БИЛЕТ 22

Приведение кф к каноническому виду

Теорема: Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.

$$\lambda_1 y^2_1 + \ldots + \lambda_r y^2_r$$

Где $\lambda_1, .., \lambda_r$ -некоторые постоянные числа,r - ранг матрицы квадротичной формы (кф) $f(x_1,..,x_n)$

Метод собственных векторов

1)Найти собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, для матрицы кф

2)Найти собственные векторы ,соответственные собственным значениям

3)найти векторы $e_1 \ldots, e_n$,ортонормированные для $h_1, \ldots, h_n$

4)Выполнить преобразование кф $f(x_1,..,x_n)$ с помощью матрицы B,столбцами которой являются векторы $e_1, \ldots, e_n$

Пример

$$4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$$

Решение

$$A=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix};\qquad \begin{vmatrix}4-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)-4=0$$
$$4-4\lambda-\lambda+\lambda^2-4=0$$
$$-5\lambda+\lambda^2=0$$
$$\lambda(-5+\lambda)=0$$
$$\lambda_1=0 \quad \text{или} \quad -5+\lambda=0$$
$$\lambda_2=5$$

1) $\lambda_1=0$

$$(A\,|\,\bar{0})=\left(\begin{array}{cc|c}4&2&0\\2&1&0\end{array}\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\2&1&0\end{array}\right)^{\times(-1)}=\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{array}\right)$$

$$\bar{h}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\qquad 2a_1+a_2=0$$
$$a_2=-2a_1\qquad a_1=1,\ a_2=-2\ \Rightarrow\ \bar{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2=5$

$$(A-\lambda_2E\,|\,\bar{0})=\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\2&-4&0\end{array}\right)^{\times(2)}=\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{array}\right),\quad \bar{h}_2=\begin{pmatrix}a_3\\a_4\end{pmatrix}$$

$$-a_3+2a_4=0$$
$$a_3=2a_4\qquad a_4=1,\ a_3=2\ \Rightarrow\ \bar{h}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_1\cdot\bar{h}_2=2+(-2)=0$$

$$|\bar{h}_1|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\qquad |\bar{h}_2|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix},\quad \bar{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt5}y_1+\frac{2}{\sqrt5}y_2\\x_2=-\frac{2}{\sqrt5}y_1+\frac{1}{\sqrt5}y_2\end{cases}$$

$$4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2\qquad A_1=B^T\cdot A\cdot B$$

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\\frac{10}{\sqrt5}&\frac{5}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{25}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&5\sqrt5\end{pmatrix}\qquad 5\sqrt5\,y_2^2$$

$$\frac{\cancel{25}^{\,5}\sqrt5}{\cancel{5}}=5\sqrt5$$

Ответ: $5\sqrt5\,y_2^2$.