Методы решений систем линейных уравнений

1. Метод Крамера

Теорема: Если в СЛУ число уравнений m и число неизвестных n совпадает и определитель матрицы A не равен 0, то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле

$Xi = \frac{\Delta i}{\Delta}, (i = 1,2, \dots , n)$ *-формулы Крамера*

Где Δ *- определитель матрицы А,* Δi *– определитель, полученный из определителя заменой его i-ого столбца на столбец свободных членов.*

2.Матричный метод (метод обратной матрицы)

Нахождение реш. по формуле $X=A^{-1}*B$ назыв. матричным методом реш. сист.

3. Метод Гаусса(метод исключения переменных)

Этот метод заключается в том, что с помощью элементарных преобразований сист. уравн. приводится к ступенчатой сист., из которой последовательно, начиная с последних(по номеру переменных) находятся все остальные переменные.

Пример: Решить СЛУ 3-мя методами:

$$\begin{cases} 2x1 - x2 + x3 = 6 \\ -x1 + 2x2 - x3 = -2 \\ x1 + x2 - 2x3 = 2 \end{cases}$$

1.Исследуем на совместность

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ +2I \\ -2I \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -II \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

r(A*) =3 r(A*)=r(A)⇒по т. Кронекера-Капелли сист. совместна

r(A) = 3

n(кол-во неизвестных)=3=rang ⟹сист.имеет единственное решение

по правилу Крамера:

$$Xi = \frac{\Delta i}{\Delta}, i = 1,2,3$$

$$\Delta = |A| = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -6$$

$$\Delta 1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -18 \quad X_1=3$$

$$\Delta 2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -6 \quad X_2=1$$

$$\Delta 3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -6 \quad X_3=1$$

2.Метод Гаусса

1)прямой ход метода гаусса(сист.→матрица)

2) из матрица сост. Систему(обратный ход метода Гаусса)

$$\begin{cases} 2x1 - x2 + x3 = 6 \\ 3x2 - x3 = 2 \\ -4x3 = -4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 \\ 3x - 1 = 2 \\ 2x1 - x2 + 1 = 6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x3 = 1 \\ x2 = 1 \\ x1 = 3 \end{cases}$$

Ответ:(3;1;1)

3.Метод обратной матрицы

$X=A^{-1}*B$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}*B$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}*\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}*\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$

$A_{12}=(-1)^{1+2}*\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$

$A_{13}=(-1)^{1+3}*\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$

$A_{21}=(-1)^{2+1}*\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1$

$A_{22}=(-1)^{2+2}*\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5$

$A_{23}=(-1)^{2+3}*\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$

$A_{31}=(-1)^{3+1}*\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1$

$A_{32}=(-1)^{3+2}*\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1$

$A_{33}=(-1)^{3+3}*\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$

$A^{-1}=\frac{1}{-6}*\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}*\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}*\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}*\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$