Вопрос 8. Системы линейных уравнений: метод обратной матрицы

Рассмотрим в общем виде систему уравнений AX = B с невырожденной квадратной матрицей A. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Домножим слева обе части на A^{-1}. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Отсюда $EX = A^{-1}B$ и, следовательно, $X = A^{-1}B$.

Решим этим методом следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Обозначим:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ **X**= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид: AX = B.

Найдем определитель $|\mathrm{A}|$=5, так как $|\mathrm{A}|\neq 0$, то матрица A-невырожденная, и существует обратная матрица.

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X} = A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Т. е. решение системы **(4;2;1)**.

В конце решения системы можно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы. При этом они должны обратиться в верные равенства.