

Analiza 1

Wykład III

Anna Valette

17.03.2025

Jednostajna ciągłość



Heinrich Eduard Heine 1821-1881

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze A jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jednostajna ciągłość



Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze A jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie (Heinego)

Każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym i ograniczonym jest jednostajnie ciągła.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A , jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$;

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A , jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$; malejąca na A , jeśli dla $x < y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A , jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$; malejąca na A , jeśli dla $x < y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$.

Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A , jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$; malejąca na A , jeśli dla $x < y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$.

Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to dla każdego $x \in (a, b)$ istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x .

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest: rosnąca na A , jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leq f(y)$; malejąca na A , jeśli dla $x < y$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$.
Takie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to dla każdego $x \in (a, b)$ istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x .

Twierdzenie

Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest co najwyżej przeliczalny.

Własności funkcji ciągłych

- Własność Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich:
ciągłe funkcje odwzorowują odcinek na odcinek

Własności funkcji ciągłych

- Własność Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich:

*ciągłe funkcje odwzorowują odcinek **na** odcinek*

- Przyjmowanie wartości ekstremalnych na odcinku zwartym:

*ciągłe funkcje odwzorowują odcinek domknięty i ograniczony **na** odcinek domknięty i ograniczony*

Sieczne

Definicja

Sieczną krzywej C nazywamy prostą przechodzącą przez jej dwa punkty.

Sieczne

Definicja

Sieczną krzywej C nazywamy prostą przechodzącą przez jej dwa punkty.

Definicja

Styczną do krzywej C w punkcie $x \in C$ nazywamy prostą, która jest granicznym położeniem siecznych krzywej C przechodzących przez punkty $x, y \in C$, gdzie $y \rightarrow x$.

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

Pochodna funkcji

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym.

Definicje

Pochodną funkcji $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $a \in I$ nazywamy granicę, przy $h \rightarrow 0$, ilorazu różnicowego:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Pochodna funkcji

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym.

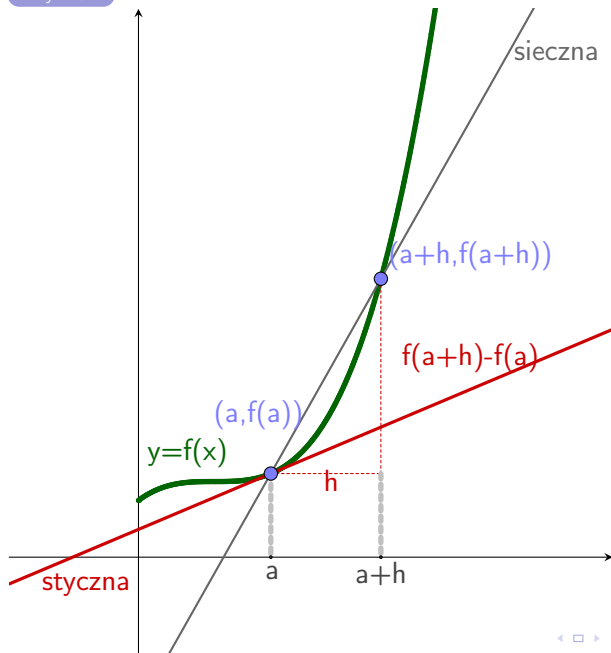
Definicje

Pochodną funkcji $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $a \in I$ nazywamy granicę, przy $h \rightarrow 0$, ilorazu różnicowego:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

*Jeśli granica ta istnieje i jest skończona to mówimy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie a . W przeciwnym razie mówimy, że funkcja f nie jest różniczkowalna.*

Przykład 1



Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.
Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1)$$

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.
Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1)$$

Uwaga

Pochodna funkcji f w punkcie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$.

Pochodną w punkcie a funkcji f oznaczamy przez $f'(a)$.
Równoważnie możemy zapisać:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1)$$

Uwaga

Pochodna funkcji f w punkcie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie a , w którym jest różniczkowalna funkcja f jest postaci:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a . **Linearyzacją** funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a . **Linearyzacją** funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkcja L jest liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu a . Będziemy pisać $f(x) \approx L(x)$ w otoczeniu punktu a .

Linearyzacja

Definicja

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a . **Linearyzacją** funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję postaci:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkcja L jest liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu a . Będziemy pisać $f(x) \approx L(x)$ w otoczeniu punktu a .

Przykład

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \text{ dla } x \text{ bliskich } 0.$$

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0 .

Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0 .

Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^2$ jest o małe x w 0 , gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Definicja

Niech funkcje f i g będą zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu 0.

Mówimy, że funkcja f jest o małe g w 0 jeśli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Piszemy wtedy $f(x) = o(g(x))$.

Przykład

Funkcja $f(x) = x^2$ jest o małe x w 0, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Uwaga

Jeśli L jest linearyzacją funkcji f w punkcie a , to zachodzi równość:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = L(a + h) + o(h).$$

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Definicja

Jeśli funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie pochodną, to funkcję

$$f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

nazywamy pochodną funkcji f .

Obserwacja

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , to jest wtedy też ciągła w tym punkcie.

Definicja

Jeśli funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie pochodną, to funkcję

$$f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

nazywamy pochodną funkcji f .

Inne oznaczenia

Dla funkcji $y = f(x)$, gdzie x jest zmienną niezależną stosuje się również oznaczenia:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x(f).$$

Przykłady

- ❶ Funkcja zadana wzorem:

$$f(x) = |x|$$

nie jest różniczkowalna w punkcie 0 gdyż

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \text{ a } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

zatem nie istnieje granica w 0.

Przykłady

- ❶ Funkcja zadana wzorem:

$$f(x) = |x|$$

nie jest różniczkowalna w punkcie 0 gdyż

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \text{ a } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

zatem nie istnieje granica w 0.

- ❷ Funkcja zadana wzorem:

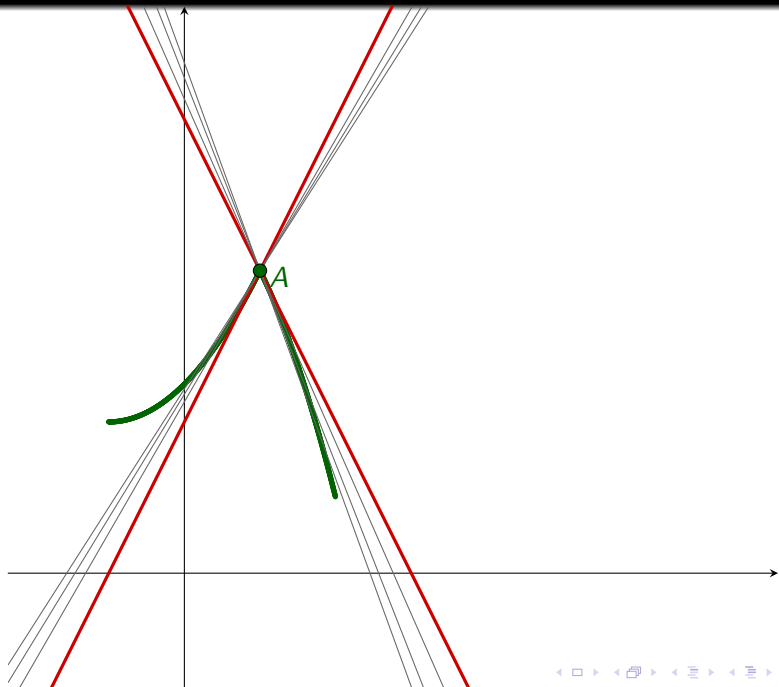
$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

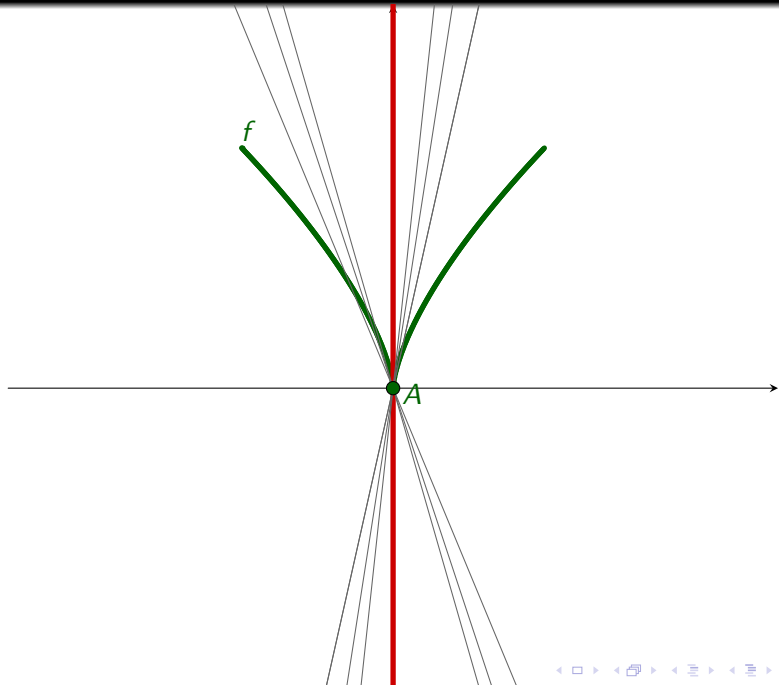
nie jest różniczkowalna w 0, gdyż $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$.

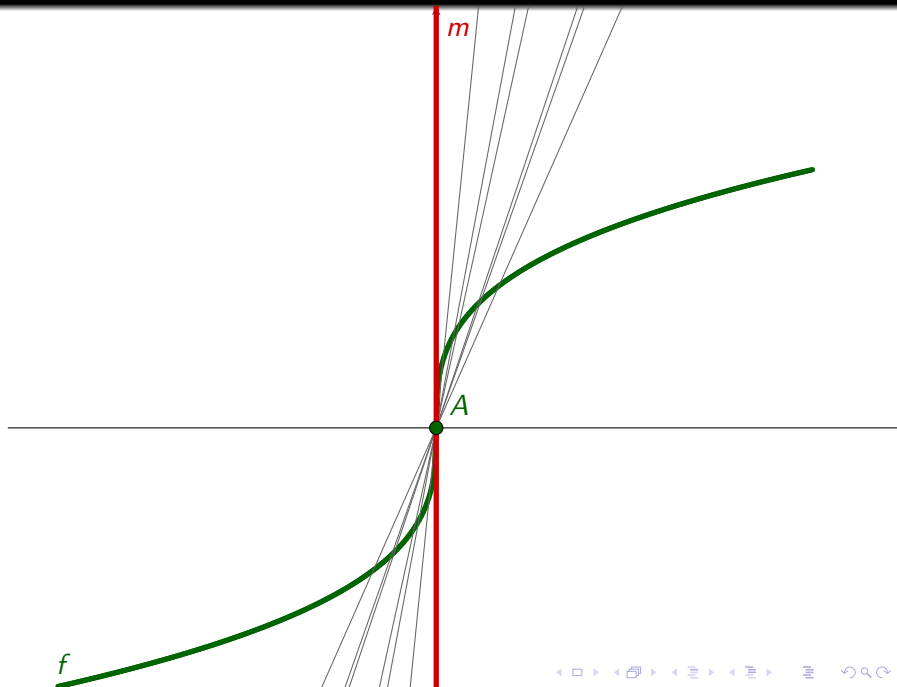
Własności funkcji ciągłych
ooo

Pochodna
oooooooo●

Własności pochodnej
oooooo







Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a , to zachodzą wzory:

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a , to zachodzą wzory:

$$\textcircled{1} \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a , to zachodzą wzory:

- ❶ $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$
- ❷ $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$

Twierdzenie

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w punkcie a , to zachodzą wzory:

- ❶ $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$
- ❷ $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$
- ❸ $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$ jeśli tylko $g(a) \neq 0.$

Twierdzenie (O pochodnej złożenia)

Niech $f \circ g$ będzie złożeniem funkcji takich, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie a a funkcja f różniczkowalna w punkcie $g(a)$. Wtedy

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$.

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$.
- Pochodna jednomianu: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Pochodna funkcji

- Pochodna funkcji stałej $f(x) = c$ w dowolnym punkcie wynosi 0, mamy: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$.
- Pochodna jednomianu: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

- Pochodna funkcji wykładniczej: $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$, mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = a^x \ln a.$$

- Pochodna funkcji sinus: $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \\&= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x.\end{aligned}$$

Pochodne podstawowych funkcji

- $\frac{d}{dx} c = 0,$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$
- $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x,$
- $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x,$
- $\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x},$
- $\frac{d}{dx} (\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x},$
- $\frac{d}{dx} (\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $\frac{d}{dx} (\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $\frac{d}{dx} (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2},$
- $\frac{d}{dx} (\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2},$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x,$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a,$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$

Przykłady

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Przykłady

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$