期货期权定价与现货期权定价的差异

上海期货交易所发展研究中心

奚炜

1. 引言

现货期权是以现货为标的资产的期权，期货期权是以期货为标的资产的期权。在交易所交易的期权主要有商品期权与金融期权两大类，其中所有的商品期权都是以商品期货作为标的资产的，因此都是期货期权；金融期权有的是以现货作为标的资产的（比如股票期权、指数期权、利率期权与外汇期权），因此属于现货期权范畴，有的是以期货作为标的资产的（比如指数期货期权、利率期货期权、外汇期货期权），因此属于期货期权范畴。

现货期权的标的资产是现货，期货期权的标的资产是期货，持有现货往往需要百分之百的资金，持有期货只需要很少一个比例的保证金。由于相同条件下的现货持有成本高于期货持有成本，因此相同条件下的现货认买期权价格要略高于期货认买期权价格，而现货认卖期权价格要略低于期货认卖期权价格。

此外，因为股票具有红利，股票期权在红利派发之前执行可能更有利，因此股票期权一般都是美式期权形式的；而期货不存在红利，期货期权只有在利率发生特大变动或者难于在期权市场平仓的时候，其提前执行才有意义，因此期货期权很多都是欧式期权形式的。

1973 年，Black F.与 Scholes M.推导出了基于标的资产的任何衍生证券的价格必须满足的微分方程（即著名的 Black-Scholes 微分方程），从而得出了现货期权定价模型。三年之后，Black F.在 Black-Scholes 微分方程的基础上，针对期货期权推导出了 Black 期货期权定价模型。但是 Black 期货期权定价模型中没有考虑期货交易中保证金与期货交易手续费所带来的影响。

2．Black 期货期权定价模型

期货期权的标的是期货，欧式期货认买期权允许买方在期权到期时有权利按照事先约定的执行价格买进期货。如果期权到期时的期货市场价格高于执行价

格，期权买方就执行期权从而通过低价买进期货获得收益，如果此时的期货市场价格低于或者等于执行价格，期权买方就放弃执行的权利。以F_T指代期权到期时的期货市场价格，以K指代期权合约事先约定的执行价格，则欧式期货认买期权的买方在期权到期日的收益是$\max[(F_T-K),0]$。

欧式期货认卖期权允许买方在期权到期时有权利按照事先约定的执行价格卖出期货。如果期权到期时的期货市场价格低于执行价格，期权买方就执行期权从而通过高价价卖出期货获得收益，如果此时的期货市场价格高于或者等于执行价格，期权买方就放弃执行的权利。以F_T指代期权到期时的期货市场价格，以K指代期权合约事先约定的执行价格，则欧式期货认卖期权的买方在期权到期日的收益是$\max[(K-F_T),0]$。

我们假定期货价格遵循如下过程：

$$dF=\mu_F F dt+\sigma F dw \qquad (1)$$

其中dw是维纳过程，且σ为常数。

构造避险证券组合Π如下：

$$-1:\text{期货期权}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial F}:\text{期货合约}$$

避险证券组合Π持有者从组合中的期货期权与期货合约得到的收益应该等于该避险证券组合价值的无风险收益，而 Black F.认为期货合约构建成本为零，因此有：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2=rf \qquad (2)$$

考虑欧式期货认买期权边界条件$\max[(F_T-K),0]$与欧式期货认卖期权边界条件$\max[(K-F_T),0]$，则欧式期货认买期权价格为

$$c=Fe^{-r(T-t)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (3)$$

而欧式期货认卖期权价格为

$$p=Ke^{-r(T-t)}[1-N(d_2)]-Fe^{-r(T-t)}[1-N(d_1)] \qquad (4)$$

此处，

$$d_1=\frac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{\tau}}，\qquad d_2=\frac{\ln(F/K)-(\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

而欧式现货认买期权价格为

$$c=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{5}$$

欧式现货认卖期权价格为

$$p=Ke^{-r(T-t)}[1-N(d_2)]-S[1-N(d_1)]$$

（6）

此处，

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{\tau}},\qquad d_2=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

3．考虑期货保证金与交易手续费影响的 Black 期货期权定价模型

在实际市场交易中，期货的购买不是一个纯粹信用交易，在购买期初就需要缴纳一定量的保证金（假定保证金率为m_1），虽然交易所在期货交割或者平仓时会归还保证金给投资者，但投资者实际上损失了保证金的利息。同时，进行期货交易还需要缴纳一定量的手续费（假定手续费率为m_2）。

由于期货期权价格$f=f(F,t)$是F与t的函数，根据 Itô 定理，它满足：

$$df=(\frac{\partial f}{\partial F}\mu F+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2)dt+\frac{\partial f}{\partial F}\sigma F dw \tag{7}$$

构造避险证券组合Π如下：

$$-1:\text{期货期权}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial F}:\text{期货合约}$$

因为期货合约的初始价值为零，所以该避险证券组合的价值为：

$$\Pi=-f \tag{8}$$

定义Δf与ΔF分别为期货期权价格f与期货价格F在时间Δt内的变化。在

Δt 时间内，该避险组合的持有者从期货期权中获取的收益为 $-\Delta f$ 。考虑期货保证金的利息损失与交易手续费，则该避险组合的持有者在 Δt 时间内从期货合约中获取的收益为：

$$\frac{\partial f}{\partial F}\Delta F-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|m_1 rF-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|\frac{m_2}{T-t}F \tag{9}$$

定义 $\Delta \mathrm{H}$ 为该避险组合的持有者在在 Δt 时间内的资产变化，则有：

$$\Delta H=\frac{\partial f}{\partial F}\Delta F-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|m_1 rF-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|\frac{m_2}{T-t}F-\Delta f \tag{10}$$

式（3）与（9）的离散形式如下：

$$\Delta F=\mu_F F\Delta t+\sigma F\Delta w$$

$$\Delta f=(\frac{\partial f}{\partial F}\mu F+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial F}\sigma F\Delta w$$

其中 $\Delta w=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ， ε 是标准正态分布的随机抽样。则有：

$$\Delta H=(-\frac{\partial f}{\partial t}-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|(m_1 r+\frac{m_2}{T-t})F-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2)\Delta t$$

因为这是一个无风险的证券组合，因此下列等式是成立的：

$$\Delta H=r\Pi\Delta t$$

而 $\Pi=-f$ ，因此有：

$$[-\frac{\partial f}{\partial t}-\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|(m_1 r+\frac{m_2}{T-t})F-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2]\Delta t=-rf\Delta t$$

则有：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|(m_1 r+\frac{m_2}{T-t})F+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2=rf \tag{11}$$

令 F_T 为认买期权到期时的期货价格， K 为认买期权的执行价格，则欧式期货认买期权持有者在到期时实现的收益是 $\max[(F_T-K),0]$ ，且 $\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|=\frac{\partial f}{\partial F}$ ，则求解欧式期货认买期权的偏微方程式为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{\partial C}{\partial F}(m_1 r+\dfrac{m_2}{T-t})F+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial F^2}\sigma^2 F^2=rC \\ C_T=\max[(F_T-K),0] \end{cases} \tag{12}$$

求解上式得到欧式期货认买期权价格为：

$$C=Fe^{(m_1-1)r(T-t)+m_2}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{13}$$

此处，

$$d_1=\frac{\ln(\dfrac{F}{K})+m_2+(m_1 r+\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2=\frac{\ln(\dfrac{F}{K})+m_2+(m_1 r-\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

令 F_T 为认卖期权到期时的期货价格，K 为认卖期权的执行价格，则欧式期货认卖期权持有者到期实现的收益是 $\max[(K-F_T),0]$，且 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial F}\right|=-\dfrac{\partial f}{\partial F}$，则求解欧式期货认卖期权的偏微方程式为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}-\dfrac{\partial P}{\partial F}(m_1 r+\dfrac{m_2}{T-t})F+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial F^2}\sigma^2 F^2=rP \\ P_T=\max[(K-F_T),0] \end{cases} \tag{14}$$

求解上式得到欧式期货认卖期权价格为：

$$P=Ke^{-r(T-t)}[1-N(d_2^{'})]-Fe^{(1-m_1)r(T-t)-m_2}[1-N(d_1^{'})] \tag{15}$$

此处，

$$d_1^{/}=\frac{\ln(\dfrac{F}{K})-m_2-(m_1 r-\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2^{'}=\frac{\ln(\dfrac{F}{K})-m_2-(m_1 r+\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$