22. РАНГ МАТРИЦЫ

Базисный минор – минор M_k матрицы А, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы А более высокого порядка равны нулю.

Ранг матрицы А – порядок ее базисного минора.

Ранг матрицы А равен кол-ву ненулевых строк матрицы после приведения её после элементарных преобразований к ступенчатому виду.

[r(A) или rang (A)]

Методы нахождения ранга матрицы:

I. Метод окаймляющих миноров

Пусть M_s – минор порядка S. Окаймляющий минор для минора M_s –любой минор порядка S+1, содержащий минор M_s

ТЕОРЕМА 1. Если в матрице А есть минор M_k, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры = 0, то ранг равен k.

Найти ранг матрицы можно по след схеме:

1) Находим в матрице минор M_k, отличный от нуля, где $k \geq 1$
2) Ищем его окаймляющий минор M_{s+1}, отличный от нуля. Если такого минора не существует, то ранг матрицы равен k.

II. Метод эл преобразований

Элементарные преобразования:
1)умножение любой строки(столбца) на $\alpha \neq 0$
2)прибавление к и-той строке(столбцу) к-той строки (столбца), умноженной на $\alpha \neq 0$
3)перестановка и-той и к-той строки(столбца)
4)вычеркивание одной из двух пропорц. или равных строк (столбцов)
5)вычёркивание нулевых строк

Матрица В называется эквивалентной матрице А, если она мб получена из матрицы А путем эл. преобр. **[A ∽ B]**
ТЕОРЕМА 2. Эквивалентные матрицы имеют равные ранги
ТЕОРЕМА 3. Любая матрица А эквивалентна некоторой треуг. или трапециевид. Матрице, не содержащей нулевых или пропорц. Строк. Причем эта треуг или трап. Матрица мб получена из А эл преобр только строк.

Схема на нахождения ранга:
1) С помощью эл преобр строк получаем для матрицы А эквивалентную или трап. матрицу В
2) Находим в матрице В базисный минор и определяем ранг матрицы В и А

ТЕОРЕМА 1. Произвольную невырожденную матрицу n-порядка с помощью эл преобр можно привести к Е матрице

ТЕОРЕМА 2. Если к Е матрице применить те же эл преобр, только строками, с помощью которых матрица А была приведена к Е матрице, то в результате получим матрицу, которая является обратной к матрице А.

Определитель Вандермонда – определитель n-го порядка из вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j),$$

где x_1, x_2, x_n – любые числа, и вычисляется по формуле: