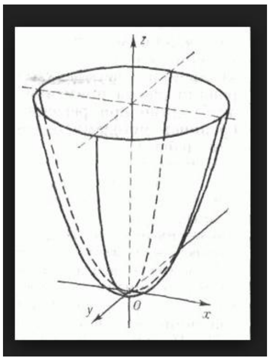
БИЛЕТ 42. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения поверхностей второго порядка (конус второго порядка, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид).

ЭЛЛЛИПИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z;$$

a > 0, b > 0, называется эллиптическим параболоидом.



Свойства эллиптического параболоида.

1. Эллиптический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что $z \geq 0$ и принимает сколь угодно большие значения.
2. Эллиптический параболоид обладает
   - осевой симметрией относительно оси Oz,
   - плоскостной симметрией относительно координатных осей Oxz и Oyz.
3. В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz, получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Ox и Oy – [парабола](#).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z;$$

a > 0, b > 0, называется гиперболическим параболоидом.

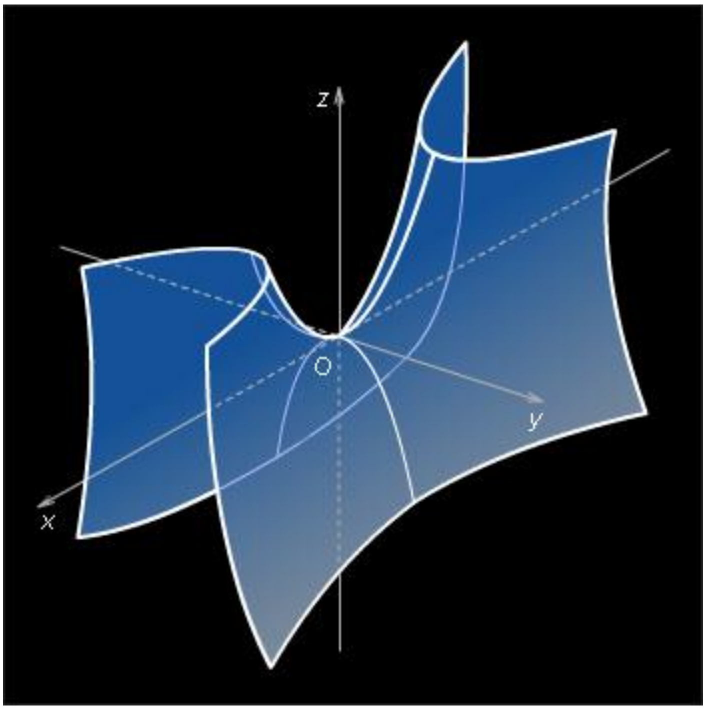


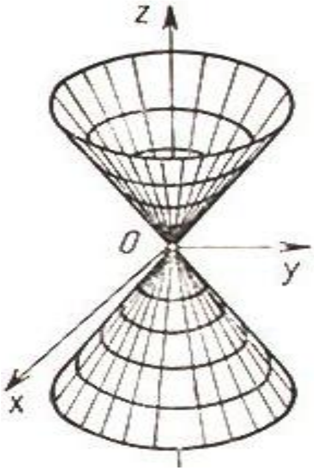
Рисунок 5.7.3

Свойства гиперболического параболоида.

1. Гиперболический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что z – любое число.
2. Гиперболический параболоид обладает
   - осевой симметрией относительно оси Oz,
   - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.
3. В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси координат Oz, получается гипербола, а плоскостями, ортогональными осям Ox и Oy, – парабола.
4. Гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вершина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, а ветви направлены противоположно, причем их плоскости взаимно перпендикулярны.

5. Конус 2–го порядка

6. **Конусом 2 –ого порядка** называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением



Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

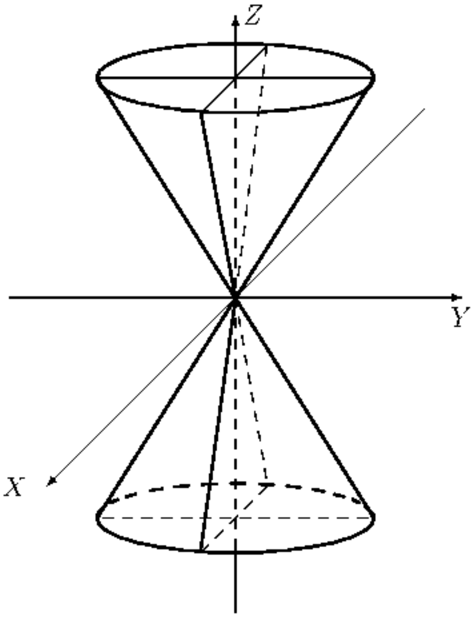
a = b - конус вращения (прямой круговой).

Сечения конуса плоскостями: в плоскости, пересекающей все прямолинейные образующие, - эллипс; в плоскости, параллельной одной прямолинейной образующей, - парабола; в плоскости, параллельной двум прямолинейным образующим, - гипербола; в плоскости, проходящей через вершину конуса, - пара пересекающихся прямых или точка (вершина).

\\

+г

7. где a, b, c>0 — параметры конуса.Это уравнение называется каноническим уравнением конуса, а система координат, в которой конус описывается каноническим уравнением, называется канонической.
8. Исследуем форму конуса с помощью метода сечений (рис. 1).



9. Рис. 1

10. Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости XOY :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

11. При любых значениях $h \neq 0$ в сечении получается эллипсы сполуосями $a^* = a\,|\,h\,|/c$ и $b^* = b\,|\,h\,|/c$, т.е.при возрастании h полуоси эллипсов неограниченно возрастают. При $h = 0$ в сечении получается точка — начало координат.

12. Аналогично исследуются сечения конуса плоскостями, параллельными координатным плоскостям XOZ и YOZ . В частности,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

13. т.е. в сечении координатной плоскостью y = 0 получается пара прямых, пересекающихся в начале координат. Аналогично

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

14. т.е. в сечении координатной плоскостью x = 0 также получается пара прямых, пересекающихся в начале координат.