65.ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ФОРМУЛАМ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Формула Тейлора

Одной из основных задач матанализа является задача приближения(аппроксимации) ф-ции в окрестности заданной точки. Наиболее простыми ф-циями являются многочлены. Возникает вопрос аппроксимации заданной ф-ции в окрестности рассматриваемой точки многочленом некоторой степени.

Теорема Тейлора: Пусть y=f(x) определена и раз дифференцируема в некоторой окрестости точки x_0. Тогда в указанной окрестности имеет место формула

$$f(x) = [f\left(x_0 + \frac{f'(x_0)}{1!} * (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} * (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f'^{(n)}(x_0)}{n!} * (x - x_0)^n\right] + R_n(x)$$

Формула Тейлора, где $R_n(x)$ – остаточный член

$R_n(x) = \frac{f'^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1}, x_0 < \varepsilon < x$ – остаточный член в форме Лагранжа

$R_n(x) = \mathrm{o}((x - x_0)^n)$ – остаточный член в форме Пеано

Запись $\mathrm{o}((x - x_0)^n)$ означает, что $\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{o}((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$, т.е. ф-ция $\mathrm{o}((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$ является ф-цией более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$

Если в формуле Тейлора x_0=0, то получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} * x + \frac{f''(0)}{2!} * x^2 + \cdots + \frac{f'^{(n)}}{n!} * x^n + R_n(x)$$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Основные разложения в *ряд Маклорена* некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty), \qquad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty), \qquad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty), \qquad (3)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad m \in R \quad (-1 < x < 1). \qquad (4)$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (4), называется *биномиальным*.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (-1 < x \le 1), \qquad (5)$$

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (-1 \le x \le 1), \qquad (6)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots (-1 < x < 1). \qquad (7)$$

Разложение (7) является частным случаем разложения (4) при $m = -1$.