

Билет 54.

Раскрытие неопределенностей

Выражения, где невозможно непосредственное применение теорем о пределах, называют непосредственными выражениями (неопределенностями).

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \times \infty; (+\infty - (-\infty))$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n = 0$, то выражение x_n/y_n называют неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление пределов для неопределённых выражений называют раскрытием неопределенностей.

Типы неопределенностей:

- 1) Предел дробнорациональной последовательности (отношение двух многочленов).

Для раскрытия неопределенности необходимо числитель и знаменатель разделить на n в наивысшей степени.

$$\text{Пример: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 2n + 1}{n^3 - 4n + 5} \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} = 0$$

- 2) Предел дробно-иррациональной последовательности.

Для раскрытия такого вида неопределенности домножим на сопряженное выражение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)}) &= [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n(n-1)})(n + \sqrt{n(n-1)})}{n + \sqrt{n(n-1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n(n-1)}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 3) Вычисление пределов с помощью эталонных

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{если } |q| < 1 \\ \infty & \text{если } |q| > 1 \\ 1 & \text{если } |q| = 1 \\ \text{не существует, если } q = -1 \end{cases}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1; a > 0$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Пример: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 4^n}{7 \cdot 5^n + 2^n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \{5^n\}, \{4^n\}, \{2^n\}$, - Б.Б. И последовательность $\{5^n\}$ возрастает быстрее, то числитель и знаменатель делим на эту последовательность. =>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n}{5^n} - \frac{4^n}{5^n}}{7 \cdot \frac{5^n}{5^n} + \frac{2^n}{5^n}} = \frac{1}{7}$$

4) Предел показательно-степенной последовательности.

$$(1 + x)^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n, \text{ где } m - \text{любое число}$$