<u>Вопрос 18.</u> Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимая и линейно независимая система векторов.

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется вектор $\bar{a}_1 * a_1 + \bar{a}_2 * a_2 + \ldots + \bar{a}_m * a_m$

Систему векторов называют линейно зависимой, если из этих векторов можно составить нулевую линейную комбинацию, причем хотя бы один из коэффициентов должен быть отличен от нуля, т.е:

Говорят, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ линейно зависимы, если существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не все равные нулю и такие, что линейная комбинация $\bar{a}_1 * a_1 + \bar{a}_2 * a_2 + \ldots + \bar{a}_m * a_m =$ нулевому вектору (0, над ним ¯)

Если это равенство возможно только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ линейно независимые

ЛЕММА 1. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные

Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости)

Максимально линейно зависимое множество векторов в $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – базис этого множества

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ образуют базис, если:

1) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ - линейно независимы
2) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ - линейно независимы для любого $\bar{a}$ из $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$)

ТЕОРЕМА 1. Любые два базиса множества $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) состоят из равного числа векторов

ЛЕММА 2 (о базисе $V^{(3)}$ и $V^{(2)}$).

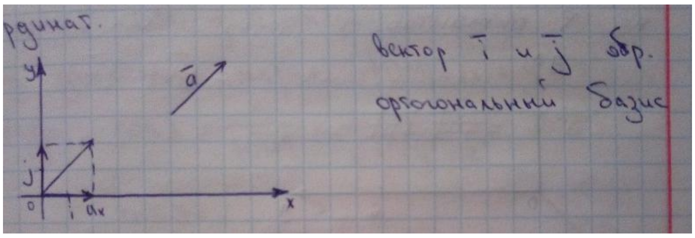
1) Базисом множества $V^{(2)}$ являются любые два неколлинеарных вектора
2) Базисом множества $V^{(3)}$ являются любые три некомпланарных вектора

СЛЕДСТВИЕ 1 (критерий линейной независимости 2-ух и 3-ех ненулевых векторов)

1) Два ненулевых вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны
2) Три ненулевых вектора независимы тогда и только тогда, когда они компланарны

ТЕОРЕМА 2 (о базисе).

Каждый вектор множества $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом



Разложение векторов по базису:

Пусть дан вектор и декартовая система координат. Совместим $\bar{a}$ с началом координат.

$a_x * i$ – составляющая данного вектора на оси Ох

$a_y * j$ – составляющая на Оу

Т.е. вектор $\bar{a}$ равен сумме составляющих на оси Ох и на оси Оу

По теореме Пифагора $a^2 = a_x^2 + a_y^2 \Rightarrow a = \sqrt{(ax^2 + ay^2)}$