Формула Тейлора.

Определение. Пусть функция $f(z)$f(z) определена в окрестности точки x_0x0 и имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$(n−1) порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$.f(n)(x0). Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.x→x0.

То есть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0.$$

Многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ - многочлен Тейлора. $r_n = f(x) - P_n(x)$ - остаточный член n-го порядка формулы Тейлора.

При $x_0 = 0$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)-$ формула Маклорена.

Формулы Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ для основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}); \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad x \to 0.$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \bar{o}(x^5) \quad x \to 0$$

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + \overline{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

Примеры.

Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функции

1.e^{5x-1}

Решение.

$$e^{5x-1} = \frac{e^{5x}}{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(5x)^k}{k!e} + o(x^n).$$

2. $\sin(2x+3)$

Решение.

$$\sin(2x+3) = \sin 2x \cos 3 + \sin 3 \cos 2x =$$

$$\cos 3 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin 3 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.

Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0) = g(0) = 0$. Предполагая, что функции $f(x)$ и $g(x)$ можно разложить по формуле Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в разложении этих функций:

$f(x) = ax^n + o(x^n),\ a \neq 0,\quad g(x) = bx^m + o(x^m),\ b \neq 0.$

Если $m = n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b};$$

Если $n > m$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

если же $m > n$,то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Примеры.

Вычислить пределы, используя формулу Тейлора.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^2}{2}-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

{jumi[*4]}

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-1+\frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24}.$$