Вопрос 56. Непрерывность и точки разрыва функции

Пусть *f(x)* определена в некоторой окрестности точки x_0

<u>*Определение 1:*</u> функция называется непрерывной в точке , если:

1) Функция определена в самой точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки;
2) Существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$;
3) Указанный предел равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x) \qquad (1)$$

<u>*Замечания:*</u>

1) В силу теоремы о существовании предела, равенство (1) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (2)$$

   Условие (2) - определение непрерывности функции в точке на языке односторонних пределов
2) Равенство (1) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

<u>*Говорят*</u>: если функция непрерывно в точке x_0, то знак предела и функцию можно поменять местами

<u>*Определение 2 (на языке $\varepsilon - \delta$)*</u>:
Функция называется непрерывный в точке x_0 если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0$ такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Пусть $x, x_0 \in D(f)$ (x_0 – фиксированная, x – произвольная)
Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ приращение аргумента;

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ - приращение функции в точке x_0.

<u>*Определение 3 (геометрическое (на языке приращений))*</u>
Функция f(x) называется непрерывный в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствуют бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{x\to 0} \Delta f(x_0) = 0;$$

Пусть функция f(x) определена на промежутке $[x_0;\ x_0 + \delta)$ (на промежутке $(x_0 - \delta;\ x_0]$)
<u>*Определение*</u>: функция называется непрерывной в точке x_0 справа (слева), если справедливо равенство:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0), \ (\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0))$$

Очевидно что f(x) непрерывна в точке x_0 ⇔ f(x) непрерывна в точке x_0 справа и слева.

<u>Свойства непрерывных функций</u>

Пусть X = $\{x_0\}$ или X = (a;b) или X = $[a; b]$

1) Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X.
2) Если функции f(x) и g(x)$\neq 0$, $\forall x \in X$, то частное - непрерывная на множестве X функция
3) Пусть f: X→ $Y, \varphi: Y \to Z$. Если f(x) непрерывна на X, $\varphi(x)$ - непрерывна на Y, то сложная функция непрерывна на $\varphi(f(x))$

Свойства 1, 2, 3 следуют из свойств пределов функций

4) Основные элементарные функции непрерывны всюду в своей области определения
   Если функция непрерывна всюду в области определения, то её называют ***непрерывной***

5) Элементарные функции непрерывны (следствие свойств 1-4)

Точки разрыва и их классификация

Определение: если функция определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывный в этой точке, то f(x) называется разрывной в точке x_0, а саму точку x_0 называют точкой разрыва функции.

Пусть x_0точка разрыва функции f(x)

Определение: точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если f(x) имеет в этой точке конечные пределы слева и справа.

Если при этом пределы равны, то точка $x_0 -$ точка устранимого разрыва, в противном случае - точка скачка.

Определение: точка x_0 называется точкой разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов функции f(x) в этой точке равен ∞ или не существует.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1 (Вейерштрасса)

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[a; b]$

Тогда

1) f(x) ограничена на $[a; b]$

2) f(x) принимает на $[a; b]$ свое наибольшее и наименьшее значения

значение функции m= f(x_1) называется наименьшим, если

$$m \leq f(x), \forall x \in D(f)$$

значение функции M= f(x_2) называется наибольшим, если

$$M \leq f(x), \forall x \in D(f)$$

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

Теорема2 (Больцано-Коши)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков то на (a;b) существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в 0

Теорема 3 (О промежуточных значениях)

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $\gamma -$ число, заключённое между f(a) и f(b). Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = \gamma$.