Вопрос 36

Прямая и плоскость в пространстве

1. *Угол* φ *между прямой* $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ определяется из соотношения:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

2. *Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости* удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой ($t\in R$):

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt; \end{cases}$$

координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

3. В пространстве возможны три случая *взаимного расположения прямой и плоскости*:

1) если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то *прямая пересекает плоскость*;

2) если $Am+Bn+Cp=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то *прямая параллельна плоскости*;

3) если $Am+Bn+Cp=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то *прямая лежит в плоскости*.

Пример 4.1. Установить взаимное расположение прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{1} \text{ и плоскости } 2x-y+2z-4=0\,.$$

Решение. Прямая проходит через точку $M_0(1;0;-1)$, направляющий вектор прямой $\bar{s}=(1;4;1)$. Нормальный вектор плоскости $\bar{n}=(2;-1;2)$. Найдем значение выражения

$$Am+Bn+Cp=1\cdot 2+4\cdot(-1)+1\cdot 2=0.$$

Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней.

Проверим условие принадлежности прямой плоскости: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=2\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot(-1)+(-4)=-4\neq 0.$ Условие не выполняется, поэтому прямая не принадлежит плоскости. Таким образом, данные прямая и плоскость параллельны и не имеют общих точек.

Ответ: прямая и плоскость параллельны.

Пример 4.2. Найти угол между прямой и плоскостью, заданных уравнениями: $\begin{cases}2x+3y+3z-1=0,\\ x+2y+2z+5=0\end{cases}$ и $2x-y+2z+4=0.$

Решение. В данном случае прямая задана общими уравнениями, как линия пересечения двух плоскостей. Направляющий вектор этой прямой найдем по формуле (6).

Итак,

$$\bar{s}=\left(\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right),\ \bar{s}=(0;-1;1).$$

Таким образом, $m=0, n=-1, p=1.$ Нормальный вектор заданной плоскости $\bar{n}=(2;-1;2),$ т. е. $A=2, B=-1, C=2.$

Тогда $\sin\varphi=\dfrac{|2\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и,

следовательно, $\varphi=45^\circ.$

Ответ: $45^\circ.$