1. Функция одной переменной. Определение предела функции в точке по Коши. Число b называется пределом функции y = f(x) при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при всех x ≠ a, таких, что |x– a | < δ, выполняется неравенство | f(x) – a | < ε.

Определение предела функции в точке по Гейне. Число b называется пределом функции y = f(x) при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любой последовательности {x_n}, сходящейся к a(стремящейся к a, имеющей пределом число a), причем ни при каком значении n x_n ≠ a, последовательность {y_n = f(x_n)} сходится к b.

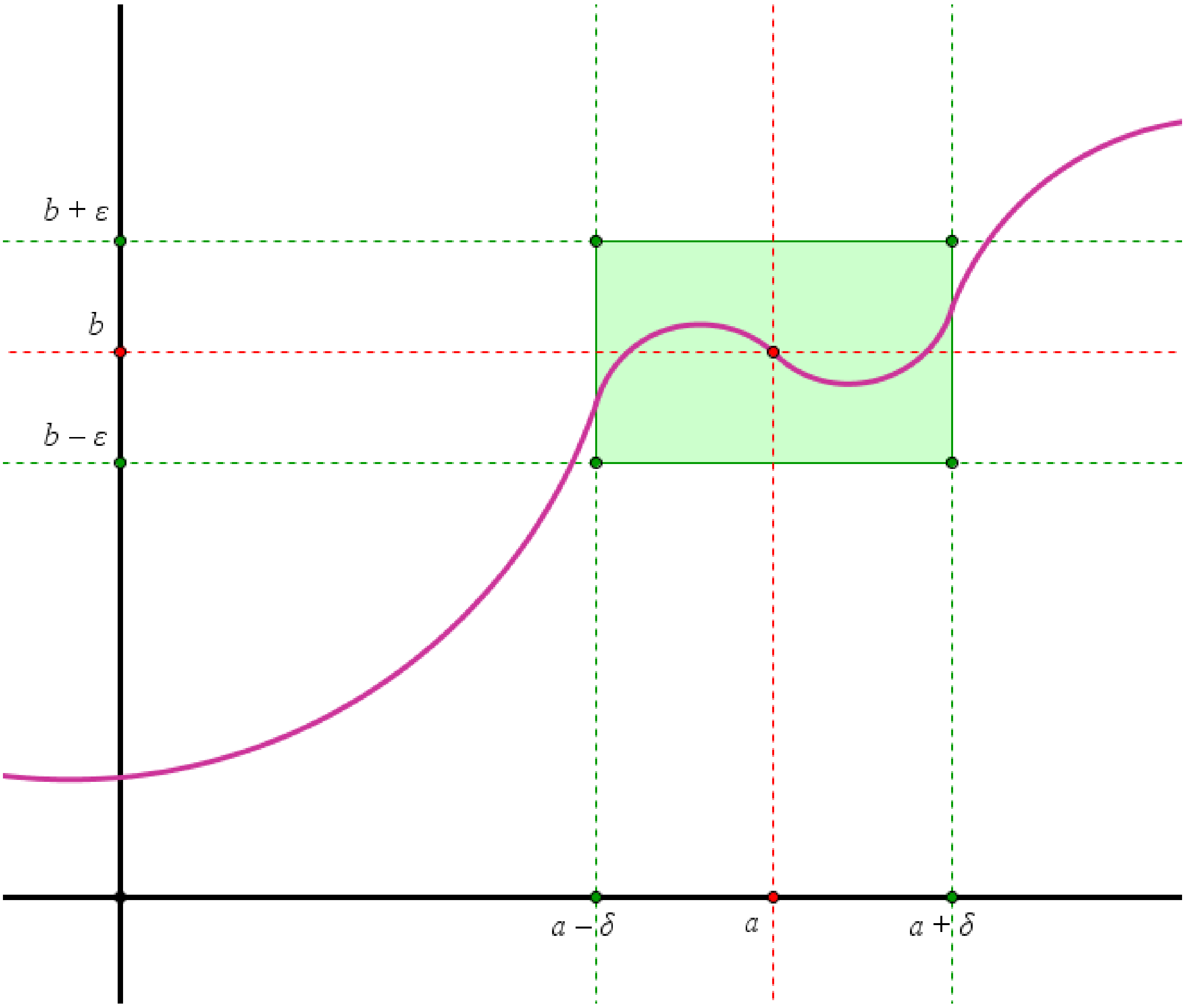
Данные определения предполагают, что функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны: если число b служит пределом по одному из них, то это верно и по второму.

Указанный предел обозначается так:

$$b = \lim_{x \Rightarrow a} f(x).$$

Геометрически существование предела функции в точке по Коши означает, что для любого числа ε> 0 можно указать на координатной плоскости такой прямоугольник с основанием 2δ > 0, высотой 2ε и центром в точке (a; b), что все точки графика данной функции на интервале (a– δ; a + δ), за исключением, быть может, точки M(a; f(a)), лежат в этом прямоугольнике – см. рис.:



Критерий Коши существования предела функции в точке. Число b – предел функции y = f(x) при x, стремящемся к a, тогда и только тогда, когда для любого числа ε > 0 можно указать такую проколотую δ-окрестность точки a, что для любых чисел x_1 и x_2, содержащихся в этой окрестности, выполняется неравенство $| f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$.

Пусть $\lim\limits_{x \Rightarrow a} f(x) = b, \ \lim\limits_{x \Rightarrow a} g(x) = c.$ ***Тогда существуют пределы суммы и произведения функций f(x) и g(x), а в случае c ≠ 0 – и частного этих функций, причём:***

$$\lim_{x \Rightarrow a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = b \pm c; \qquad \lim_{x \Rightarrow a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = bc; \qquad \lim_{x \Rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Если определена сложная функция F(f(x)), причём $\lim\limits_{x \Rightarrow a} f(x) = b, \ \lim\limits_{y \Rightarrow b} F(y) = c,$ ***то существует и предел сложной функции, причём***

$$\lim_{x \Rightarrow a} F\left(f(x)\right) = \lim_{y \Rightarrow b} F(y) = c.$$

В теории пределов доказываются следующие два утверждения.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \Rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x \Rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$ ***где е – знаменитое иррациональное число, е = 2,71...***

При вычислении пределов для раскрытия неопределённостей, связанных с дифференцируемыми функциями, часто используют правило Лопиталя.

2. Функция многих переменных. Пусть функция у = $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ определена в некоторой выколотой окрестности точки $P(p_1; p_2; \ldots; p_n)$, принадлежащей области n–мерного пространства, состоящей из точек $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Число b называется пределом функции у = $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ при X, стремящейся к Р, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное *число* ***δ, что в точках Х выколотой окрестности точки Р, задаваемой неравенствами***

$$\begin{cases} |x_1 - p_1| < \delta, \\ |x_2 - p_2| < \delta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |x_n - p_n| < \delta \end{cases}$$

выполняется неравенство $| f(x_1;x_2; \ldots;x_n) - b | < \varepsilon$.