]. 9th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2009, 45(1): 9–26.
- [22] Fengler M. Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface[J]. *Quantitative Finance*, 2009, 9(4): 417–428.
- [23] Laurini M P. Imposing no-arbitrage conditions in implied volatilities using constrained smoothing splines[J]. *Applied Stochastic Models in Business & Industry*, 2015, 27(6): 649–659.
- [24] Glover J, Ali M M. Using radial basis functions to construct local volatility surfaces[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2011, 217(9): 4834–4839.
- [25] Buhmann M D, Dinew S, Larsson E. A note on radial basis function interpolant limits[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2018, 30(2): 543–554.
- [26] Duchon J. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces[C]// R.A.I.R.O. Analyse Numérique. 1976: 5–12.
- [27] Meinguet J. Multivariate interpolation at arbitrary points made simple[J]. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik Zamp*, 1979, 30(2): 292–304.
- [28] 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 跳跃自激发与非对称交叉回馈机制下的期权定价研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(1): 1–15.
- Zhu F M, Zheng Z X, Wu H Y. Option pricing for the dynamics of jump-diffusion model with jump self-exciting and asymmetric cross-feedback[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2018, 38(1): 1–15.
- [29] 官晓莉, 庄新田. 基于改进 PSO 算法的调和和稳定跳跃下的随机波动率模型期权定价与套期保值 [J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(11): 2765–2776.
- Gong X L, Zhuang X T. Option pricing and hedging for tempered stable jumps driven stochastic volatility models based on improved PSO algorithm[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2017, 37(11): 2765–2776.
- [30] 杨建辉, 李龙. 基于 SVR 的期权价格预测模型 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(5): 848–854.
- Yang J H, Li L. Option price forecasting model based on SVR[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2011, 31(5): 848–854.

- [31] 曹睿成. 上证 50ETF 期权定价模型的实证比较分析 [D]. 武汉: 华中师范大学, 2016.  
Cao R C. Empirical comparison of options pricing based on Shangzheng 50 ETF options[D]. Wuhan: Central China Normal University, 2016.
- [32] 宋焕雨. 上证 50ETF 期权定价方法的研究 [D]. 济南: 山东大学, 2015.  
Song H Y. Research on the pricing method of Shangzheng 50ETF option[D]. Jinan: Shandong University, 2015.
- [33] 杨霁. 基于随机波动模型的 50ETF 期权定价和波动率微笑研究 [D]. 成都: 西南财经大学, 2016.  
Yang A. Pricing and volatility smile research for 50ETF options based on stochastic volatility model[D]. Chengdu: Southwest University of Finance and Economics, 2016.
- [34] 陈思. 期权做市商波动率管理: 含波动率曲面建模与预测 [D]. 杭州: 浙江大学, 2016.  
Chen S. Option market volatility management: Modeling and forecasting of volatility surfaces[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016.
- [35] Kamp R V D. Local volatility modelling[D]. The Netherlands: University of Twente, 2009.
- [36] Wilmott P. Derivatives: The theory and practice of financial engineering[M]. New York: Wiley, 1998.
- [37] Andersen L B G, Brotherton-Ratcliffe R. The equity option volatility smile: An implicit finite-difference approach[J]. Journal of Computational Finance, 2000, 1(2): 5-38.
- [38] Brandimarte P. Numerical method in finance and economics: A MATLAB-based introduction[M]. 2nd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [39] Zeliade Systems. Quasi-explicit calibration of gatheral's SVI model[EB/OL]. [2018-06]. <http://www.zeliade.com/>.
- [40] Wahba G, Wendelberger J. Some new mathematical methods for variational objective analysis using splines and cross validation[J]. Monthly Weather Review, 1980, 108(8): 1122-1145.

## 附录 SVI 模型两阶段参数校准方法

通过变换  $y(x) = (x - m)/\sigma$ , 方程 (3) 可以转换为

$$w(x, t) = a + b(\rho y(x) + \sqrt{1 + y(x)^2}) = \hat{a} + dy(x) + cz(x),$$

其中  $\hat{a} = a$ ,  $d = \rho b\sigma$ ,  $c = b\sigma$ ,  $z(x) = \sqrt{y(x)^2 + 1}$ , 因而, 给定  $(\sigma, m)$ ,  $w(x, t)$  是关于  $\hat{a}, d, c$  的线性函数, Quasi-Explicit 法将整个优化问题分为参数为  $(\hat{a}, d, c)$  的内层优化和参数为  $(\sigma, m)$  的外层优化.

### 1) 内层优化问题

对于给定的  $(\sigma, m)$ , 优化的目标方程为:

$$P_{m, \sigma} = \min_{(\hat{a}, d, c) \in D} f_{x_i, v_i}(\hat{a}, d, c), \quad (8)$$

其中

$$f_{x_i, v_i}(\hat{a}, d, c) = \sum_{i=1}^n (\hat{a} + dy(x_i) + cz(x_i) - v_i)^2,$$

$x_i$  为对数值状态,  $v_i$  为实际市场中的隐含方差. 为了保证隐含波动率的无套利性,  $(\hat{a}, d, c)$  在以下无套利定义域中:

$$D = (\hat{a}, d, c) := \begin{cases} 0 \leq c \leq 4\sigma, \\ |d| \leq \min(c, 4\sigma - c), \\ 0 \leq \hat{a} \leq \max\{v_i\}. \end{cases}$$

目标函数 (8) 是一个光滑的凸函数, 因而对于每一个给定的  $(\sigma, m)$ , 存在全局最优解如下:

$$\begin{cases} c^* = \frac{C_2 A_1 - C_1 A_2}{B_1 A_2 - B_2 A_1}, \\ d^* = -\frac{C_1 + B_1 c^*}{A_1}, \\ \hat{a}^* = -\frac{d^*}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{c^*}{n} \sum_{i=1}^n z_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2, \\ A_2 = \sum_{i=1}^n y_i z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i, \\ B_1 = \sum_{i=1}^n y_i z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i, \\ B_2 = \sum_{i=1}^n (z_i)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^2, \\ C_1 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \omega_i \right) - \sum_{i=1}^n v_i y_i, \\ C_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n v_i z_i. \end{cases}$$

若  $(\hat{a}^*, d^*, c^*) \in D$ , 则上式即为唯一解; 若求出的解不在区域内, 则引入拉格朗日算子, 求函数在边界上的最小值. 即优化以下目标函数:

$$P_{m,\sigma} = \min_{(\hat{a}, d, c) \in D} F = \min \left( f_{x_i, \omega_i}(\hat{a}, d, c) + \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i(\hat{a}, d, c) \right),$$

其中  $r = 8$ ,  $g_i(\hat{a}, d, c)$  为区域  $D$ . 令  $\theta = (\hat{a}, d, c)$ , 则上述最优解满足以下条件

$$\begin{cases} \nabla_{\theta} f_{x_i, \omega_i} = 0, \\ \lambda_i g_i(\hat{a}, d, c) = 0, i = 1, 2, \dots, r, \\ g_i(\hat{a}, d, c) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r, \\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

2) 外层优化问题外层优化问题的参数为  $(\sigma, m)$ , 记  $(\hat{a}^*, d^*, c^*)$  为外层优化的解, 其目标方程为:

$$P = \min_{(m, \sigma)} \sum_{i=1}^n (w_{\sigma, m, \hat{a}^*, d^*, c^*}(x_i) - v_i)^2. \quad (9)$$

目标函数 (9) 是关于  $(\sigma, m)$  的非线性函数, 并且会出现很多局部最小值, 可使用 Nelder-Mead Simplex 算法引入模式搜索, 对初始点的选择包含对过去的记忆, 因而优化过程不会选取到与过去相同的初始点, 优于纯随机的初始点选择法, 能够得到相对稳健的参数拟合结果.