Критерий совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Выпишем основную матрицу этой системы A и расширенную матрицу \overline{A} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} , \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы :

$$r(A) = r(\overline{A})$$

Причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных $r(A) = r(\overline{A}) = n$ и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных $r(A) = r(\overline{A}) < n$.