Линейные операторы и их матрицы в заданном базисе

Пусть даны векторные пространства F и G. Функция A, сопоставляющая каждому вектору из F определённый вектор из G, называется ***линейным оператором****, действующим из F в G, если для любых векторов x и x′ из F и для любых чисел α и α′ выполнено условие*

$$A(\alpha x + \alpha' x') = \alpha\, A(x) + \alpha A(x) + \alpha' A(x\,)' \qquad (1)$$

Отметим сразу, что условие (1) эквивалентно совокупности двух условий:

- для любых x, x′ из F

$$A(x + x') = A(x) + A(x') \qquad (2)$$

- для любого x из F и любого числа α

$$A(\alpha x) = \alpha A(x) \qquad (3)$$

Укажем также, что, наряду с обозначением A(x) для значения оператора A на векторе x употребляется обозначение без скобок: Ax.

Естественно, пространство F называется областью определения оператора A, а множество

$$A(F) = \{y\colon y \in G, \exists x \in F\colon y = Ax\} \qquad (4)$$

− областью значений этого оператора.

Рассмотрим квадратную матрицу A с элементами a^j_k:

$A = (a^j_k)$.

Эта матрица называемся ***матрицей линейного оператора*** в заданном базисе e1, e2,..., en.

Записи линейного оператора используется при заданном базисе e1, e2,..., en матричная форма записи: y = Ax, причем, если x = (x1, x2,..., xn), то y = (y1, y2,..., yn), где y^j, j = 1, 2,...,n, определяются с помощью соотношений , а элементы a^j_k матрицы A вычисляются по формулам .

Замечание 1. Если оператор A нулевой, то все элементы матрицы A этого оператора равны нулю в любом базисе, т.е. A — нулевая

матрица.

Замечание 2. Если оператор A единичный, т. е. A = I, то матрица этого оператора будет единичной в любом базисе. Иными словами, в этом случае A = E, где E — единичная матрица. В дальнейшем единичную матрицу мы будем обозначать также символом I.

Теорема. Пусть в линейном пространстве V задан базис e1, e2,..., en, и пусть $A = (a^j_k)$ — квадратная матрица, содержащая n строк и n столбцов. Существует единственный линейный оператор A, матрицей которого в заданном базисе является матрица A.

Доказательство. Докажем сначала существование оператора A. Для этой цели определим значения Ae_k этого оператора на базисных векторах e_k с помощью соотношения, полагая в этом соотношении a^j_k равными соответствующим элементам заданной матрицы A. Значение оператора A на произвольном векторе x Є V.

Замечание 3. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n, A и B — отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{e_k\}$ пространства V. Из доказательства *теоремы* следует, что матрице A + λB, где λ — некоторое число, отвечает линейный оператор A + λB (напомним, что A, B и A + λB принадлежат L(V, V)).