Знакоопределённость квадратичной формы. Критерий Сильвестра

Критерий Сильвестра

Нет, не Сильвестра Сталлоне :) Сначала напомню, что такое *угловые миноры* матрицы. Это [определители](#) $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ которые «разрастаются» из её левого верхнего угла:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и последний из них в точности равен определителю матрицы.

Теперь, собственно, **критерий**:

1) если ВСЕ угловые миноры матрицы формы больше нуля, то она **определена положительно**, если они *не отрицательны* – то **неотрицательно**.

2) если миноры знакочередуются, причём, первый минор отрицателен, то квадратичная форма является **отрицательно определённой**. Если нечётные миноры *неположительные*, а чётные *неотрицательные*, то форма определена **неположительно** – осмысливаем, сегодня прямо какой-то день скороговорок :)

Проанализируем угловые миноры матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$:

$\delta_1 = 1 > 0$, и это сразу говорит нам о том, что форма не определена отрицательно.

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

Вывод: все угловые миноры больше нуля, значит, форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$ определена положительно.

Есть разница с методом собственных чисел? ;)

Запишем матрицу формы $Q(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_2x_1$ из *Примера 1*:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

первый её угловой минор $\delta_1 = 0$, а второй $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0$, откуда следует, что форма знакопеременна, т.е. в зависимости от значений x_1, x_2, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Впрочем, это и так очевидно.

Возьмём форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$ и её матрицу из *Примера 2*:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

тут вообще без озарения не разобраться. Но с критерием Сильвестра нам всё нипочём:
$\delta_1 = 3 > 0$, следовательно, форма точно не отрицательна.

$\delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 < 0$, и точно не положительна *(т.к. все угловые миноры должны быть положительными)*.