

Квадратичные формы (КФ): определение, матрица КФ, ранг КФ.

Определение :

Квадратичная форма-однородный многочлен 2-ой степени от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n с действительными коэффициентами a_{ij} , т.е. многочлен вида :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

В **матричной записи** квадратичная форма имеет вид: $L = X^T A X$, где

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - матрица-столбец переменных.

Матрица квадратичной формы:

Матрицей квадратичной формы называется симметричная матрица, составленная из ее коэффициентов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$L(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг КФ:

Рангом квадратичной формы называется ранг r ее матрицы A .

Если ранг матрицы совпадает с количеством элементов, то КФ называется невырожденная ($r = n$ - невырожденная)

Если ранг матрицы меньше числа переменных, то вырожденной

($r < n$ – вырожденная)