LEZIONI 7 & 8

3

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) R_{23} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) R_3 - 5R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ -y = 0 \\ \underline{0 = -1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA NON È RISOLUBILE IN QUANTO L'ULTIMO PIVOT È COMPARSO A SINISTRA DELLA BARRA.

1

(I)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 4y + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1/5 \\ x = 2/5 \end{cases}$$

LA SOLUZIONE È UNICA POICHÉ SOSTITUENDO $y = 1/5$ E $x = 2/5$ È L'UNICO VALORE POSSIBILE

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2/5 + 1 \cdot 1/5 \\ 1 \cdot 2/5 - 2 \cdot 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/5 \\ 0/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE UNICA DI $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

(II)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 6x + 3(3 - 2x) = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 - 2x \\ \cancel{6x} + 9 - \cancel{6x} = 6 \end{cases} \Rightarrow 9 = 6$$

SISTEMA NON RISOLUBILE

(III)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

LA SECONDA EQUAZIONE È OTTENUTA DALLA 1ª MOLTIPLICANDO PER 3 I TERMINI SUI 2 LATI DELL'EQUAZIONE. SE ESISTE UNA SOLUZIONE PER LA 1ª EQUAZIONE, ALLORA RISOLVE ANCHE LA 2ª.

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 6x + 3(3 - 2x) = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 - 2x \\ \cancel{6x} + 9 - \cancel{6x} = 9 \end{cases} \Rightarrow 9 = 9$$

ALCUNE SOLUZIONI: $(x = 1, y = 1)$, $(x = 0, y = 3)$

GENERALIZZANDO $y = 3 - 2x$: SOLUZIONI $(x = t,\ y = 3 - 2t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \infty$ SOLUZIONI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

(I) $2x + y = 1$ e $x - 2y = 0$ SONO DUE RETTE NEL PIANO CHE SI INTERSECANO IN $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

(II) $2x + y = 3$ e $6x + 3y = 6$ SONO PARALLELE $\Rightarrow$ NON SI INTERSECANO

(III) $2x + y = 3$ e $6x + 3y = 9$ SONO DUE RETTE COINCIDENTI (SI INTERSECANO IN ∞ PUNTI)

$$\begin{cases} x=1 \\ 2x+3y+z=5 \\ 3x+3y+z=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ \cancel{2}+3y+z=\cancel{5}\ 3 \\ \cancel{3}+3y+z=\cancel{6}\ 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ 3y+z=3 \\ 3y+z=3 \end{cases} \overset{\text{EQUIV.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ 3y+z=3 \Rightarrow z=3-3y \end{cases}$$

⊛2

SOLUZIONI: $(x=1,\ y=t,\ z=3-3t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

∞ SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA UN PARAMETRO $t \in \mathbb{R}$

- DATO UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI $A\underline{x}=\underline{b}$ CON $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, SI PUÒ RIDURLO IN UNA FORMA EQUIVALENTE CHE SIA PIÙ SEMPLICE DA RISOLVERE DA UN PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE?
- OSSIA, SIAMO LIBERI DI SOSTITUIRE $A\underline{x}=\underline{b}$ CON UN NUOVO SISTEMA LINEARE $A'\underline{x}=\underline{b}'$ A PATTO CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI SIANO UGUALI:

$$\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v}=\underline{b}\} = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^n \mid A'\underline{w}=\underline{b}'\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+2y+3z=13 \\ y+2z=3 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2(-1)+3\cdot 2=13 \rightarrow x=9 \\ y+4=3 \rightarrow y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x+z=0 \\ 6x+2y=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2+2R_1 \\ R_3-6R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3+2R_2 \end{array}$$

⊛4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{2-3z}{2} \rightarrow y=1-\frac{3}{2}z \\ x+\frac{2-3z}{2}+z=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$\Downarrow$

$rk(A)=rk(A')=rk(A|\underline{b})=rk(A'|\underline{b}')=2 \Rightarrow$ SISTEMA RISOLUBILE CON $\#$INCOGNITE $-\ rk(A)=1$ PARAMETRO

SOLUZIONE: $(x=\frac{1}{2}t,\ y=1-\frac{3}{2}t,\ z=t)\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \infty$ SOLUZIONI DIPENDENTI DA 1 PARAMETRO

PER ESEMPIO: $t=1$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

1 SI CONSIDERI IL SEGUENTE SISTEMA LINEARE CHE DIPENDE DA UN PARAMETRO $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y-z+w=1 \\ -x+2(h-1)y+(h-1)z+(h-1)w=1-h \\ x+2y-4h^2z+4h^2w=2h \end{cases}$$

DOBBIAMO CALCOLARE PER QUALI VALORI DI $h \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA È RISOLUBILE, OSSIA, SECONDO IL TEOREMA DI ROUCHÈ-CAPELLI, PER QUALI $h \in \mathbb{R}$ $rk(A) = rk(A|\underline{b})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2(h-1) & h-1 & h-1 & 1-h \\ 1 & 2 & -4h^2 & 4h^2 & 2h \end{array}\right) R_2+R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2h & h-2 & h & 2-h \\ 1 & 2 & -4h^2 & 4h^2 & 2h \end{array}\right) R_3+R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2h & \underbrace{h-2}_{=0 \text{ PER } h=0} & h & 2-h \\ 0 & 0 & \underbrace{-4h^2+1}_{=0 \text{ PER } h=\pm\frac{1}{2}} & 4h^2-1 & \underbrace{2h-1}_{=0 \text{ PER } h=\frac{1}{2},\ \neq 0 \text{ PER } h=-\frac{1}{2}} \end{array}\right)$$

MATRICE A SCALINI SE:
$2h \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$
$-4h^2+1 \neq 0 \Rightarrow h \neq \pm\frac{1}{2}$

SE $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0 \wedge h \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow rk(A') = rk(A'|\underline{b}') = 3$

PER R-C: $\forall h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0 \wedge h \neq \pm\frac{1}{2}$ IL SISTEMA È RISOLUBILE CON ∞ SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA 1 PARAMETRO (# VARIABILI $= 4 - rk(A) = 3$)

- $h = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) R_3+\frac{1}{2}R_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad rk(A'_0) = rk(A'_0|\underline{b}'_0) = 3$$

ALLORA $A_0\underline{x} = \underline{b}_0$ È RISOLUBILE CON ∞ SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA 1 PARAMETRO.

$$\begin{cases} x+2y-z+w=1 \\ -2z=2 \\ -w=0 \end{cases} \quad \begin{cases} w=0 \\ z=-1 \\ x+2y=0 \rightarrow x=-2y \end{cases}$$

SOLUZIONI:
$(x=-2t,\ y=t,\ z=-1,\ w=0)$

- $h = +\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad rk(A') = rk(A'|\underline{b}') = 2 \Rightarrow$$

SISTEMA RISOLUBILE CON ∞ SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA $4-2=2$ PARAMETRI

$$\begin{cases} x+2y-z+w=1 \\ y-3/2z+1/2w=3/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3+\cancel{3z}^{2}-\cancel{w}-\cancel{z}+\cancel{w}=1 \\ y=3/2+3/2z-1/2w \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2-2z \\ y=3/2+3/2z-1/2w \end{cases}$$

SOLUZIONI: $(-2-2z,\ 3/2+3/2z-1/2w,\ z,\ w)\ \forall z, w \in \mathbb{R}$

- $h = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & +1 & 1 \\ 0 & -1 & -5/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \overset{2}{rk(A')} \neq \overset{3}{rk(A'|\underline{b}')} \Rightarrow$$

SISTEMA NON RISOLUBILE

⊛2

$$\begin{cases} x+2y+3z+w+t=7 \\ y+z+t=3 \\ w-t=1 \end{cases} \qquad rk(A)=3=rk(A|\underline{b}) \Rightarrow \text{SISTEMA RISOLUBILE}$$

- SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO:

$$\begin{cases} x+2y+3z+w+t=0 \\ y+z+t=0 \\ w-t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2(-z-t)+3z+t+t=0 \\ y=-z-t \\ w=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z \\ y=-z-t \\ w=t \end{cases}$$

ALLORA LE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO SONO:

$$\{w\in\mathbb{R}^4 \mid (-z,-z-t,z,t,t)^T \ \forall z,t\in\mathbb{R}\}$$

- SI TROVI UNA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$\begin{cases} x+2y+3z+w+t=7 \longrightarrow x+7=7 \longrightarrow x=0 \text{ UNICA POSSIBILITÀ} \\ y+z+t=3 \longrightarrow y+z=3 \longrightarrow \text{PER ESEMPIO: } z=0,\ y=3 \\ w-t=1 \longrightarrow \text{PER ESEMPIO: } w=1,\ t=0 \end{cases}$$

LE SOLUZIONI SONO DATE DALL'INSIEME

$$\{v\in\mathbb{R}^4 \mid v=\underbrace{(0,3,0,1,0)^T}_{\text{SOL. PARTICOLARE}}+\underbrace{(-z,-z-t,z,t,t)^T}_{\text{SOL. SISTEMA OMOG. ASSOCIATO}} \ \forall t,z\in\mathbb{R}\}$$

$$\| $$

$$(-z,3-z-t,z,1+t,t)^T \ \forall t,z\in\mathbb{R}$$

⊛3 SI RICHIAMA L'ESEMPIO ⊛1ª|F1 PUNTO ①: (ESEMPI $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ SULLE SLIDE PAG 126)

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det(A)=-4-1=-5\neq 0 \Rightarrow \text{IL SISTEMA HA UN'UNICA SOLUZIONE}$$

$$A^{-1} \text{ ESISTE}: \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \text{ STESSO RISULTATO!}$$

$$\begin{cases} 2x+y=a \\ x-2y=b \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

IN GENERALE $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ IL SISTEMA LINEARE AVRÀ SEMPRE UN'UNICA SOLUZIONE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}a+\frac{1}{5}b \\ \frac{1}{5}a-\frac{2}{5}b \end{pmatrix}$$

QUESTO PERCHÉ A È QUADRATA E $\det(A)\neq 0$ ($\Longleftrightarrow rk(A)=n=\#$ VARIABILI $\xRightarrow{R-C}$ LA SOLUZIONE È UNICA)

⊛1 SIA $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ L'APPLICAZIONE LINEARE TALE CHE

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

SI DETERMINI $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$ $x, y, z \in \mathbb{R}$

• BASE NON CANONICA

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$ $\quad \det\left(\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ FORMANO UNA BASE

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f\left(k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = k_1 f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) + k_2 f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) + k_3 f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

⊛ ⊛ $k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1+k_2\\k_1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$ ⊛

F3.1

$\boxed{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}} \text{ CON } \mathcal{V} \text{ BASE NON CANONICA DI } \mathbb{R}^3 \text{ E } \mathcal{W} \text{ BASE CANONICA DI } \mathbb{R}^2}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad k_1 = 2,\ k_2 = 0,\ k_3 = 1$

$f(\underline{v}) = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\right.$ SAREBBE LA MATRICE RAPPRESENTATIVA $\left.\right)$ ⊛

TRAMITE LA BASE NON CANONICA SI OTTIENE QUINDI ⊛, DOVE SOSTITUENDO NEI COEFFICIENTI k_i QUELLI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DI UN VETTORE $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$, SI OTTIENE $f(\underline{v})$

• BASE CANONICA

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f\left(-1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

⊛ $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + y f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + z f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

F3.1

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\y-z\end{pmatrix}$ ⊛2 $\left(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\right.$ MATRICE RAPPRESENTATIVA = APPLICAZIONE LINEARE $\left.\right)$

$\|$

${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}$ CON $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$ BASI CANONICHE

$\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad f(\underline{v}) = \begin{pmatrix}2\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

TRAMITE LA BASE CANONICA SI OTTIENE QUINDI ⊛2, OSSIA SI OTTIENE DIRETTAMENTE L'APPLICAZIONE LINEARE. QUESTO PERCHÉ GLI ELEMENTI DI UN VETTORE $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ CORRISPONDONO AI COEFFICIENTI DELLA SUA COMBINAZIONE LINEARE CON I VETTORI DELLA BASE.

(i) SIA $f: V \mapsto V$ LA FUNZIONE IDENTITÀ, OSSIA $f(\underline{v}) = \underline{v}$. POICHÉ $Ker(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$

(*2) ALLORA $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$. MA $\underline{v} = f(\underline{v}) = \underline{0}_W$, QUINDI $\underline{v} = \underline{0}_W$ E $Ker(f) = \{\underline{0}_W\}$

$Im(f) = \{\underline{w} \in W \mid \exists \underline{v} \in V$ CON $f(\underline{v}) = \underline{w}\}$. POICHÉ $\forall \underline{w} \in V$ SI HA $f(\underline{w}) = \underline{w}$, OGNI VETTORE DEL CODOMINIO V È CONTENUTO NELL'IMMAGINE E $Im(f) = V$ (*1

(ii) SIA $f: V \mapsto W$ L'APPLICAZIONE LINEARE NULLA, OSSIA $\forall \underline{v} \in V$ $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$. PER DEFINIZIONE $Ker(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W\} = V$, E QUINDI $Ker(f) = V$. DATO CHE TUTTI I VETTORI HANNO COME IMMAGINE $\underline{0}_W$, SI HA $Im(f) = \{\underline{0}_W\}$ (*2

(iii) $V = \mathbb{R}^3$ $U = \mathbb{R}^2$ $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ DEFINITA DA:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$Ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= Sol\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) \overset{(*)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ BASE DI } Ker(f)$$

$$\dim Ker(f) = 1 \left(= n - rk\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)\right) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \quad x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Im(f) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ CON } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ CON } \begin{matrix} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= Sol\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right]\right)$$

IL SISTEMA È RISOLUBILE SEMPRE CON $n - rk(A) = 3 - 2 = 1$ PARAMETRO

$\Downarrow$

$Im(f) = \mathbb{R}^2 \Leftarrow$ TUTTI I VETTORI $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ SONO CONTENUTI NELL'IMMAGINE

$$\dim Im(f) = 2 \left(= rk\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right]\right)\right)$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \Rightarrow 3 = 1 + 2 \Rightarrow 3 = \underline{\underline{3}}$$

(*1 $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$

$\dim(V) = 0 + \dim(V)$

(*2 $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$

$\dim(V) = \dim(V) + 0$

DA ⊛1 DI F3

BASE CANONICA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \\ z = k_3 \end{cases} \quad ⊛1$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= k_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + k_2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + k_3 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{SOSTITUISCO } ⊛1$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y-z \end{pmatrix}$$

BASE NON CANONICA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - k_3 \\ k_1 + k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k_1 + k_2 - k_3 \\ y = k_1 + z \\ z = k_2 \end{cases} \rightarrow k_1 = y - z \quad \begin{cases} x = y - \cancel{z} + \cancel{z} - k_3 \\ k_1 = y - z \\ k_2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = y - z \\ k_2 = z \\ k_3 = y - x \end{cases} \quad ⊛2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= k_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + k_2 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + k_3 f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{SOSTITUISCO } ⊛2$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y - \cancel{z} \\ y - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{z} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y - z \end{pmatrix}$$

MOTIVAZIONE DELLE SOSTITUZIONI DELLE COORDINATE DELLE BASI CANONICHE CON LE INCOGNITE DEL VETTORE + METODO ALTERNATIVO PER RICAVARE UNA APPLICAZIONE LINEARE DA UNA BASE NON CANONICA.

1 $f_d : \mathbb{K}_{\leq d}[x] \longmapsto \mathbb{K}^{d+1}$

$$f_d(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

- f_d È INIETTIVA: BISOGNA VEDERE SE $\mathrm{Ker}(f_d) = \{0\}$ (IL POLINOMIO NULLO)

MA SE $f_d(p(x)) = \underline{0}_{\mathbb{K}^{d+1}}$, TUTTI I COEFFICIENTI DI $p(x)$ SONO NULLI $\Rightarrow p(x) = 0$

- f_d È SURIETTIVA: BISOGNA VEDERE SE $\mathrm{Im}(f_d) = \mathbb{K}^{d+1}$

$\mathrm{Im}(f_d) = \langle f_d(p_0(x)), f_d(p_1(x)), \dots, f_d(p_d(x)) \rangle$ DOVE $\{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{p_0(x)}}, \overset{x}{\overset{\shortparallel}{p_1(x)}}, \dots, \overset{x^d}{\overset{\shortparallel}{p_d(x)}}\}$

È UNA BASE DI $\mathbb{K}_{\leq d}[x]$

$f_d(1 \cdot x^i) = (0\ 0 \dots \underset{i+1}{1} \dots 0)^T$ $f_d(p_i(x)) = e_{i+1}$ $\mathrm{Im}(f_d) = \langle e_1, e_2, \dots, e_{d+1} \rangle = \mathbb{K}^n$

e_{i+1}

QUESTA APPLICAZIONE LINEARE MANDA QUINDI LA BASE DI $\mathbb{K}_{\leq d}[x]$ $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ NELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^{n+1}$.

- $\varphi(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}) : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}^4$ ORDINATO PER COLONNA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$\varphi(E_{11}) = e_1$ $\varphi(E_{12}) = e_3$

$\varphi(E_{21}) = e_2$ $\varphi(E_{22}) = e_4$

$$\varphi(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\varphi(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}^4$ ORDINATO PER RIGA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$\varphi(E_{11}) = e_1$ $\varphi(E_{12}) = e_2$

$\varphi(E_{21}) = e_3$ $\varphi(E_{22}) = e_4$

$$\varphi(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

BASI ORDINATE IN MANIERA DIFFERENTE

2 $\mathbb{R}^2$ $\{e_1-e_2, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ BASE ORDINATA

$\varphi(e_1-e_2, e_2) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$\underline{v} = x_1(e_1-e_2) + x e_2 \longmapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}x_1 = a\\ -x_1 + x_2 = b\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x_1 = a\\ x_2 = b+a\end{cases}$

$\varphi(e_1-e_2, e_2)\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b+a\end{pmatrix}$

---

3 $A = \begin{bmatrix}1&0&7&4\\2&2&1&3\\3&1&0&2\end{bmatrix}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\underline{x} \mapsto f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$

$f_A(e_1) = Ae_1 = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad f_A(e_2) = Ae_2 = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$f_A(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad f_A(e_4) = Ae_4 = A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

$$f_A\left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&0&7&4\\2&2&1&3\\3&1&0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Ker}(f_A) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{v} = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}\} = \mathrm{Sol}(A \mid \underline{0}_{\mathbb{R}^3})$
- $\mathrm{Im}(f_A) = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^4 \text{ CON } A\underline{v} = \underline{w}\}$

- $\dim \mathrm{Ker}(f_A) = \dim \mathrm{Sol}(A \mid \underline{0}) = n - rk(A) = 4 - 3 = 1$

$$A = \begin{bmatrix}1&0&7&4\\2&2&1&3\\3&1&0&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&7&4\\0&2&-13&-5\\0&1&-21&-10\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&7&4\\0&1&-21&-10\\0&0&29&15\end{bmatrix} \quad rk(A) = 3$$

- $\mathrm{Im}(f_A) = \left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ CON } \begin{bmatrix}1&0&7&4\\2&2&1&3\\3&1&0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right\}$

$A\underline{x} = \underline{y}$ È SEMPRE RISOLUBILE POICHÉ $rk(A) = rk(A \mid \underline{y}) = 3$

$$\mathrm{Im}(f_A) = x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\underline{a}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{\underline{a}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{a}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}}_{\underline{a}_4} \right\rangle$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f_A) = \dim \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4 \rangle = rk(A) = 3$

- $n = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim \mathrm{Im}(f_A) + \dim \mathrm{Ker}(f_A) = n - \cancel{rk(A)} + \cancel{rk(A)}$

1 $V = W = \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{V} = \mathcal{W} = \{e_1, e_2, e_3\}$

SIA $f: V \to W$ L'APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA DA

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ SI TROVI ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$.

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{1}\, e_1 + \underline{0}\, e_2 + \underline{0}\, e_3$$

$$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{1}\, e_1 + \underline{0}\, e_2 + \underline{0}\, e_3$$

$$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}\, e_1 + \underline{1}\, e_2 + \underline{0}\, e_3$$

$${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2 SIA $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ UN'APPLICAZIONE LINEARE CHE È RAPPRESENTATA DALLA MATRICE

$${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{W} = \{x^3 + 1, x, x^2, x + 1\}$$

SI DETERMINO LE IMMAGINI DI $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3(x^3+1) + 0x + 3x^2 + 3(x+1) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}\, \underline{v}_1 + \underline{1}\, \underline{v}_2 + \underline{1}\, \underline{v}_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2(x^3+1) + 0x + 2x^2 + 2(x+1) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underline{\sqrt{2}}\, \underline{v}_1 + \underline{\sqrt{3}}\, \underline{v}_2 + \underline{0}\, \underline{v}_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \sqrt{2}(x^3+1) + 0x + (\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2 + \sqrt{2}(x+1) = \sqrt{2}x^3 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$$

(*)3 $V = \mathbb{R}^3$ $\quad v = \left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\quad w = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} \right\}$

CALCOLO DELLA MATRICE DEL CAMBIO DI BASE ${}_vM_w(id)$:

$$id\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$id\left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$id\left(\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$${}_vM_w(id) = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} = \varphi^{-1}w\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1/4\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7/2\\0\\5\end{pmatrix} \qquad {}_vM_w(id)\cdot\varphi w\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right) = \varphi v\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} = -\frac{7}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} = \varphi^{-1}v\left(\begin{pmatrix}-7/2\\0\\5\end{pmatrix}\right)$$

CALCOLO DI ${}_wM_v(id)$: $\quad {}_wM_v(id) = ({}_vM_w(id))^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2/3\,R_1 \\ R_2 + \frac{2}{3}R_1 \\ R_3 + 4/3\,R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4 & 4/3 & 0 & 1 \end{array}\right] 3/7\,R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4 & 4/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + \frac{1}{3}R_2 \\ \\ R_3 - \frac{2}{3}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8/7 & -2/7 & 1 \end{array}\right] R_3/4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -1/14 & 1/4 \end{array}\right] \qquad {}_wM_v(id) = \begin{bmatrix} -4/7 & 1/7 & 0 \\ 2/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/14 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4/7 & 1/7 & 0 \\ 2/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/14 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}-7/2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1/4\end{pmatrix} \qquad {}_wM_v(id)\cdot\varphi v\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right) = \varphi w\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right)$$

SI CONSIDERI $f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ TALE CHE

$$f(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} b \\ a+c \\ a+c \end{pmatrix}$$

- BASI DEL DOMINIO:

$v = \{x^2, x+1, x^2+1\}$ $\quad a = \{x^2, x, 1\}$

- BASI DEL CODOMINIO

$w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

${}_w M_v(f)$:

$\varphi_w(f(x^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_w(f(x+1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_w(f(x^2+1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$${}_w M_v(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

${}_{\mathcal{B}} M_a(f)$:

$\varphi_{\mathcal{B}}(f(x^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_{\mathcal{B}}(f(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_{\mathcal{B}}(f(1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$${}_{\mathcal{B}} M_a(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}_a M_v(id)$:

$\varphi_a(id(x^2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_a(id(x+1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_a(id(x^2+1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$${}_a M_v(id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

${}_w M_{\mathcal{B}}(id)$:

$\varphi_w\left(id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_w\left(id\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_w\left(id\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$${}_w M_{\mathcal{B}}(id) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{B}}(id) \cdot {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) = {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{A}}(f) $$

$$ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \\ \end{array} $$

${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f)$	${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{B}}(id)$	${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{A}}(f)$
$f(\underline{a}_1) = 0\,\underline{b}_1 + 1\,\underline{b}_2 + 1\,\underline{b}_3$	$id(\underline{b}_1) = 1\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 - 1\,\underline{w}_3$	$f(\underline{a}_1) = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3$
$f(\underline{a}_2) = 1\,\underline{b}_1 + 0\,\underline{b}_2 + 0\,\underline{b}_3$	$id(\underline{b}_2) = -1\,\underline{w}_1 + 1\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3$	$f(\underline{a}_2) = 1\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 - 1\,\underline{w}_3$
$f(\underline{a}_3) = 0\,\underline{b}_1 + 1\,\underline{b}_2 + 1\,\underline{b}_3$	$id(\underline{b}_3) = 1\,\underline{w}_1 - 1\,\underline{w}_2 + 0\,\underline{w}_3$	$f(\underline{a}_3) = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3$

$$ f(\underline{a}_1) = 0\,\underline{b}_1 + 1\,\underline{b}_2 + 1\,\underline{b}_3 = 0(1\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 - 1\,\underline{w}_3) + 1(-1\,\underline{w}_1 + 1\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3) + $$
$$ + 1(1\,\underline{w}_1 - 1\,\underline{w}_2 + 0\,\underline{w}_3) = -1\,\underline{w}_1 + 1\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3 + 1\,\underline{w}_1 - 1\,\underline{w}_2 + 0\,\underline{w}_3 = $$
$$ = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3 $$

${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{B}}(id)$ ESPRIME $\underline{b}_i$ COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\mathcal{W}$, ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f)$ ESPRIME $\underline{a}_i$ COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\mathcal{B}$, MOLTIPLICANDOLI SI OTTIENE a_i COME COMB. LINEARE DI $\mathcal{W}$.

$$ {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{A}}(f) \cdot {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id) = {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) $$

$$ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \\ \end{array} $$

${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id)$	${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$
$id(\underline{v}_1) = 1\,\underline{a}_1 + 0\,\underline{a}_2 + 0\,\underline{a}_3$	$f(\underline{v}_1) = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3$
$id(\underline{v}_2) = 0\,\underline{a}_1 + 1\,\underline{a}_2 + 1\,\underline{a}_3$	$f(\underline{v}_2) = 1\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 0\,\underline{w}_3$
$id(\underline{v}_3) = 1\,\underline{a}_1 + 0\,\underline{a}_2 + 1\,\underline{a}_3$	$f(\underline{v}_3) = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 2\,\underline{w}_3$

$$ f(\underline{v}_1) = 1\,\underline{a}_1 + 0\,\underline{a}_2 + 0\,\underline{a}_3 = 1(0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3) + 0(1\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 - 1\,\underline{w}_3) + $$
$$ + 0(0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3) = 0\,\underline{w}_1 + 0\,\underline{w}_2 + 1\,\underline{w}_3 $$

${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id)$ ESPRIME v_i COME COMB. LINEARE DI $\mathcal{A}$, ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{A}}(f)$ ESPRIME a_i COME COMB. LINEARE DI $\mathcal{W}$, MOLTIPLICANDOLI SI OTTIENE v_i COME COMB. LINEARE DI $\mathcal{W}$.

$$ \boxed{ {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) = {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{B}}(id) \cdot {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f)\, {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id) } $$

TEOREMA: ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ E $b \neq 0$. ALLORA $\exists! q \in \mathbb{Z}$ E $\exists! r \in [0, |b|-1]$ TALI CHE

$a = q \cdot b + r$

DIMOSTRAZIONE

ESISTENZA: SIANO $a \geq 0, b > 0$. SI APPLICA IL METODO INDUTTIVO.

- CASO BASE: $a = 0 \Rightarrow a = 0 = 0 \cdot b + 0 \qquad q = 0, r = 0$
- PASSO INDUTTIVO: $a - 1 = qb + r \Rightarrow a = q'b + r'$

$$a = (a-1) + 1 = (qb + r - 1) + 1$$

$$(a-1) + 1 = q'b + r' + 1$$

$$a - 1 = q'b + r' \qquad r' \in [0, |b|-1]$$

SE $r' < b-1 \Rightarrow r' + 1 \leq b - 1$

SE $r' = b-1 \Rightarrow r' + 1 \leq b \qquad a - 1 = q'b + b - 1 \qquad a = (q'+1)b$

UNICITÀ: SIANO $a \geq 0, b > 0$.

$\exists q, q' \in \mathbb{Z} \quad \exists r, r' \in [0, |b|-1] \quad (q, r) \neq (q', r')$

SIA PER ASSURDO $a = qb + r = q'b + r'$

$(|q' - q|)b + |r' - r| = 0 \Leftrightarrow q' - q = 0 \wedge |r' - r| = 0 \Rightarrow q' = q \wedge r' = r$

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE

$B = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$ $\quad B' = \{ \underline{v}_1', \underline{v}_2', \dots, \underline{v}_n' \}$

BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V DI DIMENSIONE n.

$id : V \to V$
$id(\underline{v}) = \underline{v}$

$$id(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 = k_{11}\,\underline{v}_1' + k_{21}\,\underline{v}_2' + \dots + k_{n1}\,\underline{v}_n'$$
$$id(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 = k_{12}\,\underline{v}_1' + k_{22}\,\underline{v}_2' + \dots + k_{n2}\,\underline{v}_n'$$
$$\vdots$$
$$id(\underline{v}_n) = \underline{v}_n = k_{1n}\,\underline{v}_1' + k_{2n}\,\underline{v}_2' + \dots + k_{nn}\,\underline{v}_n'$$

$$_{B'}\mathcal{M}_B(id) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$_{B'}\mathcal{M}_B(id)$ È LA MATRICE CHE ESPRIME IL PASSAGGIO DALLA BASE B ALLA BASE B'

$$id(\underline{v}_1') = \underline{v}_1' = k_{11}\,\underline{v}_1 + k_{21}\,\underline{v}_2 + \dots + k_{n1}\,\underline{v}_n$$
$$id(\underline{v}_2') = \underline{v}_2' = k_{12}\,\underline{v}_1 + k_{22}\,\underline{v}_2 + \dots + k_{n2}\,\underline{v}_n$$
$$\vdots$$
$$id(\underline{v}_n') = \underline{v}_n' = k_{1n}\,\underline{v}_1 + k_{2n}\,\underline{v}_2 + \dots + k_{nn}\,\underline{v}_n$$

$$_{B}\mathcal{M}_{B'}(id) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$_{B}\mathcal{M}_{B'}(id)$ È LA MATRICE CHE ESPRIME IL PASSAGGIO DALLA BASE B' ALLA BASE B

$$\boxed{_{B'}\mathcal{M}_B(id) = \left(_{B}\mathcal{M}_{B'}(id)\right)^{-1}} \implies {}_{B'}\mathcal{M}_B(id) \cdot {}_{B}\mathcal{M}_{B'}(id) = Id_n$$

SIA $_{C}\mathcal{M}_B(id)$ LA MATRICE CHE ESPRIME IL PASSAGGIO DA UNA BASE QUALSIASI B ALLA BASE CANONICA C, ALLORA $_{C}\mathcal{M}_B(id)$ SI OTTIENE DISPONENDO LE COORDINATE DEI VETTORI DELLA BASE B PER COLONNA:

$_{C}\mathcal{M}_B(id)$ = MATRICE AVENTE PER COLONNE LE COORDINATE DEI VETTORI DI B

$$_{B}\mathcal{M}_C(id) = \left(_{C}\mathcal{M}_B(id)\right)^{-1}$$

CAMBIO DI BASE PER MATRICI RAPPRESENTATIVE

- SIANO V E W DUE $\mathbb{K}$-SPAZI VETTORIALI RISPETTIVAMENTE DI DIMENSIONI n E m.

SIANO $\mathcal{V}, \mathcal{A}$ DUE BASI DI V E SIANO $\mathcal{W}, \mathcal{B}$ DUE BASI DI W

SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE E SIA ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$ LA MATRICE CHE RAPPRESENTA f RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$.

- CON QUESTI PRESUPPOSTI, SI VUOLE INDIVIDUARE LA MATRICE ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f)$ CHE RAPPRESENTA f RISPETTO A DUE BASI DIVERSE DA QUELLE CONSIDERATE INIZIALMENTE.

- SIA ${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id)$ LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE DA $\mathcal{V}$ AD $\mathcal{A}$ E SIA ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id)$ LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE DA $\mathcal{W}$ A $\mathcal{B}$.
- SI CONSIDERI UN VETTORE $\underline{v} \in V$ E SIA $\underline{w} = f(\underline{v})$. SI RAPPRESENTA CON:

$\varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v})$ LE COORDINATE DI $\underline{v}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$

$\varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})$ LE COORDINATE DI $\underline{v}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{A}$

$\varphi_{\mathcal{W}}(\underline{w})$ LE COORDINATE DI $\underline{w}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{W}$

$\varphi_{\mathcal{B}}(\underline{w})$ LE COORDINATE DI $\underline{w}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{B}$

CALCOLO DELLA FORMULA:

① $\varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v}) = {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id) \cdot \varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}) \rightarrow \varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}) = ({}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{V}}(id))^{-1} \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v}) = {}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{A}}(id) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})$

② $\varphi_{\mathcal{B}}(\underline{w}) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot \varphi_{\mathcal{W}}(\underline{w})$

③ $\varphi_{\mathcal{W}}(\underline{w}) = {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot \varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v})$

④ $\varphi_{\mathcal{B}}(\underline{w}) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})$

① E ② DERIVANO DALLA DEFINIZIONE DI MATRICE DI CAMBIO DI BASE.
③ E ④ DERIVANO DALLA DEFINIZIONE DI MATRICE RAPPRESENTATIVA DI f

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v}) \overset{④}{=} \varphi_{\mathcal{B}}(\underline{w}) \overset{②}{=} {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot \varphi_{\mathcal{W}}(\underline{w}) \overset{③}{=} {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot \varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}) \overset{①}{=}$$
$$= {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot {}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{A}}(id) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) \cdot \cancel{\varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})} = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot {}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{A}}(id) \cdot \cancel{\varphi_{\mathcal{A}}(\underline{v})}$$

$$\Rightarrow \boxed{{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{W}}(id) \cdot {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot {}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{A}}(id)}$$

- SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ LA FORMA MATRICIALE DI UN SISTEMA DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE A COEFFICIENTI IN UN CAMPO $\mathbb{K}$.

CONSIDERANDO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI A, SIA $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ L'APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA DALLA MATRICE A, OSSIA: $F(x) = A\underline{x}$

↳ È EVIDENTE CHE IL SISTEMA LINEARE $A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE SOLUZIONE SE E SOLO SE $\exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid F(\underline{v}) = \underline{b}$

$\Rightarrow$ CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE $\underline{b} \in Im(F)$ (OSSIA $\underline{b}$ DEVE APPARTENERE ALL'IMMAGINE DELL'APPLICAZIONE LINEARE F, CHE È IL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A, QUINDI:

$$b \in Im(f) \Longleftrightarrow b \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$$ CON $a_1, a_2, \dots, a_n$ COLONNE DI A

- SE $\underline{b}$ APPARTIENE AL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DI A, ALLORA RISULTA CHE QUEST'ULTIMO COINCIDE COL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DELLA MATRICE COMPLETA $(A|\underline{b})$:

$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle$ ($\underline{b}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE ALLE ALTRE COLONNE)

$$\Rightarrow \underline{b} \in Im(F) \Longleftrightarrow rk(A) = rk(A|\underline{b})$$

(PER DEFINIZIONE IL RANGO È LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DI UNA MATRICE) ⊛ DIETRO

- SE $\exists\, \underline{v}$ SOLUZIONE DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$, ALLORA TUTTE E SOLE LE SUE SOLUZIONI SI SCRIVONO NELLA FORMA $\underline{v} + v_0$ DOVE v_0 È UNA SOLUZIONE QUALSIASI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO $A\underline{x} = \underline{0}_{K^m}$

- DA CIÒ SEGUE CHE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = \underline{b}$ SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$Sol(A|\underline{b}) = \underline{v} + Sol(A|\underline{0}) \overset{\text{SOTTOSPAZI AFFINI}}{\Longrightarrow} \dim Sol(A|\underline{b}) = \dim Sol(A|\underline{0})$$

- L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE ASSOCIATO $A\underline{x} = \underline{0}$ È $Ker(F)$, OSSIA IL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE LINEARE F: $Sol(A|0) = Ker(F)$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE ROUCHÉ - CAPELLI}}$

- PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI:

$$\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(F)) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\mathrm{Im}(F)) = n - \dim(\mathrm{Im}(F))$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{sol}(A|\underline{0})) = n - rk(A)$$

- LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO $A\underline{x} = \underline{0}$ È QUINDI $n - rk(A)$

↳ AVENDO $A\underline{x} = \underline{b}$ E $A\underline{x} = \underline{0}$ DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI UGUALI, ALLORA:

$$\dim(\mathrm{sol}(A|\underline{b})) = \dim(\mathrm{sol}(A|\underline{0})) = n - rk(A)$$

$\Rightarrow$ IL NUMERO DELLE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = \underline{b}$ DIPENDE DA $n - rk(A)$ PARAMETRI

(POICHÉ QUESTI COSTITUISCONO LE BASI DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE SOLUZIONI)

⊛ ROUCHÉ-CAPELLI CI DICE CHE UN SISTEMA È RISOLUBILE SE IL VETTORE DEI TERMINI NOTI È OTTENIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE.

PER ESSERLO IL VETTORE $\underline{b}$ DEVE ESSERE PERCIÒ DIPENDENTE DA $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$.

NEL CASO IN CUI SIA INDIPENDENTE, ALLORA NON È OTTENIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE E CI SARÀ PERCIÒ UN PIVOT IN $\underline{b}$ (PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE LA MATRICE COMPLETA $(A|\underline{b})$): IL SISTEMA È QUINDI IRRISOLUBILE

PER QUESTO MOTIVO UN SISTEMA DEL TIPO $A\underline{x} = \underline{0}$ È SEMPRE RISOLUBILE: $\underline{0}$ PUÒ SEMPRE ESSERE OTTENUTO COME COMBINAZIONE LINEARE: QUELLA BANALE.