Вопрос 20

Диагонализируемость линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы.

Определение: Оператор φ n-мерного пространства L_n называется диагонализируемым, если в L_n существует базис, в котором матрица линейного оператора диагональная.

Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем

$$\varphi(x) = \lambda * x,$$

то число λ называется собственным значением оператора φ, а вектор x называется собственным вектором оператора φ, относящийся к собственному значению λ.

Свойства собственных векторов:

1. Лемма 3: Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.

2. Лемма 4: Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ, относящееся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к тому же собственному значению.

Следствия Леммы 4:

а) Каждому собственному значению λ соответствует бесконечное множество собственных векторов.

б) Если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ присоединить нулевой вектор, то получаем подпространство пространства L. Это пространство называется собственным подпространством оператора (L_λ).

3. Лемма 5: Собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, линейно независимы.

Следствия Леммы 5:

а) Линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L_n, не может иметь более n собственных значений.

б) В пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы оператора.

<u>Теорема 6.</u> Матрица А оператора φ в базисе $l_1, l_2, \ldots, l_n$ имеет диагональный вид, только тогда, когда все базисные векторы l_i являются СВ этого оператора.

<u>Критерий диагонализируемости оператора:</u> оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве L_n существует базис СВ оператора.

<u>Нахождение СЗ и СВ линейного оператора</u>

СЗ – собственные значения, СВ – собственные векторы

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n, x – СВ оператора φ, относится к собственному значению λ, т.е. φ(x)=λφ.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – базис L_n , А – матрица линейного оператора φ в базисе $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Получим:

1) x – СВ оператора φ, относится к СЗ λ тогда и только тогда, когда его координаты $l_1, l_2, \ldots, l_n$ являются решением (нетривиальным) СЛОУ (А-Хε)Х=0.
2) Подпространство L_λ является конечномерным, а его базис образуют СВ $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$, координатами которых являются решения из ФСР СЛОУ (А-λε)Х=0.

Матрица А-λε называется характеристической матрицей оператора φ (матрицы А).

Определитель характеристической матрицы, т.е. det(А-λε) – многочлен степени n относительно переменной λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом оператора φ (матрицы А), а его корни – характеристическими корнями оператора φ (матрицы А).

Таким образом, число λ является СЗ оператора φ тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем.