Пусть в пространстве даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Отложим от произвольной точки *O* векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$. *Углом* между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший из углов $\angle AOB$. Обозначается $(\bar{a};\bar{b})=\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi$.

Рассмотрим ось *l* и отложим на ней единичный вектор $\bar{e}$ (т.е. вектор, длина которого равна единице).

Под углом между вектором $\bar{a}$ и осью *l* понимают угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{e}$.

Итак, пусть *l* – некоторая ось и $\bar{a}=\overline{AB}$ – вектор.

Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось *l* соответственно точек *A* и *B*. Предположим, что A_1 имеет координату x_1, а B_1 – координату x_2 на оси *l*.

Тогда *проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось *l* называется разность $x_1 - x_2$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overline{AB}$ на эту ось.

Проекцию вектора $\bar{a}$ на ось *l* будем обозначать $np_l\bar{a}=np_l\overline{AB}$.

Ясно, что если угол между вектором $\bar{a}$ и осью *l* острый, то $x_2 > x_1$, и проекция $x_2 - x_1 > 0$; если этот угол тупой, то $x_2 < x_1$ и проекция $x_2 - x_1 < 0$. Наконец, если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен оси *l*, то $x_2 = x_1$ и $x_2 - x_1 = 0$.

Таким образом, проекция вектора $\overline{AB}$ на ось *l* – это длина отрезка A_1B_1, взятая с определённым знаком. Следовательно, проекция вектора на ось это число или скаляр.

Аналогично определяется проекция одного вектора на другой. В этом случае находятся проекции концов даного вектора на ту прямую, на которой лежит 2-ой вектор.

Рассмотрим некоторые основные **свойства проекций**.

1. Проеция вектора $\bar{a}$ на ось *l* равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла между вектором и осью:

$$np_l\bar{a}=|\bar{a}|\cos(\bar{a}\wedge l)\,|\bar{a}|\cos(\varphi).$$

<u>Доказательство</u>. Ясно, что проекция вектора не изменится при его параллельном переносе, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда начало вектора совпадает с началом отсчёта *O* оси *l*. Так как координата проекции начала равна нулю, то обозначим $np_l\bar{a}=x$.

1. Если угол φ острый, то из прямоугольного $\Delta OBB'$ получаем $\cos\varphi=\dfrac{x}{|\bar{a}|}$. Откуда $x=|\bar{a}|\cos\varphi$ или $np_l\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi.$

2. Если угол φ тупой, то $x< 0$, $\cos(\angle BOB_1) > 0$. Тогда из ΔBOB_1 $\cos(\angle BOB_1) = \frac{|x|}{|\bar{a}|} = \frac{-x}{|\bar{a}|}$ или $\cos(180° - \varphi) = \frac{-x}{|\bar{a}|}$. Т.е. $x = |\bar{a}|\cos\varphi$.

2. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций векторов на ту же ось: $пр_l(\bar{a}+\bar{b}) = пр_l\bar{a} + пр_l\bar{b}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 координаты проекций A_1, B_1, C_1 на ось l точек A, B и C.

Тогда $пр_l\overline{AB} = x_2 - x_1,\ \ пр_l\overline{BC} = x_3 - x_2,\ \ пр_l\overline{AC} = x_3 - x_1$.

Но $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2),\ \ т.е.\ \ пр_l\overline{AC} = пр_l\overline{AB} + пр_l\overline{BC}$.

Это свойство можно обобщить на случай любого числа слагаемых.

3. Если вектор $\bar{a}$ умножается на число λ, то его проекция на ось также умножается на это число:

$пр_l(\lambda\bar{a}) = \lambda \cdot пр_l\bar{a}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть угол между вектором $\bar{a}$ и осью $(\bar{a} \wedge l) = \varphi$.

Если λ > 0, то вектор $\lambda \cdot \bar{a}$ имеет то же направление, что и $\bar{a}$, и составляет с осью такой же угол φ.

При λ > 0 $пр_l(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cos\varphi = |\lambda||\bar{a}|\cos\varphi = \lambda|\bar{a}|\cos\varphi = \lambda пр_l\bar{a}$.

Если же λ < 0, то $\lambda \cdot \bar{a}$ и $\bar{a}$ имеют противоположные направления и вектор $\lambda \cdot \bar{a}$ составляет с осью угол π – φ
и $пр_l(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cos(\pi - \varphi) = -|\lambda||\bar{a}|\cos\varphi = -(-\lambda)|\bar{a}|\cos\varphi = \lambda|\bar{a}|\cos\varphi = \lambda пр_l\bar{a}$.

Следствие. Проекция разности двух векторов на ось равна разности проекций этих векторов на ту же ось.

Определение. **Направляющие косинусы вектора** $\boxed{a}$ – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными полуосями координат.

Направляющие косинусы однозначно задают направление вектора.

Основное соотношение. Чтобы найти **направляющие косинусы вектора** $\boxed{a}$ необходимо соответствующие координаты вектора поделить на <u>модуль вектора</u>.

Соответственно координатам единичного вектора равны его направляющим косинусам.

Свойство направляющих косинусов. Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице.

Формула вычисления направляющих косинусов вектора для плоских задач

В случае плоской задачи (рис. 1) направляющие косинусы вектора $\boxed{a} = \{a_x ; a_y\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boxed{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boxed{a}|}$$

Свойство: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

Формула вычисления направляющих косинусов вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи (рис. 2) направляющие косинусы вектора $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boxed{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boxed{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boxed{a}|}$$

Свойство:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$