<u>Теорема 1</u>. **(о предельном переходе в равенстве)** Если две функции принимают одинаковые значения в окрестности некоторой точки, то их пределы в этой точке совпадают.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

<u>Теорема 2.</u> **(о предельном переходе в неравенстве)** Если значения функции *f(x)* в окрестности некоторой точки не превосходят соответствующих значений функции *g(x)* , то предел функции *f(x)* в этой точке не превосходит предела функции *g(x)*.

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

<u>Теорема 3</u>. Предел постоянной равен самой постоянной.

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

Доказательство. f(x)=c, докажем, что $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Возьмем произвольное ε>0. В качестве δ можно взять любое положительное число. Тогда при $|x - a| < \delta$

$$|c - c| = 0 < \varepsilon.$$

<u>Теорема 4.</u> <u>Функция</u> не может иметь двух различных пределов в одной точке.

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} f(x) = B.$$

По <u>теореме о связи предела и бесконечно малой функции</u>:

f(x)-A=$\alpha(x)$ - б.м. при $x \to a$,

f(x)-B=$\beta(x)$ - б.м. при $x \to a$.

Вычитая эти равенства, получим: $-\begin{cases} f(x)-A = \alpha(x), \\ f(x)-B = \beta(x), \end{cases}$

B-A=$\alpha(x) - \beta(x)$.

Переходя к пределам в обеих частях равенства при $x \to a$, имеем: *B-A*=0, т.е. *B=A*. Получаем противоречие, доказывающее теорему.

<u>Теорема 5.</u> Если каждое слагаемое алгебраической суммы функций имеет предел при $x \to a$, то и алгебраическая сумма имеет предел при $x \to a$, причем предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов.

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x) - h(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} h(x).$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$, $\lim_{x \to a} h(x) = C$.

Тогда, по теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-A=\alpha(x), \\ g(x)-B=\beta(x), \\ h(x)-C=\gamma(x), \end{array}\right\}$$ где $\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)$ - б.м. при $x \to a$.

Сложим алгебраически эти равенства:

$f(x)+g(x)-h(x)-(A+B-C)=\underbrace{\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)}$,

где $\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)$ б.м. при $x \to a$.

По теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)-h(x)) = A+B-C = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x).$$

Теорема 6. Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то и произведение имеет предел при $x \to a$, причем предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 7. Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют предел при $x \to a$, причем $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, то и их частное имеет предел при $x \to a$, причем предел частного равен частному пределов.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},\quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Первый замечательный предел

1

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Определение

Предел отношения синуса к его аргументу равен единице в случае, когда аргумент стремится к нулю.

Применение первого замечательного предела на практике

Пример

Задание. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$

Решение. Воспользуемся заменой и первым замечательным пределом.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} \left[\frac{0}{0}\right] \left\| \begin{array}{c} 4x = t \\ t \to 0 \\ x = \frac{t}{4} \end{array} \right\| = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{4}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \sin t}{t} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$$

Ответ. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2$

Пример

Задание. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg x}{5x}$

Решение. Разложим тангенс на синус и косинус и воспользуемся свойствами пределов.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg x}{5x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{5x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{5x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$$

Ответ. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg x}{5x} = \frac{1}{5}$

Следствия из первого замечательного предела

1° $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg x}{x} = 1$

2° $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

3° $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg x}{x} = 1$

4° $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

здесь е - число Эйлера.

Пример

Задание. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{5+x}\right)^{2x}$

Решение. Подставим $x=\infty$, получим неопределенность и для решения предела воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{5+x}\right)^{2x}\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x}{5+x}-1\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x-5-x}{5+x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{5+x}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{5+x}\right)^{\frac{5+x}{-3}}\right]^{2x\cdot\frac{-3}{5+x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6x}{5+x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x}{5+x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{5/x+1}}=e^{\frac{-6}{0+1}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{5+x}\right)^{2x}=\frac{1}{e^6}$

Следствия из второго замечательного предела

1° $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$

3° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

4° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

5° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$

6° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$