dr hab. Krzysztof Bartosz
Katedra Teorii Optymalizacji i Sterowania
krzysztof.bartosz@uj.edu.pl
p. 2148

Kierunek: Informatyka

Przedmiot: Algebra 1

Wykład 10

Temat: Liniowa niezależność, generowanie przestrzeni, baza, wymiar

W ramach poprzednich wykładów spotkaliśmy się już z pojęciem liniowej niezależności wektorów swobodnych w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$. Na przykład dwa wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne, jeżeli reprezentujące je wektory zaczepione w pkt. $(0,0,0)$ nie leżą na jednej prostej, lecz są skierowane w dwóch (niezależnych) kierunkach. Podobnie, trzy wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne, jeżeli reprezentujące je wektory zaczepione w pkt. $(0,0,0)$ nie leżą na jednej płaszczyźnie, lecz są skierowane w trzech (niezależnych) kierunkach. Używaliśmy również określenia, że wektor generuje prostą, albo dwa wektory generują płaszczyznę, itp.
Okazuje się, że pojęcia te funkcjonują nie tylko w odniesieniu do przestrzeni $\mathbb{R}^3$, lecz także w dowolnej przestrzeni wektorowej. Oznacza to, że możemy mówić na przykład o liniowej niezależności wielomianów lub macierzy. Wykład ten poświęcony jest usystematyzowaniu i rozwinięciu zagadnień związanych z liniową niezależnością wektorów i generowaniem przestrzeni przez wektory. Geometryczne odniesienie do przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ może być pomocne w zrozumieniu zależności między wektorami w abstrakcyjnych przestrzeniach wektorowych.

W trakcie całego wykładu będziemy mówić o rzeczywistej przestrzeni wektorowej, co oznacza, że liczby, przez które mnożymy wektory są liczbami rzeczywistymi. Niemniej jednak wszystkie omówione w tym wykładzie zagadnienia można odnieść również do przestrzeni zespolonej.

Niech więc $(V,+,\mathbb{R},\cdot)$ będzie dowolną rzeczywistą przestrzenią wektorową.

1 Liniowa niezależność

Zacznijmy od zdefiniowania kombinacji liniowej wektorów.

Definicja 1 *Niech $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n \in V$ oraz niech $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$. Wektor*

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n \tag{1}$$

nazywamy kombinajcą liniową wektorów $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$. Liczby $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ nazywamy współczynnikami kombinacji liniowej (1).

Jeżeli we wzorze (1) wszystkie współczynniki $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ są równe 0, to kombinację określoną wzorem (1) nazywamy kombinacją trywialną. Z podstawowych własności przestrzeni wektorowej wynika, że

$$0\vec{v}_1+0\vec{v}_2+\cdots+0\vec{v}_n=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}+\cdots+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

Oznacza to, że kombinacja trywialna jest równa wektorowi zerowemu.

Przejdźmy do definicji liniowej niezależności wektorów.

Definicja 2 *Mówimy, że wektory $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n \in V$, $n \in \mathbb{N}_+$ są liniowo niezależne jeżeli*

$$\forall\, \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}\ \Big(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{\mathbf{0}} \implies \alpha_1=0\wedge\alpha_2=0\wedge\cdots\wedge\alpha_n=0\Big). \tag{2}$$

Jeżeli warunek (2) nie jest spełniony, to mówimy, że wektory $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n \in V$ są liniowo zależne.

Zauważyliśmy już, że kombinacja trywialna wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jest równa wektorowi zerowemu. Natomiast warunek (2) oznacza, że jeżeli jakaś kombinacja wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jest równa wektorowi zerowemu, to wszystkie jej współczynniki są równe 0, a więc jest to w istocie kombinacja trywialna. Liniowa niezależność wektorów oznacza zatem, że żadna inna ich kombinacja liniowa - oprócz kombinacji trywialnej - nie daje wyniku $\vec{\mathbf{0}}$.

Podamy teraz najważniejsze twierdzenia dotyczące liniowej niezależności wektorów.

TWIERDZENIE 3 *Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$, $n \geq 2$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.*

Dowód „ $\Longrightarrow$ ". Załóżmy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ są liniowo zależne. Prawdziwe jest więc zaprzeczenie warunku (2), a zatem

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{\mathbf{0}} \wedge (\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_n \neq 0). \tag{3}$$

Z warunku (3) wynika, że przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest różny od 0. Ponieważ numeracja jest kwestią umowną, więc możemy przyjąć, że $\alpha_1 \neq 0$. Ponadto, z warunku (3) wynika, że

$$\alpha_1\vec{v}_1 = -\alpha_2\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_n\vec{v}_n.$$

Ostatnie równanie możemy podzielić stronami przez α_1 (ponieważ $\alpha_1 \neq 0$). Otrzymujemy

$$\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{v}_n,$$

co oznacza, że wektor $\vec{v}_1$ jest kombinacją liniową pozostałych wektorów.
Dowód „$\Longleftarrow$". Załóżmy, że jeden z wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ jest kombinacją liniową pozostałych. Ponieważ numeracja jest kwestią umowną, możemy przyjąć, że wektorem tym jest wektor $\vec{v}_1$. Mamy więc

$$\vec{v}_1 = \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Po przekształceniu otrzymujemy

$$(-1)\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n = \vec{\mathbf{0}}.$$

Ponieważ współczynnik przy $\vec{v}_1$ jest różny od 0, więc powyższa kombinacja liniowa jest nietrywialna, a przy tym jest równa wektorowi $\vec{\mathbf{0}}$, co jest sprzeczne z warunkiem (2). A zatem wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo zależne.

WNIOSEK 4 *Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, $n \geq 2$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych.*

Twierdzenie 3 i Wniosek 4 mają sens tylko wówczas gdy mówimy o układzie składającym się z co najmniej dwóch wektorów. Tymczasem Definicję 2 można odnieść również do zbioru jednoelementowego. Zastanówmy się więc, czy jednoelementowy zbiór wektorów jest liniowo zależny, czy liniowo niezależny. Niech więc $\vec{v_1} \in V$. Rozważmy dwa przypadki.

- $\vec{v}_1 \neq \vec{\mathbf{0}}$. Aby sprawdzić liniową niezależność jednoelementowego układu składającego się z wektora $\vec{v}_1$, przypuśćmy, że $\alpha_1\vec{v}_1 = \vec{\mathbf{0}}$. Ponieważ $\vec{v} \neq 0$, więc z własności 5, w Rozdziale 3, Wykładu 9, wynika, że $\alpha_1 = 0$. Oznacza to, że jednoelementowy układ składający się z wektora $\vec{v}_1$ jest liniowo niezależny.

- $\vec{v}_1 = \vec{\mathbf{0}}$. Wtedy $1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$ (wynika to z własności 4, w Rozdziale 3, Wykładu 9). Oznacza to, że istnieje nietrywialna kombinacja liniowa wektora $\vec{v}_1$ dająca wektor $\vec{\mathbf{0}}$, więc jednoelementowy układ składający się z wektora $\vec{v}_1$ jest liniowo zależny.

WNIOSEK 5 *Jednoelementowy układ składający się z wektora $\vec{v} \in V$ jest*

- *liniowo niezależny, jeżeli $\vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$,*
- *liniowo zależny, jeżeli $\vec{v} = \vec{\mathbf{0}}$.*

Twierdzenie 6 *Dowolny układ wektorów zawierający wektor $\vec{\mathbf{0}}$ jest liniowo zależny.*

Dowód. Rozważmy wektory $\mathbf{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Aby przekonać się, że są one liniowo zależne, zapiszmy następującą kombinację liniową:

$$1 \cdot \vec{\mathbf{0}} + 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_1 = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} + \cdots + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Mamy więc nietrywialną kombinację liniową wektorów, która daje wektor zerowy. Oznacza to, że dane wektory są liniowo zależne.

Twierdzenie 7 *Jeżeli wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}$ są liniowo zależne, to wektor $\vec{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.*

Dowód Zakładamy, że:

1. wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne,
2. wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}$ są liniowo zależne.

Mamy udowodnić, że wektor w jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Założenie 2. oznacza, że istnieją liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, takie, że

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n + \beta\vec{w} = \vec{\mathbf{0}} \wedge (\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_n \neq 0 \vee \beta \neq 0). \tag{4}$$

Z warunku (4) wynika, że spośród liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$, przynajmniej jedna jest różna od 0. Pokażemy, że dotyczy to liczby β, tzn. $\beta \neq 0$. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że $\beta = 0$. Wtedy warunek (4) redukuje się do postaci

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{\mathbf{0}} \wedge (\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_n \neq 0),$$

co jest sprzeczne z założeniem 1. Sprzeczność dowodzi, że $\beta \neq 0$. Wróćmy więc do warunku (4), z którego (po przekształceniu) otrzymujemy

$$\beta\vec{w} = -\alpha_1\vec{v}_1 - \alpha_2\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_n\vec{v}_n.$$

Ponieważ $\beta \neq 0$, więc ostatnie równanie możemy podzielić stronami przez β otrzymując

$$\vec{w} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}\vec{v}_n.$$

A zatem wektor $\vec{w}$ jest jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, co kończy dowód.

Podamy teraz rozszerzenie Definicji 2 na przypadek nieskończonego układu wektorów.

Definicja 8 *Mówimy, że nieskończony zbiór wektorów w przestrzeni wektorowej jest liniowo niezależny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. W przeciwnym wypadku (czyli wtedy, gdy ów nieskończony zbiór wektorów posiada skończony podzbiór złożony z wektorów liniowo zależnych), mówimy, że jest on (ów nieskończony zbiór wektorów) liniowo zależny.*

Przykład 9 *Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. W przestrzeni V dany jest zbiór*

$$A = \{(1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots)\ldots\}.$$

Udowodnij, że jest to zbiór liniowo niezależny.

Rozwiązanie Zbiór A składa się z wszystkich nieskończonych ciągów liczbowych, w których dokładnie jeden wyraz jest równy 1 a pozostałe są równe 0. Poszczególne ciągi wchodzące w skład zbioru A różnią się tylko pozycją, na której znajduje się jedynka. Do zbioru A należy nieskończenie wiele ciągów. Aby sprawdzić, że A jest zbiorem liniowo niezależnym, należy więc skorzystać z Definicji 8. Niech więc A' będzie dowolnym skończonym podzbiorem zbioru A. Mamy sprawdzić, (stosując już Definicję 2) że zbiór A' jest liniowo niezależny. W tym celu przyjmijmy, że $n \in \mathbb{N}$ oznacza liczbę elementów zbioru A', a jego elementy oznaczmy $a^1, a^2, \ldots, a^n$, czyli $A' = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$. Każdy z elementów $a^1, a^2, \ldots, a^n$ jest nieskończonym ciągiem liczbowym, którego dokładnie jeden wyraz jest równy 1, a pozostałe są równe 0. Niech $k_1 \in \mathbb{N}$ oznacza numer pozycji, na której znajduje się jedynka w ciągu a^1, tzn.

$$a^1 = (0, \ldots, 0, \overset{k_1}{1}, 0, 0, \ldots).$$

Podobnie $k_i \in \mathbb{N}$ oznacza numer pozycji, na której znajduje się jedynka w ciągu a^i, dla $i = 1, \ldots, n$ tzn.

$$a^i = (0, \ldots, 0, \overset{k_i}{1}, 0, 0, \ldots).$$

Ponieważ numeracja elementów $a^1, a^2, \ldots, a^n$ jest umowna, więc możmy przyjąć, że ciąg a^1 jest tym ciągiem, w którym jedynka występuje najwcześniej. Następny pod tym względem jest ciąg a^2, itd. aż ciąg a^n jest tym ciągiem, w którym jedynka występuje najdalej. Inaczej mówiąc, $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$. Sprawdźmy teraz, czy elementy $a^1, a^2, \ldots a^n$ są wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i niech

$$\alpha_1 \cdot a^1 + \alpha_2 \cdot a^2 + \cdots + \alpha_n \cdot a^n = \mathbf{0}, \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{0}$ oznacza ciąg stały równy 0. Mamy wykazać, że $\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = 0$. Rozpiszmy lewą stronę równości (5).

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \cdot a^1 + \alpha_2 \cdot a^2 + \cdots + \alpha_n \cdot a^n = \\
&\alpha_1 \cdot (0, \ldots, 0, \overset{k_1}{1}, 0, 0, \ldots) + \alpha_2(0, \ldots, 0, \overset{k_2}{1}, 0, 0, \ldots) + \cdots + \alpha_n(0, \ldots, 0, \overset{k_n}{1}, 0, 0, \ldots) = \\
&(0, \ldots, 0, \overset{k_1}{\alpha_1}, 0, \ldots, 0, \overset{k_2}{\alpha_2}, 0, \ldots, 0, \overset{k_n}{\alpha_n}, 0, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

Z warunku (5) wynika, że otrzymany ciąg jest ciągiem stałym równym 0, więc każdy jego wyraz jest równy 0. W szczególności $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, co należało wykazać.

Definicja 10 *Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ oznaczamy symbolem $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ albo $span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, czyli*

$$lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Ponadto, jeżeli A jest nieskończonym zbiorem wektorów, to przyjmujemy

$$linA = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n : \ \vec{v}_i \in A, \, \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Jeżeli $B = linA$, to mówimy, że zbiór B jest generowany przez zbiór A. Elemety zbioru A nazywamy generatorami zbioru B.

Przykład 11 *Wyznacz zbiory generowane przez podane wektory*

a) $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -1)$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 0)$, $\vec{v}_3 = (-1, 3)$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^2$.

c) $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (3, 6)$, $\vec{v}_3 = (5, 10)$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^2$.

d) $A = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Rozwiązanie

a) $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon (x, y, z) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(2, 1, -1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Łatwo zauważyć, że wektory $\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 1, -1)$ nie są współliniowe, więc generowany przez nie zbiór jest płaszczyzną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Równanie parametryczne tej płaszczyzny można odczytać z zależności $(x, y, z) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(2, 1, -1)$, czyli

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = -\beta. \end{cases}$$

b) Zauważmy, że każdy wektor $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 0)$, $\vec{v}_3 = (-1, 3)$. Co więcej, wystarczą do tego celu nawet pierwsze dwa wektory. Aby się o tym przekonać spróbujmy znaleźć $t, s \in \mathbb{R}$, takie, że $\vec{v} = (x, y) = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$, czyli

$$(x, y) = t(1, 2) + s(2, 0) \iff \begin{cases} x = t + 2s \\ y = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2}y \\ s = \frac{1}{2}(x - t) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y. \end{cases}$$

Możemy więc zapisać

$$\vec{v} = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3,$$

co potwierdza, że dowolny wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ można zapisać jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Oznacza to, że $lin\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \mathbb{R}^2$.

c) Zauważmy, że wszystkie trzy wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ są współliniowe, ponieważ ich współrzędne (x, y) spełniają warunkek $y = 2x$. Każdy z nich należy więc do prostej o równaniu $y = 2x$. Wobec tego każda ich kombinacja liniowa pozostaje na tej samej prostej. Oznacza to, że $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = k$, gdzie k jest prostą o równaniu $y = 2x$.

d) Zbiór A jest zbiorem nieskończonym. Aby scharakteryzować zbiór $linA$, musimy więc skorzystać ze wzoru (6). Na tej podstawie sprawdźmy, co oznacza sytuacja, w której pewna funkcja $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ należy do zbioru A. Na podstawie definicji uogólnionej sumy zbiorów mamy więc

$$\begin{aligned} &f \in linA \iff f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n :\ \vec{v}_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\} \iff \\ &\exists n \in \mathbb{N} : f = \alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \dots + \alpha_n x^{k_n}, \end{aligned}$$

gdzie $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że funkcja f jest wielomianem składającym się z n składników, którego stopień wynosi $\max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. I na odwrót, każdy wielomian W dowolnego stopnia można przedstawić w postaci kombinacji liniowej skończonej liczby elementów zbioru A. Oznacza to, że każdy wielomian należy do zbioru $linA$. Podsumowując, $linA$ jest zbiorem wszystkich wielomianów (dowolnego stopnia).

Podamy teraz twierdzenie dotyczące własności zbioru generowanego przez wektory.

TWIERDZENIE 12 *Niech* $A, B \subset V$. *Wtedy*

1. $A \subset B \implies linA \subset linB$,

2. *Zbiór* $linA$ *jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni* V *zawierającą zbiór* A. *Ponadto, jeżeli jakaś podprzestrzeń* U *przestrzeni* V *ma również tę własność, tzn.* $A \subset U$, *to wówczas* $linA \subset U$.

3. *Jeżeli A jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych, oraz $\vec{w} \notin linA$, to zbiór $\{\vec{w}\} \cup A$ jest też liniowo niezależny.*

Uwaga: Własność 2. oznacza, że spośród wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V zawierających zbiór A, zbiór $linA$ jest najmniejszy (w sensie relacji inkluzji), tzn. zawiera się w każdej takiej podprzestrzeni.

Dowód Twierdzenia 12 przeprowadzimy tylko w przypadku, gdy zbiory A i B są skończone.

Dowód.

1. Załóżmy, że $A \subset B$. Ponieważ rozpatrujemy przypadek, w którym zbiory A i B są skończone, możemy przyjąć, że $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ i $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $\vec{x} \in linA$. A zatem

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Ostatni związek możemy zapisać w równoważnej formie

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n + 0\vec{w}_1 + \cdots + 0\vec{w}_k,$$

co oznacza, że $\vec{x} \in linB$. A zatem $linA \subset linB$.

2. Przyjmujemy, że $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Najpierw pokażemy, że $linA$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. W tym celu przypuśćmy, że $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in linA$. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n, \\ \vec{x}_2 &= \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n, \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Dodając stronami powyższe dwie równości otrzymujemy

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \cdots + \gamma_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in linA$. Ponadto mnożąc równanie (7) przez dowolną liczbę $c \in \mathbb{R}$, otrzymujemy

$$c\vec{x}_1 = \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \cdots + \gamma_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\gamma_i = c\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że $c\vec{x}_1 \in linA$. Podsumowując, suma dowolnych dwóch wektorów zbioru $linA$ należy do zbioru $linA$ oraz iloczyn dowolnego elementu zbioru $linA$ i dowolnej liczby rzeczywistej, również należy do zbioru $linA$. Oznacza to, że $linA$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.
Pokażemy teraz, że $A \subset linA$. Niech więc $\vec{x} \in A$. Oznacza to, że $\vec{x} = \vec{v}_i$, gdzie $i = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że $\vec{x}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, której współczynnik przy wektorze $\vec{v}_i$ wynosi 1, a współczynniki przy pozostałych wektorach wynoszą 0. A zatem $\vec{x} \in linA$.
Pokażemy teraz, że $linA$ jest najmniejszą w sensie inkluzji podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór A. Niech więc $U \subset V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór A, czyli $A \subset U$. Pokażemy, że wówczas $linA \subset U$. Niech więc $\vec{x} \in linA$. Oznacza to, że

$$\vec{x}_1 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n, \tag{8}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Ponieważ $A \subset U$, więc $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in U$. Ponieważ U jest przestrzenią wektorową (jako podprzestrzeń innej przestrzeni), więc dowolna kombinacja liniowa jej elementów jest również elementem przestrzeni U. Wobec tego, ze wzoru (8) wynika, że $\vec{x} \in U$. Stąd wniosek, że $linA \subset U$.

3. Przyjmujemy, że $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Zakładamy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne, oraz, że $\vec{w} \notin lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. Mamy pokazać, że zbiór $\{\vec{w}\} \cup A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}$ są liniowo zależne. Wówczas z Twierdzenia 7 wynika, że wektor $\vec{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, czyli $\vec{w} \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, co jest sprzeczne z założeniem. Sprzeczność kończy dowód.

Twierdzenie 13 *Niech* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ *oraz niech* $\vec{v}_1 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2 \ldots, \vec{w}_k\}$, $n, k \in \mathbb{N}_+$. *Wtedy*

$$lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \ldots, \vec{w}_k\}. \tag{9}$$

Dowód. Zakładamy, że $\vec{v}_1 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2 \ldots, \vec{w}_k\}$, czyli

$$\vec{v}_1 = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \cdots + \beta_k\vec{w}_k, \tag{10}$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Niech L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę równości (9). Mamy udowodnić, że $L \subset P$. Niech więc $\vec{x} \in L$. A zatem

$$\vec{x} \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \iff \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Uwzględniając (10), otrzymujemy

$$\vec{x} = \alpha_1\left(\beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \cdots + \beta_k\vec{w}_k\right) + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \in lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \ldots, \vec{w}_k\} = P.$$

Pokazaliśmy więc, że $L \subset P$, co kończy dowód.

Twierdzenie 14 *Niech* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ *oraz niech* $\vec{v}_1 \in lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. *Wtedy*

$$lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}. \tag{11}$$

Twierdzenie 14 należy rozumieć w ten sposób, że jeżeli któryś (wyróżniony) wektor spośród wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ jest kombinacją liniową pozostałych, to zbiór generowany przez wszystkie wektory jest tym samym co zbiór generowany przez ,,prawie wszystkie" wektory (z pominięciem tego wyróżnionego). Ponieważ numeracja wektorów jest kwestią umowną, nie ma znaczenia, czy wyróżniony wektor ma numer 1 (jak w twierdzeniu), czy też jakikolwiek inny.

Dowód. Zakładamy, że $\vec{v}_1 \in lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, czyli

$$\vec{v}_1 = \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n, \tag{12}$$

gdzie $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Niech L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę równości (11). Mamy udowodnić, że $L = P$. Udowodnimy najpierw, że $L \subset P$. Niech więc $\vec{x} \in L$. A zatem

$$\vec{x} \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \iff \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Uwzględniając (12), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\left(\beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n\right) + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \\ &= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha_1\beta_n + \alpha_n)\vec{v}_n \in lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = P.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $L \subset P$. Pokażemy teraz, że $P \subset L$. Niech więc $\vec{x} \in P$. A zatem

$$\vec{x} \in lin\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \iff \vec{x} = \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = L.$$

Podamy teraz, bardzo ważne twierdzenie dotyczące liniowej zależności wektorów, znane jako twierdzenie Steinitza.

Twierdzenie 15 *Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ i niech $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. Jeżeli $k > n$, to wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ są liniowo zależne.*

Z Twierdzenia 15 wynika, że w zbiorze $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ może istnieć najwyżej n wektorów liniowo niezależnych.

Dowód Dla uproszczenia zapisu przeprowadzimy dowód dla $n = 3$. Dla większej liczby n rozumowanie jest w pełni analogiczne. Przyjmijmy więc, że mamy dane trzy wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ oraz wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Ponadto załóżmy, że $k > n$. Mamy udowodnić, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ są liniowo zależne. Zauważmy, że wystarczy udowodnić tezę w przypadku gdy $k = 4$. Istotnie, jeżeli udowodnimy, że twierdzenie jest spełnione dla $k = 4$, to mając dane więcej niż 4 wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, możemy posłużyć się następującym rozumowaniem: spośród wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ wyodrębnijmy pierwsze cztery. Wtedy mamy $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4 \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Przyjmując, że twierdzenie jest już udowodnione dla $k = 4$, stwierdzamy, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne. Wobec tego cały układ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ będzie liniowo zależny.
Niech więc

$$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4 \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}. \tag{13}$$

Pokażemy, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne. Warunek (13) onacza, że

$$\vec{w}_1 = \alpha_{11}\vec{v}_1 + \alpha_{12}\vec{v}_2 + \alpha_{13}\vec{v}_3 \tag{14}$$
$$\vec{w}_2 = \alpha_{21}\vec{v}_1 + \alpha_{22}\vec{v}_2 + \alpha_{23}\vec{v}_3 \tag{15}$$
$$\vec{w}_3 = \alpha_{31}\vec{v}_1 + \alpha_{32}\vec{v}_2 + \alpha_{33}\vec{v}_3 \tag{16}$$
$$\vec{w}_4 = \alpha_{41}\vec{v}_1 + \alpha_{42}\vec{v}_2 + \alpha_{43}\vec{v}_3, \tag{17}$$

gdzie $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3$. W odniesieniu do równania (14) rozważmy dwa możliwe przypadki.

1. Wszystkie współczynniki $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ są równe 0. Wtedy prawa strona równości (14) jest równa $\vec{\mathbf{0}}$. A zatem i lewa strona jest równa $\vec{\mathbf{0}}$. Mamy więc $\vec{w}_1 = \vec{\mathbf{0}}$. Wówczas, na mocy Twierdzenia 6, wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne, co kończy dowód.

2. Przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ jest różny od 0. Ponieważ numeracja jest kwestią umowną, możemy przyjąć, że niezerowym współczynnikiem jest α_{11}. Mamy więc $\alpha_{11} \neq 0$. Możemy więc przekształcić równanie (14), tak, aby przedstawić wektor $\vec{v}_1$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, mianowicie:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\alpha_{11}}\vec{w}_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\vec{v}_2 - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}\vec{v}_3. \tag{18}$$

A zatem

$$\vec{v}_1 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}. \tag{19}$$

Z zależności (19) oraz z Twierdzenia 13 wynika, że

$$lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset lin\{\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \tag{20}$$

Z zależności (13) i (20) wynika, że

$$\vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \tag{21}$$

co oznacza, że

$$\vec{w}_2 = \alpha_{21}\vec{w}_1 + \alpha_{22}\vec{v}_2 + \alpha_{23}\vec{v}_3 \tag{22}$$
$$\vec{w}_3 = \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{v}_2 + \alpha_{33}\vec{v}_3 \tag{23}$$
$$\vec{w}_4 = \alpha_{41}\vec{w}_1 + \alpha_{42}\vec{v}_2 + \alpha_{43}\vec{v}_3, \tag{24}$$

gdzie liczby $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $i = 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3$ mają już inne wartości niż w równaniach (14)-(17), jednak używamy tych samych symboli, aby nie wprowadzać zbyt wielu oznaczeń. Zależności (22)-(24) można uzyskać jeszcze prościej. Otóż zauważmy, że wynikają one w prosty sposób z równań (15)-(16) przez podstawienie za $\vec{v}_1$ wielkości wynikającej ze wzoru (18).
Następnie, w odniesieniu do równania (22), roważmy dwie możliwe sytuacje.

1. $\alpha_{22} = 0$ i $\alpha_{23} = 0$. Wtedy równość (22) redukuje się do postaci $\vec{w}_2 = \alpha_{21}\vec{w}_1$. Oznacza to, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne, co kończy dowód.
2. $\alpha_{22} \neq 0$ lub $\alpha_{23} \neq 0$. Ponieważ numeracja jest kwestią umowną, możemy przyjąć, że niezerowym współczynnikiem jest α_{22}. Mamy więc $\alpha_{22} \neq 0$. Możemy więc przekształcić równanie (22), tak, aby przedstawić wektor $\vec{v}_2$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3$, mianowicie:

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\alpha_{22}}\vec{w}_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\vec{w}_1 - \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}}\vec{v}_3. \tag{25}$$

A zatem

$$\vec{v}_2 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}. \tag{26}$$

Z zależności (26) oraz z Twierdzenia 13 wynika, że

$$lin\{\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\} \tag{27}$$

Z zależności (21) i (27) wynika, że

$$\vec{w}_3, \vec{w}_4 \in lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}, \tag{28}$$

co oznacza, że

$$\vec{w}_3 = \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2 + \alpha_{33}\vec{v}_3 \tag{29}$$
$$\vec{w}_4 = \alpha_{41}\vec{w}_1 + \alpha_{42}\vec{w}_2 + \alpha_{43}\vec{v}_3, \tag{30}$$

gdzie liczby $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $i = 3, 4,\ j = 1, 2, 3$ mają już inne wartości niż w równaniach (22)-(24). Zależności (29)-(30) można uzyskać jeszcze prościej. Otóż zauważmy, że wynikają one w prosty sposób z równań (23)-(24) przez podstawienie za $\vec{v}_2$ wielkości wynikającej ze wzoru (25).
Następnia, w odniesieniu do równania (29) rozważmy dwa przypadki.

   1. $\alpha_{33} = 0$. Wtedy równanie (29) redukuje się do postaci $\vec{w}_3 = \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2$. Oznacza to, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne, co kończy dowód.
   2. $\alpha_{33} \neq 0$. Wtedy z równania (29) możemy przedstawić wektor $\vec{v}_3$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, mianowicie:

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\alpha_{33}}\vec{w}_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}\vec{w}_1 - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}\vec{w}_2. \tag{31}$$

   Następnie w równaniu (30) w miejsce wektora $\vec{v}_3$ wstawiamy wyrażenie wynikająceze wzoru (31). Wtedy okazuje się, że wektor $\vec{w}_4$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, a zatem wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo niezależne, co kończy dowód.

Podamy teraz przykłady zastosowania twierdzenia Steinitza do badania liniowej zależności wektorów.

PRZYKŁAD 16 *Uzasadnij liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach wektorowych.*

a) $(7, 41, 82)$, $(2, 71, -304)$, $(-17, 34, 72)$, $(101, 201, 307)$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$,

b) $2x^3 + 7x^2$, $4x^3 - 9x^2$, $x^3 - 2x^2 + 3x$, $x^2 - x + 9$, $8x^3 - 7x + 1$ *w przestrzeni* $V = \mathcal{R}_3[x]$.

Rozwiązanie.

a) Oznaczmy $\vec{w}_1 = (7, 41, 82)$, $\vec{w}_2 = (2, 71, -304)$, $\vec{w}_3 = (-17, 34, 72)$, $\vec{w}_4 = (101, 201, 307)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= (7, 41, 82) = 7(1, 0, 0) + 41(0, 1, 0) + 82(0, 0, 1)\\ \vec{w}_2 &= (2, 71, -304) = 2(1, 0, 0) + 71(0, 1, 0) + (-304)(0, 0, 1)\\ \vec{w}_3 &= (-17, 34, 72) = -17(1, 0, 0) + 34(0, 1, 0) + 72(0, 0, 1)\\ \vec{w}_4 &= (101, 201, 307) = 101(1, 0, 0) + 201(0, 1, 0) + 307(0, 0, 1).\end{aligned}$$

Przyjmując $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$, otrzymujemy $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4 \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. A zatem bezpośrednio z twierdzenia Steinitza wynika, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ są liniowo zależne.

b) Oznaczmy $w_1(x) = 2x^3 + 7x^2$, $w_2(x) = 4x^3 - 9x^2$, $w_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$, $w_4(x) = x^2 - x + 9$, $w_5(x) = 8x^3 - 7x + 1$, oraz $v_1(x) = x^3$, $v_2(x) = x^2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = 1$. Wtedy $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4, \vec{w}_5 \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, , \vec{v}_4\}$. A zatem bezpośrednio z twierdzenia Steinitza wynika, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4, \vec{w}_5$ są liniowo zależne.

Wprowadzimy teraz jedno z najważniejszych pojęć w teorii przestrzeni wektorowych, jakim jest baza przestrzeni.

Definicja 17 *Bazą przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór wektorów $B \subset V$ spełniający warunki*

1. *B jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.*
2. *Zbiór B generuje przestrzeń V, czyli $linB = V$.*

Przykład 18 *Czy podane zbiory wektorów stanowią bazę podanej przestrzeni wektorowej V?*

a) $B = \{(1, 2, 0), (2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

b) $B = \{(1, 2, 0), (2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

c) $B = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

d) $B = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie.

a) Niech $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$ i $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$. Najpierw sprawdzimy, czy wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne. Niech więc $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ oraz niech.

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{\mathbf{0}}. \tag{32}$$

Mamy sprawdzić, czy $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 0$. Warunek (32) oznacza, że

$$\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\ \alpha_2 = 0\end{cases} \implies \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1 = -2\alpha_2 = 0.$$

A zatem wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne. Sprawdźmy teraz, czy generują one całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Niech więc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mamy sprawdzić, czy istnieją współczynniki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, takie, że $\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(2, 1, 1) = (x, y, z)$. Równość ta oznacza, że

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = x\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = y\\ \alpha_2 = z\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha_2 = z\\ \alpha_1 + 2z = x\\ 2\alpha_1 + z = y\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha_2 = z\\ \alpha_1 = x - 2z\\ \alpha_1 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\end{cases} \implies x - 2z = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z.$$

Wniosek jest następujący. Jeżeli punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ jest wygenerowany przez wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, to jego współrzędne spełniają równanie

$$x - 2z = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \iff x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \iff 2x - y - 3z = 0.$$

czyli punkt (x, y, z) należy do płaszczyzny π o równaniu $2x - y - 3z = 0$. Oznacza to, że wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ nie generują całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, lecz tylko płaszczyznę π. Nie stanowią więc bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Można przy tym stwierdzić, że stanowią one bazę podprzestrzeni wektorowej wyznaczonej przez płaszczyznę π.

b) $B = \{(1, 2, 0), (2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
Niech $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$ i $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$. Najpierw sprawdzimy, czy wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ są liniowo niezależne. Niech więc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ oraz niech.

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{\mathbf{0}}. \tag{33}$$

Mamy sprawdzić, czy $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ i $\alpha_3 = 0$. Warunek (33) oznacza, że

$$\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(2, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Zauważmy, że trójka liczb $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ jest na pewno rozwiązaniem układu równań (34). Gdybyśmy więc wiedzieli, że układ ten nie ma innych rozwiązań, to oznaczałoby, że z warunków (34) wynika, że $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. To natomiast oznaczałoby liniową niezależność wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$. Jak więc sprawdzić, czy układ równań (34) ma jedno czy więcej rozwiązań. Wystarczy obliczyć jego wyznacznik główny. A zatem

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{k_2 - = k_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Ponieważ wyznacznik jest różny od 0, więc układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Nie istnieje więc inne rozwiązanie niż rozwiązanie zerowe. A zatem musi być $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, co oznacza, że wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ są liniowo niezależne. Sprawdźmy teraz, czy generują one całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Niech więc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mamy sprawdzić, czy istnieją współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, takie, że $\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(2, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 1) = (x, y, z)$. Równość ta oznacza, że

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_2 + \alpha_3 = z. \end{cases} \tag{35}$$

Otrzymaliśmy układ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, natomiast dane są $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wiemy już, że wyznacznik główny układu jest różny od zera. Oznacza to, że niezależnie od wartości x, y, z, układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. A zatem dowolny punkt (x, y, z) można wygenerować jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, będących rozwiązaniem układu (35). Podsumowując: wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

c) $B = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
Niech $\vec{w}_1 = (1, 2)$, $\vec{w}_2 = (2, 1)$ i $\vec{w}_3 = (3, 2)$. Oznaczmy również $\vec{v}_1 = (1, 0)$ i $\vec{v}_2 = (0, 1)$. Wtedy mamy $\vec{w}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = 2 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2$ i $\vec{w}_3 = 3 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2$. A zatem $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Z twierdzenia Steinitza wynika więc, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ są liniowo zależne. Nie mogą więc stanowić bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

d) $B = \{(1,2),(2,1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

Niech $\vec{v}_1 = (1,2)$ i $\vec{v}_2 = (2,1)$. Najpierw sprawdzimy, czy wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne. Niech więc $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ oraz niech

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{\mathbf{0}}. \tag{36}$$

Mamy sprawdzić, czy $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 0$. Warunek (36) oznacza, że

$$\alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,1) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Zauważmy, że para liczb $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ jest na pewno rozwiązaniem układu równań (37). Gdybyśmy więc wiedzieli, że układ ten nie ma innych rozwiązań, to oznaczałoby, że z warunków (37) wynika, że $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. To natomiast oznaczałoby liniową niezależność wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Wystarczy więc obliczyć wyznacznik główny układu (37), aby przekonać się, czy ma on jedno, czy więcej rozwiązań. A zatem

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

Ponieważ wyznacznik jest różny od 0, więc układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Nie istnieje więc inne rozwiązanie niż rozwiązanie zerowe. A zatem musi być $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$, co oznacza, że wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne. Sprawdźmy teraz, czy generują one całą przestrzeń $\mathbb{R}^2$. Niech więc $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy sprawdzić, czy istnieją współczynniki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, takie, że $\alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,1) = (x,y)$. Równość ta oznacza, że

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = y. \end{cases} \tag{38}$$

Otrzymaliśmy układ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, natomiast dane są $x, y \in \mathbb{R}$. Wiemy już, że wyznacznik główny układu jest różny od zera. Oznacza to, że niezależnie od wartości x, y, układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. A zatem dowolny punkt (x,y) można wygenerować jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, będących rozwiązaniem układu (38). Podsumowując: wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Zastanówmy się nad tym, z jakiego powodu wektory z przykładów a) i c) nie stanowią bazy danej przestrzeni. Otóż, w przykładzie a) wektorów jest **za mało** i w związku z tym nie da się za ich pomocą wygenerować całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Można wygenerować jedynie pewną płaszczyznę, będącą podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Natomiast w przykładzie c) wektorów tych jest **za dużo** i w związku z tym zastosowanie ma twierdzenie Steinitza, z którego wynika brak liniowej niezależności. Wniosek jest zatem następujący. Warunkiem koniecznym na to, aby wektory stanowiły bazę danej przestrzeni jest, że nie może ich być ani za mało ani za dużo. Ich liczba jest ściśle związana z przestrzenią, do której należą. Już wkrótce sprecyzujemy, na czym dokładnie ten związek polega.
Ponadto zauważmy, że rozumując analogicznie, jak w punktach b) i d), można sformułować następujący wniosek. Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy, której kolumnami są wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ jest różny od 0. W następnym wykładzie wniosek ten rozszerzymy na dowolną przestrzeń skończenie wymiarową.

Podamy teraz twierdzenie dotyczące liczby wektorów tworzących bazę danej przestrzeni.

TWIERDZENIE 19 *Jeżeli baza przestrzeni wektorowej V składa się z n wektorów ($n \in \mathbb{N}_+$), to każda inna baza tej przestrzeni składa się również z n wektorów.*

Dowód. Niech zbiór $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ stanowi bazę przestrzeni V oraz niech zbiór $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ stanowi również bazę przestrzeni V. Mamy udowodnić, że $k = n$. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że $k \neq n$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. $k > n$. Ponieważ zbiór B jest bazą, więc wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generują przestrzeń V. A zatem każdy element przestrzeni V należy do zbioru kombinacji liniowych tych wektorów (który oznaczamy symbolem $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$). W szczególności więc $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Ponieważ $k > n$, więc z twierdzenia Steinitza wynika, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k$ są liniowo zależne, co jest sprzeczne z założeniem, że stanowią one bazę przestrzeni V.

2. $n > k$. Ponieważ zbiór B' jest bazą, więc wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k$ generują przestrzeń V. A zatem każdy element przestrzeni V należy do zbioru kombinacji liniowych tych wektorów (który oznaczamy symbolem $lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$). W szczególności więc $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in lin\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$. Ponieważ $n > k$, więc z twierdzenia Steinitza wynika, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ są liniowo zależne, co jest sprzeczne z założeniem, że stanowią one bazę przestrzeni V.

Sprzeczność oznacza, że $k = n$, co kończy dowód.

Twierdzenie 20 *Jeżeli baza przestrzeni V jest nieskończona, to każda inna baza tej przestrzeni jest również nieskończona.*

Dowód. Niech $B \subset V$ będzie nieskończoną bazą przestrzeni V. Mamy udowodnić, że każda inna baza tej przestrzeni jest również nieskończona. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ jest skończoną bazą przestrzeni V. Ponieważ zbiór B' jest bazą, więc wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generują przestrzeń V. A zatem każdy element przestrzeni V należy do zbioru kombinacji liniowych tych wektorów (który oznaczamy symbolem $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$) W szczególności więc do zbioru $lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ należą wszystkie elementy zbioru B. Ponieważ jest ich nieskończenie wiele, więc możemy spośród nich wybrać $n+1$ wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n, \vec{w}_{n+1}$. Mamy więc $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n, \vec{w}_{n+1} \in lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Z Twierdzenie Steinitza wynika więc, że wektory $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n, \vec{w}_{n+1}$ są liniowo zależne, co jest sprzeczne z założeniem, że zbiór B jest bazą. Sprzeczność kończy dowód.

Wykład zakończymy definicją wymiaru przestrzeni wektorowej.

Definicja 21 *Niech $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ będzie bazą przestrzeni V ($n \in \mathbb{N}_+$). Wtedy liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni V i oznaczamy*

$$dim V = n.$$

Ponadto przyjmujemy $dim\{\vec{\mathbf{0}}\} = 0$. Jeżeli przestrzeń V nie ma skończonej bazy, to przyjmujemy

$$dim V = \infty.$$

Wymiar przestrzeni jest to więc liczność elementów jej bazy. Twierdzenia 19 i 20 gwarantują, że pojęcie wymiaru przestrzeni jest dobrze zdefiniowane, to znaczy nie zależy od doboru konkretnej bazy.