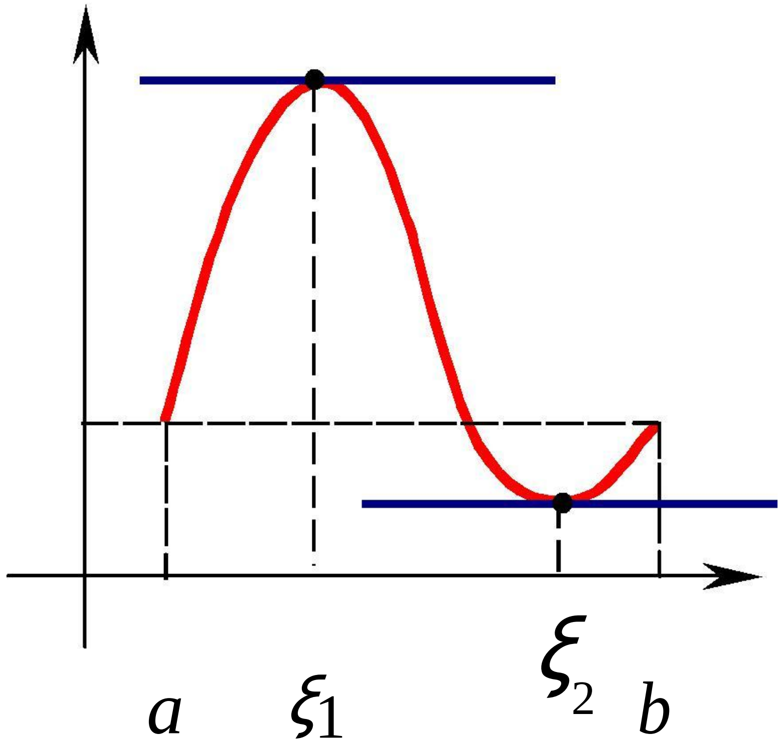
Основные теоремы дифференциального исчисления

ТЕОРЕМА 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Если $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.

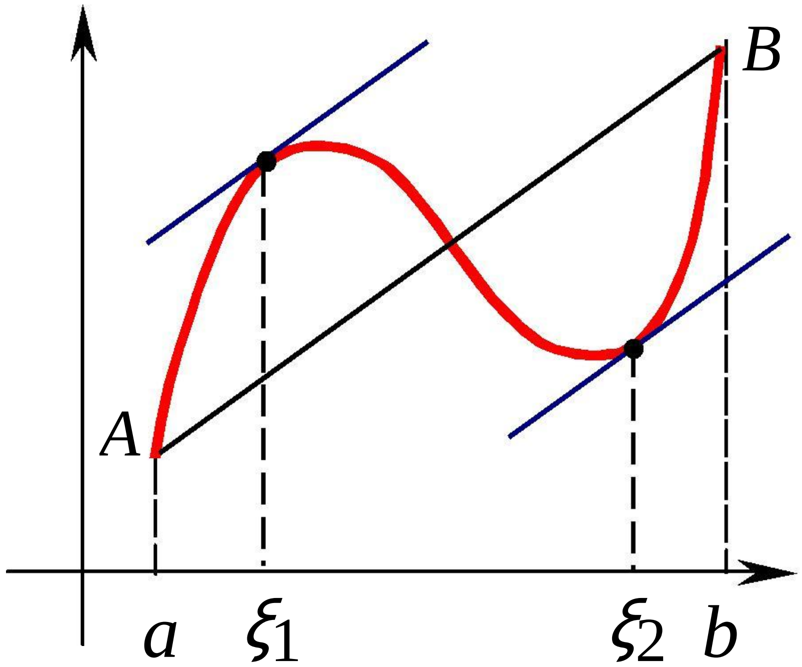
ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа.



Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме 2 условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей AB*.

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)\,. \tag{3}$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Функция $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *постоянное значение* C $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \quad x \in (a; b)$.

ТЕОРЕМА 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ *и* $\phi(x)$ *непрерывны на* $[a; b]$ *и дифференцируемы на* $(a; b)$, *причем* $\phi'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\phi(b) - \phi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$