LEZIONE 1 - 04/03/2024

INSIEMI: UN INSIEME È UNA COLLEZIONE DI OGGETTI, DETTI ELEMENTI.

$\emptyset$ = INSIEME VUOTO. È UN SOTTOINSIEME DI QUALUNQUE INSIEME.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ SONO ALTRI INSIEMI IMPORTANTI.

LINGUAGGIO: DATO UN INSIEME FINITO DI SIMBOLI, IL LINGUAGGIO BASATO SU QUESTI SIMBOLI È L'INSIEME DI STRINGHE FINITE COMPOSTE UTILIZZANDO I SIMBOLI DATI (SIMBOLI COME $\{a, b, \dots, z, +, -, \ , \cdot, \dots\}$)

(*)

DATO UN QUALUNQUE INSIEME I, DEFINIAMO L'INSIEME DELLE PARTI

$P(I)$ = L'INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI I $\{T \mid T \subseteq I\}$

(*) UN INSIEME T È DETTO SOTTOINSIEME DI UN INSIEME S SE TUTTI GLI ELEMENTI DI T SONO ANCHE ELEMENTI DI S: $T \subseteq S$

ESEMPIO: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{$STRINGHE COMPILABILI$\} \subseteq$ LINGUAGGIO

- IL SOTTOINSIEME PROPRIO È UN SOTTOINSIEME T CHE È DIVERSO DA S: È QUINDI STRETTAMENTE PIÙ PICCOLO.

$I = \{0, 1, 2\}$ $\quad P(I) = \{\emptyset, I, \{1\}, \{2\}, \{0\}, \underbrace{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}}_{\binom{3}{2} \text{ SOTTOINSIEMI DI 2 ELEMENTI}}\}$

CERCHIAMO UN'OPERAZIONE CHE FACCIA RICORRERE AD UN INSIEME I IL SUO $P(I)$:

$I \mapsto P(I)$. QUESTA OPERAZIONE PUÒ ESSERE PENSATA IN MODO RICORSIVA:

$$I \longmapsto \underbrace{P(I)}_{\text{SOTTOINSIEMI DI } I} \longmapsto \underbrace{P(P(I))}_{\text{SOTTOINSIEMI DI } P(I)} \longmapsto \dots$$

GLI INSIEMI VENGONO DESCRITTI ELENCANDO GLI ELEMENTI $\{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$

OPPURE USANDO DELLE CONDIZIONI $\{x \mid x \text{ SODDISFI CERTE CONDIZIONI}\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$

$A = B \longrightarrow$ GLI ELEMENTI DI A SONO TUTTI E SOLI GLI ELEMENTI DI B

$\Updownarrow$

$A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI: S, T INSIEMI

$S \cup T = \{x \mid x \in S$ OPPURE $x \in T\}$ UNIONE

$S \cap T = \{x \mid x \in S$ E $x \in T\}$ INTERSEZIONE

$S \setminus T = \{x \mid x \in S$ E $x \notin T\}$ DIFFERENZA

PRODOTTO CARTESIANO -

DATI DUE INSIEMI A e B DEFINIAMO IL PRODOTTO CARTESIANO $A \times B$ COME:

$$A \times B = \{\underbrace{(a,b)}_{\text{COPPIA ORDINATA}} \mid a \in A, b \in B\}$$

LA COPPIA ORDINATA $(a \in A, b \in B) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq P(A \cup B)$

$\cap$

$P(P(A \cup B))$ $\quad (a,b) \neq (b,a) = \{\{b\}, \{a,b\}\}$

IL PRODOTTO CARTESIANO È QUINDI L'INSIEME DELLE COPPIE ORDINATE.

$A = \{0,1,2\}$ $\quad B = \{0,2\}$ $\quad A \times B = \{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,0), (2,2)\}$

SE A HA h ELEMENTI E B HA k ELEMENTI, $A \times B$ HA $h \times k$ ELEMENTI.

IL PIANO CARTESIANO È DEFINITO COME $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- IN GENERALE: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_m \in A_m\}$

RELAZIONI TRA INSIEMI

DATI DUE INSIEMI A, B DEFINIAMO UN MODO PER ASSOCIARE ELEMENTI DI A E DI B

$A = \{$RETTE IN $\mathbb{R}^2\}$ $\quad B = \{$PUNTI DI $\mathbb{R}^2\}$

$ax + by + c = 0 \longmapsto$ PUNTI CHE APPARTENGONO ALLE RETTE $\{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge ax + by + c = 0\}$

- UNA RELAZIONE (BINARIA) TRA A e B È UN SOTTOINSIEME $R \subseteq A \times B$. (PRODOTTO CARTESIANO)

GLI ELEMENTI DI R SONO $\{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in R\}$

NOTAZIONE: $a \underset{R}{\sim} b$ $\quad \overset{\text{QUANDO}}{\Longleftrightarrow}$ $(a,b) \in R$ (a È IN RELAZIONE CON B)

(aRb)

$A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$ $\quad R = \{(a,b) \mid b^2 = a\}$ RELAZIONE CHE CERCA QUALI NUMERI REALI SONO RADICI DI NUMERI INTERI.

$(1,1) \in R$ $\quad (1,-1) \in R \to (-1)^2 = 1$ $\quad (0,3) \to 3^2 \neq 0 \notin R$

$R = \{(S,T) \mid S \subseteq T\}$ RELAZIONE $\quad (\mathbb{Z}, \{$NUMERI PARI$\}) \notin R$ $\quad (\{$NUMERI PARI$\}, \mathbb{Z}) \in R$

$(\emptyset, \{1,2,3\}) \in R$

DEFINIZIONE: SIA $R \subseteq A \times A$ UNA RELAZIONE. DICIAMO CHE R È UNA RELAZIONE:

RIFLESSIVA QUANDO $\boxed{\forall a \in A \quad a \tilde{R} a}$ $(\forall a \in A, (a,a) \in R)$

SIMMETRICA QUANDO $\boxed{\forall a,b \in A \quad a \tilde{R} b \Rightarrow b \tilde{R} a}$ $(\forall a,b \in A \quad (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$

ANTISIMMETRICA QUANDO $\boxed{\forall a,b \in A \quad a \tilde{R} b \text{ e } b \tilde{R} a \Rightarrow a = b}$ $(\forall a,b \in A \quad (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b)$

TRANSITIVA QUANDO $\boxed{\forall a,b,c \in A \quad a \tilde{R} b \wedge b \tilde{R} c \Rightarrow a \tilde{R} c}$ $(\forall a,b,c \in A \quad (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R)$

$A = \{0,1,2,3\}$ $R = \{(0,0), (2,1), (1,2), (3,0)\}$

QUALI DELLE 4 PROPRIETÀ SONO SODDISFATTE?

$(1,1) \notin R$ R NON È RIFLESSIVA

$(0,3) \notin R$ ma $(3,0) \in R$ R NON È SIMMETRICA

$(2,1) \in R$; $(1,2) \in R$ ma $1 \neq 2$ R NON È ANTISIMMETRICA

$\underset{a\ b}{(2,1)} \in R$; $\underset{b\ c}{(1,2)} \in R$ ma $(2,2) \notin R$ R NON È TRANSITIVA

PAG DOPO

LEZIONE 2 - 05/03/2024

DEF: SIA $R \subseteq A \times A$ UNA RELAZIONE. DICIAMO CHE R È UNA RELAZIONE D'ORDINE (PARZIALE) SE È RIFLESSIVA, ANTISIMMETRICA E TRANSITIVA.

(I) $A = \{a,b,c\}$ $R \subseteq A^2$

$$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (c,c)\}$$

R È RIFLESSIVA. $\left.\begin{array}{l} a \tilde{R} b \text{ ma } b \not\tilde{R} a \\ a \tilde{R} c \text{ ma } c \not\tilde{R} a \end{array}\right\}$ ANTISIMMETRICA

$a \tilde{R} a \wedge a \tilde{R} b \Rightarrow a \tilde{R} b$ R È TRANSITIVA

- R È UNA RELAZIONE D'ORDINE (MA NON TOTALE: b e c NON SONO CONFRONTABILI)

(II) $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ IL $\leq$ DÀ UNA RELAZIONE D'ORDINE SU A.

$R_{\leq} = \{(a,b) \in A^2 \mid a \leq b\}$ $R_{\geq} = \{(a,b) \in A^2 \mid a \geq b\}$

SE SI CONSIDERANO IL $>$ E IL $<$, QUESTE NON SONO RELAZIONI D'ORDINE: NON SONO RIFLESSIVE POICHÉ, PER ESEMPIO, $1 \neq 1$.

QUESTE SONO RELAZIONI D'ORDINI TOTALI: POSSO SEMPRE METTERE IN RELAZIONE OGNI COPPIA DI ELEMENTI $\forall a,b \in A$ o $a \tilde{R} b$ o $b \tilde{R} a$

$A = P(I)$ $R = \{(S,T) \in P(I)^2 \mid S \subseteq T\}$ È UNA RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE

$[S \subseteq T \wedge T \subseteq S \Rightarrow T = S]$

$I = \{a, b, c\}$ $S = \{a\}$ $T = \{b\}$ $S \nsubseteq T$, $T \nsubseteq S$

DEFINIZIONE: SIA $R \subseteq A \times A$ UNA RELAZIONE. DICIAMO CHE R È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA SE È RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

PAG PRIMA

$R \subseteq \mathbb{Z}^2 = \{(a,b) \mid a-b$ è divisibile per $3\}$

DIMOSTRARE CHE R È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA

- RIFLESSIVA $\forall a \in \mathbb{Z}$ $(a,a) \in R$: $\forall a \in \mathbb{Z}$ $a - a = 0$ È DIVISIBILE PER 3 ✓
- SIMMETRICA $a, b \in \mathbb{Z} \mid a-b$ È DIVISIBILE PER 3:

  $a - b = 3k$ PER QUALCHE $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b - a = 3(-k) \Rightarrow (b,a) \in R$ ✓
- TRANSITIVITÀ $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

  $a - b = 3k$ $b - c = 3j$ $a - c = 3q \longrightarrow q = k + j$ ✓

  $\quad\quad\quad

⊛ RIPRENDE LA LEZIONE 2 DEFINIZIONE ⊛ 1 (PRIMA DI QUESTO)

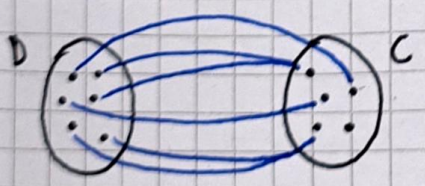
- SIA $(X, \preceq)$ UN INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO. $(X, \preceq)$: REL. D'ORDINE PARZIALE
  - UN ELEMENTO $a \in X$ SI DICE MASSIMO DI X SE $\forall x \in X$ SI HA $x \preceq a$.
  - UN ELEMENTO $b \in X$ SI DICE MINIMO DI X SE $\forall x \in X$ SI HA $b \preceq x$
- SIA $Y \subseteq X$. ANCHE Y RISULTA PARZIALMENTE ORDINATO DA $\preceq$.
- UN ELEMENTO $s \in X$ SI DICE ESTREMO SUPERIORE DI Y, E SI SCRIVE $s = Sup(Y)$, SE:
  i) $\forall y \in Y$ SI HA $y \preceq s$
  ii) SE $x \in X$ È TALE CHE $y \preceq x$ $\forall y \in Y$, ALLORA ANCHE $s \preceq x$
- UN ELEMENTO $t \in X$ SI DICE ESTREMO INFERIORE DI Y, E SI SCRIVE $t = Inf(Y)$, SE:
  i) $\forall y \in Y$ SI HA $t \preceq y$
  ii) SE $x \in X$ È TALE CHE $x \preceq y$ $\forall y \in Y$, ALLORA ANCHE $x \preceq t$

⊛ 1 DEFINIZIONI

- SIA X UN INSIEME E $\preceq$ UNA RELAZIONE D'ORDINE SU X. SI DICE CHE L'INSIEME X CON LA RELAZIONE $\preceq$ È UN INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO.
- DUE ELEMENTI x E y IN X SI DICONO CONFRONTABILI SE $x \preceq y$ OPPURE $y \preceq x$ (CIOÈ SE x È IN RELAZIONE CON y OPPURE IL CONTRARIO)
- UN INSIEME SI DICE TOTALMENTE ORDINATO SE È PARZIALMENTE ORDINATO E OGNI COPPIA DI ELEMENTI DI X È CONFRONTABILE (CIOÈ $\forall x, y$ ALLORA O $x \preceq y$ O $y \preceq x$).
  ↳ IN QUESTO CASO LA RELAZIONE SI DICE DI ORDINE TOTALE.

$(\mathbb{N}, \leq)$ È UN INSIEME TOTALMENTE ORDINATO

FUNZIONI



$f: \underset{\text{DOMINIO DI } f}{D} \mapsto \underset{\text{CODOMINIO DI } f}{C}$

$D \times C = \{(d, c) \mid f(d) = c\}$
$\cup\!\!\mid$

- UNA FUNZIONE $f: D \mapsto C$ È UNA RELAZIONE R_f TRA D e C TALE CHE $\forall d \in D \ \exists! c \in C$ PER CUI $d \sim_{R_f} c$
  ↳ UNA FUNZIONE, QUINDI, AD OGNI ELEMENTO DI D ASSOCIA UN UNICO ELEMENTO DI C

ESEMPI: $D = C = \mathbb{Z}$

- $R_1: a \underset{R_1}{\sim} b \iff 2b = a$ R_1 INDUCE UNA FUNZIONE TRA D e C?

$R_1 = \{(\underset{a}{\underset{\shortparallel}{2b}}, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ NON È UNA FUNZIONE POICHÉ IN $\mathbb{Z}$ 3 NON È ASSOCIATO AD ALCUN b.

- $R_2: a \underset{R_2}{\sim} b \iff b^2 = a$ $(b^2 \underset{R_2}{\sim} b)$

$R_2 = \{(b^2, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ NON È UNA FUNZIONE POICHÉ 9 È IN RELAZIONE SIA CON 3 CHE CON −3.

- $R_3: a \underset{R_3}{\sim} b \iff b = a+2$

$R_3 = \{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ INDUCE UNA FUNZIONE: $a \mapsto a+2$

- PER $d \in D$, $f(d) \in C$ È L'IMMAGINE DI d TRAMITE f.
- L'INSIEME $f(D) = \{c \in C \mid \exists d \in D$ PER CUI $c = f(d)\}$ È DETTO IMMAGINE DI f.
- L'INSIEME $f^{-1}(c) = \{d \in D \mid f(d) = c\}$ per $c \in C$ È DETTO FIBRA DI c.

DEFINIZIONE: SI CONSIDERI $f: D \mapsto C$ $\boxed{\text{INIETTIVITÀ / SURIETTIVITÀ}}$

- f È INIETTIVA SE PER OGNI ELEMENTO $c \in C$ $\exists$ AL PIÙ UN SOLO ELEMENTO $d \in D$ TALE CHE $f(d) = c$ $(\forall c \in f(D)\ \exists!\, d \in D \mid f(d) = c)$

  OPPURE $\forall x, y \in D$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- f È SURIETTIVA SE PER OGNI ELEMENTO $c \in C$ $\exists$ ALMENO UN ELEMENTO $d \in D$ TALE CHE $f(d) = c$

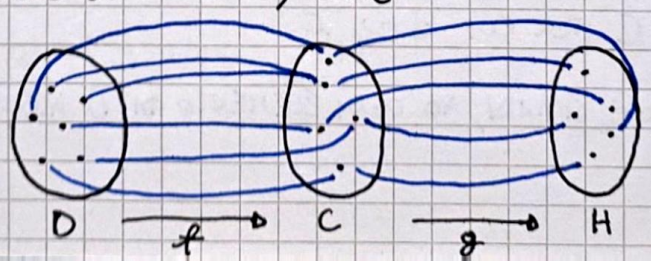
  OPPURE $\forall c \in C\ \exists d \in D \mid f(d) = c$

- f È BIIETTIVA SE È INIETTIVA E SURIETTIVA

COMPOSIZIONE

DATE DUE FUNZIONI $F: D \mapsto C$ e $G: C \mapsto H$ SI PUÒ DEFINIRE UNA FUNZIONE $G \circ F: D \mapsto H$, DETTA COMPOSIZIONE DI F CON G, COME:

$(G \circ F)(d) = G(F(d))$



- LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI È ASSOCIATIVA: $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$

$f(x) = 3x \quad g(x) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = 3(x^2+1) \qquad (g \circ f) = (3x)^2 + 1$

- QUANDO $f: D \mapsto G$ È INIETTIVA, POSSIAMO INVERTIRE LA RELAZIONE DATA DA f ALMENO PER QUEGLI ELEMENTI DI G CHE APPARTENGONO AD $f(D)$

$$g: f(D) \subseteq G \mapsto D$$
$$c \mapsto f(c) = d$$

$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = d; \quad f^{-1} \circ f = Id_D$ (DATO UN INSIEME D, LA FUNZIONE $Id_D: D \mapsto D$ DEFINITA DA $Id_D(d) = d$ $\forall d \in D$ È DETTA FUNZIONE IDENTICA)

TEOREMA

SIA $F: A \mapsto B$ UNA FUNZIONE BIETTIVA. ALLORA $\exists G: B \mapsto A \mid G \circ F = Id_A$ e $F \circ G = Id_B$

SE F È BIETTIVA, ALLORA F È SURIETTIVA $(F(A) = B)$ ED INIETTIVA.

OPERAZIONI E STRUTTURE ALGEBRICHE

OPERAZIONE

SIA DATO UN INSIEME S. UN'OPERAZIONE $*$ SU S È UNA FUNZIONE

$$*: S \times S \mapsto S$$
$$(s_1, s_2) \mapsto s_1 * s_2$$

- GLI INSIEMI $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ PRESENTANO LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO
- $\mathcal{P}(S)$ AMMETTE COME OPERAZIONI $\cup$ e $\cap$
- LA SOTTRAZIONE NON È UN'OPERAZIONE SU $\mathbb{N}$: $(1,2) \mapsto 1-2 = -1 \notin \mathbb{N}$

DIVAGAZIONE

- DATO UN INSIEME S DI SIMBOLI, ABBIAMO DEFINITO IL LINGUAGGIO O INSIEME DEI CODICI SU S COME L'INSIEME DI TUTTE LE STRINGHE FINITE ED ORDINATE DI ELEMENTI DI S. $S = \{'a', 'b', 'c', 'd', '+', '\sqcup'\}$
- "acd + bc" È UN ELEMENTO DEGLI INSIEMI DEI CODICI SU S: $Cod(S)$
- $Cod(S)$ AMMETTE UN'OPERAZIONE DI CONCATENAZIONE: DATO UN CODICE C_1 E UN CODICE C_2, FORMIAMO UN NUOVO CODICE UNENDO LE DUE STRINGHE:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \text{"acd"} \\ C_2 = \text{"}\sqcup + \sqcup bc\text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 C_2 = \text{"acd + bc"}$$

STRUTTURA ALGEBRICA

- UN INSIEME IN CUI SIA DEFINITO UNA O PIÙ OPERAZIONI SI CHIAMA STRUTTURA ALGEBRICA. LA NOTAZIONE È $(S, *)$.

- SIA $*: S^2 \mapsto S$ UN'OPERAZIONE. DICIAMO CHE È:
  - ASSOCIATIVA QUANDO $\forall a, b, c \in S \quad (a*b)*c = a*(b*c)$
    - $+, \cdot$ SONO ASSOCIATIVE SU $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
    - $-, /$ NON SONO ASSOCIATIVE SU $(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}-\{0\}, \mathbb{R}-\{0\}, \mathbb{C}-\{0\}$
    - $\circ$ È ASSOCIATIVA SU S^S: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
  - COMMUTATIVA QUANDO $\forall a, b \in S \quad a*b = b*a$
    - $+, \cdot$ SONO COMMUTATIVE SU $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
    - NON È COMMUTATIVA SU S^S
    - $\left(a \diamond b = \frac{a+b}{2}\right.$; MEDIA$\left.\right)$ È COMMUTATIVA

DEFINIZIONE: SIA $*$ UN'OPERAZIONE IN A: **ELEMENTO NEUTRO**

- UN ELEMENTO $e_s \in A$ SI DICE ELEMENTO NEUTRO A SINISTRA SE $\forall a \in A \quad e_s * a = a$
- UN ELEMENTO $e_d \in A$ SI DICE ELEMENTO NEUTRO A DESTRA SE $\forall a \in A \quad a * e_d = a$
- UN ELEMENTO $e \in A$ SI DICE ELEMENTO NEUTRO SE $\forall a \in A \quad e*a = a*e = a$
  - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ELEMENTI NEUTRI: $+$ HA LO 0, $\cdot$ HA L'1
  - $(S^S, \circ)$ HA COME ELEMENTO NEUTRO Id_S
  - $P(S)$ ELEMENTI NEUTRI: $\cup$ HA $\emptyset$, $\cap$ HA S

DEFINIZIONE: SIA $*$ UN'OPERAZIONE IN A DOTATA DI ELEMENTO NEUTRO e **INVERSO**

E SI FISSI UN ELEMENTO $a \in A$:

- UN ELEMENTO $\bar{a}_s \in A$ SI DICE INVERSO A SINISTRA DI a SE $\bar{a}_s * a = e$
- UN ELEMENTO $\bar{a}_d \in A$ SI DICE INVERSO A DESTRA DI a SE $a * \bar{a}_d = e$
- UN ELEMENTO $\bar{a} \in A$ SI DICE INVERSO DI a SE $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$
  - $(\mathbb{N}, +)$ HA UN INVERSO SOLO PER 0
  - $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ HANNO COME INVERSO PER a IL VALORE $-a$
  - $(S^S, \circ)$ HA COME ELEMENTI INVERTIBILI LE FUNZIONI BIIETTIVE

TEOREMA UNICITÀ ELEMENTO NEUTRO ED INVERSO

SIA A UN INSIEME DOTATO DI UN'OPERAZIONE ASSOCIATIVA $*: A^2 \mapsto A$ CHE PRESENTA UN ELEMENTO NEUTRO e. ALLORA:

1. L'ELEMENTO NEUTRO È UNICO
2. SIA $a \in A$ UN ELEMENTO CHE AMMETTE UN INVERSO, ALLORA ANCHE L'INVERSO È UNICO.

DIMOSTRAZIONE:

1. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists\, e_1 \neq e_2 \in A$ ELEMENTI NEUTRI. ALLORA $e_1 * e_2 = e_1$ ED $e_1 * e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$ $\quad (e_2 = e_1 * e_2 = e_1)$
2. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists\, a_1 \neq a_2 \in A$ INVERSI PER a. PER L'ASSOCIATIVITÀ SI HA:

$$a_1 = a_1 * e \underset{e = a * a_2 \text{ (INV.)}}{=} a_1 * (a * a_2) \underset{\text{ASSOCIATIVA}}{=} (a_1 * a) * a_2 \underset{a_1 * a = e \text{ (INVERSO)}}{=} e * a_2 = a_2 \quad \Rightarrow a_1 = a_2$$

MONOIDE

UN MONOIDE $(M, *)$ È UN INSIEME M DOTATO DI UNA OPERAZIONE $*$ TALE CHE:

- $*$ È ASSOCIATIVA
- $*$ È DOTATA DI ELEMENTO NEUTRO e (CHE È UNICO)

GRUPPO

UN GRUPPO $(G, *)$ È UN INSIEME G DOTATO DI UNA OPERAZIONE $*$ TALE CHE:

- $*$ È ASSOCIATIVA
- $*$ È DOTATA DI ELEMENTO NEUTRO e (CHE È UNICO)
- OGNI x AMMETTE INVERSO (CHE È UNICO) $(\forall x \in G \;\; \exists\, x^{-1} \in G \mid x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$

GRUPPO ABELIANO (COMMUTATIVO)

UN GRUPPO SI DICE ABELIANO O COMMUTATIVO SE $*$ È COMMUTATIVA.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ CON $+$ SONO MONOIDI CON EL. NEUTRO 0
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ CON $+$ SONO SONO GRUPPI CON EL. NEUTRO 0
- S^S È UN MONOIDE CON $\circ$ E CON EL. NEUTRO Id_S
- LE FUNZIONI BIIETTIVE IN S^S FORMANO UN GRUPPO CON $\circ$ E CON EL. NEUTRO Id_S
- $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ CON $\cdot$ SONO GRUPPI CON EL. NEUTRO 1

TEOREMA: SIA $(G, *, e)$ UN GRUPPO. ALLORA VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- IN UN GRUPPO L'ELEMENTO NEUTRO È UNICO.
- IN UN GRUPPO OGNI ELEMENTO HA UN UNICO INVERSO

} DAL TEOREMA DELLA PAG. PRECEDENTE

- VALE LA LEGGE DI CANCELLAZIONE $(a*b = a*c \Rightarrow b=c;\ a*b = c*b \Rightarrow a=c)$
- $\forall a,b \in G$ L'EQUAZIONE $a*x=b$ HA UNA ED UNA SOLA SOLUZIONE: $x = a^{-1}*b$

  (LO STESSO VALE PER $x*a=b$: $x = b*a^{-1}$) (UTILE PER $GL(n,\mathbb{R})$)
- $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}\ \forall a,b \in G$
- $(a^{-1})^{-1} = a\ \forall a \in G$

ANELLI

- UN ANELLO (UNITARIO) È UN INSIEME A DOTATO DI DUE OPERAZIONI $+$ E $\cdot$ E DI DUE ELEMENTI 0_A E $1_A \in A$ TALI CHE:
  - $(A, +)$ È UN GRUPPO ABELIANO DI ELEMENTO NEUTRO 0_A (E CON $\forall a \in A$ CON INVERSO)
  - $(A, \cdot)$ È UN MONOIDE DI ELEMENTO NEUTRO 1_A
  - VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\forall a,b,c \in A$ $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$
- INOLTRE L'ANELLO È DETTO COMMUTATIVO SE $(A, \cdot)$ È UN MONOIDE COMMUTATIVO.
- SI DICE CAMPO UN ANELLO COMMUTATIVO IN CUI OGNI ELEMENTO DIVERSO DA ZERO AMMETTE UN INVERSO PER $\cdot$ (RENDENDO $\cdot$ DI FATTO UN GRUPPO)
  ↳ ESCLUDENDO SOLO L'INVERSO DI ZERO

PROPOSIZIONE: SIA $(A, +, 0_A, \cdot, 1_A)$ UN ANELLO (UNITARIO). ALLORA:

- 0_A È L'UNICO ELEMENTO NEUTRO PER $+$
- 1_A È L'UNICO ELEMENTO NEUTRO PER $\cdot$
- $a \cdot 0_A = 0$
- SE a AMMETTE INVERSO PER $\cdot$, ALLORA $\forall b \in A \setminus \{0\}$ $a \cdot b \neq 0_A$

  (a NON È QUINDI UN DIVISORE DELLO 0)

- LE DIMOSTRAZIONI DEL 3° E DEL 4° PUNTO SONO PRESENTI NELLE SLIDE DELLA 4ª LEZIONE.

ESEMPIO: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ CON $+$ E $\cdot$, 0 E 1 SONO ANELLI COMMUTATIVI

LEZIONE 3 - 11/03/2024

- SIA $R \subseteq A \times A$. RICORDIAMO CHE R È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA SE È RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA. ESSA È INDICATA CON $\sim$: $a \sim b$.
- LA CLASSE DI EQUIVALENZA DI $a \in A$ È L'INSIEME $[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$

DEFINIZIONE: PARTIZIONE

DATO UN INSIEME X NON VUOTO, UNA PARTIZIONE DI X È UNA COLLEZIONE $\{X_i\}_{i \in I}$ DI SOTTOINSIEMI NON VUOTI DI X TALI CHE:

- $X_i \cap X_j = \emptyset$ SE $i \neq j$ (GLI X_i SONO INSIEMI DISGIUNTI)
- $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ (GLI X_i RICOPRONO X)
- $X_i \neq \emptyset$

TEOREMA

SE $\sim$ È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU X, ALLORA LE CLASSI DI EQUIVALENZA FORMANO UNA PARTIZIONE DI X:

1. $[a] \neq \emptyset \quad \forall a \in X$
2. $[a] \cap [b] = \emptyset$ SE $[a] \neq [b]$
3. $X = \bigcup_{a \in X} [a]$

DIMOSTRAZIONE: DIMOSTREREMO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

I. $a \in [a] \quad \forall a \in X \Rightarrow$ 1, 3

II. $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$

III. $a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \Rightarrow$ 2

I. $[a] = \{b \in X \mid a \sim b\}$. POICHÉ $\sim$ È RIFLESSIVA, $a \sim a \Rightarrow a \in [a]$

II. $\Leftarrow$: SE $[a] = [b]$, DAL PUNTO I $a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow b \sim a \Rightarrow a \sim b$ PER SIMMETRIA

$\Rightarrow$: ORA SI ASSUMA CHE $a \sim b$. ALLORA $\forall x \in [a]$, OSSIA $x \sim a$ e $a \sim b$ (PER IPOTESI), SI IMPLICA A CAUSA DELLA TRANSITIVITÀ $x \sim b$, E PERCIÒ $x \in [b]$. ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO L'INCLUSIONE $[a] \subseteq [b]$.

ANALOGAMENTE, $a \sim b$ IMPLICA $b \sim a$ PER SIMMETRIA, ARRIVANDO ALLA CONCLUSIONE CHE $[b] \subseteq [a]$.

(III) $\Rightarrow$: $a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

PER ASSURDO SI SUPPONGA CHE $\exists x \in [a] \cap [b]$, ALLORA:

- $x \sim a$ ($x \in [a]$) e $x \sim b$ ($x \in [b]$)
- $a \sim x$ PER SIMMETRIA
- $a \sim x$ e $x \sim b \Rightarrow a \sim b$ PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA

SIAMO ARRIVATI AD UN ASSURDO, POICHÉ $a \not\sim b$

$\Leftarrow$: $[a] \cap [b] = \emptyset \Rightarrow a \not\sim b$

PER ASSURDO SI SUPPONGA CHE $a \sim b$, ALLORA:

- $[a] = [b]$ PER IL PUNTO (II)
- $[a] \neq \emptyset$ PER IL PUNTO (I)

DUNQUE $[a] \cap [b] = [a] \neq \emptyset$. ASSURDO POICHÉ $[a] \cap [b] = \emptyset$

<u>DEFINIZIONE</u>: L'INSIEME DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA $X/_\sim = \{[a] \mid a \in X\}$ VIENE DETTO INSIEME QUOZIENTE DI X MODULO $\sim$.

<u>ESEMPIO</u>: $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(h,k) \sim (m,n) \Leftrightarrow hn = km$

POICHÉ $k, n \neq 0$, ALLORA $\frac{m}{n} = \frac{h}{k}$

LA RELAZIONE $\sim$ È:

- RIFLESSIVA: $(h,k) \sim (h \sim k)$ POICHÉ $hk = kh$
- SIMMETRICA: SE $(h,k) \sim (m,n)$ ALLORA $hn = km$ E QUINDI $mk = nh$, CIOÈ $(m,n) \sim (h,k)$
- TRANSITIVA: SE $(h,k) \sim (m,n)$ E $(m,n) \sim (a,b)$, ALLORA $\underline{(h,k) \sim (a,b)}$ E QUINDI $\underline{hb = ka}$ PER IPOTESI $hn = mk$ E $mb = na$, QUINDI $m = hn/k$ DA CUI $na/b = hn/k \Rightarrow na = hnb/k \Rightarrow \underline{hb = ka} \Rightarrow \underline{(h,k) \sim (a,b)}$

LA RELAZIONE $\sim$ È QUINDI DI EQUIVALENZA. SI CALCOLINO LE CLASSI DI EQUIVALENZA:

$[(h,k)] = \{(m,n) \mid (h,k) \sim (m,n)$, OSSIA $(m,n) \mid hn = km\} =$

$= \{(m,n) \mid h/k = m/n\} = h/k \Rightarrow$ LE CLASSI DI EQ. SONO I NUMERI $\mathbb{Q}$:

$$X/_\sim = \mathbb{Q} = \left\{ \frac{h}{k} \;\middle|\; \begin{matrix} h, k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

PER ESEMPIO $[(1,2)] \sim [(5,10)]$ POICHÉ $(1,2) \sim (5,10)$ $(1/2 = 5/10)$

DEFINIZIONE: SIA $n > 0$ UN INTERO POSITIVO. SI DICE CHE $a, b \in \mathbb{Z}$ SONO CONGRUI MODULO n E SI SCRIVE $a \sim_n b$ SE ESISTE UN $m \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $a - b = mn$, OSSIA SE $a-b$ È MULTIPLO DI n.

- $\boxed{a \sim_n b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z} \mid a - b = mn}$

ESEMPI:

$2 \sim_4 14$ PERCHÉ $2 - 14 = -12 = (-3) \cdot 4$

$4 \not\sim_4 14$ PERCHÉ $4 - 14 = -10 \Rightarrow$ NON MULTIPLO DI 4

$-2 \sim_4 14$ PERCHÉ $-2 - 14 = -16 = (-4) \cdot 4$

TEOREMA: LA CONGRUENZA MODULO n ($\sim_n$) È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA.

(DIMOSTRAZIONE PRESENTE NELLE SLIDE)

DEFINIZIONE: L'INSIEME QUOZIENTE DI $\mathbb{Z}$ MODULO $\sim_n$ VIENE DETTO INSIEME DELLE CLASSI DI RESTO MODULO n E DENOTATO CON $\mathbb{Z}_n$ O $\mathbb{Z}/n$

ESEMPI:

- $n = 2$: a PARI $\Rightarrow a \sim_2 0 \Rightarrow [a] = [0]$
  a DISPARI $\Rightarrow a \sim_2 1 \Rightarrow [a] = [1]$ $\Rightarrow \mathbb{Z}/2 = \{[0], [1]\}$
- $\mathbb{Z}/3 = \{[0], [1], [2]\}$ $\quad 0 \sim_3 3 \sim_3 6 \sim_3 9 \sim_3 \dots \quad 1 \sim_3 4 \sim_3 7 \sim_3 \dots \quad 2 \sim_3 5 \sim_3 8 \sim_3 \dots$
- IN GENERALE $\mathbb{Z}/n = \{[0], \dots, [n-1]\}$ HA n ELEMENTI. NELL'INSIEME $\mathbb{Z}/n$ POSSIAMO DEFINIRE DELLE OPERAZIONI "INDOTTE DA QUELLE DI $\mathbb{Z}$":
- **TEOREMA:** LE OPERAZIONI DI ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE IN $\mathbb{Z}$ SONO COMPATIBILI CON LA RELAZIONE DI CONGRUENZA MODULO n:

  SE $a \sim_n b$ E $c \sim_n d \Rightarrow a + c \sim_n b + d$ E $ac \sim_n bd$ (DIM. SULLE SLIDE)

- SONO QUINDI BEN DEFINITE LE OPERAZIONI:

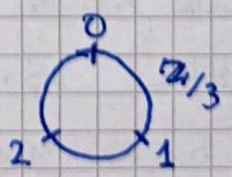
$$+_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \qquad [a] +_n [b] = [a+b]$$

$$\cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \qquad [a] \cdot_n [b] = [a \cdot b]$$

IN $\mathbb{Z}/3$ SI HA:

$[1] + [1] = [2]$, $[1] + [2] = [3] = [0]$

$[0]\,[1] = [0]$, $[2]\,[2] = [4] = [1]$



PROPRIETÀ EREDITATE DA $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

- $(\mathbb{Z}/n, +_n)$ È UN GRUPPO ABELIANO:
  - $+_n$ È ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA
  - $[0]$ È L'ELEMENTO NEUTRO (ED È UNICO)
  - $[a]$ HA COME INVERSO $[-a]$ (ED È UNICO)
- $(\mathbb{Z}/n, \cdot_n)$ È UN MONOIDE COMMUTATIVO:
  - $\cdot_n$ È ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA
  - $[1]$ È L'ELEMENTO NEUTRO
- VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DI $\cdot_n$ RISPETTO A $+_n$

$\Rightarrow$ DI CONSEGUENZA $(\mathbb{Z}/n, \cdot_n, +_n)$ È UN ANELLO COMMUTATIVO.

ESEMPI:

- IN $\mathbb{Z}/4$ SI HA $[2][2]=[4][0]$. ESISTONO QUINDI DUE ELEMENTI $\neq 0$ IL CUI PRODOTTO È 0. TALI ELEMENTI SONO CHIAMATI DIVISORI DELLO ZERO.
- IN $\mathbb{Z}/12$ $[3]$ e $[4]$ SONO DIVISORI DELLO ZERO: $[3][4]=[12]=[0]$

TEOREMA: $(\mathbb{Z}/n, +_n, \cdot_n)$ È UN CAMPO SE E SOLO SE n È PRIMO.

- UN CAMPO È UN ANELLO COMMUTATIVO IN CUI OGNI ELEMENTO $a \neq 0$ AMMETTE UN INVERSO b $(a \cdot b = 1)$
- UN NUMERO PRIMO È UN NUMERO NATURALE MAGGIORE DI 1 CHE NON HA DUE DIVISORI DISTINTI. ($p \in \mathbb{Z}$ È PRIMO $\overset{DEF.}{\Longleftrightarrow}$ GLI UNICI DIVISORI DI p SONO ± 1 E $\pm p$)

[DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE: FINE LEZIONE 3 E INIZIO 4]

LEZIONE 4 - 12/03/2024

NUMERI INTERI E DIVISIBILITÀ

DEFINIZIONE:

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ E $b \neq 0$. DICIAMO CHE b DIVIDE a $(b \mid a)$ QUANDO $a = b \cdot k$ PER QUALCHE $k \in \mathbb{Z}$.

$a = 15$ $b = -3 \Rightarrow b \mid a$ $\quad 15 = (-3)(-5)$

$a = -7$ $b = 2 \Rightarrow b \nmid a$ POICHÉ a È DISPARI

- PARLARE DI DIVISIBILITÀ HA SENSO IN $\mathbb{Z}$ POICHÉ $\mathbb{Z}$ È UN ANELLO CHE NON È UN CAMPO.
- NON HA SENSO INVECE PARLARE DI DIVISIBILITÀ IN $\mathbb{Q}$ POICHÉ È UN CAMPO:

  $\exists a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0 \mid b|a$ PER QUALSIASI VALORE DI a E b. INFATTI:

  $a = \underline{(a \cdot b^{-1})} \cdot b = k \cdot b$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA

TEOREMA

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ E $b \neq 0$. ALLORA $\exists!\, q \in \mathbb{Z}$ E $\exists!\, r \in \{0, 1, \dots, |b|-1\}$ TALI CHE $\underline{a = q \cdot b + r}$

OSSERVAZIONI

- $b|a \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow a = q \cdot b$
- $a|b \wedge b|a \Leftrightarrow a = \pm b$

DIMOSTRAZIONE:

- ESISTENZA: SUPPONIAMO $a \geq 0$, $b > 0$. SI DIMOSTRA PER INDUZIONE SU a, FISSATO b.
  - PASSO INIZIALE: $a = 0 \Rightarrow a = 0 = b \cdot 0 + 0$: $q = 0$ E $r = 0$
  - PASSO INDUTTIVO: ASSUMO CHE LA CONCLUSIONE SIA VERA FINO AD $a-1$ E LA DIMOSTRO PER a.

$$a = (a-1) + 1 \overset{P.I.}{=} (q'b + r') + 1 = q'b + (r'+1) \circledast$$

$$a - 1 = q'b + r' \quad r' \in \{0, 1, \dots, |b|-1\}$$

$\circledast$
- SE $r' < b-1 \Rightarrow r'+1 \leq b-1$ ✓
- SE $r' = b-1 \Rightarrow r'+1 = b \Rightarrow a = q'b + b = (q'+1)b + 0$ ✓

- UNICITÀ: (DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE) $\circledast$ 2! BISOGNA SAPERLA

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$ | DIVISIONE EUCLIDEA SULLA CONGRUENZA MODULO n

  $[a]_n$ = LA CLASSE DI EQUIVALENZA DI a PER LA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU $\mathbb{Z}$

  $a \sim_n b \Leftrightarrow n | a-b$
- SE PRENDO $k \in \mathbb{Z} \xRightarrow[\text{DIV. EU.}]{\text{ALG.}} k = l \cdot n + r$, $l \in \mathbb{Z}$ $\quad 0 \leq r \in \mathbb{Z} < n$

  $\Rightarrow k \sim_n r$ E $[k]_n = [r]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

MASSIMO COMUN DIVISORE

- FISSIAMO $a, b \in \mathbb{Z}$ DI CUI ALMENO UNO $\neq 0$. L'MCD È IL PIÙ GRANDE NUMERO INTERO POSITIVO d TALE CHE $d|a \wedge d|b$.

NOTAZIONE: $MCD(a,b)$

- $MCD(0,a) = a$

DEFINIZIONE: NUMERI COPRIMI

DUE NUMERI $a, b \in \mathbb{Z}$ SI DICONO RELATIVAMENTE PRIMI (O COPRIMI) SE $MCD(a,b) = 1$

TEOREMA: SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ DI CUI ALMENO UNO $\neq 0$. ALLORA:

① $\exists\, MCD(a,b)$

② $\exists\, n, k \in \mathbb{Z} \mid MCD(a,b) = na + bk$

③ SE $t \in \mathbb{Z}$ È UN NUMERO CHE $t|a \wedge t|b \Rightarrow t|MCD(a,b)$

- DIMOSTRANDO LA ② SI DIMOSTRA ANCHE CHE: $(\mathbb{Z}/n, +_n, \cdot_n)$ È UN CAMPO $\Leftrightarrow$ n PRIMO

PARTENDO DA QUESTO PRESUPPOSTO SI DIMOSTRA IL PUNTO ①. IN QUESTA LEZIONE IL PUNTO ② È STATO DIMOSTRATO ASSUMENDO LA ③, E VICEVERSA. NELLA PROSSIMA LEZIONE SI DIMOSTRERÀ LA ② SENZA UTILIZZARE LA ③, MA PIUTTOSTO USANDO IL TEOREMA FOND. DELL'ARITMETICA. (DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

LEZIONE 5 - 18/03/2024

ALGORITMO DI EUCLIDE: $a \geq b > 0$ (PRESUPPOSTO)

$a = qb + r : r = 0?$

- SÌ → $MCD(a,b) = b$
- NO → $MCD(a,b) = MCD(b,r)$ SOSTITUISCO a CON b E b CON r, E RIPARTO A CERCARE L'MCD

ESEMPIO:

$a = 39 > b = 27$

$$\left.\begin{array}{l} 39 = 1 \cdot 27 + 12 \\ a = q \cdot b + r \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 27 \\ b_1 = r = 12 \end{array} \Rightarrow MCD(a,b) = MCD(a_1, b_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 27 = 2 \cdot 12 + 3 \\ a_1 = q_1 \cdot b_1 + r_1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 12 \\ b_2 = r_1 = 3 \end{array} \Rightarrow MCD(a_1, b_1) = MCD(a_2, b_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 4 \cdot 3 + 0 \\ a_2 = q_2 \cdot b_2 + r_2 \end{array}\right| \Rightarrow r_2 = 0 \Rightarrow MCD(39,27) = MCD(a_2, b_2) = b_2 = 3$$

$(3 = n \cdot 39 + 27 \cdot K)$

DEFINIZIONE: SOTTOGRUPPO

SIA $(G, *)$ UN GRUPPO E H UN SOTTOINSIEME $\neq \emptyset$ DI G. H È UN SOTTOGRUPPO DI G SE:

- $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ (H È CHIUSO RISPETTO ALL'OPERAZIONE $*$)
- L'ELEMENTO NEUTRO e DI G APPARTIENE AD H.
- $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO IL SOTTOINSIEME $\mathbb{Z}$ DATO DA

$$2\mathbb{Z} = \{\text{INTERI PARI}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

DIMOSTREREMO CHE $2\mathbb{Z}$ È UN SOTTOGRUPPO DI $\mathbb{Z}$ RISPETTO ALL'OPERAZIONE $+$:

1) $+$ È UN'OPERAZIONE QUANDO È RISTRETTA A $2\mathbb{Z}$ (LA SOMMA DI NUMERI PARI È UN NUMERO PARI): $2m + 2n = 2(m+n) \in 2\mathbb{Z}$

2) $0 \in 2\mathbb{Z}$: $\quad 0 = 2 \cdot 0 \in 2\mathbb{Z}$

3) SE UN NUMERO $n \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow$ ANCHE IL SUO INVERSO ADDITIVO $\in 2\mathbb{Z}$:

SE $n \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow n = 2K, K \in \mathbb{Z} \Rightarrow -n = 2(-K) \in 2\mathbb{Z}$

ALTRO ESEMPIO: CONSIDERIAMO $\mathbb{Z}/4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$

$S = \{[0], [2]\}$ È UN SOTTOGRUPPO DI $(\mathbb{Z}/4, +_4)$

1) $+_4$ È CHIUSA: $[0] + [0] = [0] \in S$
$[0] + [2] = [2] + [0] = [2] \in S$
$[2] + [2] = [0] \in S$

2) $0 \in S$

3) $[0]^{-1} = [-0] \in S$; $[2]^{-1} = [-2] = [2] \in S$

TEOREMA:

① CONSIDERIAMO IL GRUPPO $(\mathbb{Z}, +)$. TUTTI I SUOI SOTTOGRUPPI SONO DELLA FORMA $d\mathbb{Z} = \{dK \mid K \in \mathbb{Z}\}$ PER UN OPPORTUNO $d \in \mathbb{Z}$

② FISSIAMO $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. CONSIDERIAMO IL GRUPPO $(\mathbb{Z}/n, +_n)$. TUTTI I SUOI SOTTOGRUPPI SONO DELLA FORMA $d\mathbb{Z}/n = \{[dK] \mid K \in \mathbb{Z}\}$ PER UN OPPORTUNO $d \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $d \mid n$.

(DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

NUMERO PRIMO

UN NUMERO $p \in \mathbb{Z}$ È PRIMO SE:

- $p \neq \pm 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ SE $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$ (LEMMA DI EUCLIDE)

NUMERO IRRIDUCIBILE

UN NUMERO $p \in \mathbb{Z}$ È IRRIDUCIBILE SE:

- $p \neq \pm 1$
- $\exists l, m \in \mathbb{Z} \mid p = l \cdot m \Rightarrow l = \pm 1 \vee m = \pm 1$ (O l O m È UN'UNITÀ)

- QUESTE 2 NOZIONI SONO LOGICAMENTE EQUIVALENTI IN $\mathbb{Z}$:

PROPOSIZIONE: SIA $p \in \mathbb{Z}$. ALLORA p È PRIMO $\Leftrightarrow$ p È IRRIDUCIBILE

(DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

SIA $(A, +, \cdot)$ UN ANELLO. DATI $a, p \in A$ DICIAMO CHE $p \mid a$ SE $\exists k \in A \mid a = p \cdot k$

ELEMENTO PRIMO: UN NUMERO $p \in A$ È PRIMO SE:

- p NON È INVERTIBILE (MOLTIPLICATIVAMENTE) IN A: $\nexists q \in A \mid qp = pq = 1$
- $\forall a, b \in A$ SE $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$

ELEMENTO IRRIDUCIBILE: UN NUMERO $p \in A$ È IRRIDUCIBILE SE:

- p NON È INVERTIBILE (MOLTIPLICATIVAMENTE) IN A: $\nexists q \in A \mid qp = pq = 1$
- $\exists l, m \in A \mid p = l \cdot m \Rightarrow l \vee m$ AMMETTONO INVERSO MOLTIPLICATIVO

ESEMPIO: SIA $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{\underset{\in \mathbb{C}}{a} + b\underset{i\sqrt{5} \in \mathbb{C}}{\sqrt{-5}} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. ALLORA:

$$6 = 2 \cdot 3$$
$$\parallel$$
$$(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 1 - (\sqrt{-5})^2$$

MOSTREREMO CHE 2 È IRRIDUCIBILE MA NON È PRIMO IN A.

- 2 È IRRIDUCIBILE: SE $2 = cd \Rightarrow 2 = |c| \cdot |d|$, DOVE $|p + \sqrt{-5}q| = \sqrt{p^2 + 5q^2} > 2$

  $\Rightarrow |c| = 1 \quad |d| = 1$

- 2 NON È PRIMO: $2 \mid 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

  $\overset{?}{\Rightarrow} 2 \mid 1+\sqrt{-5} \vee 2 \mid 1-\sqrt{-5}$? NO

TEOREMA: ESISTONO INFINITI NUMERI PRIMI IN $\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{INFINITI N. PRIMI}}$

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE ESISTANO SOLO UN NUMERO FINITO DI NUMERI PRIMI $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = P$

DEFINIAMO $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. DI CONSEGUENZA $N > p_k \Rightarrow N \notin P$

2 POSSIBILITÀ:
- N È PRIMO (IRRIDUCIBILE) (ASSURDO, TEOREMA VERIFICATO)
- N NON È PRIMO $\Rightarrow$ DEVE ESSERE DIVISIBILE PER UN NUMERO PRIMO.

SI DIMOSTRI CHE NESSUN NUMERO PRIMO $| N$. SE $p \in \mathbb{Z}$ È PRIMO $\Rightarrow p | N-1 = p_1, \dots, p_k$

$\Rightarrow p \nmid N$: SE $p | N-1 \wedge p | N \Rightarrow N-1 = p \cdot \ell \wedge N = p \cdot m$.

SI SOTTRAGGA ORA N AD $N-1$: $(N-1) - N = p\ell - pm = p(\ell - m) \Rightarrow$

$\Rightarrow p | p(\ell - m) \Rightarrow p | (N-1) - N$ MA CIÒ È ASSURDO POICHÉ

$(N-1) - N = -1$ E p, ESSENDO UN NUMERO PRIMO > 1, NON PUÒ DIVIDERE L'UNITÀ.

$\boxed{\text{TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA}}$

SIA $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$. ALLORA $\exists$ UNA FATTORIZZAZIONE DI n IN NUMERI PRIMI:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k \quad (p_i \text{ PRIMO } \forall i \in \mathbb{N})$$

INOLTRE, SE RACCOGLIAMO I NUMERI PRIMI CHE SONO UGUALI:

$$n = q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdot \dots \cdot q_j^{a_j} \quad (q_\ell \text{ PRIMO}, a_\ell \in \mathbb{Z} \wedge a_\ell \geq 1 \ \forall \ell \in \mathbb{N})$$

$\hookrightarrow q_\ell \neq q_{\ell'}$ SE $\ell \neq \ell'$)

MOLTEPLICITÀ DI q_1 NELLA FATTORIZZAZIONE DI n

TALE SCRITTURA È UNICA A MENO DI CAMBIARE L'ORDINE IN CUI COMPAIONO I q.

$\boxed{\text{MASSIMO COMUNE DIVISORE}}$

FISSIAMO $a, b \in \mathbb{Z}$ DI CUI ALMENO UNO $\neq 0$.

MCD: IL PIÙ GRANDE NUMERO INTERO POSITIVO d TALE CHE $d | a \wedge d | b$

SCRIVIAMO:
$$a = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \dots \cdot p_m^{c_m}$$
$$b = q_1^{d_1} \cdot q_2^{d_2} \cdot \dots \cdot q_m^{d_m}$$

$MCD(a,b) = s_1^{e_1} \cdot s_2^{e_2} \cdot s_3^{e_3} \cdot \dots \cdot s_t^{e_t}$ DOVE:

- s_i È UN PRIMO CHE DIVIDE SIA a CHE b
- $e_i = \min(c_j, d_r)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{CIOÈ } \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} \mid s_i = p_j \wedge \\ \exists r \in \{1, 2, \dots, m\} \mid s_i = q_r \end{array} \right.$

MINIMO COMUNE MULTIPLO

FISSIAMO $a, b \in \mathbb{Z}$, DI CUI ALMENO UNO $\neq 0$.

mcm: IL PIÙ PICCOLO NUMERO INTERO POSITIVO d TALE CHE $a|d \wedge b|d$

SCRIVIAMO: $a = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{c_m}$

$b = q_1^{d_1} \cdot q_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{d_m}$

$mcm(a,b) = f_1^{g_1} \cdot f_2^{g_2} \cdot \ldots \cdot f_t^{g_t}$ DOVE:

- f_i È UN PRIMO CHE DIVIDE a O DIVIDE b
- SE f_i DIVIDE SOLO a (b) $\Rightarrow$ g_i È UGUALE ALL'ESPONENTE DI f_i IN a (b).

  SE f_i DIVIDE ENTRAMBI $\Rightarrow$ g_i È IL MASSIMO TRA L'ESPONENTE DI f_i IN a E QUELLO DI f_i IN b.

LEZIONE 6 - 19/03/2024

GRUPPO DI VETTORI NELLO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$

DEFINIZIONE: SIA $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. L'INSIEME $\mathbb{R}^n$ È L'INSIEME I CUI ELEMENTI SONO n-UPLE DI NUMERI REALI, CIOÈ:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ TALI CHE } x_i \in \mathbb{R} \text{ PER OGNI } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

- PER DEFINIZIONE $\mathbb{R}^1$ È UGUALE ALL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$.
- GLI ELEMENTI DI $\mathbb{R}^n$ VENGONO CHIAMATI VETTORI.

ESEMPIO: SE $x, y, z \in \mathbb{R}$, ALLORA $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ È UN ELEMENTO DELLO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^3$ (MA NON DI $\mathbb{R}^n$ SE $n \neq 3$).

DEFINIZIONE: SU $\mathbb{R}^n$ SI DEFINISCE $+_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \ldots + \ldots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE: NON SI POSSONO SOMMARE DUE VETTORI CON UN NUMERO DI COMPONENTI DIVERSO

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; \nexists$$

ESEMPI: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE: $(\mathbb{R}^n, +)$ È UN GRUPPO ABELIANO

DIMOSTRAZIONE:

- ASSOCIATIVITÀ: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ SI HA $(x+y)+z = x+(y+z)$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1+z_1\\x_2+y_2+z_2\\\vdots\\x_n+y_n+z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1+z_1\\x_2+z_2\\\vdots\\y_n+z_n\end{pmatrix}=$$

$$(x+y)+z=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=x+(y+z)$$

- ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO: L'ELEMENTO NEUTRO e CORRISPONDE AL VETTORE NULLO 0 CON TUTTE LE COMPONENTI UGUALI A ZERO.

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

$$x+0=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+0\\x_2+0\\\vdots\\x_n+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+x_1\\0+x_2\\\vdots\\0+x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0+x$$

$$x+0 \quad = \quad x \quad = \quad 0+x$$

- ESISTENZA DELL'INVERSO: $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists y \in \mathbb{R}^n \mid x+y=0=y+x$

I COMPONENTI DI y SONO $-x_i$, OTTENENDO:

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\\vdots\\-x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_1\\x_2-x_2\\\vdots\\x_n-x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0$$

- COMMUTATIVITÀ: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad x+y=y+x$

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+x_1\\y_2+x_2\\\vdots\\y_n+x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=y+x$$

GRUPPO DELLE MATRICI $n \times m$ A COEFFICIENTE REALE $Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$

DEFINIZIONE: L'INSIEME $Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ DELLE MATRICI CON n RIGHE ED m COLONNE È:

$$Mat_{n\times m}(\mathbb{R})=\left\{A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix} \text{ TALI CHE } a_{ij}\in\mathbb{R}\ \forall ij\right\}$$

I NUMERI REALI a_{ij} VENGONO DETTI ENTRATE DELLA MATRICE. LA SCRITTURA $A=[a_{ij}]$ INDICA CHE A È UNA MATRICE LE CUI ENTRATE SARANNO CHIAMATE a_{11}, a_{12}, ecc.... L'ELEMENTO a_{ij} È L'ELEMENTO CHE SI TROVA NELLA RIGA i E NELLA COLONNA j.

ESEMPI: L'INSIEME $Mat_{n\times 1}(\mathbb{R})$ COINCIDE CON $\mathbb{R}^n$. INFATTI SE $A \in Mat_{n\times 1}(\mathbb{R})$, ALLORA:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{Mat_{n\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$; $a_{12} = 7$

- POSSIAMO PENSARE AD $A = [a_{ij}]$ COME $A = [\overset{1^a \text{ COL.}}{a_{(1)}}, \overset{2^a \text{ COL.}}{a_{(2)}}, \dots, \overset{\text{ULTIMA COL.}}{a_{(m)}}]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

IN $Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ASSOCIAMO I 3 VETTORI $a_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

DEFINIZIONE: SIA $A = [a_{ij}] \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$. LA MATRICE A SI DICE:

- QUADRATA SE $n = m$ (IL NUMERO DI RIGHE È UGUALE AL NUMERO DI COLONNE)
- DIAGONALE SE $n = m$ (È QUADRATA) E $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ (CIOÈ SE TUTTI GLI ELEMENTI SONO NULLI, TRANNE QUELLI SULLA DIAGONALE)
- TRIANGOLARE SUPERIORE SE $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ (CIOÈ SE TUTTI GLI ELEMENTI SOTTO LA DIAGONALE SONO NULLI)
- TRIANGOLARE INFERIORE SE $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ (CIOÈ SE TUTTI GLI ELEMENTI SOPRA LA DIAGONALE SONO NULLI)

ESEMPI: $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$: QUADRATA, NON DIAGONALE, TRIANGOLARE SUPERIORE MA NON INFERIORE

$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$: QUADRATA, NON DIAGONALE, NÉ TR. SUP. NÉ TR. INF.

TRASPOSTA: SE $A = [a_{ij}] \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$, LA MATRICE $B = [b_{ij}] \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ È DETTA TRASPOSTA DI A SE $b_{ij} = a_{ji}$ (SI SCAMBIANO LE RIGHE CON LE COLONNE).

LA MATRICE TRASPOSTA DI A È UNICA ED È INDICATA CON A^t.

OSSERVAZIONE: $(A^t)^t = A$ (SE SI TRASPONE DUE VOLTE UNA MATRICE SI TORNA ALLA MATRICE ORIGINALE)

ESEMPIO:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad x^t = (x_1 \ \dots \ x_m) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE: SE UNA MATRICE QUADRATA È SIMMETRICA, ALLORA ESSA SARÀ UGUALE ALLA SUA TRASPOSTA.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

DEFINIZIONE: UNA MATRICE QUADRATA $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ SI DICE:

- SIMMETRICA SE $A = A^t$ $(a_{ij} = a_{ji})$
- ANTISIMMETRICA SE $A^t = -A$ $(a_{ij} = -a_{ji})$

ESEMPI:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ NON È SIMMETRICA $a_{12} \neq a_{21}$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ È SIMMETRICA

DEFINIZIONE: SU $Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$ SI DEFINISCE $+ : Mat_{n \times m}(\mathbb{R}) \times Mat_{n \times m}(\mathbb{R}) \mapsto Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

- SI SOMMANO SOLO MATRICI CHE ABBIANO LO STESSO NUMERO DI RIGHE E DI COLONNE (OSSIA DELLA STESSA DIMENSIONE).

PROPOSIZIONE: $(Mat_{n \times m}(\mathbb{R}), +)$ È UN GRUPPO.

- DIMOSTRAZIONE ANALOGA A QUELLA DI $(\mathbb{R}^n, +)$
- L'ELEMENTO NEUTRO e È LA MATRICE NULLA CON TUTTE LE ENTRATE NULLE.
- LA MATRICE OPPOSTA DI A È $-A$, OSSIA LA MATRICE LE CUI ENTRATE SONO L'OPPOSTO DELLE ENTRATE DI A.

DEFINIZIONE PRODOTTO: SIA $A \in Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$, $B \in Mat_{m \times h}(\mathbb{R})$ (OSSIA IL NUMERO DI COLONNE DI A È IL NUMERO DI RIGHE DI B). ALLORA SI PUÒ DEFINIRE IL PRODOTTO $A \cdot B \in Mat_{n \times h}(\mathbb{R})$ COME:

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1} & \dots & a_{11}b_{1h} + a_{12}b_{2h} + \dots + a_{1m}b_{mh} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2m}b_{m1} & \dots & a_{21}b_{1h} + a_{22}b_{2h} + \dots + a_{2m}b_{mh} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nm}b_{m1} & \dots & a_{n1}b_{1h} + a_{n2}b_{2h} + \dots + a_{nm}b_{mh} \end{bmatrix}$$

- FORMALMENTE, SE $C = AB$, $A = [a_{rs}]$, $B = [b_{tu}]$, $C = [c_{vz}]$ SI HA:

$$c_{vz} = \sum_{t=1}^{m} a_{vt} b_{tz}$$

- IN PRATICA SI MOLTIPLICANO GLI ELEMENTI DI UNA RIGA DI A PER GLI ELEMENTI DELLA CORRISPONDENTE COLONNA IN B E SI SOMMANO TUTTI QUESTI PRODOTTI PER OTTENERE UN ELEMENTO DI AB.

ESEMPIO:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \neq BA \Rightarrow$$

IL PRODOTTO NON È COMMUTATIVO

OSSERVAZIONE: IL PRODOTTO FRA MATRICI NON È COMMUTATIVO

OSSERVAZIONE 2: SE SI CONSIDERANO MATRICI QUADRATE DELLA STESSA DIMENSIONE È SEMPRE POSSIBILE MOLTIPLICARLE FRA LORO, OTTENENDO ANCORA UNA MATRICE QUADRATA.

↳ IL PRODOTTO FRA MATRICI È QUINDI DEFINITA SULL'INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE.

PROPOSIZIONE: $(Mat_{m\times m}(\mathbb{R}), \cdot)$ È UN MONOIDE NON COMMUTATIVO. (MATRICI QUADRATE!)

PERCIÒ $\cdot$ È UN'OPERAZIONE ASSOCIATIVA DOTATA DI ELEMENTO NEUTRO.

DIMOSTRAZIONE ELEMENTO NEUTRO:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in Mat_{m\times m}(\mathbb{R})$$ È DETTA MATRICE IDENTITÀ

$\forall A \in Mat_{m\times m}(\mathbb{R})$ SI HA $A \cdot I = I \cdot A = A$

- CI SONO MATRICI CHE AMMETTONO UN'INVERSA RISPETTO AL PRODOTTO E ALTRE CHE INVECE NON LA AMMETTONO.

PROPOSIZIONE: L'INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE DI UNA CERTA DIMENSIONE CON LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO FRA MATRICI È UN ANELLO: $(Mat_{m\times m}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ È UN ANELLO.

- ESSENDOCI MATRICI NON INVERTIBILI (COME QUELLE CHE HANNO UNA RIGA O UNA COLONNA DI 0), QUESTO ANELLO NON È UN CAMPO.

DEFINIZIONE: SIA $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ UNA MATRICE QUADRATA. DICIAMO CHE A È UNA MATRICE INVERTIBILE SE $\exists B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot B = B \cdot A = I$. SCRIVIAMO CHE $B = A^{-1}$.

DEFINIZIONE: $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ È INVERTIBILE} \}$

$GL(n, \mathbb{R})$ È DUNQUE L'INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE $n \times n$ CHE SONO INVERTIBILI.

PROPOSIZIONE: $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ È UN GRUPPO NON COMMUTATIVO PER OGNI $n > 1$

OSSERVAZIONE: SE $A \in GL(n, \mathbb{R})$, ALLORA $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ E $(A^{-1})^{-1} = A$.

NOTARE CHE $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (TUTTI I REALI ESCLUSO LO ZERO)

ESEMPIO:

PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ LA MATRICE $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ È IL SUO STESSO INVERSO

PERCHÉ $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$

LEZIONE 7 - 25/03/2024

POLINOMI

SIA k UN CAMPO ($k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). DEFINIAMO I POLINOMI A COEFFICIENTI IN k (IN UNA VARIABILE)

$$k[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{\ell} a_i x^i \mid \ell \in \mathbb{N},\ a_i \in k\ \forall i = 0, \dots, \ell \right\}$$

- **GRADO:** È IL MASSIMO ESPONENTE DI x IN UN POLINOMIO TALE CHE IL SUO RELATIVO COEFFICIENTE SIA $\neq 0$. NOTAZIONE: $\deg P(x)$ = GRADO DI $P(x) \in \mathbb{N}$

- IN $k[x]$ POSSIAMO DEFINIRE 2 OPERAZIONI:

  1. $+ : k[x] \times k[x] \mapsto k[x]$
  2. $\cdot : k[x] \times k[x] \mapsto k[x]$

- $+ : k[x] \times k[x] \mapsto k[x]$ **SOMMA**

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\ell} p_i x^i \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j \qquad p_i, q_j \in k$$

$$P(x) + Q(x) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \dots + (p_n + q_n)x^n \quad \text{CON } n = \max(\ell, m)$$

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(\ell, m)} (p_k + q_k) \cdot x^k$$

ESEMPIO: $P(x) = 1 + 3x + 6x^2 + x^3 \quad Q(x) = -1 + 7x + 8x^2 + x^7$

$$P(x) + Q(x) = (1-1) + (3+7)x + (6+8)x^2 + (1+0)x^3 + (0+1)x^7 =$$
$$= 10x + 14x^2 + x^3 + x^7$$

- IN GENERALE $\deg P(x)+Q(x) \leq \max(\deg P(x), \deg Q(x))$

QUESTO PERCHÈ NELLA SOMMA I TERMINI DI GRADO MAGGIORE SI POSSONO SEMPLIFICARE

- PRODOTTO: $\cdot : k[x] \times k[x] \mapsto k[x]$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{l} p_i x^i \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j \qquad p_i, q_j \in k$$

$$P(x) \cdot Q(x) = p_0 \cdot q_0 + (p_1 \cdot q_0 + p_0 \cdot q_1)x + (p_2 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_0 \cdot q_2)x^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\max(l,m)} \left(\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \right) x^k$$

SI MOLTIPLICANO OGNI MONOMIO IN $P(x)$ CON OGNI MONOMIO IN $Q(x)$ E SI SOMMANO I COEFFICIENTI DEI MONOMI COSÌ OTTENUTI CHE HANNO UGUALE POTENZA IN x.

- IN GENERALE $\deg P(x)Q(x) = \deg P(x) + \deg Q(x)$

PROPOSIZIONE: SIA k UN CAMPO. ALLORA $(k[x], +, \cdot)$ È UN ANELLO COMMUTATIVO.

DIMOSTRAZIONE:

1. ELEMENTI NEUTRI PER $+$ E $\cdot$: SONO RISPETTIVAMENTE 0 E 1.
2. DIMOSTRARE CHE $(k[x], +, 0)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO.
3. DIMOSTRARE CHE $(k[x], \cdot, 1)$ È UN MONOIDE COMMUTATIVO.
4. VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\forall p(x), q(x), r(x) \in k[x]$

$$p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x)$$

(DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

TEOREMA: SIANO $P(x), S(x) \in k[x]$ CON $P(x) \neq 0$. ALLORA $\exists\, Q(x), R(x) \in k[x]$ t.c.:

1. $S(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$
2. SE $\deg P(x) > 0 \Rightarrow 0 \leq \deg R(x) < \deg P(x)$

   SE $\deg P(x) = 0 \Rightarrow R(x) = 0$

OSSERVAZIONE: SE $\deg P(x) = 0 \wedge P(x) \neq 0 \Rightarrow P(x) = \beta \in k^* = k \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ DATO $S(x) = \sum_{i=0}^{l} s_i x^i$ VALE $S(x) = Q(x) \cdot P(x)$ DOVE BASTA DEFINIRE

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{l} (s_i \cdot \beta^{-1}) x^i$$

DIVISIBILITÀ: $P(x) \mid S(x)$ SE $\exists\, Q(x) \in k[x] \mid S(x) = P(x) \cdot Q(x)$

(FUNZIONE DI VALUTAZIONE)

TEOREMA DI RUFFINI

SIA $\alpha \in k$ E SIA $S(x) \in k[x]$. ALLORA $S(\alpha) = 0$ (α È UNA RADICE DI $S(x)$)

$\Leftrightarrow \exists\, Q(x) \in k[x] \mid S(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x)$

DIMOSTRAZIONE

UTILIZZIAMO LA DIVISIONE EUCLIDEA DI $S(x)$ RISPETTO A $P(x) = (x-\alpha)$

$S(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x) + R(x) \qquad \deg R(x) = 0 < \deg(x-\alpha) = 1$

$\Rightarrow R(x) = \beta x^0$ (POLINOMIO CON SOLO TERMINE NOTO)

QUINDI $S(x) = (x-\alpha)\, Q(x) + \beta$ CON $\beta \in k$

ALLORA $S(\alpha) = 0 \Leftrightarrow S(\alpha) = (\cancel{\alpha-\alpha})\, Q(\alpha) + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

$\Leftrightarrow S(x) = Q(x)(x-a)$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

① $k = \mathbb{C}$. SIA $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. ALLORA $p(x)$ AMMETTE SEMPRE UNA RADICE. INOLTRE

$p(x) = \underset{\hookrightarrow \in \mathbb{C}^*}{\lambda}\, \overbrace{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_d)}^{\circledast} \qquad d = \deg P(x)$

OSSERVAZIONE: $(x-\alpha)$ È IRRIDUCIBILE PERCHÉ SE $(x-\alpha) = P(x)\,Q(x)$

$\Rightarrow P(x) \vee Q(x)$ DEVE AVERE GRADO 0 (E L'ALTRO AVRÀ GRADO 1)

$\Rightarrow P(x) \vee Q(x) = c\cdot x^0,\ c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ È INVERTIBILE (MOLTIPLICATIVAMENTE) $c\cdot x^0 \cdot c^{-1} x^0 = 1$

- $(x-\alpha)$ È ANCHE PRIMO: SEGUE DAL TEOREMA DI RUFFINI. INFATTI:

$(x-\alpha) \mid P(x)\,Q(x) \underset{\text{RUFFINI}}{\Longleftrightarrow} P(\alpha)\cdot Q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \vee Q(\alpha) = 0$

$\underset{\text{RUFFINI}}{\Leftrightarrow} (x-\alpha) \mid P(x) \vee (x-\alpha) \mid Q(x)$

$\circledast$ SONO POLINOMI PRIMI/IRRIDUCIBILI IN $\mathbb{C}$, E SONO GLI UNICI TALI.

② $k = \mathbb{R}$. SIA $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. ALLORA POSSO SEMPRE SCRIVERE

$p(x) = \underset{\in \mathbb{R}^*}{\mu}\, \overbrace{\underset{\in \mathbb{R}}{(x-\beta_1)}\underset{\in \mathbb{R}}{(x-\beta_2)}\dots\underset{\in \mathbb{R}}{(x-\beta_n)}\, q_1(x)\dots q_m(x)}^{\circledast} \qquad \deg p(x) = n + 2m$

POLINOMI DI GRADO 2 IN $\mathbb{R}[x]$ CHE NON HANNO RADICI IN $\mathbb{R}$

IN $\mathbb{C}[x] = (x-y)(x-\bar{y}),\ y \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

DEFINIZIONE: SIA k UN CAMPO. SIANO $a(x), b(x) \in k[x]$ POLINOMI NON NULLI.

L'MCD DI $a(x)$ E $b(x)$, OSSIA $MCD(a(x), b(x))$ È UN POLINOMIO $d(x)$ CHE:

① $d(x) \mid a(x) \wedge d(x) \mid b(x)$

② SE $t(x) \in k[x]$ È TALE CHE $t(x) \mid a(x) \wedge t(x) \mid b(x)$, ALLORA $t(x) \mid d(x)$

OSSERVAZIONE: QUESTA DEFINIZIONE RICHIEDE CHE $MCD(a(x), b(x))$ SIA IL PIÙ GRANDE POLINOMIO CHE DIVIDA SIA $a(x)$ CHE $b(x)$

TEOREMA: ALGORITMO EUCLIDEO DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE

PER OGNI COPPIA DI POLINOMI NON NULLI $a(x), b(x)$ ESISTE UN MCD $d(x)$.

ESISTONO INOLTRE DUE POLINOMI $h(x), k(x) \mid d(x) = a(x)h(x) + b(x)k(x)$

SISTEMI LINEARI

EQUAZIONE LINEARE: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$

$a_i \in \mathbb{R}$ (COEFFICIENTI) x_i (VARIABILI) $b \in \mathbb{R}$ (TERMINE NOTO)

UNA SOLUZIONE DI $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ SONO n NUMERI REALI ORDINATI $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ TALI CHE $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = b$

OSSERVAZIONE: LA STESSA DEFINIZIONE PUÒ ESSERE FISSATA PER QUALSIASI CAMPO

SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI:

- POSSIAMO CONSIDERARE CONTEMPORANEAMENTE n EQUAZIONI IN n INCOGNITE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

SOLUZIONE: n NUMERI REALI ORDINATI $(v_1, \dots, v_n)$ $\forall i = 1, \dots, m$ $a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = b_i$

- IL SISTEMA PUÒ ESSERE RISCRITTO COME $A\underline{x} = \underline{b}$ DOVE:

$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})$ $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ MATRICE DEI COEFFICIENTI

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ VETTORE DELLE VARIABILI

$\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ VETTORE DEI TERMINI NOTI

ESEMPIO:

FORMA MATRICIALE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

ALLORA: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$

SOLUZIONI DI SISTEMI LINEARI

DATI $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ LA FORMA MATRICIALE DI UN SISTEMA DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE.

DEFINIZIONE: UN VETTORE $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ È UNA SOLUZIONE DI $A\underline{x} = \underline{b}$ SE $A\underline{v} = \underline{b}$

- IL SISTEMA LINEARE $A\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE SE AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE, IN CASO CONTRARIO DIREMO CHE NON È RISOLUBILE (O IMPOSSIBILE).

⊛1|F1

- $A\underline{x} = \underline{b}$ QUANTE SOLUZIONI PUÒ AVERE?

TEOREMA: DATI $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ CONSIDERIAMO IL SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI IN n INCOGNITE $A\underline{x} = \underline{b}$. ALLORA UNA SOLA DELLE SEGUENTI AFFERMAZIONI È CORRETTA:

- $A\underline{x} = \underline{b}$ NON AMMETTE SOLUZIONI
- $A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE
- $A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE INFINITE SOLUZIONI

LEZIONE 8 - 26/03/2024

⊛2|F1

MATRICE A SCALINI

SONO MATRICI (NON NECESSARIAMENTE QUADRATE) TALI CHE AD OGNI RIGA AUMENTINO SEMPRE PIÙ IL NUMERO DI ENTRATE INIZIALI CHE SONO 0.

- UNA MATRICE QUADRATA A SCALINI È TRIANGOLARE SUPERIORE

ESEMPIO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

I NUMERI CERCHIATI SONO DETTI $\boxed{\text{PIVOT.}}$

(SONO I PRIMI ELEMENTI NON NULLI CHE SI INCONTRANO IN OGNI RIGA DI UNA MATRICE A SCALINI)

RIDUZIONE A SCALINI

CON QUESTA OPERAZIONE VOGLIAMO PRENDERE UNA MATRICE M E RIDURLA AD UNA MATRICE A SCALINI TRAMITE UN PROCEDIMENTO "CONTROLLATO".

SONO CONSENTITI 3 TIPI DI OPERAZIONE:

- R_{ij}: SCAMBIO DELLA RIGA i-ESIMA DI M CON LA RIGA j-ESIMA DI M
- $\alpha \cdot R_i$: MOLTIPLICA LA RIGA i-ESIMA DI M PER $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$
- $R_i + \alpha R_j$: SOMMO ALLA RIGA i-ESIMA DI M α VOLTE LA RIGA j-ESIMA DI M

TUTTE QUESTE OPERAZIONI SONO INVERTIBILI. (ESEMPI SULLE SLIDE)

RANGO

- DATA UNA MATRICE M $m \times n$ POSSIAMO DEFINIRE RANGO DI M, $rk(M)$, COME IL NUMERO DI SCALINI DI UNA RIDUZIONE A SCALINI M' DI M.
  - ↳ È QUINDI UGUALE AL NUMERO DI PIVOT.
- IL RANGO È BEN DEFINITO IN QUANTO NON DIPENDE DALLA RIDUZIONE A SCALINI CHE OTTENIAMO. OSSIA, SE M' ED M'' SONO 2 DISTINTE RIDUZIONI A SCALINI DI UNA MATRICE $M \Rightarrow$ # PIVOT M' = # PIVOT M''

TEOREMA DI ESISTENZA DI SOLUZIONI

MATRICE COMPLETA

DATI $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ CONSIDERIAMO IL SISTEMA DI m EQUAZIONI IN n VARIABILI $A\underline{x} = \underline{b}$.

SI DICE MATRICE COMPLETA $(A \mid \underline{b}) \in Mat_{m \times (n+1)}$

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

DATO $A\underline{x} = \underline{b}$ E FORMATA LA MATRICE COMPLETA $(A \mid \underline{b})$, SI PARTE DA TALE MATRICE E LA SI TRASFORMI IN UNA MATRICE A SCALINI $(A' \mid \underline{b}')$ CON TUTTI 1 COME PIVOT, USANDO LE 3 OPERAZIONI INTRODOTTE PER LA RIDUZIONE A SCALINI.

⊛ 3|E1 →

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

DATI $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ UN SISTEMA LINEARE. ALLORA

$A\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE $\Longleftrightarrow rk(A) = rk((A \mid \underline{b}))$

↳ # PIVOT $(A \mid \underline{b})$ = # PIVOT DI A' = # PIVOT DI A = # PIVOT $(A' \mid \underline{b}')$

↳ RIDOTTE A SCALINI

- $A\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE $\Longleftrightarrow$ $A'\underline{x} = \underline{b}'$ È RISOLUBILE.
- SE $\exists$ LE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = b$, ESSE SARANNO LE STESSE DI $A'\underline{x} = \underline{b}'$

⊛4|F1

TEOREMA:

SIA $\underset{m \times n}{A}\underline{x} = \underline{b}$ (m EQUAZIONI, n INCOGNITE) UN SISTEMA LINEARE. ASSUMIAMO CHE ESSO SIA RISOLUBILE (OSSIA $rk(A) = rk(A|b)$), ALLORA:

① LA SOLUZIONE È UNICA $\Longleftrightarrow$ $rk(A)$ = NUMERO VARIABILI $(= rk(A|b))$

② CI SONO ∞ SOLUZIONI $\Longleftrightarrow$ $rk(A)$ < NUMERO VARIABILI.

IN QUESTO CASO LE SOLUZIONI DIPENDERANNO DA [# VARIABILI − $rk(A)$] PARAMETRI.

- $\boxed{\underset{m \times n}{rk(A)} \leq \min(m, n)}$

OSSERVAZIONE: ⊛3|F1

- SE L'ULTIMO PIVOT COMPARE A DESTRA DELLA BARRA, OSSIA NELLA PARTE DELLA MATRICE COMPLETA CHE CORRISPONDE AL VETTORE DEI TERMINI NOTI, ALLORA IL SISTEMA NON SARÀ RISOLUBILE IN QUANTO SI OTTIENE UN'EQUAZIONE DELLA FORMA:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \qquad b \neq 0$$

- INOLTRE, PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI, IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA SARÀ MAGGIORE DI QUELLO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI.

ESEMPIO:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 0x - y = 0 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE} \qquad rk\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq rk\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

→ PIVOT A DESTRA DELLA BARRA

$$\min(m, n) = 2 \neq \#\text{PIVOT} = 3$$

⊛1|F2

LEZIONE 9 - 08/04/2024

CALCOLO DELLE SOLUZIONI

SIA $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ UN SISTEMA LINEARE. CHIAMIAMO $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ (VETTORE NULLO) SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 6y = 0 \end{cases} \quad \text{SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO}$$

UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO È SEMPRE RISOLUBILE. INFATTI, PONENDO TUTTE LE VARIABILI UGUALI A ZERO SI OTTIENE SEMPRE UNA SOLUZIONE.

TEOREMA PER IL CALCOLO DELLE SOLUZIONI

SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ UN SISTEMA LINEARE IN m EQUAZIONI ED n INCOGNITE. ASSUMIAMO CHE $A\underline{x} = \underline{b}$ SIA RISOLUBILE E CHE $\underline{v_0} \in \mathbb{R}^n$ SIA UNA SOLUZIONE.

ALLORA TUTTE LE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = \underline{b}$ SONO DELLA FORMA $\underline{v_0} + \underline{w}$ DOVE $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ È UNA QUALUNQUE SOLUZIONE DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO.

⊛2|F2 (+ DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

SISTEMI QUADRATI

SI CONSIDERI ORA UN SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$ QUADRATO, OSSIA DOVE IL NUMERO DELLE EQUAZIONI È UGUALE A QUELLO DELLE INCOGNITE ED È PERCIÒ UGUALE AD n, CON $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

TRA LE MATRICI $n \times n$ ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA UN SOTTOINSIEME SPECIALE:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid M \text{ È INVERTIBILE} \}$$

TEOREMA: SI CONSIDERI UN SISTEMA QUADRATO $\underset{n\times n}{A}\,\overset{n\times 1}{\underline{x}} = \overset{n\times 1}{\underline{b}}$ E SI ASSUMA CHE $A \in GL_n(\mathbb{R})$. ALLORA IL SISTEMA LINEARE AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE DATA DA: $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

DIMOSTRAZIONE: POICHÉ $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists A^{-1}$ (INVERSA).

$$A\underline{x} = \underline{b} \xrightarrow{\cdot A^{-1}} \underbrace{A^{-1}\cdot A\cdot \underline{x}}_{\text{PR. ASSOCIATIVA: } (A^{-1}\cdot A)\cdot \underline{x} = Id_n \cdot \underline{x} = \underline{x}} = A^{-1}\cdot \underline{b} \longrightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

OSSERVAZIONE: IL TEOREMA CI DICE CHE IL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE (CON UN'UNICA SOLUZIONE) QUALUNQUE SIA $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

DATA UNA MATRICE $A_{n\times n}$, BISOGNA CAPIRE QUANDO È POSSIBILE TROVARE UNA MATRICE $B_{n\times n}$ TALE CHE $BA = Id_n \wedge AB = Id_n$

DETERMINANTE DATA UNA MATRICE A QUADRATA ($\in Mat_{n\times n}$), È POSSIBILE CALCOLARE IL DETERMINANTE DI A ($\det(A)$) CHE È UN NUMERO REALE CHE CI DICE QUANDO A È INVERTIBILE O MENO.

DEFINIZIONE DEL DETERMINANTE

- $n=1$ $\quad A = [a_{11}] \quad \det(A) = a_{11}$

- $n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det(A) = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$ (diagonale > - diagonale <)

- $n=3$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

SI PROCEDA SCEGLIENDO UNA RIGA (O UNA COLONNA) FISSATA: IN QUESTO CASO LA PRIMA. SI CANCELLINO SEQUENZIALMENTE LE COLONNE CONSIDERANDO LE MATRICI 2×2 RIMASTE.

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- $n>3$

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

NOTAZIONE: A_{ij} È LA SOTTOMATRICE DELLA MATRICE A OTTENUTA RIMUOVENDO LA RIGA i E LA COLONNA j DI DIMENSIONI $(n-1)\times(n-1)$

$$\underset{(n-1)\times(n-1)}{A_{11}} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

SI RIMUOVE LA PRIMA RIGA E LA PRIMA COLONNA

- SVILUPPO DEL DETERMINANTE RISPETTO ALL'i-ESIMA RIGA:

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}\det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}\det(A_{i3}) + \\ + \ldots + a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A_{in})$$

- SVILUPPO DEL DETERMINANTE RISPETTO ALLA j-ESIMA COLONNA:

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{2+j}\det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{3+j}\det(A_{3j}) + \\ + \dots + a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det(A_{nj})$$

OSSERVAZIONE PERSONALE:

NON È IMPORTANTE SE SI PROCEDE NEL CALCOLO DEL DETERMINANTE FISSANDO UNA RIGA O UNA COLONNA: IL SUO VALORE RIMARRÀ INVARIATO. PER QUESTO MOTIVO CONVIENE SCEGLIERE LA RIGA O LA COLONNA CHE PRESENTA PIÙ ZERI, FACILITANDO DI CONSEGUENZA I CALCOLI (SE CI SONO n ZERI, SI DOVRANNO CALCOLARE n "SOTTODETERMINANTI" IN MENO).

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- IL DETERMINANTE È INDIPENDENTE DAL MODO IN CUI LO SI CALCOLA (PER RIGHE, PER COLONNE ED INDIPENDENTE DALLA RIGA/COLONNA SCELTA).
- SE LA MATRICE È TRIANGOLARE SUPERIORE O INFERIORE, ALLORA IL DETERMINANTE È:

  $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
- SE A CONTIENE UNA RIGA O UNA COLONNA DI $0 \Rightarrow \det(A) = 0$
- SE A CONTIENE DUE RIGHE O DUE COLONNE CHE SONO PROPORZIONALI

  $\Rightarrow \det(A) = 0$
- $rk(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

  n È IL MASSIMO VALORE POSSIBILE PER $rk(A)$ QUANDO A È $n \times n$ $(rk(A) \leq \min(m, n))$

TEOREMA DI BINET: SIANO A, B DUE MATRICI $n \times n$:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

CONSEGUENZA:

SE $A \in GL_n(\mathbb{R})$, CIOÈ SE $\exists A^{-1} \mid A \cdot A^{-1} = Id_n = A^{-1} \cdot A$, ALLORA

$$\det(A \cdot A^{-1}) \overset{T}{\underset{B}{=}} \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\| $$

$$\det(Id_n) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$ • IN PARTICOLARE $\det(A) \neq 0$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ: A MATRICE $n \times n$

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$\exists A^{-1}$ L'INVERSA

TEOREMA DI RISOLUZIONE:

SIA A UNA MATRICE QUADRATA $n \times n$. ASSUMIAMO CHE $\det(A) \neq 0$ ($\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$)

ALLORA $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE: $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

OSSERVAZIONE:

QUANDO IL $\det(A) = 0$ NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA SULLA RISOLUBILITÀ DI $A\underline{x} = \underline{b}$: DIPENDE DAL VALORE DI $\underline{b}$.

ESEMPIO: VEDERE ⊛1 | F1

SIA IL PUNTO (II) CHE (III) HANNO PER MATRICE DEI COEFFICIENTI $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

$\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$. NEL CASO (II) PERÒ IL SISTEMA NON È RISOLUBILE MENTRE NEL CASO (III) AMMETTE ∞ SOLUZIONI: QUESTO PERCHÉ I DUE VETTORI $\underline{b}$ SONO DIVERSI.

MATRICE INVERSA

- SIA $B = A^{-1}$ E SIANO ENTRAMBE DI DIMENSIONI $n \times n$. LE ENTRATE b_{ij} DI B SONO:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

A_{ji}: MATRICE OTTENUTA DA A CANCELLANDO LA j-ESIMA RIGA E LA i-ESIMA COLONNA (i E j SONO INVERTITI QUI).

↳ POICHÉ $\det(A)$ SI TROVA AL DENOMINATORE, LA MATRICE SARÀ INVERTIBILE SE E SOLO SE $\det(A) \neq 0$.

METODO PER IL CALCOLO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ MATRICE $n \times n$ CON $\det(A) \neq 0$

- CALCOLO DELL'INVERSA A^{-1}:

① CALCOLO DELLA MATRICE DEI COFATTORI

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & (-1)^{1+2}\det(A_{12}) & \dots & (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) \\ (-1)^{2+1}\det(A_{21}) & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & \dots & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) \\ \vdots & \vdots & (-1)^{i+j}\det(A_{ij}) & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) & \dots & (-1)^{n+n}\det(A_{nn}) \end{bmatrix}$$

A_{ij} = MATRICE $(n-1) \times (n-1)$ OTTENUTA TOGLIENDO DA A LA RIGA i E LA COLONNA j

② SCRIVO LA TRASPOSTA $Cof(A)^T$

③ PONGO $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Cof(A)^T$

⊛3 | F2

METODO DI CRAMER

- SI CONSIDERI UN SISTEMA LINEARE QUADRATO $A\underline{x} = \underline{b}$. ABBIAMO VISTO CHE SE IL $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$
- LA REGOLA DI CRAMER CI DÀ UN ULTERIORE METODO PER TROVARE LE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = \underline{b}$ SENZA DOVER CALCOLARE A^{-1}.

REGOLA DI CRAMER

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ È DATA DALLA FORMULA:

i-ESIMA COORDINATA DELLA SOLUZIONE

$$x_i = \frac{\det(\bar{A}_i)}{\det(A)}$$

MATRICE OTTENUTA SOSTITUENDO IN A AL POSTO DELLA COLONNA i IL VETTORE COLONNA $\underline{b}$

ALTERNATIVA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA (GAUSS - JORDAN)

SI CONSIDERI UNA QUALSIASI MATRICE $A \in GL_n(\mathbb{R})$. PARTENDO DA A SI FORMI $(A \mid Id_n)$ E SI AGISCA SULLE RIGHE TRAMITE LE OPERAZIONI DEL METODO DI GAUSS FINO A CHE A SINISTRA DELLA BARRA SI OTTENGA L'IDENTITÀ.

$$(A \mid Id_n) \xrightarrow[\text{METODO DI GAUSS}]{\text{OPERAZIONI}} (Id_n \mid A^{-1}) \quad \cdots \quad \circledast \begin{cases} R_{ij} \\ \alpha \cdot R_i \quad \alpha \neq 0 \\ R_i + \beta R_j \end{cases}$$

LA MATRICE OTTENUTA A DESTRA DELLA BARRA È L'INVERSA DI A.

LEZIONE 10 - 22/04/2024

SPAZIO VETTORIALE

SIA $(\mathbb{K}, +_K, \cdot_K)$ UN CAMPO. UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$ È UN INSIEME NON VUOTO V DOTATO DI UN'OPERAZIONE DI SOMMA

$$+_V : V \times V \mapsto V \quad (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mapsto \underline{v}_1 +_V \underline{v}_2 \quad (v_1 + v_2)$$

E DI UN'OPERAZIONE DI PRODOTTO PER UNO SCALARE

$$\cdot_V : \mathbb{K} \times V \mapsto V \quad (\lambda, \underline{v}) \mapsto \lambda \cdot_V \underline{v} \quad (\lambda \cdot \underline{v})$$

CHE SODDISFANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \wedge \forall \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ PR. ASSOCIATIVA
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ PR. COMMUTATIVA

③ $\exists\, 0_V \in V \mid v + 0_V = 0_V + v = v \quad \forall v \in V$ ELEMENTO NEUTRO

④ $\exists\, -v \in V \mid v + (-v) = (-v) + v = 0_V \quad \forall v \in V$ INVERSO MOLTIPLICATIVO

- CONSEGUENTEMENTE ALLE PRIME 4 PROPRIETÀ $(V, +_V)$ È UN GRUPPO ABELIANO

⑤ $\underbrace{(\lambda_1 +_K \lambda_2)}_{\text{SOMMA IN } \mathbb{K}} \cdot v = \underbrace{\lambda_1 v +_V \lambda_2 v}_{\text{SOMMA IN } V}$ PR. DISTRIBUTIVA DELLA + NEL CAMPO

⑥ $\lambda (v_1 +_V v_2) = \lambda v_1 +_V \lambda v_2$ PR. DISTRIB. DELLA + NELLO SPAZIO VETTORIALE

⑦ $\underbrace{(\lambda_1 \cdot_K \lambda_2)}_{\text{PRODOTTO IN } \mathbb{K}} v = \lambda_1 \underbrace{(\lambda_2 \cdot v)}_{\in V}$ PR. DISTRIBUTIVA DEI PRODOTTI

⑧ $1_K \cdot v = v$ PR. UNITARIA DEI PRODOTTI (1_K È L'UNITÀ MOLTIPLICATIVA IN $\mathbb{K}$)

- SI DICE CHE V È SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ O CHE V È $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE.

GLI ELEMENTI DI V SONO DETTI VETTORI E GLI ELEMENTI DI $\mathbb{K}$ SCALARI.

SI PROCEDE DIMOSTRANDO CHE I GRUPPI ABELIANI VISTI FINO AD ORA SIANO SPAZI VETTORIALI.

VETTORI

- SIA $V = \mathbb{K}^n$ E DEFINIAMO UN'OPERAZIONE DI SOMMA TRA GLI ELEMENTI DI V PONENDO

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

E UN'OPERAZIONE DI PRODOTTO TRA ELEMENTI DEL CAMPO $\mathbb{K}$ ED ELEMENTI DI V PONENDO

$$\lambda (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in V$$

- È IMMEDIATO DIMOSTRARE CHE V, CON LE OPERAZIONI APPENA DEFINITE, SIA UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$

MATRICI

- SI CONSIDERI IL GRUPPO ABELIANO ABELIANO $Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$ CON L'OPERAZIONE

$$+ : Mat_{n \times m}(\mathbb{K}) \times Mat_{n \times m}(\mathbb{K}) \longmapsto Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \longrightarrow [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

- PER DARGLI UNA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE SI INVENTA UN'OPERAZIONE DI PRODOTTO

$$\cdot : \mathbb{K} \times Mat_{n \times m}(\mathbb{K}) \longmapsto Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$$

$$(\lambda, [a_{ij}]) \longmapsto [\lambda a_{ij}]$$

CON QUESTE OPERAZIONI $Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$ È UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE

POLINOMI

- I POLINOMI $(\mathbb{K}[x], +)$ SONO UN GRUPPO ABELIANO (DIMOSTRAZIONE NELLA LEZIONE 7).

QUINDI PER AVERE UNO SPAZIO VETTORIALE SI DEVE DEFINIRE UN'OPERAZIONE

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \longmapsto \mathbb{K}[x]$$

$$(\lambda, \underset{\substack{\| \\ a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}}{p(x)}) \longmapsto \lambda p(x) = \overbrace{\lambda p_n}^{\text{PRODOTTO IN } \mathbb{K}} x^n + \lambda p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lambda p_1 x + \lambda p_0$$

CON $a_i \in \mathbb{K}$ UNO SCALARE

- ANCHE IN QUESTO CASO È FACILE VERIFICARE LE CONDIZIONI PER UNO SPAZIO VETTORIALE

FUNZIONI

- SIA S UN INSIEME NON VUOTO E INDICHIAMO CON $\mathbb{K}^S$ L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI $f : S \longmapsto \mathbb{K}$ $\quad (S = \{a, b, c\} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/7, \ldots)$

DATE DUE FUNZIONI $f, g \in \mathbb{K}^S$ POSSIAMO DEFINIRE LA LORO SOMMA $(s \in S)$

$$\underbrace{(f+g)}_{\text{SOMMA IN } \mathbb{K}^S}(s) = \underbrace{f(s) + g(s)}_{\text{SOMMA IN } \mathbb{K}}$$

E IL PRODOTTO DI f PER UNO SCALARE $\lambda \in \mathbb{K}$ COME

$$\underbrace{(\lambda f)}_{\text{PRODOTTO IN } \mathbb{K}^S}(s) = \underbrace{\lambda (\underbrace{f(s)}_{\in \mathbb{K}})}_{\text{PRODOTTO IN } \mathbb{K}}$$

- L'INSIEME $\mathbb{K}^S$ È UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ 3 E 4:

3) $0_{\mathbb{K}^S} : S \longmapsto \mathbb{K}$ MANDA OGNI ELEMENTO $s \in S$ IN $0_{\mathbb{K}^S}$ (LA FUNZIONE NULLA):

$0_{\mathbb{K}^S}(s) = 0_{\mathbb{K}^S}$. ALLORA $0_{\mathbb{K}^S}$ È L'ELEMENTO NEUTRO DI $\mathbb{K}^S$, INFATTI

$$(f + 0_{\mathbb{K}^S})(s) = f(s) + 0_{\mathbb{K}^S}(s) = f(s) \Rightarrow f + 0_{\mathbb{K}^S} = f = 0_{\mathbb{K}^S} + f$$

4) $(-f)(s) = -f(s)$; $\quad f + (-f) = 0_{\mathbb{K}^S}$

- SIA $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ IL CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI E SIA $V = \mathbb{R}$. RISPETTO ALLE USUALI OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO TRA NUMERI, $\mathbb{R}$ RISULTA ESSERE UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{Q}$.

- SCELTO UN QUALSIASI CAMPO $\mathbb{K}$, SI POSSONO DEFINIRE GLI SPAZI VETTORIALI $\mathbb{K}^n$, $Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[x]$ SUL CAMPO $\mathbb{K}$.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

SIA V UN SPAZIO $\mathbb{K}$-VETTORIALE ED U UN SOTTOINSIEME NON VUOTO DI V. DICIAMO CHE U È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V SE VALGONO LE SEGUENTI DUE PROPRIETÀ:

① $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$, LA SOMMA $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$ (U È CHIUSO RISPETTO LA $+$)

② $\forall \underline{u} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, IL PRODOTTO $\lambda \underline{u} \in U$ (U È CHIUSO PER IL $\cdot$ SCALARE)

OSSERVAZIONE 1:

DALLA PROPRIETÀ 2, PRENDENDO COME SCALARE λ LO 0_K SI OTTIENE:

$$\forall \underline{u} \in U \quad (0_K \cdot \underline{u}) \in U \Rightarrow 0_K \cdot \underline{u} = \underline{0_V \in U}$$

UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE CONTIENE SEMPRE LO ZERO DELLO SPAZIO VETTORIALE:

SE $0_V \notin U$ ALLORA U NON È UNO SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

OSSERVAZIONE 2:

SE U È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V ALLORA È UNO SPAZIO $\mathbb{K}$-VETTORIALE

OSSERVAZIONE 3:

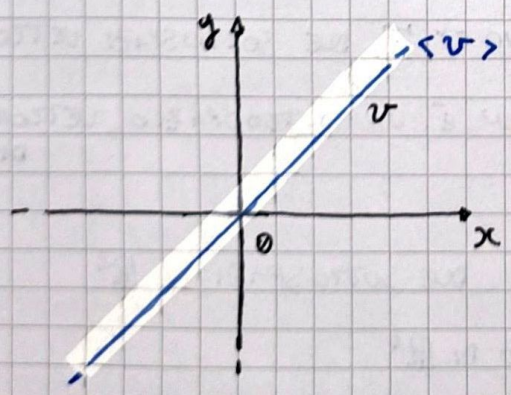
OGNI SPAZIO VETTORIALE V È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI SÉ STESSO. INOLTRE $\{0_V\}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V, DETTO SOTTOSPAZIO NULLO.

- SIA V UNO SPAZIO $\mathbb{K}$-VETTORIALE E $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$. IL SOTTOINSIEME

$$\langle \underline{v} \rangle = \mathbb{K} \cdot \underline{v} = \{ \lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{K} \} \subset V$$

È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE. QUESTO SOTTOSPAZIO È CHIAMATO LA RETTA IN V ATTRAVERSATA DA $\underline{v}$. (È FACILE CONTROLLARE CHE LE DUE PROPRIETÀ SIANO VERIFICATE)

- SE $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ E $V = \mathbb{R}^2$, ALLORA $\langle \underline{v} \rangle$ PER $\underline{v} \neq 0$ È UNA RETTA NEL SENSO USUALE: È LA RETTA CHE PASSA PER L'ORIGINE E $\underline{v}$.



LEZIONE 11 - 23/04/2024

(ESEMPI SU SPAZI VETTORIALI E SOTTOSPAZI VETTORIALI)

DEFINIZIONE

SIA n UN INTERO POSITIVO. CONSIDERIAMO $C \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. LA TRACCIA DI C

$tr(C) \in \mathbb{K}$ È L'ELEMENTO DEFINITO DA:

$$tr(C) = C_{11} + C_{22} + C_{33} + \dots + C_{nn}$$ (SOMMA DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE MAGGIORE)

ESEMPIO

$$C = \begin{bmatrix} [1] & [4] & [3] & [2] \\ [5] & [1] & [6] & [3] \\ [2] & [1] & [0] & [0] \\ [0] & [4] & [3] & [2] \end{bmatrix} \in Mat_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_{/7})$$

$$tr(C) = [1] + [1] + [0] + [2] = [4] = [-3]$$

PROPOSIZIONE: SOTTOSPAZIO INTERSEZIONE

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO U, T DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V. ALLORA ANCHE $U \cap T = \{ w \in V \mid w \in U \wedge w \in T \}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

DIMOSTRAZIONE

① $0_V \in U \wedge 0_V \in T$ IN QUANTO U, T SOTTOSPAZI $\Rightarrow 0_V \in U \cap T$

② $a, b \in U \wedge a, b \in T \Leftrightarrow a, b \in U \cap T \underset{\text{POICHÉ } U \text{ e } T \text{ SONO SOTTOSPAZI}}{\Rightarrow} T \ni a+b \in U \Leftrightarrow a+b \in U \cap T$

③ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ w \in U \cap T \underset{\text{POICHÉ } U \text{ e } T \text{ SONO SOTTOSPAZI}}{\Rightarrow} T \ni \lambda w \in U \Rightarrow \lambda w \in U \cap T$

(ESEMPI SULLE SLIDE)

OSSERVAZIONE

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO U, T DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V. ALLORA $U \cup T = \{ w \in V \mid w \in U \vee w \in T \}$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

ESEMPIO

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\}$ $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$ DUE SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^2$

$U \cup T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \right\}$ NON È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup T \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup T$$

DEFINIZIONE:

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO U e W DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V. CHIAMIAMO SOMMA DI U e W L'INSIEME DI VETTORI

$$U + W = \{ \underline{v} \in V \mid \exists \underline{u} \in U \wedge \exists \underline{w} \in W \text{ tali che } \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \}$$

PROPOSIZIONE:

SIANO $U, W \subseteq V$ SOTTOSPAZI, ALLORA $U + W$ È UN SOTTOSPAZIO. INOLTRE $U + W$ È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO CHE CONTIENE $U \cap W$.

(ESEMPI SULLE SLIDE)

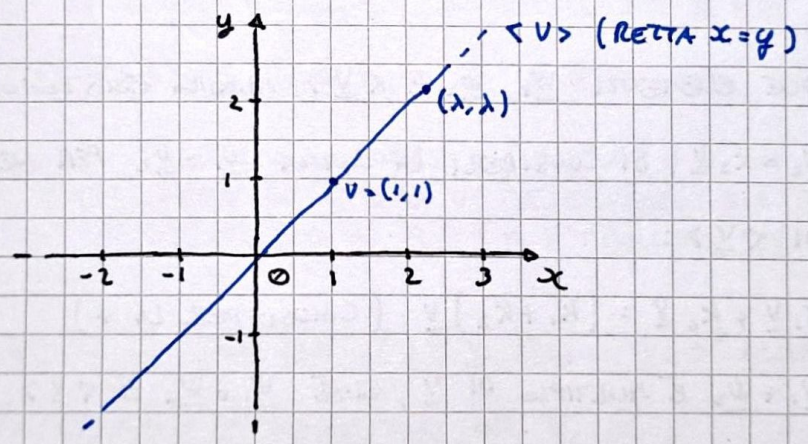
COMBINAZIONI LINEARI E SISTEMI DI GENERATORI

SPAZIO GENERATO DA UN VETTORE

SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE E $\underline{v} \in V$ UN VETTORE IN V TALE CHE $\underline{v} \neq \underline{0}$. L'INSIEME

$$\langle v \rangle = \{ \underline{w} \in V \mid \exists k \in \mathbb{K} \text{ con } \underline{w} = k\underline{v} \}$$

SI CHIAMA SPAZIO GENERATO DA $\underline{v}$ (GLI ELEMENTI DELLA FORMA $k\underline{v}$ SI CHIAMANO MULTIPLI DI $\underline{v}$ E SI DICE QUINDI CHE LO SPAZIO GENERATO DA $\underline{v}$ È FORMATO DA TUTTI I MULTIPLI DI $\underline{v}$).



ESEMPIO: CONSIDERIAMO $\mathbb{R}^3$ E $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$ DATI DA

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\} \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$$

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

I VETTORI DI $U \cap V$ SONO TUTTI GENERATI DA $\langle (0\ 0\ 1)^T \rangle$, OSSIA CORRISPONDONO A TUTTI I MULTIPLI DI $(0\ 0\ 1)^T$.

COMBINAZIONE LINEARE

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ VETTORI IN V.

UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ È IL VETTORE $\underline{v} \in V$ TALE CHE

$$\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n$$

CON $k_i \in \mathbb{K}$. GLI SCALARI k_i SONO DETTI COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE.

SE $k_i = 0 \ \forall i$ DICIAMO CHE LA COMBINAZIONE LINEARE È BANALE. IN QUESTO CASO IL VETTORE $\underline{v}$ È IL VETTORE NULLO (INFATTI $\underline{v} = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_n$). UNA COMBINAZIONE LINEARE UGUALE A ZERO SI DICE NULLA.

COMBINAZIONE LINEARE NULLA NON BANALE:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \cdot v_1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

OSSERVAZIONE

UNA COMBINAZIONE LINEARE BANALE È NULLA, MA CI SONO COMBINAZIONI LINEARI NON BANALI CHE SONO NULLE.

PROPOSIZIONE:

SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIA $\underline{v} \neq 0$, ALLORA $\langle \underline{v} \rangle$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

DIMOSTRAZIONE:

SI CONSIDERINO DUE ELEMENTI $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \langle \underline{v} \rangle$. ALLORA ESISTONO k_1 e k_2 TALI CHE $\underline{w}_1 = k_1 \underline{v}$ E $\underline{w}_2 = k_2 \underline{v}$. SI CONSIDERI LA SOMMA $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ PER VERIFICARE CHE SIA UN ELEMENTO DI $\langle \underline{v} \rangle$:

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = k_1 \underline{v} + k_2 \underline{v} = (k_1 + k_2)\underline{v} \quad \text{(CHIUSO PER LA +)}$$

QUINDI ANCHE $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ È MULTIPLO DI $\underline{v}$, CIOÈ $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \langle \underline{v} \rangle$.

CONSIDERO UN ELEMENTO $\underline{w} \in \langle \underline{v} \rangle$ E $\lambda \in \mathbb{K}$. SI HA CHE $\underline{w} = k\underline{v}$. SI CONSIDERI $\lambda \underline{w}$ PER VERIFICARE CHE SIA UN ELEMENTO DI $\langle \underline{v} \rangle$:

$$\lambda \underline{w} = \lambda(k\underline{v}) = (\lambda k)\underline{v} \in \langle \underline{v} \rangle \quad \text{(CHIUSO PER IL } \cdot \text{ SCALARE)}$$

ESEMPIO: SIA $V = \mathbb{R}^2$ E $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ALLORA

$$\langle \underline{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \ \forall k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 = x_2 \right\}$$

QUINDI, PER QUESTA SCELTA DI $\underline{v}$, $\langle \underline{v} \rangle$ È L'INSIEME DEI VETTORI DI $\mathbb{R}^2$ TALI CHE LE DUE COORDINATE SIANO UGUALI.

DEFINIZIONE

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$. INDICHIAMO CON $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ L'INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, CIOÈ:

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{ \underline{w} \in V \mid k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{w} \text{ AL VARIARE DI } k_i \in \mathbb{K} \}$$

↳ $\underline{w}$ È PERCIÒ UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_n \in V$.

PROPOSIZIONE:

L'INSIEME $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

DIMOSTRAZIONE:

SIANO $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \langle \underline{v}_1, \dots \underline{v}_n \rangle$ DUE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. QUINDI $\exists \lambda_i, \mu_i$ SCALARI TALI CHE $\underline{w}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$ E $\underline{w}_2 = \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n$. ALLORA:

- $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) + (\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n) = (\lambda_1 + \mu_1) \underline{v}_1 + \dots + (\lambda_n \mu_n) \underline{v}_n$

  $\Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ (CHIUSO PER LA +)

- $k \underline{w}_1 = k(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) = (k\lambda_1) \underline{v}_1 + \dots + (k\lambda_n) \underline{v}_n \quad \forall k \in \mathbb{K}$

  $\Rightarrow k \underline{w}_1 \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ (CHIUSO PER IL • SCALARE)

PROPOSIZIONE

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO E V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SI CONSIDERINO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ E $V = \mathbb{R}^m$. ALLORA $\mathbb{R}^m = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \ \forall v_i \in V \iff A\underline{x} = \underline{w}$ È RISOLUBILE PER $\forall \underline{w} \in V$, DOVE

$$\underset{m \times n}{A} = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]$$

(SE A È QUADRATA E $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SONO UN SISTEMA DI GENERATORI: QUESTO PERCHÈ SE $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A\underline{x} = \underline{w}$ È RISOLUBILE PER $\forall \underline{w} \in V$: $\underline{x} = A^{-1}\underline{w}$)

DEFINIZIONE

SE UNO SPAZIO VETTORIALE V È TALE CHE $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$ ALLORA DICIAMO CHE $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V.

- $V = \{ \underline{w} \in V \mid k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{w} \text{ PER } k_i \in \mathbb{K} \}$

PROPOSIZIONE

SI CONSIDERI LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^m$. SI CONSIDERINO I VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m$. IL VETTORE $\underline{u}$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SE E SOLO SE IL SISTEMA $[\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]\underline{x} = \underline{u}$ HA SOLUZIONE. IN QUESTO CASO LE ENTRATE $x_1, \dots, x_n$ DELLA SOLUZIONE $\underline{x}$ SONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE.

$$(\underline{u} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n)$$

ESEMPIO: $\mathbb{R}^2 = U + V$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\}$ $\quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$

$$U + V = \left\{ \underbrace{k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{COMBINAZIONE LINEARE DI } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ E } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER $\mathbb{R}^2$

PROPOSIZIONE

SIANO U E W DUE SOTTOSPAZI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V. SUPPONIAMO CHE $U = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \rangle$ E $W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle$. ALLORA:

$$U + W = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle$$ (DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

ESEMPIO

IN $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ SI CONSIDERINO $U = \langle x^2 + x, x^2, 1 \rangle$ E $W = \langle x \rangle$. SI CALCOLI $U + W$.

PER LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE $U + W = \langle x^2 + x, x^2, 1, x \rangle$. QUESTO CONTIENE TUTTI E SOLO I POLINOMI TALI CHE

$$p(x) = \alpha(x^2 + x) + \beta x^2 + \gamma + \delta x = x^2(\alpha + \beta) + x(\alpha + \delta) + \gamma$$

POICHÉ SI PUÒ SCEGLIERE LIBERAMENTE $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, QUALSIASI POLINOMIO DI SECONDO GRADO È CONTENUTO IN $U + W$.

LEZIONI 12 e 13 - 29 e 30/04/2024

ESEMPIO

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ SONO GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$?

$$\forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \exists k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R} \mid k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3 + k_4 \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = b_1 \\ 2k_2 + k_3 + k_4 = b_2 \\ k_3 = b_3 \end{cases}$$

IL SISTEMA AMMETTE COME SOLUZIONE (SE LO AMMETTE) $x_i = k_i$

MATRICE COMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array} \right)$$

È A SCALINI CON 3 PIVOT NELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI, INDIPENDENTI PERCIÒ DA $(b_1, b_2, b_3)^t \in \mathbb{R}^3$

PER ROUCHÉ - CAPELLI IL SISTEMA È RISOLUBILE $\forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

DATA UNA SOLUZIONE $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, x_4 = a_4$ $\quad a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3 + a_4 \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

- SI CERCHI DI SCRIVERE $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ COME COMBINAZIONE LINEARE DEI $\underline{v}_i$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

$\rightarrow x_1 - 1 + 7 = 2 \rightarrow x_1 = -4$ UNA POSSIBILE SOLUZIONE ($\rightarrow x_1 = -5$ ALTRA POSSIBILE SOLUZIONE)

$\rightarrow 2x_2 + 7 + x_4 = 5 \rightarrow 2x_2 + x_4 = -2 \rightarrow x_2 = -1, x_4 = 0$ UNA POSSIBILE SOLUZIONE

($x_2 = 0, x_4 = -2$ ALTRA POSSIBILE SOLUZIONE)

$\rightarrow x_3 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SI RISCRIVANO LE SOLUZIONI IN FUNZIONE DI $(\#\text{INCOGNITE} - rk(A)) = 4 - 3 = 1$ PARAMETRO:

$$\begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -2 + 2x_2 \\ x_1 = -5 - x_2 \end{cases}$$

LE SOLUZIONI: $(-5-t, t, 7, -2+2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

DI CONSEGUENZA $\forall t \in \mathbb{R} \quad (-5-t)\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 + 7\underline{v}_3 + (-2+2t)\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

- SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. DICIAMO CHE $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ NON TUTTI NULLI $(\exists i \in \{1, \dots, n\} \mid k_i \neq 0)$ TALI CHE $k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0}$
- CIOÈ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO COMBINAZIONI LINEARI NON BANALI CHE SONO NULLE.

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

DICIAMO CHE $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE NON SONO DIPENDENTI, OSSIA SE $k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0} \implies k_i = 0 \ \forall i$

ESEMPIO 1

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI POICHÉ:

$k\underline{v}_1 + 2k\underline{v}_2 + (-k)\underline{v}_3 = \underline{0}_V \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI POICHÉ:

$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \underline{0}_V \iff k_1 = 0 \wedge k_2 = 0$

ESEMPIO 2

SI CONSIDERINO IN $\mathbb{R}[x]$ I POLINOMI $p(x) = x^2+1$, $q(x) = x+1$, $r(x) = 3x^2-3x$

- PER ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI BISOGNA DIMOSTRARE CHE

$$a\,p(x) + b\,q(x) + c\,r(x) = 0 \quad \text{SOLO SE } a,b,c = 0$$

$$a(x^2+1) + b(x+1) + c(3x^2-3x) = ax^2 + a + bx + b + 3cx^2 - 3cx =$$

$$= x^2(a+3c) + x(b-3c) + (a+b) \quad (*)$$

$$(*) = 0 \iff \begin{cases} a+3c = 0 \\ b-3c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -3c \\ b = 3c \end{cases} \quad \text{PER ESEMPIO } (a=3, b=-3, c=-1)^T$$

$$3(x^2+1) - 3(x+1) - (3x^2-3x) = 0 \Rightarrow p(x), q(x), r(x) \text{ SONO LIN. DIPENDENTI}$$

- $p(x)$, $q(x)$ SONO INVECE LINEARMENTE DIPENDENTI:

$$a\,p(x) + b\,q(x) = 0 \rightarrow a(x^2+1) + b(x+1) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + (a+b) = 0$$

$$\iff a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \text{SONO LIN. INDIPENDENTI}$$

OSSERVAZIONI SULLA LINEARE INDIPENDENZA

- UN VETTORE $\underline{v}$ È INDIPENDENTE SE E SOLO SE $\underline{v} \neq 0_V$ (INFATTI UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v}$ È $k\underline{v}$. SE $k\underline{v} = \underline{0} \wedge \underline{v} \neq 0_V$ ALLORA $k = 0_K$)
- DUE VETTORI $\underline{v}_1$ E $\underline{v}_2$ SONO INDIPENDENTI SE E SOLO SE NON SONO L'UNO MULTIPLO DELL'ALTRO (DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)
- SIA $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\}$ UN INSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI V. ALLORA OGNI SUO SOTTOINSIEME È FORMATO DA VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

STABILIRE SE DEI VETTORI SIANO INDIPENDENTI

UN INSIEME DI VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE

$$k_1\underline{v}_1 + \dots + k_m\underline{v}_m = \underline{0}_V \Rightarrow k_1 = \dots = k_m = 0$$

BISOGNA PERCIÒ DIMOSTRARE CHE L'UNICA COMBINAZIONE LINEARE NULLA NEI $\underline{v}_i$ È QUELLA BANALE. PER FARLO BISOGNA CAPIRE SE UN CERTO SISTEMA, CON INCOGNITE $k_1, \dots, k_m$, ABBIA SOLO SOLUZIONE NULLA OPPURE NE ABBIA ANCHE ALTRE. SE CI SONO PIÙ SOLUZIONI ALLORA I VETTORI NON SONO INDIPENDENTI, MENTRE SE C'È SOLO LA SOLUZIONE NULLA ALLORA I VETTORI SONO INDIPENDENTI.

SI CONSIDERI LA MATRICE $A = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]$ E IL VETTORE DELLE INCOGNITE $\underline{k} = (k_1, k_2 \dots k_n)^T$. ABBIAMO CHE $A\underline{k} = k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + \dots + k_n\underline{v}_n$, SI STANNO PERCIÒ CERCANDO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA $A\underline{k} = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]\underline{k} = \underline{0}$.

CI SI CHIEDE QUINDI SE IL SISTEMA ASSOCIATO ALLA MATRICE COMPLETA $[\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n | \underline{0}]$ AMMETTA ALTRE SOLUZIONI OLTRE A QUELLA BANALE, OSSIA QUANTE SOLUZIONI ABBIA IL SISTEMA. PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI LA SOLUZIONE DEL SISTEMA SARÀ UNICA SE E SOLO SE IL RANGO DELLA MATRICE IN FORMA DI GAUSS DI A (OSSIA IL NUMERO DI PIVOT DI A', CON A' LA MATRICE RIDOTTA A SCALINI) CORRISPONDE AL NUMERO DELLE INCOGNITE n, ALTRIMENTI SI AVRANNO $\infty^{n-rk(A)}$ SOLUZIONI.

PROPOSIZIONE

I VETTORI $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE $A\underline{k} = \underline{0}$, DOVE $\underset{m \times n}{A} = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]$, AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE. PER ROUCHÉ-CAPELLI $A\underline{k} = \underline{0}$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE SE E SOLO SE $rk(A) = n$ (# VETTORI)

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m$ SONO INDIPENDENTI $\iff A\underline{k} = \underline{0}$, CON $\underset{m \times n}{A} = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$, AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $\iff rk(A) = n$ (# VETTORI)

COROLLARIO

SE $n > m$ (# VETTORI > # RIGHE) ALLORA $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m$ SONO LIN. DIPENDENTI.

QUESTO PERCHÉ $rk(A) \leq \min(m, n)$, E SE $n > m \Rightarrow n > \min(n, m) \geq rk(A)$ $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI.

OSSERVAZIONE PERSONALE

- SIANO n ED m UGUALI, OSSIA IL NUMERO DI VETTORI È UGUALE AL NUMERO DI ELEMENTI PRESENTI IN CIASCUN VETTORE. LA MATRICE $\underset{m \times m}{A} = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$ SARÀ DI CONSEGUENZA QUADRATA, E SE IL $\det(A) \neq 0$ ALLORA A È INVERTIBILE. IL SISTEMA QUADRATO $A\underline{k} = \underline{0}$ AMMETTE PERCIÒ UN'UNICA SOLUZIONE $\underline{k} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow$ I VETTORI SONO LIN. INDIPENDENTI.
- $\det(\underset{m \times m}{A}) \neq 0 \Rightarrow \underline{k} = \underline{0} \Rightarrow$ I VETTORI SONO INDIPENDENTI

ESEMPIO

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underset{3 \times 4}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $rk(A) = 3 < 4 = \#$ VETTORI

$\Downarrow$

$\#$ VETTORI $= 4 > 3 = \#$ RIGHE $\Rightarrow$ I VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

DEFINIZIONE: BASE

SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE. SIANO $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$. DICIAMO CHE L'INSIEME $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE DI V SE VALGONO ENTRAMBE LE SEGUENTI CONDIZIONI:

- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ SONO UN SISTEMA DI GENERATORI DI V;
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

ESEMPIO

$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ IN $\mathbb{R}^3$

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

(I) PER VEDERE CHE $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ GENERANO $\mathbb{R}^3$ BISOGNA MOSTRARE CHE

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ È SEMPRE RISOLUBILE $\iff \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$ (POICHÉ LA MATRICE DEI COEFFICIENTI È QUADRATA)

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE (E ANZI, AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$) $\Rightarrow \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ SONO GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$

(II) PER VEDERE CHE $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ SONO LIN. INDIPENDENTI BISOGNA MOSTRARE CHE

$rk\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \#\text{VETTORI} \iff \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$ (POICHÉ LA MATRICE È QUADRATA)

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \Rightarrow A\underline{x} = \underline{0}$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $\underline{x} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0}$ $\Rightarrow \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ SONO LIN. INDIPENDENTI.

BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$)

IN OGNI CAMPO (IN QUESTO CASO $\mathbb{R}^n$) ESISTONO SEMPRE LO ZERO (ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA) E L'UNO (ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO). È QUINDI SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE DEI VETTORI DI $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$) CHIAMATI $\underline{e}_i$ TALI CHE L'i-ESIMA ENTRATA SIA 1, MENTRE TUTTE LE ALTRE SONO 0:

$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i-ESIMA ENTRATA $\quad \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

L'INSIEME $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ È UNA BASE DI $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$), DETTA BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$)

BISOGNA DIMOSTRARE QUINDI CHE L'INSIEME DI QUESTI VETTORI SIA UN SISTEMA DI GENERATORI E CHE SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

• $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI

$$\underset{n\times n}{A} = [\underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \dots | \underline{e}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ AMMETTE SOLUZIONI PER OGNI $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{riga } i \\ \\ \\ \\ \\ \text{riga } n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{col. } i & & & \text{col. } n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

AMMETTE SOLUZIONI $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow Id_n \cdot \underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE SOLUZIONE $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n \iff \det Id_n \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

• $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$rk([\underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \dots | \underline{e}_n]) = n$ (# VETTORI)

$rk(Id_n) = n \iff \det Id_n \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

OSSERVAZIONE

LA MATRICE CHE PRESENTA COME COLONNE I VETTORI $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \in \mathbb{R}^n$ È LA MATRICE IDENTITÀ DI DIMENSIONE n: Id_n.

ESEMPIO

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ FORMANO UNA BASE ?

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ SONO UNA BASE $\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ È RISOLUBILE $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ CON UN'UNICA SOLUZIONE

$\iff \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0 \Rightarrow \det([\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3]) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ SONO UNA BASE

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 + x_3 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases} \begin{array}{l} \to x_1 + (b_2 - \cancel{b_3}) + \cancel{b_3} = b_1 \to x_1 = b_1 - b_2 \\ \to x_2 + b_3 = b_2 \to x_2 = b_2 - b_3 \\ \end{array} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 - b_2 \\ x_2 = b_2 - b_3 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$(b_1 - b_2)\underline{v}_1 + (b_2 - b_3)\underline{v}_2 + b_3 \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (3-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

SIA $\underset{n \times n}{A} = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]$ LA MATRICE CHE HA COME COLONNE n VETTORI $\in \mathbb{R}^n$. ESSENDO UNA MATRICE QUADRATA, È POSSIBILE CALCOLARNE IL DETERMINANTE. SE IL DETERMINANTE DI A È $\neq 0$, ALLORA $A \in GL_n(\mathbb{R})$, OSSIA È INVERTIBILE:

- $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ IL SISTEMA LINEARE $A\underline{x} = \underline{b}$ HA UNA SOLUZIONE UNICA: $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$. CIÒ IMPLICA CHE I VETTORI COLONNA DI A SONO UN SISTEMA DI GENERATORI PER $\mathbb{R}^n$ POICHÉ OGNI VETTORE $\underline{b}$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE.
- LA SOLUZIONE UNICA $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ (CON $\underline{b} = \underline{0}$ IN QUESTO CASO) INDICA CHE NON CI SONO DUE SOLUZIONI DISTINTE, IL CHE DIMOSTRA CHE I VETTORI COLONNA SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI. SE A NON FOSSE INVERTIBILE, IL DETERMINANTE DI A SAREBBE ZERO E I VETTORI COLONNA SAREBBERO LINEARMENTE DIPENDENTI.

DI CONSEGUENZA I VETTORI COLONNA DI A FORMANO UNA BASE.

PROPOSIZIONE

SIA $\underset{n \times n}{A} = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$ LA MATRICE QUADRATA CHE HA COME COLONNE n VETTORI $\in \mathbb{R}^n$.

SE $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ FORMANO UNA BASE.

LA NON NULLITÀ DEL DETERMINANTE IMPLICA INFATTI:

- L'INDIPENDENZA LINEARE POICHÉ $A\underline{x} = \underline{0}$ HA COME UNICA SOLUZIONE QUELLA BANALE.
- LA LORO CAPACITÀ DI GENERARE $\mathbb{R}^n$ POICHÉ $A\underline{x} = \underline{b}$ HA SOLUZIONE $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE

SE $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE DI V, ALLORA OGNI VETTORE DI $\underline{v} \in V$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$, CIOÈ:

$$\exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ UNICI} \mid k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + \dots + k_n\underline{v}_n = \underline{v}$$

DIMOSTRAZIONE

- ESISTENZA: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ SONO GENERATORI DI V: $\forall v \in V \quad \exists k_1, \dots, k_n$ TALI CHE $\underline{v} = k_1\underline{v}_1 + \dots + k_n\underline{v}_n$

- UNICITÀ: SI SUPPONGA PER ASSURDO CHE $\exists \underline{w} \in V$ TALE CHE

$$\underline{w} = \begin{cases} s_1\underline{v}_1 + \dots + s_n\underline{v}_n \\ t_1\underline{v}_1 + \dots + t_n\underline{v}_n \end{cases} \wedge \exists i \in \{1, \dots, n\} \mid s_i \neq t_i$$

(LE DUE COMBINAZIONI LINEARI DIFFERISCONO PER ALMENO UN COEFFICIENTE)

ALLORA $s_1 \underline{v}_1 + \ldots + s_n \underline{v}_n = t_1 \underline{v}_1 + \ldots + t_n \underline{v}_n$

QUINDI $(s_1 - t_1)\underline{v}_1 + \ldots + (s_i - t_i)\underline{v}_i + \ldots + (s_n - t_n)\underline{v}_n = \underline{0}$ É UNA COMBINAZIONE LINEARE NULLA NON BANALE POICHÉ $s_i \neq t_i$ E QUINDI $s_i - t_i \neq 0 \Rightarrow$ I VETTORI $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI: ASSURDO!

TEOREMA DELLA BASE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE CHE AMMETTE UNA BASE $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ FORMATA DA n VETTORI. ALLORA OGNI ALTRA BASE DI V SARÀ FORMATA DA n VETTORI.

DEFINIZIONE: DIMENSIONE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE CHE AMMETTE UNA BASE DI n VETTORI (E QUINDI TUTTE LE SUE BASI CONTENGONO n VETTORI). DICIAMO ALLORA CHE LA DIMENSIONE DI V É n E SCRIVIAMO $\dim(V) = n$. SE $V = \{0_V\}$ ALLORA $\dim(V) = 0$.

- V É UN K-SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE FINITA SE ESISTE UNA BASE DI V $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ FORMATA DA UN NUMERO FINITO DI VETTORI. V SI DICE FINITAMENTE GENERATO.

BASE DI $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

- SI CONSIDERINO LE MATRICI $E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ALL'ENTRATA } (i,j) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

L'INSIEME $\{E_{ij} \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ FORMA UNA BASE DI $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

SE SI CONSIDERA UNA MATRICE $M_{2\times 3} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$ ALLORA

- $\dim(Mat_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

$M = m_{11} E_{11} + m_{12} E_{12} + m_{13} E_{13} + m_{21} E_{21} + m_{22} E_{22} + m_{23} E_{23}$

BASE DI $\mathbb{R}_{\leq d}[x]$

- $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2, \ldots, p_i(x) = x^{i-1}, \ldots, p_{d+1}(x) = x^d$

$\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{d+1}(x)\}$ FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}_{\leq d}[x]$

$Q(x) = \sum_{i=0}^{d} q_i x^i = q_0 \cdot p_1(x) + q_1 p_2(x) + \ldots + q_d p_{d+1}(x)$ CON $q_i \in \mathbb{R}$

- $\dim(\mathbb{R}_{\leq d}[x]) = d + 1$

BASE DI $\mathbb{R}[x]$

- LO SPAZIO $\mathbb{R}[x]$ DEI POLINOMI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$ NON HA UN SISTEMA DI GENERATORI FINITO, E DI CONSEGUENZA NON È FINITAMENTE GENERATO

  $\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, \dots, p_i(x)^{i+1}, \dots\}$ FORMANO UNA BASE PER $\mathbb{R}[x]$
- $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$

$$\forall Q(x) \in \mathbb{R}[x] \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{\deg Q(x)} q_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\deg Q(x)} q_i \, p_{i+1}(x) \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

DEFINIZIONE

DICIAMO CHE V È UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO SE AMMETTE UN INSIEME FINITO COME INSIEME DI GENERATORI, ALTRIMENTI DICIAMO CHE NON È FINITAMENTE GENERATO. LA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE SI PUÒ DEFINIRE SOLO PER GLI SPAZI FINITAMENTE GENERATI.

ESTRAZIONE DI UNA BASE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE. DATO UN INSIEME DI n VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ CHE SIANO UN SISTEMA DI GENERATORI, VALE UNA DELLE SEGUENTI DUE POSSIBILITÀ:

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE ($\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ SONO PERCIÒ LINEARMENTE INDIPENDENTI)
- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ NON È UNA BASE ($\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ NON SONO PERCIÒ LIN. INDIPENDENTI).

  IN QUESTO CASO È POSSIBILE SCEGLIERE h VETTORI FRA $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ (CON $h < n$) TALI CHE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h\}$ SIA UNA BASE.

COMPLETAMENTO DELLA BASE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO. DATO UN INSIEME DI n VETTORI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI, VALE UNA DELLE SEGUENTI DUE POSSIBILITÀ:

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE ($\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È PERCIÒ UN SISTEMA DI GENERATORI)
- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ NON È UNA BASE ($\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ NON È PERCIÒ UN SISTEMA DI GENERATORI).

  IN QUESTO CASO ESISTONO ALTRI VETTORI, CHE CHIAMIAMO $\underline{v}_{n+1}, \dots, \underline{v}_h$ TALI CHE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}, \dots, \underline{v}_h\}$ SIA UNA BASE.

⊛ →

PROPOSIZIONE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO. SIA U UN SUO SOTTOSPAZIO, ALLORA

$\dim(U) \leq \dim(V)$ E SE $\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$

(DIMOSTRAZIONE NEL CASO IN CUI $V \in \mathbb{R}^n$ SULLE SLIDE) (ESEMPIO APPUNTI LEZIONE 14)

OSSERVAZIONE ⊛ ←

- SE $\dim V = n$ E $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI, ALLORA È ANCHE UNA BASE
- SE $\dim V = n$ E $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ SONO LIN. INDIPENDENTI, ALLORA FORMANO ANCHE UNA BASE

LEZIONE 14 - 06/05/2024

RANGO

CHIAMIAMO RANGO DI $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE SUE COLONNE (EQUIVALENTEMENTE SI PUÒ DIRE CHE IL RANGO DI UNA MATRICE È IL NUMERO DELLE SUE COLONNE INDIPENDENTI).

$$\underset{m \times n}{A} = [\underline{w}_1 | \underline{w}_2 | \dots | \underline{w}_n] \qquad \underline{w}_i \in \mathbb{R}^m$$

$$rk(A) = \dim \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n \rangle$$

OSSERVAZIONE

IL RANGO SI PUÒ DEFINIRE ANCHE PER RIGHE: CIOÈ IL NUMERO DELLE COLONNE INDIPENDENTI DI UNA MATRICE È UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE INDIPENDENTI DELLA STESSA MATRICE

- SE SI CONSIDERA A^T, LE SUE COLONNE SONO LE RIGHE DI A. L'OSSERVAZIONE CI DICE CHE:

  $\underline{rk(A^T) = rk(A)}$ $\quad \dim \langle \text{COLONNE DI } A^T \rangle = \dim \langle \text{RIGHE DI } A \rangle$

- SE A È QUADRATA ALLORA $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0$ POICHÉ $\underline{\det(A) = \det(A^T)}$

TEOREMA

SIA A UNA MATRICE. SIA A' LA SUA MATRICE IN FORMA DI GAUSS. ALLORA IL NUMERO DI PIVOT DI A' È UGUALE AL RANGO DI A' CHE È UGUALE AL RANGO DI A, CIOÈ DENOTANDO CON r IL NUMERO DI PIVOT DI A' SI HA:

$$\underline{r = rk(A') = rk(A)}$$

$\#\text{PIVOT } A' = rk(A') = \dim \langle \text{COLONNE DI } A' \rangle = rk(A) = \dim \langle \text{COLONNE DI } A \rangle$

PROPOSIZIONE (TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI II)

SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ UN SISTEMA CON n INCOGNITE ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$), $Sol(A|\underline{b})$ IL SUO INSIEME DELLE SOLUZIONI E $rk(A)$ IL RANGO DELLA MATRICE A. ALLORA SI HA:

$$Sol(A|\underline{b}) \text{ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE} \iff \underline{b} = \underline{0}$$

SE $\underline{b} = \underline{0}$ ALLORA $\underline{\dim(Sol(A|\underline{0})) = \overbrace{n - rk(A)}^{\#\text{ PARAMETRI}}}$ PER ROUCHÉ-CAPELLI

- $\dim(Sol(A|\underline{0})) = \#$ PARAMETRI $(n - rk(A))$ DA CUI DIPENDONO LE SOLUZIONI. QUESTO PERCHÉ IL VETTORE SOLUZIONI $\underline{x}$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME DIPENDENTE DA QUEI PARAMETRI: LA MATRICE DEI COEFFICIENTI RELATIVA AL VETTORE $\overbrace{\text{SOLUZIONI}}^{(= Sol(A|\underline{0}))}$ AVRÀ QUINDI TANTE COLONNE QUANTI SONO I PARAMETRI. ESSENDO QUESTE COLONNE INDIPENDENTI TRA LORO (IL SISTEMA È GIÀ STATO RISOLTO), IL RANGO DELLA MATRICE $\overbrace{}^{\text{DEI COEFFICIENTI}}$ CORRISPONDE AL:
  - NUMERO DI PIVOT DELLA MATRICE $\overbrace{}^{\text{DEI COEFFICIENTI}}$ RIDOTTA A SCALINI ED È PERCIÒ UGUALE AL NUMERO DI PARAMETRI: LE ALTRE RIGHE, OSSIA QUELLE CHE CORRISPONDONO ALLE INCOGNITE NON PRESE IN CONSIDERAZIONE COME PARAMETRI, SONO SCRITTE IN BASE A QUESTI ULTIMI E SONO QUINDI DIPENDENTI (CON GAUSS SI POSSONO SEMPLIFICARE);
  - NUMERO DI PIVOT DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI TRASPOSTA, CHE IN QUESTO CASO È DIRETTAMENTE UGUALE AL NUMERO DEI PARAMETRI (OGNI PARAMETRO È UN PIVOT).
- IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI (CHE È PERCIÒ UGUALE A $\#$ PARAMETRI $= n - rk(A)$) PER DEFINIZIONE È UGUALE ALLA DIMENSIONE DELLO SPAZIO (IN QUESTO CASO SOTTOSPAZIO) VETTORIALE GENERATO DALLE SUE COLONNE, DOVE OGNI COLONNA NE RAPPRESENTA UN VETTORE DELLA BASE: ESSENDO OGNI COLONNA DI QUESTA MATRICE RELATIVA AL PROPRIO PARAMETRO, OGNI VETTORE DELLA BASE CORRISPONDE AL VETTORE COLONNA ASSOCIATO A CIASCUN PARAMETRO. LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE $\overbrace{}^{\text{SOLUZIONI}}$ È DUNQUE IL NUMERO DI PARAMETRI DA CUI DIPENDONO LE SOLUZIONI. (VEDERE ESERCIZIO 2 ESERCITAZIONE 9)

DIMOSTRAZIONE

$A\underline{x} = \underline{b}$ CON $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ $m = \#$ EQUAZIONI $n = \#$ INCOGNITE

$Sol(A|\underline{b}) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{y} = \underline{b}\}$. DA DIMOSTRARE:

(I) SE $\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow Sol(A|\underline{0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

(II) SE $\underline{b} \neq \underline{0} \Rightarrow Sol(A|\underline{b})$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

(i) SE $\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow Sol(A|\underline{0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

- $\underline{0}_{\mathbb{R}^n} \in Sol(A|\underline{0}_{\mathbb{R}^m})$: $A \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^n} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$
- SE $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in Sol(A|\underline{0}) \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in Sol(A|\underline{0})$:

  $A \cdot \underline{w}_1 = \underline{0}$, $A \cdot \underline{w}_2 = \underline{0} \Rightarrow A(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = A\underline{w}_1 + A\underline{w}_2 = \underline{0}_{\mathbb{R}^m} + \underline{0}_{\mathbb{R}^m} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$
- SE $\underline{w} \in Sol(A|\underline{0})$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \underline{w} \in Sol(A|\underline{0})$:

  $A \cdot (\lambda \underline{w}) = \lambda (A \cdot \underline{w}) = \lambda \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^m} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$

(ii) SE $\underline{b} \neq \underline{0} \Rightarrow Sol(A|\underline{0})$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$b \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \notin Sol(A|\underline{b}) \Rightarrow Sol(A|\underline{b})$ NON È UN SOTTOSPAZIO

$\downarrow$

$A \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^n} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \neq \underline{b}$

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{0}$, CON $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$ DI DIMENSIONE $n - rk(A)$. (m = # EQUAZIONI, n = # INCOGNITI)

<u>DIMOSTRAZIONE:</u>

- L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ È IL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE LINEARE $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DEFINITA DA $F(x) = A\underline{x}$ (DOVE $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ SONO I VETTORI SOLUZIONE, DAI QUALI SI ARRIVA TRAMITE L'APPLICAZIONE LINEARE F AL VETTORE DEI TERMINI NOTI NULLO $\underline{0}_{\mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^m$).
  - QUESTO PERCHÉ $A\underline{x} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ AMMETTE SOLUZIONE SE E SOLO SE $\exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v} = \underline{0}$.

    RISCRIVENDO IL TUTTO UTILIZZANDO F SI OTTIENE: $\exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid F(\underline{v}) = A\underline{v} = \underline{0}$.

    MA I VETTORI $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid F(\underline{v}) = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ COSTITUISCONO IL NUCLEO DI F $Ker(F)$.

$\Rightarrow Sol(A|\underline{0}_{\mathbb{R}^m}) = Ker(F)$ ⊛ PRIMA $\rightarrow$ DOPO

PARTE IN PIÙ NON UTILE ALLA DIMOSTRAZIONE (DIMOSTRA CHE $A\underline{x} = \underline{0}$ È SEMPRE RISOLUBILE)

- SE $A\underline{x} = \underline{0}$ AMMETTE SOLUZIONE $\Leftrightarrow \exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid F(\underline{v}) = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$, ALLORA $\underline{0}_{\mathbb{R}^m} \in Im(F)$.

$\underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ APPARTIENE QUINDI ALL'IMMAGINE DI F, OSSIA AL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A:

$\underline{0}_{\mathbb{R}^m} \in Im(F) \Leftrightarrow \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle$ CON $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ COLONNE DI A

(UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO, OSSIA CHE HA COME VETTORE DEI TERMINI NOTI QUELLO NULLO, AMMETTE SEMPRE SOLUZIONE POICHÉ IL VETTORE $\underline{0}$ APPARTIENE SEMPRE AL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DI A: SI PUÒ SEMPRE OTTENERE COME UNA LORO COMBINAZIONE BANALE)

⊛ $F(x) = A\underline{x}$ È L'APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA DALLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A

• DATO CHE $\underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ APPARTIENE AL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE COLONNE DI A, ALLORA RISULTA CHE QUEST'ULTIMO COINCIDE COL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE COLONNE DELLA MATRICE COMPLETA $(A \mid \underline{0}_{\mathbb{R}^m})$:

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \rangle$$

(QUESTO PERCHÉ $\underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ È GENERATO DA $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$, ED È QUINDI LINEARMENTE DIPENDENTE ALLE COLONNE DI A)

$$\Longrightarrow \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \in Im(F) \Leftrightarrow rk(A) = rk(A \mid \underline{b})$$

(PER DEFINIZIONE IL RANGO È LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DI UNA MATRICE)

→ • PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI: $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Ker(F)) + \dim(Im(F))$

$$\Rightarrow \dim(Ker(F)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(Im(F))$$

• MA NOI SAPPIAMO CHE:

① $\dim(Ker(F)) = \dim(Sol(A \mid \underline{0}))$

② $Im(F) = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ CON $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ COLONNE DI A, POICHÉ L'IMMAGINE DI F CORRISPONDE AL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALLE COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI A. DI CONSEGUENZA $\dim(Im(F)) = \dim(\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle)$, MA LA DIMENSIONE DI $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ È IL RANGO DELLA MATRICE A (DALLA DEFINIZIONE DI RANGO), QUINDI: $\dim(Im(F)) = rk(A)$

③ $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

OTTENIAMO CHE QUINDI $\underline{\dim(Sol(A \mid \underline{0})) = n - rk(A)}$, E CIOÈ CHE LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI È UGUALE AL NUMERO DI PARAMETRI DA CUI DIPENDONO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA (IN BREVE, OGNI PARAMETRO DA CUI DIPENDONO LE SOLUZIONI COSTITUISCONO UN VETTORE DELLA BASE DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI).

LA DIMOSTRAZIONE COMPLETA DI ROUCHÉ-CAPELLI È IN UN FOGLIO A PARTE. QUESTA DIMOSTRAZIONE (1) DERIVA DA QUELLA E NE È UN CASO SPECIFICO (OSSIA CON $\underline{b} = \underline{0}$)

ESEMPIO

TROVARE IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE CORRISPONDENTE ALLE SOLUZIONI DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{0}$ E CALCOLARNE LA DIMENSIONE.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad rk(A) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(Sol(A|\underline{0})) = n - rk(A) = 4 - 2 = 2$$

$$Sol(A|\underline{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 \\ x_1 &= -3x_2 - x_3 + 3x_3 = \\ &= -3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = -3x_2 + 2x_3 \\ x_3 = -x_4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underline{w} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

FORMULA DI GRASSMAN

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE. SIANO U E W DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI DI V, ALLORA VALE:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

ESEMPIO

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_3 = 0 \right\}$$

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad W = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\dim U = 3 - rk(A) = 2 \qquad \dim W = 3 - rk(B) = 2$$

$$U = Sol(A|\underline{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \qquad W = Sol(B|\underline{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; \forall x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ BASE DI } U$$

$$W = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ BASE DI } W$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U+W = rk\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} = 3$$

$U+W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ BASE ($\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ È INFATTI DIPENDENTE DAGLI ALTRI VETTORI)

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1+x_2=0 \wedge x_1+x_3=0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\-x_1\\-x_1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \; \forall x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \text{ BASE}$$

$\Rightarrow \dim U \cap W = 1$

$\dim U + \dim W = \dim U+W + \dim U \cap W \Rightarrow 2+2 = 3+1 \Rightarrow 4 = 4$

LEZIONE 15 - 07/05/2024

APPLICAZIONE LINEARE

SIANO U E V DUE SPAZI VETTORIALI DEFINITI SULLO STESSO CAMPO $\mathbb{K}$. SIA $f: V \to U$ UNA FUNZIONE DA V A U. DICIAMO CHE f È UN'APPLICAZIONE LINEARE SE:

- $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad f(\underline{v}_1 +_V \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) +_U f(\underline{v}_2)$ f PRESERVA LA SOMMA
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ f PRESERVA IL PRODOTTO SCALARE

PROPOSIZIONE

SE $f: V \to W$ È UN'APPLICAZIONE LINEARE, ALLORA $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \underline{v} \in V \quad \underline{0}_V = 0_K \cdot \underline{v}$; $\quad \forall \underline{w} \in W \quad \underline{0}_W = 0_K \cdot \underline{w}$

ALLORA $f(\underline{0}_V) = f(0_K \cdot \underline{v}) \underset{\text{2ª PROPRIETÀ DI LINEARITÀ: } f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})}{=} 0_K \cdot f(\underbrace{\underline{v}}_{\in W}) = \underline{0}_W$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+1\\x_3\end{pmatrix}$

$f(\underline{0}_{\mathbb{R}^3}) = f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow f$ NON È UN'APPLICAZIONE LINEARE

PROPOSIZIONE

UN'APPLICAZIONE LINEARE f È DETERMINATA DALL'IMMAGINE DEI VETTORI DI UNA BASE DEL DOMINIO. CIOÈ SE CONOSCO L'IMMAGINE DEI VETTORI CHE FORMANO UNA BASE DEL DOMINIO, ALLORA CONOSCO TUTTA L'APPLICAZIONE LINEARE.

DIMOSTRAZIONE

SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE E $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ UNA BASE DI V. SI SUPPONGA DI CONOSCERE LE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE $\underline{v}_i$ E LE SI CHIAMINO $\underline{w}_i$, OSSIA:

$$f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \in W \quad \forall i \in [1, n]$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE SI PUÒ DETERMINARE $f(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V$. POICHÉ $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE, $\underline{v}$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA BASE, OSSIA

$$\exists!\, k_1, k_2, \dots, \overset{\in \mathbb{K}}{k_n} \mid \underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n \quad \forall \underline{v} \in V$$

ALLORA:

PROPRIETÀ APPL. LINEARE

$$f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \underline{v}_i\right) \overset{\text{I}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(k_i \underline{v}_i) \overset{\text{II}}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i f(\underline{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \underline{w}_i \quad \text{E} \quad f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ APPLICAZIONE LINEARE

$\left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underset{\underline{w}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underset{\underline{w}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$ APPLICAZIONE LINEARE

OSSERVAZIONE PERSONALE ⊛1|F3

PARTENDO DA UNA BASE NON CANONICA DEL DOMINIO E SEGUENDO IL PROCEDIMENTO ELENCATO SOPRA, SI ARRIVA AD UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI IMMAGINE DELLA BASE DEL DOMINIO DALLA QUALE, PARTENDO DAI COEFFICIENTI DELLA COMB. LINEARE DELLA BASE DEL DOMINIO E SOSTITUENDOLI IN QUELLA DELLE LORO IMMAGINI, SI OTTIENE L'IMMAGINE DI UN QUALSIASI VETTORE RICAVABILE DA QUELLA COMBINAZIONE LINEARE. NEL CASO IN CUI LA BASE PRESA IN CONSIDERAZIONE SIA QUELLA CANONICA, ALLORA LA COMB. LINEARE DELLE IMMAGINI DELLA BASE È L'APPLICAZIONE LINEARE.

PROPOSIZIONE

- SE $f: V \to W$ E $g: W \to U$ SONO DUE APPLICAZIONI LINEARI CHE SI POSSONO COMPORRE, ALLORA $g \circ f$ È UN'APPLICAZIONE LINEARE.
- SE f È UN'APPLICAZIONE LINEARE INVERTIBILE, ALLORA f^{-1} È UN'APPLICAZIONE LINEARE.

DEFINIZIONE: $Ker(f)$ E $Im(f)$

SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE, CHIAMIAMO NUCLEO O KER DI f L'INSIEME

$$Ker(f) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W \} \subset V$$

E IMMAGINE DI f L'INSIEME

$$Im(f) = \{ \underline{w} \in W \mid \exists \underline{v} \in V \text{ con } f(\underline{v}) = \underline{w} \} \subset W$$

OSSERVAZIONE

- $\underline{0}_V \in Ker(f)$. POICHÉ $Ker(f)$ È L'INSIEME DEI VETTORI CHE HANNO COME IMMAGINE $\underline{0}_W$ E DATO CHE $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$, ALLORA $\underline{0}_V$ È CONTENUTO NEL $Ker(f)$.
- $\underline{0}_W \in Im(f)$ DATO CHE $\underline{0}_W$ È L'IMMAGINE DEL VETTORE $\underline{0}_V$.

⊛ 2|F3 ESEMPI

PROPOSIZIONE

SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. IL SOTTOINSIEME $Ker(f) \subset V$ ED IL SOTTOINSIEME $Im(f) \subset W$ SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI DI RISPETTIVAMENTE V E W.

(DIMOSTRAZIONE BANALE SULLE SLIDE)

⊛ PAG DOPO →

TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO

SIANO V E W DUE SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{K}$ FINITAMENTE GENERATI E SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. ALLORA

$$\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$$

⊛ 2|F3 ESEMPI

DEFINIZIONE

- UNA FUNZIONE $f: V \to W$ È DETTA INIETTIVA SE $f(v_1) = f(v_2)$ IMPLICA $v_1 = v_2$ $\forall v_1, v_2$
- UNA FUNZIONE $f: V \to W$ È DETTA SURIETTIVA SE $\forall w \in W$ $\exists v \in V \mid f(v) = w$
- UNA FUNZIONE È DETTA BIIETTIVA SE È INIETTIVA E SURIETTIVA

PROPOSIZIONE

- UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \mapsto W$ È INIETTIVA SE E SOLO SE $Ker(f) = \{\underline{0}_V\}$
- UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \mapsto W$ È SURIETTIVA SE E SOLO SE $Im(f) = W$

DIMOSTRAZIONE

① SIA f UN'APPLICAZIONE LINEARE INIETTIVA. CONSIDERO UN VETTORE $\underline{v} \in Ker(f)$, OSSIA UN VETTORE TALE CHE $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$. POICHÉ L'IMMAGINE DEL VETTORE NULLO È IL VETTORE NULLO, SI HA CHE $f(\underline{v}) = f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$. POICHÉ $\underline{v}$ E $\underline{0}_V$ HANNO LA STESSA IMMAGINE ED f È INIETTIVA, SI OTTIENE CHE $\underline{v} = \underline{0}_V$. DATO CHE SE $\underline{v} \in Ker(f)$ ALLORA $\underline{v} = \underline{0}_V$, SI TROVA CHE $Ker(f) = \{\underline{0}_V\}$.

f È QUINDI UN'APPLICAZIONE LINEARE CON $Ker(f) = \{\underline{0}_V\}$. ALLORA SE $\underline{v}_1$ E $\underline{v}_2$ HANNO LA STESSA IMMAGINE SI HA:

$$f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \iff f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W = f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

$\Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in Ker(f)$. POICHÉ $Ker(f) = \{\underline{0}_V\}$, SI OTTIENE CHE $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V$, E QUINDI

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 \Rightarrow f \text{ È INIETTIVA} \iff Ker(f) = \{\underline{0}_V\}$$

② UN'APPLICAZIONE LINEARE È SURIETTIVA SE E SOLO SE TUTTI I VETTORI DI W HANNO ALMENO UNA RETROIMMAGINE. I VETTORI DI W CHE HANNO UNA RETROIMMAGINE FORMANO (PER DEFINIZIONE) L'INSIEME $Im(f)$. QUINDI UN'APPLICAZIONE LINEARE È SURIETTIVA SE E SOLO SE $W = Im(f)$.

DEFINIZIONE: ISOMORFISMO

UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \mapsto W$ SI DICE ISOMORFISMO (DI V IN W) SE È BIETTIVA.

SE ESISTE UN ISOMORFISMO FRA V E W SI DICE CHE V E W SONO ISOMORFI.

PROPOSIZIONE

L'ISOMORFISMO FRA SPAZI VETTORIALI È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA.

(DIMOSTRAZIONE RIFLESSIVITÀ, SIMMETRIA E TRANSITIVITÀ SULLE SLIDE)

LEZIONE 16 SLIDE n. 17
PROF SVALDI

TEOREMA ⊛ ← PAG PRIMA

⊛ ULTIMA PAGINA DEL QUADERNO →

SIA $f: V \mapsto W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. SIA $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ UNA BASE DI V, ALLORA $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER $Im(f)$.

LEZIONE 16 - 14/05/2024

TEOREMA

SIANO V E W DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{K}$ FINITAMENTE GENERATI. ALLORA:

$$V \text{ È ISOMORFO A } W \iff \dim(V) = \dim(W)$$

DIMOSTRAZIONE

$(\Rightarrow)$: SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE INIETTIVA E SURIETTIVA E SIA $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ UNA BASE DI V. DEFINIAMO $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \in W$. DIMOSTREREMO CHE $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ FORMANO UNA BASE DI W.

(I) $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI:

$\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$. SI SUPPONGA CHE ESISTA UNA COMBINAZIONE LINEARE NULLA DEI $\underline{w}_i$:

$$k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_n \underline{w}_n = \underline{0}_W \Rightarrow k_1 f(\underline{v}_1) + \dots + k_n f(\underline{v}_n) = \underline{0}_W$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\underbrace{k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n}_{\ker(f) = \{\underline{0}_V\}}) = \underline{0}_W \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0}_V$$

DATO CHE $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (SONO UNA BASE), ALLORA

$$k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0}_V \iff k_1 = \dots = k_n = 0_K$$

$$\Rightarrow k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_n \underline{w}_n = \underline{0}_W \iff k_1 = \dots = k_n = 0_K \Rightarrow \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\} \text{ SONO LIN. INDIPENDENTI}$$

(II) $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ SONO GENERATORI:

$$\operatorname{Im}(f) = W \Rightarrow \{\underline{w} \in W \mid \exists k_i \ \forall i \in [1,n] \text{ CON } f(k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n) = \underline{w}\} = W$$

$$\Rightarrow \{\underline{w} \in W \mid \exists k_i \ \forall i \in [1,n] \text{ CON } k_1 f(\underline{v}_1) + \dots + k_n f(\underline{v}_n) = \underline{w}\} = W = \langle f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$$

$$\Rightarrow \{\underline{w} \in W \mid \exists k_i \ \forall i \in [1,n] \text{ CON } k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_n \underline{w}_n = \underline{w}\} = W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle = W \Rightarrow \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\} \text{ SONO GENERATORI DI } W.$$

$(\Leftarrow)$: SE $\dim V = \dim W$, ALLORA LE BASI DI W E V HANNO LA STESSA CARDINALITÀ.

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ BASE DI V $\quad \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ BASE DI W

- SIA $\varphi: V \to W$ L'APPLICAZIONE LINEARE TALE CHE $\varphi(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ (ED È L'UNICA!)

SIA $\psi: W \to V$ L'APPLICAZIONE LINEARE TALE CHE $\psi(\underline{w}_i) = \underline{v}_i$ (ED È L'UNICA!)

- $\psi \circ \varphi: V \to V \quad \psi \circ \varphi(\underline{v}_i) = \psi(\varphi(\underline{v}_i)) = \psi(\underline{w}_i) = \underline{v}_i \Rightarrow \psi \circ \varphi = Id_V$

$\varphi \circ \psi: W \to W \quad \varphi \circ \psi(\underline{w}_i) = \varphi(\psi(\underline{w}_i)) = \varphi(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \Rightarrow \varphi \circ \psi = Id_W$

$\Rightarrow$ ψ E φ SONO BIETTIVE

$\Rightarrow V$ È ISOMORFO A W

COROLLARIO

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{K}$ DI DIMENSIONE n. ALLORA V È ISOMORFO ALLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{K}^n$

(QUESTO PERCHÉ V E $\mathbb{K}^n$ SONO ENTRAMBI SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE n SUL CAMPO $\mathbb{K}$)

⊛ 1|F4 ESEMPI

DEFINIZIONE

- SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n CON UNA BASE $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$.

  SAPPIAMO CHE V È ISOMORFO A $\mathbb{K}^n$, MA ORA SI COSTRUISCA UN ISOMORFISMO $\varphi_{\mathcal{V}}$ ESPLICITO CHE DIPENDE DALLA BASE $\mathcal{V}$. SI CONSIDERI CHE:

$$\forall \underline{v} \in V \ \exists! \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \mid \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

- PONIAMO:

$$\varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

($\varphi_{\mathcal{V}}$ RESTITUISCE UN VETTORE CON LE COORDINATE DI UN VETTORE $\underline{v} \in V$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$)

- IN PARTICOLARE ABBIAMO: $\underline{\varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}_i) = \underline{e}_i}$ ($\underline{v}_i$ VETTORE DELLA BASE $\mathcal{V}$)

  DOVE $\underline{e}_i$ SONO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^n$

- SI OSSERVA CHE $\varphi_{\mathcal{V}}$ È LINEARE. È INOLTRE BIIETTIVA E AMMETTE COME INVERSA

$$\varphi^{-1}_{\mathcal{V}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

⊛ 2|F4 ESEMPIO

DATA UNA MATRICE $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ POSSIAMO SEMPRE ASSOCIARLE IN MANIERA UNICA UN'APPLICAZIONE LINEARE DA $\mathbb{K}^n$ A $\mathbb{K}^m$.

ESEMPIO (UTILE PER LA DIMOSTRAZIONE DI ROUCHÉ-CAPELLI)

CONSIDERO $V = \mathbb{K}^n$ E $W = \mathbb{K}^m$. SIA A UNA MATRICE IN $Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. SI CONSIDERI L'APPLICAZIONE LINEARE

$$f_A : \mathbb{K}^n \longmapsto \mathbb{K}^m$$
$$\underline{x} \longmapsto f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\underline{x}} = \underset{m \times 1}{A\underline{x}} = \mathbb{K}^m$$

f_A È LINEARE:

- $f_A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = f_A(\underline{x}_1) + f_A(\underline{x}_2)$
- $f_A(\lambda \underline{x}_1) = A \cdot \lambda \underline{x}_1 = \lambda A \underline{x}_1 = \lambda f_A(\underline{x}_1)$

⊛ 3|F4 ESEMPIO

⊛ CONTINUA → DIETRO

$\rightarrow \circledast$

$\ker(f_A) = \{ \underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{v} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m} \} = Sol(A \mid \underline{0}_{\mathbb{K}^m}) \Rightarrow \underline{\dim \ker(f_A) = n - rk(A)}$

$Im(f_A) = \{ \underline{w} \in \mathbb{K}^m \mid \exists \underline{v} \in \mathbb{K}^n \text{ CON } A\underline{v} = \underline{w} \}$

SE $A = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n]$ ALLORA $Im(f_A) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$

$\Rightarrow \underline{\dim Im(f_A) = rk(A)}$

($\underline{w}$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$)
(VEDERE ⊛3|E4)

DATA UN'APPLICAZIONE LINEARE È ANCHE POSSIBILE FARE IL VICEVERSA, OSSIA ASSOCIARLA AD UNA MATRICE. PER POTERLO FARE SI DEVONO FISSARE LE BASI SIA PER IL DOMINIO CHE PER IL CODOMINIO DELL'APPLICAZIONE LINEARE.

DEFINIZIONE: MATRICE RAPPRESENTATIVA

SIANO V E W DUE SPAZI VETTORIALI DEFINITI SUL CAMPO $\mathbb{K}$ E FINITAMENTE GENERATI. SIANO $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ E $\mathcal{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ BASI RISPETTIVAMENTE DI V E W, CHE QUINDI HANNO DIMENSIONE $\dim(V) = n$ E $\dim(W) = m$. SIA $f: V \to W$ UNA APPLICAZIONE LINEARE. CHIAMIAMO MATRICE RAPPRESENTATIVA DI f LA MATRICE

$\underset{m \times n}{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}}(f)$ COSTRUITA COSÌ:

- SI PRENDONO IN MANIERA ORDINATA I VETTORI DELLA BASE DEL DOMINIO $\mathcal{V}$, E NE SI CALCOLI LE RISPETTIVE IMMAGINI $f(\underline{v}_j)$ CON $j \in [1, n]$
- SI SCRIVANO I VETTORI $f(\underline{v}_j)$ COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE DEL CODOMINIO $\mathcal{W}$:

$$f(\underline{v}_j) = k_{1j}\underline{w}_1 + k_{2j}\underline{w}_2 + \dots + k_{ij}\underline{w}_i + \dots + k_{mj}\underline{w}_m \quad \text{CON } i \in [1, m]$$

- SCRIVENDO I COEFFICIENTI k_{ij} OTTENUTI PRECEDENTEMENTE IN COLONNA $\begin{pmatrix} k_{1j} \\ \vdots \\ k_{ij} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$ SI OTTIENE LA j-ESIMA COLONNA DELLA MATRICE ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$

SI OTTIENE QUINDI CHE LE ENTRATE DI ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$ SONO k_{ij}, OSSIA: ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) = [k_{ij}]$

⊛1|F5

METODO INFORMALE

- CALCOLARE ORDINATAMENTE LE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE DEL DOMINIO
- RISCRIVERE QUESTE IMMAGINI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE DEL CODOMINIO
- I COEFFICIENTI OTTENUTI (PER CIASCUNA IMMAGINE DELLA BASE DEL DOMINIO) RAPPRESENTANO LE COLONNE DELLA MATRICE RAPPRESENTATIVA

PROPOSIZIONE

SIANO V E W SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI SU UNO STESSO CAMPO $\mathbb{K}$. SIA $f: V \mapsto W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE FRA V E W E SIA ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$ LA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI f RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$. SIA $\underline{v} \in V$ UN VETTORE TALE CHE

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n \qquad \mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

E SIA $\underline{w} = f(\underline{v}) = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_m \underline{w}_m \qquad \mathcal{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$

ALLORA
$$\underbrace{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}_{\in\, Mat_{m \times n}(\mathbb{K})} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

LA PROPOSIZIONE CI DICE CHE MOLTIPLICANDO LA MATRICE RAPPRESENTATIVA PER IL VETTORE CONTENENTE I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DI UN VETTORE, SI OTTENGONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DELL'IMMAGINE DI QUEL VETTORE.

- SI PUÒ REINTERPRETARE LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE USANDO LE APPLICAZIONI LINEARI

$$\varphi_{\mathcal{V}}: V \longmapsto \mathbb{K}^n \qquad \varphi_{\mathcal{W}}: W \longmapsto \mathbb{K}^m$$

$$\varphi_{\mathcal{V}}(x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \varphi_{\mathcal{W}}(x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_m \underline{w}_m) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

QUESTE APPLICAZIONI LINEARI SONO DEGLI ISOMORFISMI, E IN QUANTO TALI AMMETTONO UN'INVERSA (SE SONO ISOMORFISMI, ALLORA SONO BIETTIVE E QUINDI INVERTIBILI).

- LA PROPOSIZIONE AFFERMA QUINDI CHE IL SEGUENTE DIAGRAMMA È COMMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{V}}"] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{W}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$$L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}: \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^m$$

$$L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}$ È L'APPLICAZIONE LINEARE CHE DATE LE COORDINATE DI UN VETTORE $\underline{v}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$, RESTITUISCE LE COORDINATE DI $f(\underline{v})$ RISPETTO A $\mathcal{W}$.

CIOÈ DATO $\underline{v} \in V$ SI HANNO DUE MODI PER ARRIVARE AD UN ELEMENTO DI W:

(I) $f(\underline{v}) \in W$

(II) $\varphi^{-1}_{\mathcal{W}}(L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)}(\varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v}))) \in W$

PERCORRENDO QUESTE DUE STRADE SI OTTIENE LO STESSO VETTORE, QUINDI:

$$f = \varphi^{-1}_{\mathcal{W}} \circ L_{{}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)} \circ \varphi_{\mathcal{V}}$$

DEFINIZIONE: Hom

SIANO V E W DUE $\mathbb{K}$-SPAZI VETTORIALI. INDICHIAMO CON $Hom(V, W) = \{f : V \to W\}$ L'INSIEME DELLE APPLICAZIONI LINEARI DA V A W, OSSIA

$$Hom(V, W) = \{f : V \to W \text{ LINEARI}\}$$

TEOREMA

- SIANO V E W DUE $\mathbb{K}$-SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE n E m RISPETTIVAMENTE. SIANO $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ E $\mathcal{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ BASI DI V E W. ALLORA $Hom(V, W)$ È UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE $n \cdot m$.
- ESISTE UN ISOMORFISMO

$$\Phi : Hom(V, W) \longrightarrow Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$$

- AFFERMARE CHE ESISTE UN ISOMORFISMO TRA DUE SPAZI VETTORIALI SIGNIFICA DIRE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TRA IL PRIMO E IL SECONDO CHE SIA UN'APPLICAZIONE LINEARE. L'ENUNCIATO DEL TEOREMA CI DICE CHI SIA QUESTA FUNZIONE Φ: È LA FUNZIONE CHE ASSOCIA A OGNI APPLICAZIONE LINEARE DA V A W LA MATRICE RAPPRESENTATIVA RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$ SCELTE.

(DIMOSTRAZIONE CHE $Hom(V, W)$ SIA UN SOTTOSPAZIO SULLE SLIDE)

- SE LE BASI $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$ SONO STATE FISSATE, ALLORA A OGNI APPLICAZIONE LINEARE È ASSOCIATA UNA MATRICE, E VICEVERSA A OGNI MATRICE È ASSOCIATA UNA SOLA APPLICAZIONE LINEARE (PERCHÉ Φ È BIIETTIVA).

TUTTAVIA QUESTO NON È PIÙ VERO SE NON SI FISSANO LE BASI, CIOÈ LA STESSA APPLICAZIONE LINEARE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA DA MATRICI DIVERSE RISPETTO A BASI DIVERSE (E VICEVERSA LA STESSA MATRICE PUÒ RAPPRESENTARE APPLICAZIONI LINEARI DIVERSE).

DEFINIZIONE: MATRICE DEL CAMBIO DI BASE

- SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE E SIANO $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$ DUE SUE BASI DISTINTE. LA MATRICE DEL CAMBIO DI BASE DA $\mathcal{V}$ A $\mathcal{W}$ È LA MATRICE ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(id)$ CHE RAPPRESENTA L'APPLICAZIONE LINEARE IDENTITÀ $id: V \mapsto V$ RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{V}$ E $\mathcal{W}$.
  - ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(id)$ È UNA MATRICE QUADRATA CHE PERMETTE PERCIÒ DI EFFETTUARE IL PASSAGGIO DA UNA BASE $\mathcal{V}$ DI V A UN'ALTRA BASE $\mathcal{W}$ DI V.

- QUESTA MATRICE È INVERTIBILE, INFATTI:

$$\underline{{}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{W}}(id) = ({}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(id))^{-1}} \Rightarrow {}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(id) \cdot {}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{W}}(id) = Id_n \quad (n = dim(V))$$

DOVE ${}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{W}}(id)$ È LA MATRICE CHE ESPRIME IL PASSAGGIO DALLA BASE $\mathcal{W}$ ALLA BASE $\mathcal{V}$.

OSSERVAZIONE:

- SIA ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{V}}(id)$ LA MATRICE CHE ESPRIME IL CAMBIO DI BASE DA $\mathcal{V}$ AD UNA BASE CANONICA $\mathcal{C}$, ALLORA ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{V}}(id)$ SI OTTIENE DISPONENDO LE COORDINATE DEI VETTORI DELLA BASE $\mathcal{V}$ PER COLONNA:

  ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{V}}(id)$ = MATRICE AVENTE PER COLONNE LE COORDINATE DEI VETTORI DI $\mathcal{V}$

- ${}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{C}}(id) = ({}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{V}}(id))^{-1}$

⊛ 3/F5 ESEMPIO

IL CALCOLO DELLE MATRICI DEL CAMBIO DI BASE È IDENTICO A QUELLO DELLE RAPPRESENTATIVE

OSSERVAZIONE 2:

L'IMPORTANZA DELLE MATRICI DEL CAMBIO DI BASE È CONTENUTA NELLA SEGUENTE FORMULA CHE ESPRIME LA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI f RISPETTO A CERTE BASI COME PRODOTTO DELLA MATRICE RAPPRESENTATIVA DELLA STESSA f RISPETTO A BASI DIVERSE CON LE RISPETTIVE MATRICI DEL CAMBIO DI BASE:

$$\underset{m \times n}{{}_{\mathcal{L}}M_{\mathcal{N}}(f)} = \underset{m \times m}{{}_{\mathcal{L}}M_{\mathcal{H}}(id)} \cdot \underset{m \times n}{{}_{\mathcal{H}}M_{K}(f)} \cdot \underset{n \times n}{{}_{K}M_{\mathcal{N}}(id)}$$

CON $K, \mathcal{N}$ BASI DEL DOMINIO DI DIMENSIONE n E $\mathcal{L}, \mathcal{H}$ BASI DEL CODOMINIO DI DIMENSIONE m.

⊛ F6 ESEMPIO

PROPOSIZIONE

SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA RISPETTO A UNA CERTA SCELTA DI BASI DALLA MATRICE $M \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, ALLORA VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $\dim(V) = n$ (LA DIMENSIONE DEL DOMINIO È IL NUMERO DELLE COLONNE DELLA MATRICE)
- $\dim(W) = m$ (LA DIMENSIONE DEL CODOMINIO È IL NUMERO DI RIGHE DELLA MATRICE)
- $\dim(Im(f)) = rk(M)$ (LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE DI f È IL RANGO DELLA MATRICE CHE LA RAPPRESENTA)
- $\dim(Ker(f)) = n - rk(M)$ (LA DIMENSIONE DEL NUCLEO DI f È LA DIFFERENZA TRA IL NUMERO DI COLONNE DELLA MATRICE E IL RANGO DELLA MATRICE)

OSSERVAZIONE:

POICHÉ LA DIMENSIONE DEGLI SPAZI V, W, $Im(f)$ E $Ker(f)$ NON DIPENDONO DALLE BASI CHE USIAMO PER SCRIVERE LE MATRICI RAPPRESENTATIVE, MA SOLO DALL'APPLICAZIONE LINEARE f, AVREMO CHE OGNI MATRICE CHE RAPPRESENTA f ANCHE RISPETTO A BASI DIVERSE AVRÀ LO STESSO NUMERO DI RIGHE E DI COLONNE E LO STESSO RANGO.

TEOREMA

⊛ ← DA DOPO LA DEFINIZIONE DI $Ker(f)$ E $Im(f)$

- SIA $f: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. SIA $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ UNA BASE DI V, ALLORA $\{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER $Im(f)$. INOLTRE:
  - $\dim(Im(f)) = rk([f(\underline{v}_1) | \dots | f(\underline{v}_n)])$ SI ESTRAGGONO DAL SISTEMA DI GENERATORI I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

    $[f(\underline{v}_1) | \dots | f(\underline{v}_n)]$ È LA MATRICE RAPPRESENTATIVA ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)$ CON $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ E $\mathcal{W}$ BASE CANONICA DI W.

- SIA $f: V \to W$ UN ISOFORMISMO. ALLORA $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE DI V SE E SOLO SE $\{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ È UNA BASE DI W.

  ↳ V È ISOMORFO A $W \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

LEZIONE 17 - 20/05/2024

DEFINIZIONE: ENDOMORFISMO

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE. CHIAMIAMO $End(V) = \{ f: V \to V$ APPLICAZIONE LINEARE$\}$ L'INSIEME DELLE APPLICAZIONI LINEARI DA V A V, CHIAMATE ENDOMORFISMI DI V.

- $End(V) = Hom(V, V)$
- $M_{\mathcal{V}}(f)$ È LA MATRICE RAPPRESENTATIVA RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$ SIA NEL DOMINIO CHE NEL CODOMINIO.

AUTOVETTORE E AUTOVALORE

SIA $f: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI V DEFINITO SU UN CAMPO $\mathbb{K}$. SIA $\underline{v} \in V$.

DICIAMO CHE $\underline{v} \in V$ È UN AUTOVETTORE PER f SE:

- $\underline{v} \neq \underline{0}$
- $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

SE $\exists \underline{v} \neq \underline{0} \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ ALLORA DICIAMO CHE λ È UN AUTOVALORE.

DICIAMO INOLTRE CHE $\underline{v}$ È UN AUTOVETTORE RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ.

ESEMPIO

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$M\underline{v} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\underline{v}$$

$\underline{v}$ È UN AUTOVETTORE CON AUTOVALORE $\lambda = 5$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad M\underline{u} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\underline{u}$ NON È UN AUTOVETTORE

PROPOSIZIONE

SIA $f: V \to V$ UN'APPLICAZIONE LINEARE E SIA V UN SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO. LA MATRICE $M_{\mathcal{V}}(f)$ È DIAGONALE SE E SOLO SE LA BASE $\mathcal{V}$ È FORMATA DA AUTOVETTORI.

DIMOSTRAZIONE DIETRO →

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO CHE $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ SIA UNA BASE FATTA DI AUTOVETTORI: $\forall i \in [1, n]$

$\exists \lambda_i \mid f(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i$

SCRIVIAMO ALLORA LA MATRICE CHE RAPPRESENTA f RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$:

- $f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + 0\,\underline{v}_2 + \dots + 0\,\underline{v}_n$

  QUINDI LA PRIMA COLONNA È $(\lambda_1\ 0 \dots 0)^T$

- $f(\underline{v}_2) = \lambda_2 \underline{v}_2 = 0\,\underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + 0\,\underline{v}_n$

  QUINDI LA SECONDA COLONNA È $(0\ \lambda_2 \dots 0)^T$

- $f(\underline{v}_n) = \lambda_n \underline{v}_n = 0\,\underline{v}_1 + 0\,\underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

  QUINDI L'ULTIMA COLONNA È $(0\ 0 \dots \lambda_n)^T$

$$M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$ È QUINDI DIAGONALE

- L'IMPLICAZIONE INVERSA SI DIMOSTRA ESATTAMENTE CON IL PROCEDIMENTO INVERSO.

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = -\lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \lambda(-\lambda x_1) = -\lambda^2 x_1 \Rightarrow x_1 + \lambda^2 x_1 = 0 \Rightarrow x_1(1+\lambda^2) = 0$

POICHÉ $\lambda^2 + 1 \neq 0$ $(\nexists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 + 1 = 0) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

QUESTO VETTORE $\underline{x}$ NON È ACCETTABILE POICHÉ $\underline{x}$ DEVE ESSERE $\neq \underline{0}$ PER ESSERE UN AUTOVETTORE.

f NON HA QUINDI AUTOVETTORI. DALLA PROPOSIZIONE CIÒ SIGNIFICA CHE NON ESISTE UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ TALE CHE LA MATRICE CHE RAPPRESENTI f RISPETTO A QUESTA BASE SIA DIAGONALE.

DEFINIZIONE

UN ENDOMORFISMO f DI V È DIAGONALIZZABILE SE ESISTE UNA BASE $\mathcal{V}$ DI V TALE CHE $M_{\mathcal{V}}(f)$ È DIAGONALE (OSSIA SE ESISTE UNA BASE $\mathcal{V}$ DI V FORMATA TUTTA DA AUTOVETTORI DI f).

DEFINIZIONE

CONSIDERO $f \in End(V)$, UN ENDOMORFISMO DELLO SPAZIO VETTORIALE V. SIA $\mathcal{V}$ UNA BASE DI V E SIA $M_{\mathcal{V}}(f)$ LA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI f RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$.

CONSIDERIAMO LA MATRICE $M_{\mathcal{V}}(f) - t\,Id$ DOVE Id È LA MATRICE IDENTITÀ.

CHIAMIAMO POLINOMIO CARATTERISTICO DI f IL POLINOMIO (CON INCOGNITA t)

$$P_f(t) = \det(M_{\mathcal{V}}(f) - t\,Id)$$

PROPOSIZIONE

SE $\dim(V) = n$, IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_f(t)$ HA GRADO n (= MOLTEPLICITÀ)

PROPOSIZIONE

GLI AUTOVALORI DI f SONO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DI $P_f(t) = 0$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ BASE CANONICA

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{C}}(f) - t\,Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$$

$$P_f(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}\right) = (1-t)^3 \Rightarrow t = 1$$ UNICO AUTOVALORE DI f (CON MOLTEPLICITÀ 3)

PROPOSIZIONE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n E $f \in End(V)$ UN SUO ENDOMORFISMO.

- SE $P_f(t) = 0$ HA n SOLUZIONI DISTINTE ALLORA f È DIAGONALIZZABILE
- SE $P_f(t) = 0$ HA MENO DI n SOLUZIONI, ANCHE SE LE SI CALCOLA CON LA LORO MOLTEPLICITÀ, ALLORA f NON È DIAGONALIZZABILE.
- SE $P_f(t) = 0$ HA ALCUNE SOLUZIONI COINCIDENTI, MA A PATTO DI CONTARLE CON LA LORO MOLTEPLICITÀ NE HA n, ALLORA NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA SULLA DIAGONALIZZABILITÀ DI f.

ESEMPI

(I) $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad M_v(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P_f(t) = \det\left(\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\right) = t^2 + 1 \Rightarrow$ NO SOLUZIONI $\in \mathbb{R} \Rightarrow f$ NON È DIAGONALIZZABILE

(II) $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad M_v(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$P_f(t) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{bmatrix}\right) = (-1-t)(2-t) \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = 2$ AUTOVALORI

$P_f(t) = 0$ HA 2 SOLUZIONI $\in \mathbb{R}$ DISTINTE $= \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ È DIAGONALIZZABILE

(III) $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} \qquad M_v(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P_f(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}\right) = (1-t)^3 \Rightarrow t = 1$ AUTOVALORE

$P_f(t) = 0$ HA UNA SOLUZIONE CON MOLTEPLICITÀ 3 $\Rightarrow$ NON SI PUÒ STABILIRE SE SIA DIAGON.

DEFINIZIONE

SIA λ UN AUTOVALORE DI $f \in End(V)$. CHIAMIAMO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ, E LA INDICHIAMO CON $\alpha(\lambda)$, LA MOLTEPLICITÀ DI λ COME SOLUZIONE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_f(t)$.

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA È QUINDI QUEL NUMERO $\alpha(\lambda)$ TALE CHE:

$(t-\lambda)^{\alpha(\lambda)}$ DIVIDE $P_f(t)$ MA $(t-\lambda)^{\alpha(\lambda)+1}$ NON LO DIVIDE

DEFINIZIONE

SIA λ UN AUTOVALORE DI $f: V \mapsto V$. CHIAMIAMO $V_\lambda = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \}$ L'AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ.

(DI FATTO V_λ È L'INSIEME DEGLI AUTOVETTORI DI V RELATIVI ALL'AUTOVALORE λ A CUI AGGIUNGIAMO LO ZERO)

PROPOSIZIONE

SIA λ UN AUTOVALORE DI $f: V \mapsto V$, ALLORA V_λ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE, NON RIDOTTO AL SOLO ZERO.

DIMOSTRAZIONE

SE λ È UN AUTOVALORE, ALLORA $\exists\, \underline{v} \in V$ AUTOVETTORE RELATIVO A λ. POICHÉ $\underline{v}$ È UN AUTOVETTORE, NON È UGUALE A ZERO. INOLTRE PER DEFINIZIONE $\underline{v} \in V_\lambda$. QUINDI V_λ CONTIENE ALMENO UN ELEMENTO $\neq \underline{0}$.

MOSTRO ORA CHE V_λ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE:

(I) $\forall\, \underline{v}, \underline{u} \in V_\lambda \quad \underline{v} + \underline{u} \in V_\lambda$:

POICHÉ $\underline{v} \in V_\lambda \quad f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$; POICHÉ $\underline{u} \in V_\lambda \quad f(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$

$f(\underline{v} + \underline{u}) = f(\underline{v}) + f(\underline{u}) = \lambda \underline{v} + \lambda \underline{u} = \lambda(\underline{v} + \underline{u}) \Rightarrow \underline{v} + \underline{u} \in V_\lambda$

(II) $\forall\, \underline{v} \in V_\lambda$ E $\forall\, k \in \mathbb{K} \quad k\underline{v} \in V_\lambda$

POICHÉ $\underline{v} \in V_\lambda \quad f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

$f(k\underline{v}) = k f(\underline{v}) = k\lambda \underline{v} = \lambda(k\underline{v}) \Rightarrow k\underline{v} \in V_\lambda$

$\Rightarrow V_\lambda$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

DEFINIZIONE

DATO UN AUTOVALORE λ, LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ È LA DIMENSIONE DI V_λ:

$$g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - rk\left(M_v(f) - \lambda \cdot Id\right)$$

PROPOSIZIONE

SIA λ UN AUTOVALORE DI $f \in End(V)$, ALLORA:

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq \dim(V)$$

ESEMPI: SI CONSIDERINO GLI ESEMPI PRECEDENTI

(I) NON CI SONO AUTOVALORI

(II) CI SONO DUE AUTOVALORI $\lambda = -1$, $\lambda = 2$. CIASCUNO HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 1

(III) C'È UN UNICO AUTOVALORE $\lambda = 1$ CON $a(1) = 3 \Rightarrow 1 \leq g(1) \leq 3 \left(\begin{smallmatrix} = a(1) \\ = \dim V \end{smallmatrix}\right)$

RESTA DA DETERMINARE SE f SIA DIAGONALIZZABILE O MENO.

TEOREMA

SIA $f: V \to V$, $\dim(V) = n$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ L'INSIEME DEGLI AUTOVALORI.

1. f È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE ESISTE UNA BASE $\mathcal{V}$ DI V FORMATA DA AUTOVETTORI DI f
2. SE f HA n AUTOVALORI DISTINTI (CIOÈ SE $P_f(t) = 0$ HA n SOLUZIONI DISTINTE) ALLORA f È DIAGONALIZZABILE
3. SE GLI AUTOVALORI DI f, ANCHE SE CONTATI CON LA LORO MOLTEPLICITÀ, SONO MENO DI n (CIOÈ SE $P_f(t) = 0$ HA MENO DI n SOLUZIONI, CONTATE CON LA LORO MOLTEPLICITÀ) ALLORA f NON È DIAGONALIZZABILE.

   SE $a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_k) < n \Rightarrow f$ NON È DIAGONALIZZABILE
4. SE $a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_k) = n$ (CIOÈ SE $P_f(t) = 0$ HA n SOLUZIONI CONTATE CON LA LORO MOLTEPLICITÀ) ALLORA:

   f È DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow a(\lambda_i) = g(\lambda_i) \quad \forall i \in [1, k]$

   INOLTRE SE $a(\lambda_i) = 1$ ALLORA $g(\lambda_i) = 1$ (QUINDI È NECESSARIO VERIFICARE $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ SOLO PER I λ_i TALI CHE $a(\lambda_i) > 1$)
5. SE f È DIAGONALIZZABILE, LA MATRICE DIAGONALE CHE LO RAPPRESENTA RISPETTO A UNA CERTA BASE HA SULLA DIAGONALE GLI AUTOVALORI λ_i (CHE APPAIONO CON LA MOLTEPLICITÀ $a(\lambda_i)$)

(DIMOSTRAZIONE SULLE SLIDE)

ESEMPIO: SI CONSIDERI L'ESEMPIO PRECEDENTE (III)

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda = 1$ CON $a(1) = 3$. RIMANE DA STUDIARE $g(1)$.

DOBBIAMO TROVARE L'INSIEME DEI VETTORI $\underline{v}$ TALI CHE $f(\underline{v}) = \overset{(\lambda)}{1} \cdot \underline{v}$, CIOÈ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \overset{(\lambda)}{1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (f(\underline{v}) = \lambda \underline{v})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_1 + x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

QUINDI $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(V_1) = 2 \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow \underset{3 \neq 2}{a(1) \neq g(1)}$$

$\Rightarrow f$ NON È DIAGONALIZZABILE

METODO ALTERNATIVO PER IL CALCOLO DELLA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

SE $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ ALLORA $f(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = 0 \Rightarrow f(\underline{v}) - \lambda id(\underline{v}) = 0 \Rightarrow (f - \lambda id)(\underline{v}) = 0$

LA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI $(f - \lambda id)$ RISPETTO A UNA BASE $\mathcal{V}$ È $M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id$

DOVE Id È LA MATRICE IDENTITÀ CHE RAPPRESENTA id RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V}$.

QUINDI SE ESISTE $\underline{v}$ AUTOVETTORE DI f, POICHÉ $(f - \lambda id)(\underline{v}) = 0$, SCRIVENDO $\underline{v}$ COME COMBINAZIONE DELLA BASE $\mathcal{V}$ NEL SEGUENTE MODO $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n$ SI HA

$$M_{\mathcal{V}}(f - \lambda id) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \text{ CIOÈ } (M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad (\circledast)$$

SE ESISTE UN VETTORE NON NULLO $\underline{v}$ CHE SIA UN AUTOVETTORE, ALLORA DEVE ESISTERE UNA SOLUZIONE NON NULLA DEL SISTEMA OMOGENEO RIPORTATO SOPRA $(\circledast)$.

MA QUESTO È UN SISTEMA QUADRATO, ED ESISTE UNA SOLUZIONE NON NULLA PER UN SISTEMA QUADRATO SE E SOLO SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEL SISTEMA È NULLO.

$\Rightarrow \det(M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id) = 0$, E QUINDI λ È SOLUZIONE DEL POLINOMIO

$$P_f(t) = \det(M_{\mathcal{V}}(f) - t Id) = 0$$

NON SOLO, IL SOTTOSPAZIO V_λ È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI $\underline{v}$ TALI CHE $(f - \lambda id)(\underline{v}) = 0$.

CIOÈ È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI CHE SI SCRIVONO COME $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n$ CON

$$(M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

PER TROVARE LA DIMENSIONE DI V_λ BASTA ALLORA TROVARE LA DIMENSIONE DEL SISTEMA OMOGENEO, LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È $M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id$.

LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI QUESTO SISTEMA È $\underline{n - rk(M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id)}$

(n = DIMENSIONE $\mathcal{V}$ = # RIGHE = # COLONNE DI $M_{\mathcal{V}}(f)$)

$M_{\mathcal{V}}(f)\underline{v} = \lambda \underline{v} \qquad M_{\mathcal{V}}(f)\underline{v} - \lambda \underline{v} = 0 \qquad (M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda Id)\underline{v} = 0$

RIASSUNTO DIAGONALIZZAZIONE

DATO $f: V \to V$ CON $\dim(V) = n$, PER STABILIRE SE f È DIAGONALIZZABILE:

- SCELGO UNA BASE ARBITRARIA $\mathcal{V}$ DI V
- CALCOLO $M_{\mathcal{V}}(f)$
- CALCOLO IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_f(t) = \det(M_{\mathcal{V}}(f) - tId)$
- CALCOLO LE SOLUZIONI DI $P_f(t) = 0$ CON LA LORO MOLTEPLICITÀ: LE CHIAMO λ_i CON $i \in [1, k]$ E CHIAMO $a(\lambda_i)$ LE MOLTEPLICITÀ
- SE $a(\lambda_1) + \ldots + a(\lambda_k) < n$ ALLORA f NON È DIAGONALIZZABILE
- SE $a(\lambda_1) + \ldots + a(\lambda_k) = n$ ALLORA:
  - SE $a(\lambda_i) = 1$ PER OGNI i, ALLORA f È DIAGONALIZZABILE
  - SE $a(\lambda_i) \neq 1$, ALLORA CALCOLO $g(\lambda_i)$. SE $a(\lambda_i) \neq g(\lambda_i)$ ALLORA f NON È DIAGONALIZZABILE, ALTRIMENTI SI CONTINUA CON L'AUTOVALORE SUCCESSIVO.
  - SE $\forall i \in [1, k]$ $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ ALLORA f È DIAGONALIZZABILE

PER CALCOLARE $g(\lambda_i)$ O SI CALCOLA ESPLICITAMENTE L'AUTOSPAZIO V_{λ_i} E SI DETERMINA LA SUA DIMENSIONE, OPPURE SI OSSERVA CHE $g(\lambda_i) = n - rk(M_{\mathcal{V}}(f) - \lambda_i Id)$

ESEMPIO:

$f \in End(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]) \mid f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a+d)x^3 + 2bx^2 + (a+d)$

LA MATRICE CHE RAPPRESENTA f RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{V} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ È

$$M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_f(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix}\right) \underset{3^a \text{ RIGA}}{=} -t \det\left(\begin{bmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -t(2-t)\left[(1-t)(1-t) - 1\right] = t^2(t-2)^2$$

GLI AUTOVALORI SONO $t = 0$, $t = 2$ ENTRAMBI CON MOLTEPLICITÀ 2: $a(0) = a(2) = 2$

POICHÉ $a(0) + a(2) = 2+2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x])$, f POTREBBE ESSERE DIAGONALIZZABILE: DIPENDE DALLE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE.

- AUTOVALORE $t=0$

$$\dim(V_0) = 4 - rk(M_v(f) - 0\,Id)$$

$$rk\left(\begin{bmatrix} 1-0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-0 \end{bmatrix}\right) \underset{R_4 - R_1}{=} rk\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\dim(V_0) = 4-2 = 2 \Rightarrow g(0) = 2 = a(0)$$

- AUTOVALORE $t=2$

$$\dim(V_2) = 4 - rk(M_v(f) - 2\,Id)$$

$$rk\left(\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix}\right) \underset{R_4 + R_1}{\overset{-1R_1}{=}} rk\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\dim(V_2) = 4-2 = 2 \Rightarrow g(2) = 2 = a(2)$$

$\Rightarrow$ POICHÉ $a(0) = g(0) \wedge a(2) = g(2)$ L'ENDOMORFISMO È DIAGONALIZZABILE