БИЛЕТ 1

Матрицей А размера m×n называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящих из чисел или иных математических выражений.

Матрица записывается в виде: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Пример матрицы: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Произведение m на n (число строк на число столбцов) называется размерностью матрицы (m×n).

Матрицы обозначаются большими заглавными буквами, а ее элементы - строчными буквами.

a_{ij} – элемент матрицы, где i – номер строки, а j – номер столбца.

Виды матриц

1) Матрицей-столбцом длины m называется матрица , состоящая из одного столбца, размера m×1.

$\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ - матрица-столбец

2) Матрицей-строкой длины n называется матрица, состоящая из одной строки, размера 1×n.

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ - матрица-строка

3) Нулевой матрицей называют матрицу, все элементы которой равны 0.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Квадратной матрицей называют матрицу, где кол-во строк равно кол-ву столбцов.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица размера 3×3

5) Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - не диагональные элементы равны нулю

6) Диагональная матрица, у которой на главной диагонали расположены одинаковые элементы, называется скалярной.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ - диагональные элементы одинаковые

7) Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется единичной и обозначается буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - диагональные элементы равны 1

8) Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы ниже (выше) главной диагонали или побочной диагонали равны 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ - верхняя треугольная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ - нижняя треугольная матрица

9) Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

- если матрица содержит нулевую строку, то все строки, расположенные под нею, также нулевые;
- если первый не нулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером j, и следующая строка не нулевая, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Примеры ступенчатых матриц:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10) Если симметричные элементы относительно главной диагонали равны, то это симметричная (симметрическая матрица)($a_{ij} = a_{ji}$).

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ - симметричная матрица

11) Кососимметрической называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку и на главной диагонали расположены нулевые элементы (a_{ij} = $=-a_{ji}$).

$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ - кососимметрическая матрица

Операции над матрицами

Линейные

1. Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы **A** на число k называется матрица **B**, элементы которой равны произведению собственных чисел элементов матрицы **A** на число k, т е $b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$.

Обозначают: k · **A,** k**A**.

Частный случай: противоположная матрица -1(**A**).

2. Сложение матриц

Определение. **Суммой двух матриц A** и **B** одинаковой размерности называется матрица **C**, все элементы которой будут равны сумме элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы **C** равен: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Частный случай - разность матриц (A-B, A+(-B))

Свойства линейных операций:

1. Коммутативность $A + B = B + A$
2. Ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \Theta = \Theta + A$, где Θ - нулевая матрица соответствующего размера.
4. $A - A = \Theta$
5. Дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

6. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. Ассоциативность относительно умножения чисел $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. lA = A

Нелинейные

1. Умножение

   Умножение матриц A и B определено, когда кол-во столбцов матрицы A равно кол-ву строк матрицы B. Такие матрицы называются согласованными.

Определение. Произведением **матрицы** $A_{m\times n}$ **на матрицу** $B_{n\times k}$ **называется матрица** $C_{m\times k}$ **такая, что каждый ее элемент** c_{ij} **является произведением** i**-ой строки матрицы** A **на** j**-ый столбец матрицы** B**.**

Свойства произведения матриц:

1. EA=AE=A, A0=0A=0
2. Ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. Дистрибутивность $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Замечание 1: из существования произведения A на B следует существование произведения B на A. Если произведения существуют, то, как правило, A*B не равно B*A.

Если A*B=B*A, то матрицы называются перестановочными, или коммутирующими.

Замечание 1: если при произведении двух матриц получается нулевая матрица, то это не означает, что A=0 или B=0.

2. Транспонирование

   Определение. Матрица размера mxn, полученная из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к A и обозначается A^T.

Свойства операции транспонирования матриц:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
5. Для симметричных матриц: $A^T = A$
6. Для кососимметричных матриц: $A^T = -A$

3. Возведение в степень

   Определение. Целой положительной степенью A^m (m>1) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A.

   $A^0 = E$

$(A^n)^m = A^{nm}$
$A^n * A^m = A^{n+m}$