Билет №72

Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = p(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем:

$$z = \omega^n = p^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда имеем $p^n = r,\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ То есть $\theta = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$ и $p = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при k = n имеем:

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{n} + 2\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + 2\pi)\right) =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n})\right) = \omega_0\ (k = 0)$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Корни n-ой степени из единицы

Пусть n – любое натуральное число, отличное от нуля.

Определение. Комплексное число ω, удовлетворяющее условию $\omega^n = 1$, называется **корнем n-ой степени из единицы**.

Теорема. Существует точно n различных корней n-ой степени из единицы и все они получаются по формуле:

$$\omega_k = cos\frac{2\pi k}{n} + i\,sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

Следствие. Точки комплексной плоскости, изображающие корни n-ой степени из единицы, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, причём одна из вершин находится в точке (0, 1).

Определение. Комплексное число ω называется первообразным корнем n-ой степени из единицы ($n \geq 1$), если множество чисел $\{\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}\}$ является множеством всех решений уравнения $z^n = 0$.