5.Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы к невырожденной матрице.

- *Обратной* к матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1}, такая, что $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$.

1) Если матрица A имеет обратную, то A и A^{-1} – *квадратные одного порядка.*

2) Если обратная матрица существует, то она *единственная.*

3) Если матрица A имеет обратную, то её определитель *отличен от нуля* (такая квадратная матрица называется *невырожденной)*

Теорема: Пусть A – квадратная матрица. Матрица A имеет обратную только тогда, когда её определитель $|A|$ отличен от нуля. Причём обратная матрица A^{-1} может быть найдена по *формуле*:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot S^T}$$, где **S** – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы *A,* т.е:

$$\mathbf{S} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{matrix}$$

Матрица S^T – *союзная (присоединённая, взаимная) для матрицы А.*

Свойства для обратной матрицы:

1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
5. $(A^{-1})^{m} = A^{-m}$

Пример: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2 \neq 0$ => обратная матрица существует.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = |0| = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -|2| = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -|1| = -1$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -|1| = -1$

$A^{-1}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Матричные уравнения:

1) $AX=B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (дописываем слева) $(A^{-1}AX=A^{-1}B)$
2) $XC=B \Rightarrow X=BC^{-1}$ (дописываем справа)
3) $AXC=B \Rightarrow X=A^{-1}BC^{-1}$, где A,B,C – известные матрицы; X – неизвестная матрица