16. Смешанное произведение векторов. Основные свойства смешанного произведения векторов. Условие компланарности векторов. Объем параллелепипеда. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов.

Смешанное произведение представляет собой скаляр.

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$,$\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется **число,** равное скалярному произведению вектора а на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и с,т.е ($\bar{a}$, |$\bar{b}$,$\bar{c}$|).

Свойства(законы) смешанного произведения:

1.Сочетательный закон следует из геометрического смысла(объем параллелепипеда) смешанного произведения:

$$\left.\begin{aligned} V&=(\bar{a}\times\bar{b})*\bar{c};\\ V&=\bar{a}*(\bar{b}\times\bar{c}); \end{aligned}\right\}\quad \text{т.е. } (\bar{a}\times\bar{b})*\bar{c}=\bar{a}*(\bar{b}\times\bar{c})$$

2.Закон круговой переместительности:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})$$

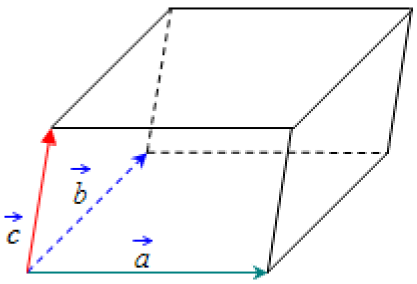
3.Распределительный закон:

$(\bar{a}_1+\bar{a}_2)$c$=\bar{a}_1\bar{b}\bar{c}+\bar{a}_2\bar{b}\bar{c}$

Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

Смешанное произведение равно нулю, если в нем два множителя одинаковы: $\bar{a}\bar{a}\bar{c}$=0

ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.



Геометрический смысл смешанного произведения: если тройка векторов $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$правая, то их смешанное произведение равно объему параллелепипеда построенного на этих векторах: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=V$. В случае левой тройки $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$смешанное произведение указанных векторов равно объему параллелепипеда со знаком минус: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-V$.

Из выше сказанного можно сделать вывод, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$и $\bar{c}$равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{парал}} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$$

ВЫРАЖЕНИЕ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ПЕРЕМНОЖАЕМЫХ ВЕКТОРОВ.

Пусть в декарт. послед. системе коорд. заданы векторы:

$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}$ $\quad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$

$\bar{c} = x_3 \cdot \bar{i} + y_3 \cdot \bar{j} + z_3 \cdot \bar{k}$

Смешанное произв. векторов

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z_1$$

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$