49. Свойства сходящихся последовательностей

Число $a \in R$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in N$ (зависящее от ε) такое, что при $\forall n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся (сходится к а), в противном случае – расходящейся.

Пусть $x_0 \in R,\ \ \varepsilon > 0$. Интервал $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки x_0 (геом. определение ε-окрестности точки). Обозначим: $U(x_0,\ \varepsilon)$. Имеем: $U(x_0,\ \varepsilon) = \{x \in R|\ |x - x_0| < \varepsilon\}$ (алгебр. определение ε-окрестности точки).

$|x_n - a| < \varepsilon <=> -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon;$ $\qquad\qquad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу а, если вне любой ε-окрестности точки а имеется лишь конечное число членов этой последовательности.

Свойства сходящихся последовательностей:

Т.1. Сходящаяся последовательность имеет только 1 предел.

Т.2 (необходимое условие сходимости последовательности). Сходящаяся последовательность ограничена.

Т.3 (достаточное условие сходимости последовательности). Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Т.4. Предел постоянной этой последовательности равен этой постоянной, т.е. $\lim_{n\to\infty} c = c$.

Т.5 (о промежуточной последовательности). Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и последовательность $\{z_n\}$ такова, что для $\forall n \in N$ имеет место неравенство $x_n \le z_n \le y_n$, то $\{z_n\}$ также сходится к тому же числу, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Опр-ие: Последовательность, состоящая из подмножества членов данной последовательности $\{x_n\}$ в порядке возрастания их номеров, называется подпоследовательностью данной последовательности $\{x_n\}$.

Т.6. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу а, то любая её подпоследовательность сходится к тому же числу.

Следствие. Если две подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к различным пределам, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

Т.7. Две последовательности, отличающиеся между собой на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости, т.е. одновременно сходятся или одновременно расходятся. При этом, если они, сходятся, то их пределы равны.

Т.8 (арифметические операции над пределами). Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Ca$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$, если $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$