Analiza 1
Wykład III

Anna Valette

17.03.2025

Jednostajna ciągłość

Heinrich Eduard Heine 1821-1881

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest jednostajnie ciągła na zbiorze* A *jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jednostajna ciągłość

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze A jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie (Heinego)

Każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym i ograniczonym jest jednostajnie ciągła.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest: rosnąca na* A*, jeśli dla dowolnych* $x, y \in A$ *takich, że* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \leq f(y)$*;*

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest: rosnąca na* A*, jeśli dla dowolnych* $x, y \in A$ *takich, że* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \leq f(y)$*; malejąca na* A*, jeśli dla* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \geq f(y)$*.*

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest: rosnąca na* A*, jeśli dla dowolnych* $x, y \in A$ *takich, że* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \leq f(y)$*; malejąca na* A*, jeśli dla* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \geq f(y)$*.*
Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest: rosnąca na* A*, jeśli dla dowolnych* $x, y \in A$ *takich, że* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \leq f(y)$*; malejąca na* A*, jeśli dla* $x < y$ *zachodzi* $f(x) \geq f(y)$*.*
Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest monotoniczna, to dla każdego* $x \in (a, b)$ *istnieją granice jednostronne funkcji* f *w punkcie* x*.*

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$; malejąca na A, jeśli dla $x < y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$. Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to dla każdego $x \in (a, b)$ istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x.

Twierdzenie

Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest co najwyżej przeliczalny.

Własności funkcji ciągłych

- Własność Darboux o przyjmowaiu wartości pośrednich:

  ciągłe funkcje odwzorowują odcinek **na** *odcinek*

Własności funkcji ciągłych

- Własność Darboux o przyjmowaiu wartości pośrednich:

  ciągłe funkcje odwzorowują odcinek **na** *odcinek*

- Przyjmowanie wartości ekstremalnych na odcinku zwartym:

  ciągłe funkcje odwzorowują odcinek domknięty i ograniczony **na** *odcinek domknięty i ograniczony*

Sieczne

Definicja

Sieczną *krzywej* C *nazywamy prostą przechodzącą przez jej dwa punkty.*

Sieczne

Definicja

Sieczną *krzywej* C *nazywamy prostą przechodzącą przez jej dwa punkty.*

Definicja

Styczną *do krzywej* C *w punkcie* $x \in C$ *nazywamy prostą, która jest granicznym położeniem siecznych krzywej* C *przechodzących przez punkty* $x, y \in C$, *gdzie* $y \to x$.

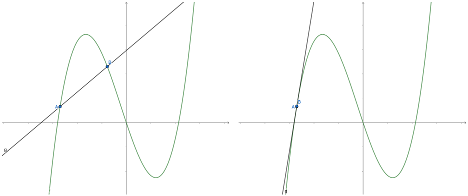
Sieczne

Definicja

Sieczną *krzywej C nazywamy prostą przechodzącą przez jej dwa punkty.*

Definicja

Styczną *do krzywej C w punkcie $x \in C$ nazywamy prostą, która jest granicznym położeniem siecznych krzywej C przechodzących przez punkty $x, y \in C$, gdzie $y \to x$.*



Pochodna funkcji

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym.

Definicje

Pochodną funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ **w punkcie** $a \in I$ *nazywamy granicę, przy* $h \to 0$, **ilorazu różnicowego**:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Pochodna funkcji

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym.

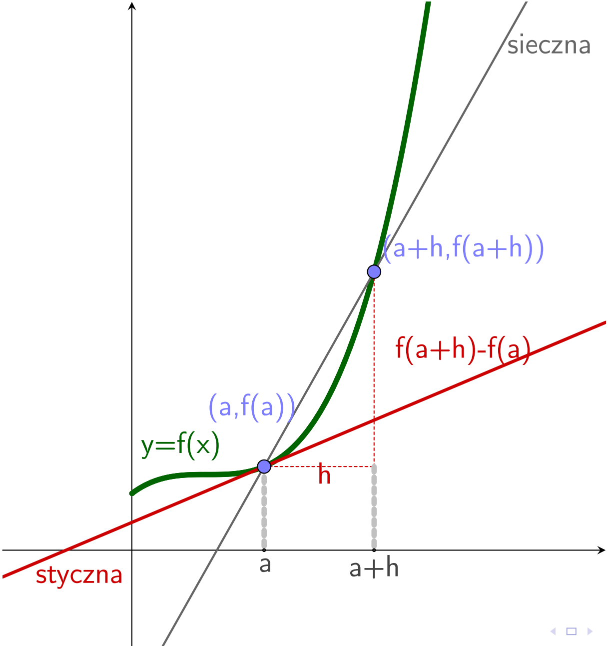
Definicje

Pochodną funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ **w punkcie** $a \in I$ *nazywamy granicę, przy* $h \to 0$, **ilorazu różnicowego**:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Jeśli granica ta istnieje i jest skończona to mówimy, że funkcja f *jest* **różniczkowalna** *w punkcie* a. *W przeciwnym razie mówimy, że funkcja* f *nie jest różniczkowalna.*

Przykład 1



Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$. Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.
Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Uwaga

Pochodna funkcji f w punkcie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$.

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$. Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Uwaga

Pochodna funkcji f w punkcie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie a, w którym jest różniczkowalna funkcja f jest postaci:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a. **Linearyzacją** *funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:*

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a. **Linearyzacją** *funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:*

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkcja L jest liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu a. Będziemy pisać $f(x) \approx L(x)$ w otoczeniu punktu a.

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a. **Linearyzacją** *funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:*

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkcja L jest liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu a. Będziemy pisać $f(x) \approx L(x)$ w otoczeniu punktu a.

Przykład

$(1 + x)^k \approx 1 + kx$ *dla x bliskich* 0.

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0.

Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0.
Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^2$ *jest o małe* x *w* 0*, gdyż* $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0.
Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^2$ *jest o małe* x *w* 0*, gdyż* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$.

Uwaga

Jeśli L jest linearyzacją funkcji f w punkcie a, to zachodzi równość:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = L(a+h) + o(h).$$

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Definicja

Jeśli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie pochodną, to funkcję

$$f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

nazywamy pochodną funkcji f.

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Definicja

Jeśli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie pochodną, to funkcję

$$f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

nazywamy pochodną funkcji f.

Inne oznaczenia

Dla funkcji $y = f(x)$, gdzie x jest zmienną niezależną stosuje się również oznaczenia:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x(f).$$

Przykłady

1. *Funkcja zadana wzorem:*

$$f(x) = |x|$$

nie jest różniczkowalna w punkcie 0 *gdyż*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \text{ a } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1$$

zatem nie istnieje granica w 0.

Przykłady

1. *Funkcja zadana wzorem:*

$$f(x) = |x|$$

nie jest różniczkowalna w punkcie 0 *gdyż*

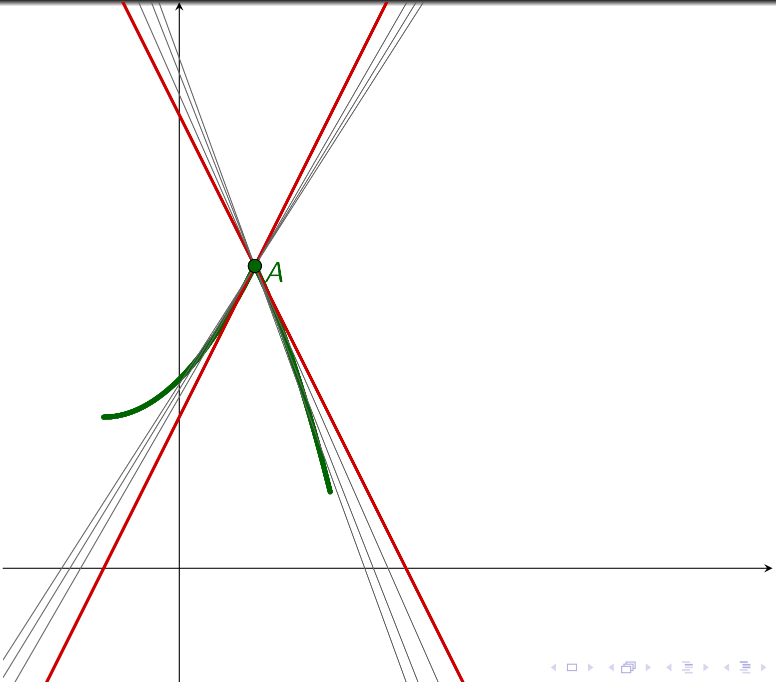
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \text{ a } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

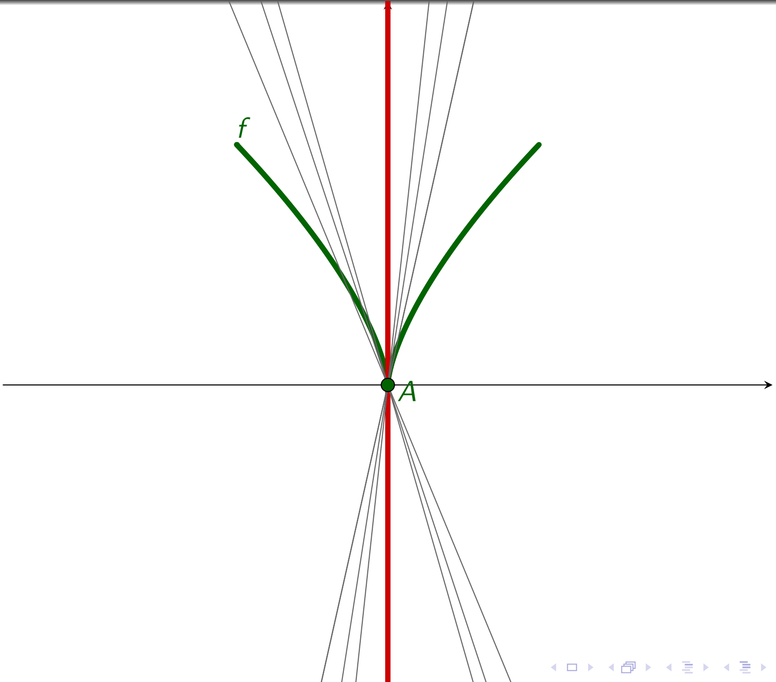
zatem nie istnieje granica w 0.

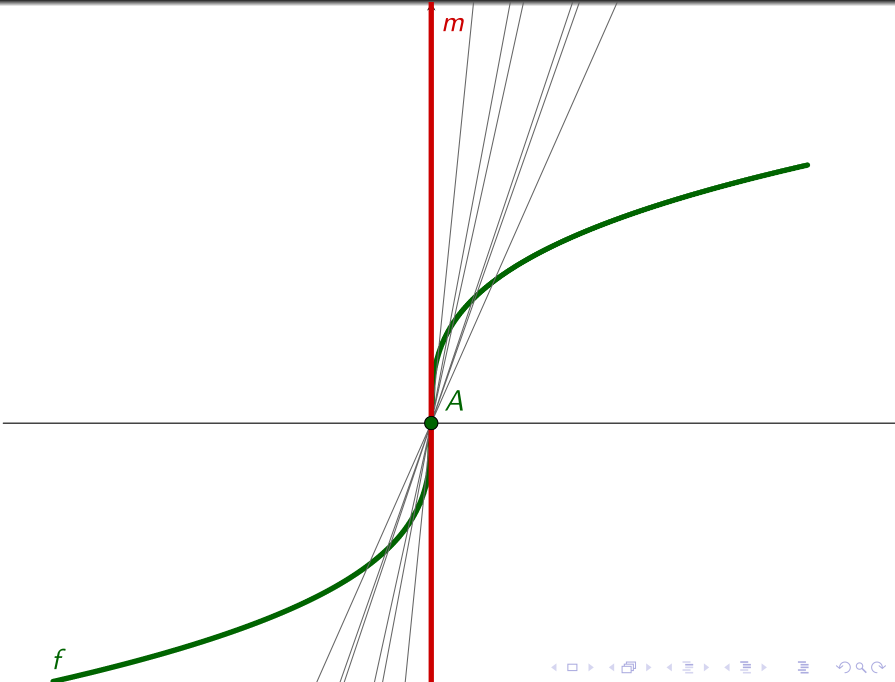
2. *Funkcja zadana wzorem:*

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

nie jest różniczkowalna w 0, *gdyż* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$.


A


f
A


m
A
f

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a, to zachodzą wzory:

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a, to zachodzą wzory:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a, to zachodzą wzory:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a, to zachodzą wzory:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *jeśli tylko* $g(a) \neq 0$.

Twierdzenie (O pochodnej złożenia)

Niech $f \circ g$ będzie złożeniem funkcji takich, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie a a funkcja f różniczkowalna w punkcie $g(a)$. Wtedy

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$.

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$.
- Pochodna jednomianu: $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, mamy:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \left(n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right)$$

$$= n x^{n-1}.$$

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$.
- Pochodna jednomianu: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, mamy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)$$

$$= nx^{n-1}.$$

- Pochodna funkcji wykładniczej: $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$, mamy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = a^x \ln a.$$

- Pochodna funkcji sinus: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, mamy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h} =$$
$$\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \cos x.$$

Pochodne podstawowych funkcji

- $\frac{d}{dx} c = 0,$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$
- $\frac{d}{dx}(\mathrm{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x},$
- $\frac{d}{dx}(\mathrm{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x},$
- $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $\frac{d}{dx}(\mathrm{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2},$
- $\frac{d}{dx}(\mathrm{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2},$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x,$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a,$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$

Przykłady

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Przykłady

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$