

Link submit: <https://open.kattis.com/problems/stirlingsapproximation>

Tóm tắt đề: cho công thức tính sấp xỉ của $n! \sim S(n) = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$

Yêu cầu tính và đưa ra $\frac{n!}{S(n)}$

Lời giải: Bài này đối với clb chúng ta vừa dễ vừa khó, dễ vì đề bài đưa luôn công thức không cần phải nhớ hay gì cả =)), khó là clb mình xưa nay hơi yếu phần toán học. Đối với bài này cần 1 chút kiến thức liên quan tới các công thức logarit, chỉ cần nắm được các công thức cơ bản với 1 chút biến đổi ta sẽ có lời giải ngay lập tức.

Note: Vì sao được cho công thức rồi mà không thể code ngay được? Đối với công thức kia chúng ta thấy sự xuất hiện của $n!$, e^n , n^n với n có độ lớn khoảng 10^5 thì không có kiểu dữ liệu nào trong C++ có thể lưu được (và các ngôn ngữ khác nếu có xử lý số lớn thì máy chấm cũng không đủ bộ nhớ để chấm). Vì thế cần biến đổi công thức về dạng có thể dùng các biến trong C++ để biểu diễn được.

Nhắc lại một số kiến thức cơ bản (các số trong các công thức dưới ngầm hiểu là số nguyên không âm)

$$\log_a x = b \text{ tương đương } a^b = x \quad (1)$$

$$\log_e x = \ln(x) \text{ (logarit cơ số tự nhiên)} \quad (2)$$

$$\ln\left(\frac{m}{n}\right) = \ln(m) - \ln(n) \quad (3)$$

$$\ln(mn) = \ln(m) + \ln(n) \quad (4)$$

$$\ln(a^b) = b * \ln(a) \quad (5)$$

Từ (1) và (2) ta có $e^{\ln(x)} = x$ (6)

Áp dụng vào để giải bài này thế nào?

Ta sẽ từng bước biến công thức từ không thể biểu diễn trong C++ thành có thể biểu diễn được.

Cái chúng ta cần tính là: $RES = \frac{n!}{S(n)}$

Theo công thức (6) ta hoàn toàn có thể tính $e^{\ln(RES)}$ thay vì tính RES. Lúc này ta chuyển bài toán về tính $\ln(RES)$.

Theo công thức (3) ta có: $\ln(RES) = \ln(n!) - \ln(S(n))$

(*) Theo công thức (4) ta có:

$$\ln(n!) = \ln(1 * 2 * ... * n) = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n)$$

(**) Áp dụng tương tự (3), (4) với S(n) ta biến đổi được:

$$S(n) = \ln(\sqrt{2\pi n}) + \ln(n^n) - \ln(e^n)$$

Tiếp tục áp dụng (5) ta biến đổi được:

$$S(n) = \ln(\sqrt{2\pi n}) + n * \ln(n) - n * \ln(e)$$

$$= \ln(\sqrt{2\pi n}) + n * \ln(n) - n \text{ (vì } \ln(e) = 1, \text{ change my mind :D)}$$

Từ (*) và (**) => Problem solved, như mọi người thấy công thức của chúng ta tới thời điểm này hoàn toàn có thể biểu diễn trong C++ mà không lo tràn số rồi, sau đây là một số hàm hệ thống của C++ giúp ta có thể hoàn thành nốt phần còn lại của bài này:

1. Hàm exp(x): cho giá trị của e^x

2. Hàm log(x): cho giá trị của $\ln(n)$

3. Hàm $\text{acos}(x)$: cho giá trị arcsin của $x \Rightarrow \text{acos}(-1) = \text{PI}$

Chương trình tham khảo:

<https://ideone.com/eeLbk4>

(chương trình này output không giống đề bài nhưng vẫn đúng, vì đề bài cho phép sai số không quá $1e-8$)

Output

For each test case, print out $n!/S(n)$ with an absolute error at most 10^{-8} .