# સમરૂપતા અને પાયથાગોરસ પ્રમેય 7

*It is not enough to have a good mind. The main thing is to use it well.*

***– Rene Des Cartes***

## 7.1 પ્રાસ્તાવિક

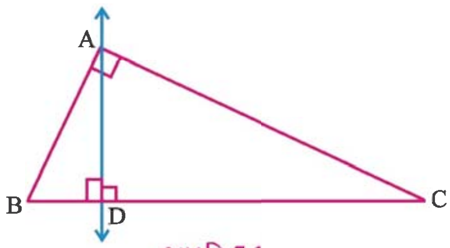
''શાળાભૂમિતિના અભ્યાસ દરમિયાન તમે શીખ્યા હો તેવું કયું પ્રમેય તમને યાદ છે ?'' તમે કોઈ પણ વ્યક્તિને આ પ્રશ્ન પૂછો. આ માણસ કોઈ શિક્ષક, ઇજનેર, ડૉક્ટર કે વિજ્ઞાનનો સ્નાતક હોય તેવું જરૂરી નથી. જેણે શાળાકીય અભ્યાસ પૂરો કર્યો હોય તેવો બેંકનો કર્મચારી, વકીલ કે વેપારી હશે તો પણ ચાલશે. ઉત્તર **'પાયથાગોરસનું પ્રમેય'** સાંભળીને તમને આનંદ થશે.

આ પ્રમેય આશરે 3000 વર્ષ પહેલાં શોધાયું છે. વિશ્વ તેને **'પાયથાગોરસ પ્રમેય'** તરીકે ઓળખે છે પણ આ પ્રમેય સિંધુ અને ગંગા-યમુનાના મેદાનમાં પાંગરેલી ભારતીય સંસ્કૃતિ સહીત તમામ પ્રાચીન સંસ્કૃતિઓમાં સ્વતંત્ર રીતે શોધાયું હતું. ઘણા નિષ્ણાત ગણિતજ્ઞો આ પ્રમેયથી આકર્ષાયા હતા. તેથી જ આ પ્રમેયની સ્વતંત્ર, 370 થી વધુ સાબિતી મળે છે. કોઈ પણ સર્ચ ઍન્જિન ખોલી તેમાં **'Pythagoras Theorem'** ટાઇપ કરો. તમને આ પ્રમેય અને તેને સંલગ્ન માહિતી ધરાવતા 100 થી વધુ પાનાં મળી આવશે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ પ્રમેય અને તેને સંલગ્ન બીજા પરિણામોનો અભ્યાસ કરવાના છીએ.

## 7.2 કાટકોણ ત્રિકોણ અને સમરૂપતા

પાયથાગોરસનું પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આપણે સમરૂપતાની વિભાવનાનો ઉપયોગ કરવાના છીએ. આ પ્રમેય કાટકોણ ત્રિકોણનો એક ગુણધર્મ છે.

ધારો કે એક કાટકોણ ત્રિકોણ આપેલ છે. જો ત્રિકોણનો કોઈ એક ખૂણો કાટખૂણો હોય, તો બાકીના બે ખૂણા લઘુકોણ જ હોય. આપેલા ત્રિકોણના જે શિરોબિંદુએ કાટખૂણો રચાતો હોય તે બિંદુમાંથી ત્રિકોણના કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે તો વેધને સમાવતી રેખાના જુદા જુદા બંધ અર્ધતલમાં બે ત્રિકોણો રચાય છે. આપણે આ બે ત્રિકોણો વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવાના છીએ ઉપરાંત આપણે આ બે ત્રિકોણોના આપેલા ત્રિકોણ સાથેના સંબંધનો પણ અભ્યાસ કરવાના છીએ.



આકૃતિ 7.1

આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિતી આપ્યા વિના સ્વીકારી લઈશું.

**પ્રમેય 7.1 : કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે તો વેધને સમાવતી રેખાના ભિન્ન બંધ અર્ધતલોમાં રચાતા બે ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને આ બે ત્રિકોણો પરસ્પર પણ સમરૂપ હોય છે.**

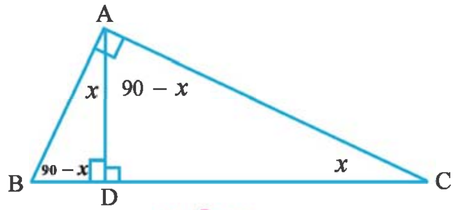
**$\Delta ABC$ માં $\angle A$ કાટકોણ છે. જો $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $D \in \overline{BC}$ તો $\Delta ADB \sim \Delta ABC$, $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ અને $\Delta ADB \sim \Delta ADC$.**

પહેલાં તો એ નોંધીએ કે ઉપરોક્ત ત્રણે ત્રિકોણો કાટકોણ ત્રિકોણ છે. કાટકોણ ત્રિકોણમાં બે લઘુકોણોના માપનો સરવાળો 90 થાય.

તેથી જો $m\angle ACD = m\angle ACB = x$, ધારીએ તો

$m\angle DAC = 90 - x$. વળી, B–D–C હોવાથી

$m\angle BAD = 90 - (90 - x) = x$.



આકૃતિ 7.2

તેથી, સંગતતા ADB $\leftrightarrow$ CAB સમરૂપતા છે.

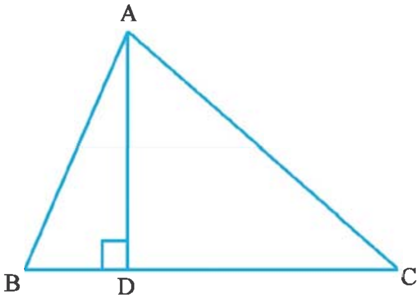
સંગતતા ADC $\leftrightarrow$ BAC સમરૂપતા છે.

સંગતતા ADB $\leftrightarrow$ CDA સમરૂપતા છે.

**સમગુણોત્તર મધ્યક**

જો $x$, $y$, $z$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ (એટલે કે $y^2 = zx$) હોય, તો $y$ ને $x$ અને $z$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક કહેવામાં આવે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યા $a$ અને $b$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab}$ છે. સામાન્ય રીતે સમગુણોત્તર મધ્યકને આપણે G વડે દર્શાવીએ છીએ. જો $a < b$ અને $a$ અને $b$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક G હોય, તો એવું સાબિત કરી શકાય કે $a < G < b$.

**સંલગ્ન રેખાખંડો :** જો $\Delta$ABCમાં $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, D $\in \overline{BC}$ તો $\overline{BD}$ ને $\overline{AB}$ નો સંલગ્ન રેખાખંડ કહેવામાં આવે છે અને $\overline{CD}$ને $\overline{AC}$ નો સંલગ્ન રેખાખંડ કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 7.3

અહીં $\Delta$ABCમાં $\angle$A લઘુકોણ, કાટકોણ કે ગુરુકોણ હોઈ શકે.

પ્રમેય 7.1 પરથી તુરત જ મળતા પરિણામ સ્વરૂપે એક ઉપપ્રમેય નોંધીએ જે આપણે વૈધાનિક રીતે સાબિત કર્યા વિના સ્વીકારીશું.

**ઉપપ્રમેય 1 : કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર વેધ દોરેલ હોય, તો (1) વેધની લંબાઈ એ વેધથી બનતા કર્ણના રેખાખંડોની લંબાઈનો ગુણોત્તર મધ્યક છે. (2) કર્ણ સિવાયની દરેક બાજુની લંબાઈ એ કર્ણની લંબાઈ અને કર્ણના તે બાજુને સંલગ્ન રેખાખંડની લંબાઈનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.**

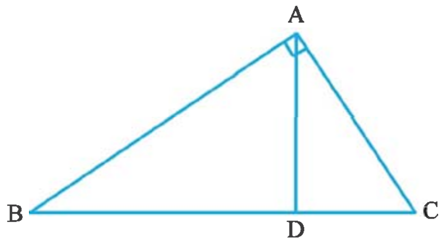
બીજા શબ્દોમાં,

$\Delta$ABCમાં $\angle$A કાટખૂણો છે. જો $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, D $\in \overline{BC}$, તો

(1) $AD^2 = BD \cdot DC$

(2) (i) $AB^2 = BD \cdot BC$

(ii) $AC^2 = CD \cdot BC$



આકૃતિ 7.4

પ્રમેય 7.1માં આપણે જોયું છે કે $\Delta$ADB અને $\Delta$ADC ની સંગતતા ADB $\leftrightarrow$ CDA સમરૂપતા છે.

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}$

$\therefore AD^2 = BD \cdot DC$

$\Delta$ADB અને $\Delta$ABCની સંગતતા ADB $\leftrightarrow$ CAB સમરૂપતા છે.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore AB^2 = BD \cdot BC$

$\Delta$ADC અને $\Delta$ABCની સંગતતા ADC $\leftrightarrow$ BAC સમરૂપતા છે.

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$

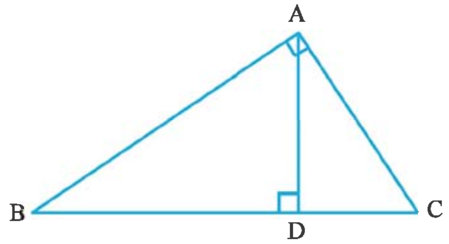
$\therefore AC^2 = CD \cdot BC$

ભૂમિતિના પિતામહ તરીકે ઓળખાતા એવા થેઇલ્સના શિષ્ય, મહાન ગ્રીક ભૂમિતિવિદ્ પાયથાગોરસ દ્વારા શોધાયેલ વિખ્યાત પ્રમેય સાબિત કરવા માટે હવે આપણે પર્યાપ્ત રીતે સજ્જ છીએ. આ પ્રમેયની જે સાબિતી આધુનિક પાઠ્યપુસ્તકોમાં આપવામાં આવે છે તે પાયથાગોરસે પોતે આપેલી અને યુક્લિડે તેના પુસ્તક 'Elements' માં વર્ણવેલી તે સાબિતી નથી. અત્રે આપવામાં આવેલ સાબિતી પ્રમેય 7.1 અને તેના ઉપપ્રમેયમાં આપણે જોઈ ગયા તે 'ત્રિકોણોની સમરૂપતા'ની સંકલ્પના પર આધારિત છે.

## 7.3 પાયથાગોરસનું પ્રમેય

પાયથાગોરસ-પ્રમેયના ઉપયોગોનો વ્યાપ ઘણો વિશાળ છે. તેથી જ પાયથાગોરસ પ્રમેય વિખ્યાત છે. જે રેખાખંડોની લંબાઈ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$ વગેરે જેવી અસંમેય હોય તેવા રેખાખંડોની રચના કરવા માટે આપણે પાયથાગોરસ-પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી ગયા છીએ. ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યા આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ પરથી આપીએ છીએ. નિત્યસમ $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ મેળવવા માટે આપણે પાયથાગોરસ-પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો છે. પુરાતન ભારતીય સંસ્કૃતિમાં બૌધાયને (800 BC) લખેલા 'સૂલ્બસૂત્રો' માં પાયથાગોરસ-પ્રમેયનું વર્ણન છે. ભાસ્કરાચાર્ય અને બ્રહ્મગુપ્તે આ પ્રમેયની જુદી જુદી સાબિતીઓ આપી છે. મહાન કલાકાર, શિલ્પી, સ્થપતિ અને ચિત્ર 'મોનાલિસા' વડે જાણીતા ચિત્રકાર લિયોનાર્ડો દ' વિન્શીએ પણ આ પ્રમેયની સુંદર સાબિતી આપી છે.

**પ્રમેય 7.2 : પાયથાગોરસનું પ્રમેય : કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈનો વર્ગ એ તે ત્રિકોણની બાકીની બાજુઓની લંબાઈના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.**



આકૃતિ 7.5

**પક્ષ :** $\Delta ABC$ માં $\angle A$ કાટકોણ છે.

**સાધ્ય :** $BC^2 = AB^2 + AC^2$

**સાબિતી :** ધારો કે $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $D \in \overline{BC}$.

$\Delta ABC$ માં $\angle A$ કાટખૂણો છે.

$\therefore$ $\angle B$ અને $\angle C$ એ $\Delta ABC$ ના લઘુકોણો છે.

તથા B–D–C

$\therefore$ $BD + DC = BC$ **(i)**

હવે પ્રમેય 7.1 ના ઉપપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$AB^2 = BD \cdot BC$ અને $AC^2 = DC \cdot BC$

$$\therefore \quad AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC$$
$$= (BD + DC) \cdot BC$$
$$= BC \times BC$$
$$= BC^2$$

### પાયથાગોરસ-પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય

આપણે એક પ્રવૃત્તિ કરીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે જો ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં માપ આપેલાં હોય, તો ત્રિકોણ રચી શકાય.

આપણે એવો $\Delta ABC$ રચીએ જેની બાજુઓનાં માપ $AB = 3$, $BC = 4$ અને $AC = 5$ હોય. હવે $\angle B$નું માપ કોણમાપકનો ઉપયોગ કરી મેળવીએ.

આપણે એક બીજો $\Delta PQR$ રચીએ જેમાં $PQ = 5$, $QR = 12$ અને $PR = 13$ હોય. $\angle Q$નું માપ મેળવીએ.

ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિમાં $\angle B$ અને $\angle Q$ કાટકોણ છે તેવું માલુમ પડશે.

તમે એ નોંધ્યું કે $\Delta ABC$માં $AC^2 = AB^2 + BC^2$ છે ?

તમે એવું અવલોકન કર્યું કે $\Delta PQR$માં $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ છે ?

ઉપરોક્ત પ્રયોગના પરિણામોથી આપણે એવું તારણ કરવા પ્રેરાઈએ છીએ કે જ્યારે એક ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુના માપનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓનાં માપના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય ત્યારે તે ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોવો જોઈએ. આ પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય છે. હવે તે સાબિત કરીએ.

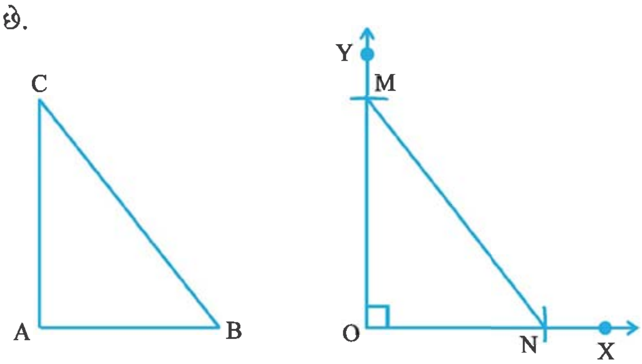
**પ્રમેય 7.3 : પાયથાગોરસ-પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય : જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટકોણ હોય.**

બીજા શબ્દોમાં,

**$\Delta ABC$માં જો $BC^2 = AB^2 + AC^2$ હોય, તો $\angle A$ ($\overline{BC}$ની સામેનો ખૂણો) કાટકોણ હોય.**

**પક્ષ :** $\Delta ABC$ માં $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

**સાધ્ય :** $\angle A$ કાટકોણ છે.




આકૃતિ 7.6

**સાબિતી :** ધારો કે $\overrightarrow{OX}$ કોઈ કિરણ છે.

આપણે એવું $\overrightarrow{OY}$ દોરી શકીએ કે જેથી $\overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{OX}$ થાય.

$M \in \overrightarrow{OY}$ લઈએ કે જેથી $OM = AC$.

$N \in \overrightarrow{OX}$ લઈએ કે જેથી $ON = AB$.

$\overline{MN}$ દોરીએ.

$\Delta OMN$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે કારણ કે $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ છે. **($M \in \overrightarrow{OY}$, $N \in \overrightarrow{OX}$)**

$\angle MON$ કાટકોણ છે.

$\therefore$ $\overline{MN}$ કર્ણ છે.

$\therefore$ પાયથાગોરસ પ્રમેય પ્રમાણે,

$MN^2 = OM^2 + ON^2 = AC^2 + AB^2$

પરંતુ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ **(પક્ષ)**

$\therefore$ $MN^2 = BC^2$

$\therefore$ $MN = BC$ **(i)**

$\therefore$ $\Delta ABC$ અને $\Delta ONM$ માં સંગતતા $ABC \leftrightarrow ONM$ માટે,

$\overline{AB} \cong \overline{ON}$ **($ON = AB$)**

$\overline{AC} \cong \overline{OM}$ **($OM = AC$)**

$\overline{BC} \cong \overline{MN}$ **($BC = MN$)**

$\therefore$ સંગતતા $ABC \leftrightarrow ONM$ એકરૂપતા છે. તેથી $\Delta ABC \cong \Delta ONM$ **(બાબાબા)**

$\therefore$ $\angle A \cong \angle O$

પરંતુ રચનાથી $\Delta ONM$નો $\angle O$ કાટકોણ છે.

$\therefore$ $\angle A$ કાટકોણ છે.

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

**ઉદાહરણ 1 :** $\Delta PQR$માં $m\angle Q = 90$ અને $\overline{QM}$ એક વેધ છે અને $M \in \overline{PR}$. જો $QM = 12$, $PR = 26$ તો $PM$ અને $RM$ શોધો. જો $PM < RM$ તો $PQ$ અને $QR$ શોધો.

**ઉકેલ :** $\Delta PQR$માં $\overline{QM}$ વેધ છે.

$\therefore \quad m\angle Q = 90$

$\therefore \quad M \in \overline{PR}$ અને P–M–R.

ધારો કે $MP = x$.

$\therefore \quad RM = PR - MP = 26 - x$ **(PR = 26)**

હવે $QM^2 = PM \cdot RM$

$\therefore \quad 12^2 = x(26 - x)$ **(QM = 12)**

$\therefore \quad x^2 - 26x + 144 = 0$

$\therefore \quad (x - 8)(x - 18) = 0$

$\therefore \quad x = 8$ અથવા $x = 18$

$\therefore \quad PM = 8$ અથવા $PM = 18$

તદનુરૂપ $RM = 26 - 8 = 18$ અથવા $RM = 26 - 18 = 8$ **(i)**

હવે, $PM < RM$.

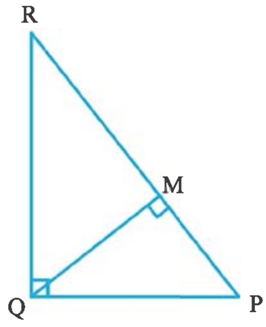
$\therefore \quad PM = 8, RM = 18$ અને $PR = 26$

$PQ^2 = PM \cdot PR = 8 \times 26 = 16 \times 13$

$\therefore \quad PQ = 4\sqrt{13}$

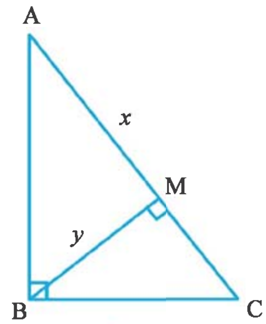
$QR^2 = RM \cdot PR = 18 \times 26 = 36 \times 13$

$\therefore \quad QR = 6\sqrt{13}$



આકૃતિ 7.7

**ઉદાહરણ 2 :** $\Delta ABC$માં $m\angle B = 90$, $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$. જો $AM = x$, $BM = y$ તો AB, BC અને CMને $x$ અને $y$ના સ્વરૂપમાં મેળવો. $(x > 0, y > 0)$



આકૃતિ 7.8

**ઉકેલ :** આપણે જાણીએ છીએ કે $BC^2 = CM \cdot AC$ **(i)**

$AB^2 = AM \cdot AC$ **(ii)**

$AB^2 = AM^2 + BM^2$ **(iii)**

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ **(iv)**

અહીં, $AM = x$, $BM = y$

$AB^2 = AM^2 + BM^2 = x^2 + y^2$ **((iii) પરથી)**

$\therefore \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(v)** (ii)નો ઉપયોગ કરતાં, $AB^2 = AM \cdot AC$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = x\,AC$

$\therefore \quad AC = \frac{x^2 + y^2}{x}$

$\therefore \quad CM = AC - AM = \frac{x^2 + y^2}{x} - x = \frac{y^2}{x}$ **(vi)**

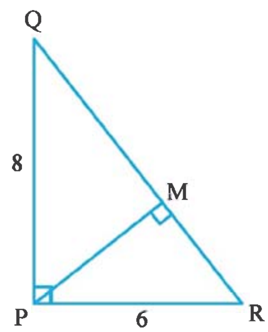
$BC^2 = CM \cdot AC = \frac{y^2}{x}\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right) = \frac{y^2(x^2 + y^2)}{x^2}$ **((i) તથા (vi) પરથી)**

$\therefore \quad BC = \frac{y}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$ **(vii)**

આમ, $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$, $BC = \frac{y}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$, $CM = \frac{y^2}{x}$

**ઉદાહરણ 3 :** કાટકોણ $\Delta PQR$ માં $\angle P$ કાટકોણ છે અને $\overline{PM}$ કર્ણ પરનો વેધ છે. જો $PQ = 8$, $PR = 6$, તો PM શોધો.

**ઉકેલ :** $\Delta PQR$ માં $\angle P$ કાટકોણ છે.




આકૃતિ 7.9

$PQ^2 + PR^2 = QR^2$. વળી $PR = 6$ અને $PQ = 8$.

$\therefore \quad QR^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\therefore \quad QR = 10$

$PQ^2 = QM \cdot QR$

$QM = \frac{PQ^2}{QR} = \frac{64}{10} = 6.4$

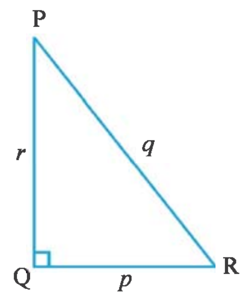
$\therefore \quad RM = QR - QM = 10 - 6.4 = 3.6$

$PM^2 = QM \cdot MR = 6.4 \times 3.6$

$\therefore \quad PM^2 = \frac{(36)(64)}{100}$

$\therefore \quad PM = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$

**ઉદાહરણ 4 :** $\Delta PQR$માં $\angle Q$ કાટકોણ છે. જો $PR - PQ = 9$ અને $PR - QR = 18$ તો $\Delta PQR$ ની પરિમિતિ શોધો.




આકૃતિ 7.10

**ઉકેલ :** $\Delta PQR$ માં $\angle Q$ કાટકોણ છે.

ધારો કે $PQ = r$, $PR = q$, $QR = p$; $p, q, r > 0$

હવે, $PR - PQ = 9$ અને $PR - QR = 18$

$\therefore \quad q - r = 9$ **(i)**

$q - p = 18$ **(ii)**

પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, $PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \quad r^2 + p^2 = q^2$ **(iii)**

(i) પરથી $r = q - 9$ અને (ii) પરથી $p = q - 18$

(iii) માં મૂકતાં,

$(q - 9)^2 + (q - 18)^2 = q^2$

$\therefore \quad q^2 - 54q + 405 = 0$

$(q - 45)(q - 9) = 0$

$q \neq 9$ (જો $q = 9$ તો $r = q - 9 = 0$)

$\therefore \quad q = 45$

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી, $r = 36$, $p = 27$

$\therefore \quad \Delta PQR$ ની પરિમિતિ $= PQ + QR + PR$

$= r + p + q = 36 + 27 + 45 = 108$

$\therefore \quad \Delta PQR$ ની પરિમિતિ 108 છે.

**ઉદાહરણ 5 :** નીચે $\Delta ABC$ ની બાજુઓ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ નાં માપ આપેલ છે. દરેકમાં કયા કાટકોણ ત્રિકોણ છે તે નક્કી કરો. જો કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તો કયો ખૂણો કાટકોણ છે તે જણાવો.

**(1)** $AB = 25$, $BC = 7$, $AC = 24$

**(2)** $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 3$

**(3)** $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$

**(4)** $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$

**ઉકેલ :** કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ સૌથી મોટી બાજુ છે. તેથી જો $\Delta ABC$ કાટકોણ હોય તો જેનું માપ સૌથી મોટું છે તે બાજુ કર્ણ હોય.

**(1)** $AB = 25$, $BC = 7$, $AC = 24$

જો $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તો $\overline{AB}$ તેનો કર્ણ હોય.

$AB^2 = 25^2 = 625, \quad BC^2 + AC^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + AC^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle C$ કાટકોણ છે.

**(2)** $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 3$

જો $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો $AB^2 = BC^2 + AC^2$ થવું જોઈએ.

$AB^2 = 8^2 = 64, \quad BC^2 + AC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$

$\therefore \quad AB^2 \neq BC^2 + AC^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

**(3)** $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$

જો $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો $AC^2 = AB^2 + BC^2$ થવું જોઈએ.

$AC^2 = 10^2 = 100, \quad AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં $\angle B$ કાટકોણ છે.

**(4)** $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$

જો $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો $AC^2 = AB^2 + BC^2$ થવું જોઈએ.

$AC^2 = 6^2 = 36, \quad AB^2 + BC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

$\therefore \quad AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

**ઉદાહરણ 6 :** $\Delta ABC$માં $AC + BC = 28$, $AB + BC = 32$ અને $AC + AB = 36$. $\Delta ABC$નો પ્રકાર નક્કી કરો.

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$માં $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ લઈએ.

આપણને આપેલ છે કે $AC + BC = 28$ એટલે કે $b + a = 28$ (i)

$AB + BC = 32$ એટલે કે $c + a = 32$ **(ii)**

$AC + AB = 36$ એટલે કે $b + c = 36$ **(iii)**

(i), (ii) અને (iii)નો સરવાળો કરતાં

$2a + 2b + 2c = 28 + 32 + 36 = 96$

$\therefore \quad a + b + c = 48$

પરંતુ $a + b = 28$

$\therefore \quad c = 48 - 28 = 20$

(ii) પરથી $a = 12$ અને (iii) પરથી $b = 16$

$\therefore \quad a = BC = 12,\ b = AC = 16,\ c = AB = 20$

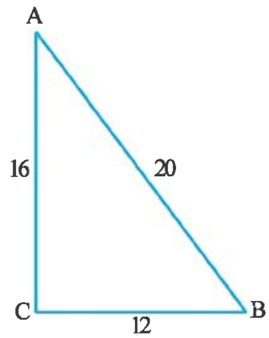
$\therefore \quad a^2 + b^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = c^2$

$\therefore \quad a^2 + b^2 = c^2$

$\therefore \quad BC^2 + AC^2 = AB^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$માં $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$\therefore$ પાયથાગોરસ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેયથી, $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.11

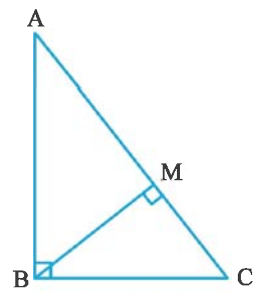
**ઉદાહરણ 7 :** $\Delta ABC$ માં $\overline{BM}$ વેધ છે. $M \in \overline{AC}$ અને $\angle B$ કાટકોણ છે. સાબિત કરો કે $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM}{CM}$.

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$માં $\angle B$ કાટખૂણો છે અને $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$.

$\therefore \quad AB^2 = AM \cdot AC$ અને $BC^2 = CM \cdot AC$

$\therefore \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM \cdot AC}{CM \cdot AC}$

$\therefore \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM}{CM}$



આકૃતિ 7.12

**ઉદાહરણ 8 :** $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$ અને $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$. જો $AM = 4MC$, તો સાબિત કરો કે, $AB = 2BC$.

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$ અને $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$ છે.

$\therefore \quad AB^2 = AM \cdot AC$

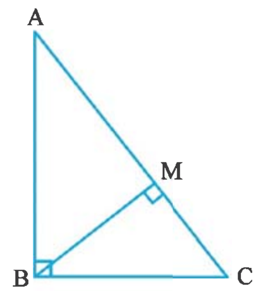
$\quad BC^2 = CM \cdot AC$

$\therefore \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM \cdot AC}{MC \cdot AC} = \frac{AM}{MC}$

$\therefore \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{4MC}{MC} = 4$ **(AM = 4MC)**

$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = 2$

$\therefore \quad AB = 2BC$



આકૃતિ 7.13

**ઉદાહરણ 9 :** $\Delta ABC$ માં $\angle B$ કાટકોણ છે અને $\overline{BM}$ વેધ છે. $M \in \overline{AC}$. જો $AB = 2AM$ તો સાબિત કરો કે $AC = 4AM$.

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$ માં, $m\angle B = 90$

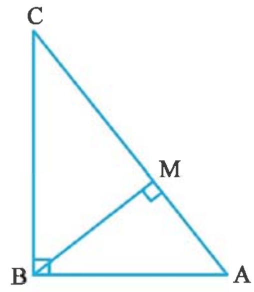
$\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$.

$\therefore \quad AB^2 = AM \cdot AC$

$\therefore \quad (2AM)^2 = AM \cdot AC$

$\therefore \quad 4AM^2 = AM \cdot AC$

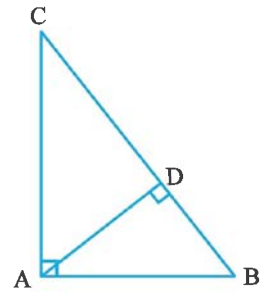
$\therefore \quad AC = 4AM$



આકૃતિ 7.14

**ઉદાહરણ 10 :** $\Delta ABC$ માં $m\angle A = 90$ અને $\overline{AD} \perp \overline{BC}$,

$D \in \overline{BC}$ તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.



આકૃતિ 7.15

**ઉકેલ :** $AB^2 = BD \cdot BC$ **(i)**

તથા $AC^2 = DC \cdot BC$ **(ii)**

$$\therefore \quad \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{BD \cdot BC} + \frac{1}{DC \cdot BC}$$

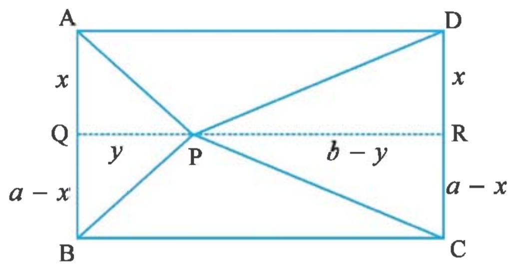
$$= \frac{DC + BD}{BD \cdot DC \cdot BC}$$

$$= \frac{BC}{BD \cdot DC \cdot BC} = \frac{1}{BD \cdot DC}$$

વળી, $AD^2 = BD \cdot DC$ **(iii)**

$$\therefore \quad \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}$$

**ઉદાહરણ 11 :** લંબચોરસ ABCD ના અંદરના ભાગમાં P કોઈ બિંદુ છે. સાબિત કરો કે $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.



આકૃતિ 7.16

**ઉકેલ :** લંબચોરસ ABCD ના અંદરના ભાગમાં P કોઈ બિંદુ છે.

બિંદુ P માંથી $\overline{AD}$ને સમાંતર રેખા દોરો જે $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ને અનુક્રમે Q અને Rમાં છેદે.

$\therefore \quad$ A–Q–B, D–R–C.

ધારો કે $AB = CD = a$, $AD = BC = QR = b$, $AQ = DR = x$.

$\therefore \quad QB = CR = a - x$ **(□ AQRD અને □ QBCR લંબચોરસ છે.)**

હવે, $\Delta AQP$ અને $\Delta BQP$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. **($\angle Q$ કાટખૂણો છે.)**

તે જ પ્રમાણે $\Delta PRD$ અને $\Delta PRC$ પણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. **($\angle R$ કાટખૂણો છે.)**

ધારો કે $PQ = y$, જેથી $PR = b - y$ **($QR = AD = BC = b$)**

$\therefore \quad PA^2 = x^2 + y^2$ અને $PC^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2$

$\therefore \quad PA^2 + PC^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2$ **(i)**

$\therefore \quad PB^2 = (a - x)^2 + y^2$ અને $PD^2 = (b - y)^2 + x^2$

$\therefore \quad PB^2 + PD^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2$ **(ii)**

(i) અને (ii) પરથી, $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

**ઉદાહરણ 12 :** $\Delta PQR$ માં $m\angle Q = 90$, $PQ^2 - QR^2 = 260$. $\overline{QS}$ એ કર્ણ પરનો વેધ છે. જો $S \in \overline{PR}$ અને $PS - SR = 10$, તો PR શોધો.

**ઉકેલ :** $\Delta PQR$ માં $\overline{QS}$ કર્ણ પરનો વેધ છે.

$\angle Q$ કાટખૂણો છે.

$\therefore \quad PQ^2 = PS \cdot PR$

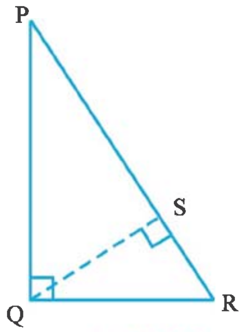
$QR^2 = SR \cdot PR$

$\therefore \quad PQ^2 - QR^2 = PR(PS - SR)$

પરંતુ $PQ^2 - QR^2 = 260$ અને $PS - SR = 10$

$\therefore \quad 260 = PR(10)$

$\therefore \quad PR = \frac{260}{10} = 26$



આકૃતિ 7.17

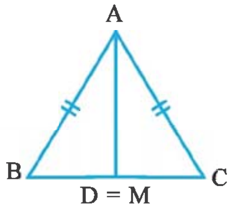
## સ્વાધ્યાય 7.1

1. $\Delta ABC$ માં $\angle B$ કાટકોણ છે. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ અને $D \in \overline{AC}$. જો $AD = 4DC$ હોય, તો સાબિત કરો કે $BD = 2DC$.
2. એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 5, 12 અને 13 છે. સાબિત કરો કે ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. ત્રિકોણના કર્ણ પરનાં વેધની લંબાઈ શોધો.
3. $\Delta PQR$ માં $\overline{QM}$ એ કર્ણ $\overline{PR}$ પરનો વેધ છે. જો $PM = 8$, $RM = 12$ હોય, તો PQ, QR અને QM શોધો.
4. $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$, $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $M \in \overline{AC}$. જો $AM - MC = 7$, $AB^2 - BC^2 = 175$, તો AC શોધો.
5. $\Delta ABC$ માં $\angle A$ કાટકોણ છે. $\overline{AD}$ એ ત્રિકોણનો એક વેધ છે. જો $AB = \sqrt{5}$, $BD = 2$ હોય, તો ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈ શોધો.
6. $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$, $\overline{BM}$ એ $\overline{AC}$ પરનો વેધ છે.
   (1) જો $AM = BM = 8$, તો AC શોધો. (2) જો $BM = 15$, $AC = 34$, તો AB શોધો.
   (3) જો $BM = 2\sqrt{30}$, $MC = 6$, તો AC શોધો. (4) જો $AB = \sqrt{10}$, $AM = 2.5$, તો MC શોધો.
7. $\Delta PQR$ માં $m\angle Q = 90$, $PQ = x$, $QR = y$ અને $\overline{QD} \perp \overline{PR}$ હોય, $D \in \overline{PR}$ તો PD, QD અને RD, $x$ અને $y$ના સ્વરૂપમાં મેળવો.
8. $\Delta PQR$ માં $\angle Q$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. $\overline{QM} \perp \overline{PR}$, $M \in \overline{PR}$. જો $PQ = 4QR$ હોય, તો $PM = 16RM$ સાબિત કરો.
9. $\square PQRS$ લંબચોરસ છે. જો $PQ + QR = 7$ અને $PR + QS = 10$ હોય, તો $\square PQRS$નું ક્ષેત્રફળ શોધો.
10. બહિર્મુખ $\square ABCD$ નાં વિકર્ણો કાટખૂણે છેદે છે. સાબિત કરો કે $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.
11. $\Delta PQR$ માં $m\angle Q = 90$, $M \in \overline{QR}$ અને $N \in \overline{PQ}$ તો સાબિત કરો કે $PM^2 + RN^2 = PR^2 + MN^2$.
12. $a^2 + b^2$, $2ab$, $a^2 - b^2$, $a > b$, $a, b \in R^+$ એ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ છે, સાબિત કરો કે $a^2 + b^2$ માપની બાજુની સામેનો ત્રિકોણનો ખૂણો કાટકોણ છે.
13. $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$ અને $\overline{BE}$ એક મધ્યગા છે, સાબિત કરો કે $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 8BE^2$.
14. $\Delta ABC$ માં $AB = AC$ અને $\angle A$ કાટકોણ છે. જો $BC = \sqrt{2}a$ તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. $(a \in R, a > 0)$

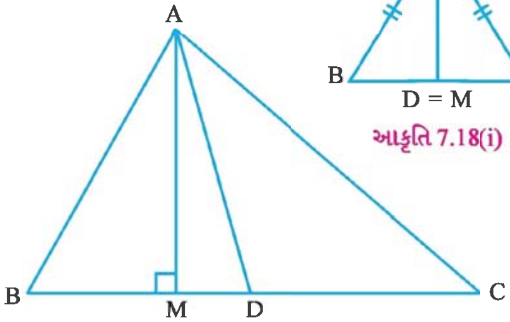
*

## એક અગત્યનું પરિણામ : (એપોલોનિયસનું પ્રમેય)

$\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. સાબિત કરો કે $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$



આકૃતિ 7.18(i)



આકૃતિ 7.18(ii)

**ઉકેલ :** ધારો કે $\overline{AM}$ એ $\Delta ABC$નો એક વેધ છે.

$\overline{AD}$ મધ્યગા છે.

જો $AB = AC$ હોય, તો $D = M$.

$AD = AM$ અને $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

$AB^2 + AC^2 = 2AB^2$

$2(AD^2 + BD^2) = 2(AM^2 + BM^2) = 2AB^2$

$\therefore \quad AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

ધારો કે $AB \neq AC$. $\angle ADB$ અને $\angle ADC$ પૈકી કોઈ એક લઘુકોણ હશે.

વ્યાપકતા ગુમાવ્યા વિના સ્વીકારી શકાય કે $\angle ADB$ લઘુકોણ છે.

$\therefore \quad B-M-D-C$

$\therefore \quad MB = BD - DM$ અને $MC = DM + DC = DM + BD$ **($BD = DC$)**

$\Delta ABM$ અને $\Delta AMC$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (AM^2 + MB^2) + (AM^2 + MC^2) \\ &= 2AM^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 2AM^2 + (BD - DM)^2 + (DM + BD)^2 \\ &= 2AM^2 + 2DM^2 + 2BD^2 \\ &= 2BD^2 + 2(AM^2 + DM^2) \\ &= 2BD^2 + 2AD^2 \end{aligned}$$

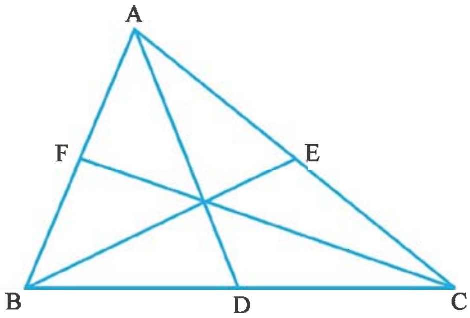
$\therefore \quad AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

હવે એપોલોનિયસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીએ.

**ઉદાહરણ 13 :** $\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ મધ્યગાઓ છે.

સાબિત કરો કે,

$4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$.



આકૃતિ 7.19

**ઉકેલ :** એપોલોનિયસના પ્રમેયમાં આપણે સાબિત કર્યું કે,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(i)**

ધારો કે $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

$\overline{AD}$ એક મધ્યગા છે.

$\therefore \quad D$ એ $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore \quad BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$.

$c^2 + b^2 = 2\left[AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$ **((i) પરથી)**

$\therefore \quad 2c^2 + 2b^2 = 4AD^2 + a^2$

$\therefore \quad 4AD^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$ **(ii)**

તે જ પ્રમાણે, $4BE^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ **(iii)**

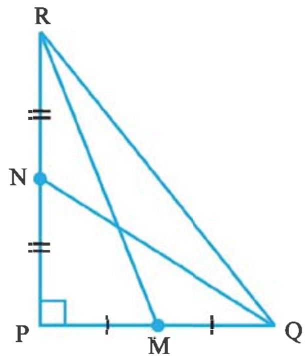
અને $4CF^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ **(iv)**

(ii), (iii), (iv) પરથી,

$$4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 3(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$

$\therefore \quad 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

**ઉદાહરણ 14 :** $\Delta PQR$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. $m\angle P = 90$. M અને N એ અનુક્રમે $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$નાં મધ્યબિંદુ છે. સાબિત કરો કે $4(RM^2 + QN^2) = 5QR^2$.



આકૃતિ 7.20

**ઉકેલ :** $\Delta PQR$ માં $\angle P$ કાટકોણ છે.

M એ $\overline{PQ}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore \quad PM = \frac{1}{2}PQ$

N એ $\overline{PR}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore \quad PN = \frac{1}{2}PR$

$\Delta PMR$ માં $\angle P$ કાટખૂણો છે.

$\therefore \quad RM^2 = PR^2 + PM^2$

$\therefore \quad RM^2 = PR^2 + \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2$

$\therefore \quad RM^2 = PR^2 + \frac{1}{4}PQ^2$

$\therefore \quad 4RM^2 = 4PR^2 + PQ^2$ **(i)**

$\Delta PNQ$ માં $\angle P$ કાટખૂણો છે.

$\therefore \quad QN^2 = PN^2 + PQ^2 = \left(\frac{1}{2}PR\right)^2 + PQ^2$

$\therefore \quad 4QN^2 = 4PQ^2 + PR^2$ **(ii)**

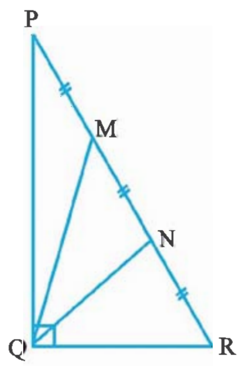
(i) અને (ii)માં મેળવેલાં પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$$4(RM^2 + QN^2) = 4(PR^2 + PQ^2) + (PQ^2 + PR^2)$$

પરંતુ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ **($\Delta PQR$માં $\angle P$ કાટખૂણો છે.)**

$$4(RM^2 + QN^2) = 4QR^2 + QR^2$$
$$4(RM^2 + QN^2) = 5QR^2$$

**ઉદાહરણ 15 :** $\Delta PQR$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં $m\angle Q = 90$. M અને N એ $\overline{PR}$ના ત્રિભાગ બિન્દુઓ છે. એપોલોનિયસ-પ્રમેયની મદદથી સાબિત કરો કે $QM^2 + QN^2 = 5MN^2$.



આકૃતિ 7.21

**ઉકેલ :** $\angle Q$ કાટખૂણો છે અને

$\therefore \quad PQ^2 + QR^2 = PR^2 = (3MN)^2 = 9MN^2$

**$(PM = MN = NR = \frac{1}{3}PR)$ (i)**

$\overline{QM}$ એ $\Delta PQN$ ની મધ્યગા છે.

$\therefore$ એપોલોનિયસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$PQ^2 + QN^2 = 2QM^2 + 2MN^2$ **(ii)**

$\overline{QN}$ એ $\Delta QMR$ ની મધ્યગા છે.

$\therefore$ $QM^2 + QR^2 = 2QN^2 + 2MN^2$ **(iii)**

(ii) અને (iii)નો સરવાળો કરતાં,

$PQ^2 + QN^2 + QM^2 + QR^2 = 2QM^2 + 2QN^2 + 4MN^2$

$9MN^2 = QM^2 + QN^2 + 4MN^2$ **((i)ના ઉપયોગથી)**

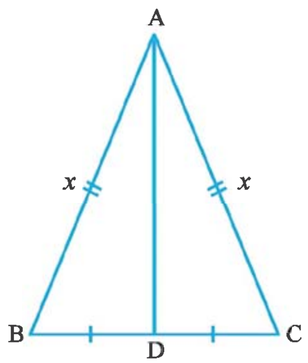
$\therefore$ $QM^2 + QN^2 = 5MN^2$

## સ્વાધ્યાય 7.2

1. લંબચોરસ ABCDમાં AB + BC = 23, AC + BD = 34. લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. $\Delta ABC$માં $m\angle A = m\angle B + m\angle C$, AB = 7, BC = 25. $\Delta ABC$ની પરિમિતિ શોધો.
3. 6.5 મીટર લંબાઈની નીસરણી દિવાલને 6 મીટર ઊંચાઈએ સ્પર્શે છે. જમીન પરના નીસરણીના છેડાનું દિવાલથી અંતર શોધો.
4. $\Delta ABC$માં AB = 7, AC = 5, AD = 5. જો D એ $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ હોય તો BC શોધો.
5. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC માં $D \in \overline{BC}$ અને BD : DC = 1 : 2. સાબિત કરો કે $3AD = \sqrt{7}AB$.
6. $\Delta ABC$ માં AB = 17, BC = 15, AC = 8. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ પરની મધ્યગાની લંબાઈ શોધો.
7. $\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. $AB^2 + AC^2 = 148$ અને AD = 7 તો BC શોધો.
8. લંબચોરસ ABCD માં AC = 25 અને CD = 7 છે. લંબચોરસની પરિમિતિ શોધો.
9. સમબાજુ ચતુષ્કોણ XYZW માં XZ = 14 અને YW = 48. XY શોધો.
10. $\Delta PQR$ માં $m\angle Q : m\angle R : m\angle P = 1 : 2 : 1$. જો $PQ = 2\sqrt{6}$ હોય, તો PR શોધો.

*

**ઉદાહરણ 16 :** $\Delta ABC$ માં $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ અને $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. જો AD = 12 અને $\Delta ABC$ની પરિમિતિ 48 હોય, તો $\Delta ABC$નું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 7.22

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$ માં $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ અને $\overline{AD}$ મધ્યગા છે.

$\therefore$ D એ $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ BD = DC

$\therefore$ $\overline{BD} \cong \overline{DC}$

$\Delta ADB$ અને $\Delta ADC$ માં

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ અને $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ અને $\angle ADB$ તથા $\angle ADC$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

$\therefore$ $m\angle ADB = m\angle ADC = 90$

$\therefore$ $\overline{AD}$ એ $\Delta ABC$નો $\overline{BC}$ પરનો વેધ છે.

$\therefore$ $\Delta ABC$નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}BC \cdot AD$. **(i)**

ધારો કે AB = AC = $x$.

$\Delta$ABCની પરિમિતિ 48 છે.

$\therefore$ AB + AC + BC = 48

$\therefore$ $x + x$ + BC = 48

$\therefore$ BC = 48 − $2x$. તેથી, BD = 24 − $x$

$\Delta$ADB કાટકોણ ત્રિકોણ છે. $\angle$ADB કાટખૂણો છે.

$\therefore$ $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$\therefore$ $x^2 = (24 - x)^2 + 12^2$

$\therefore$ $x^2 - (24 - x)^2 = 12^2$

$\therefore$ $-576 + 48x = 144$

$\therefore$ $48x = 144 + 576 = 720$

$\therefore$ $x = 15$

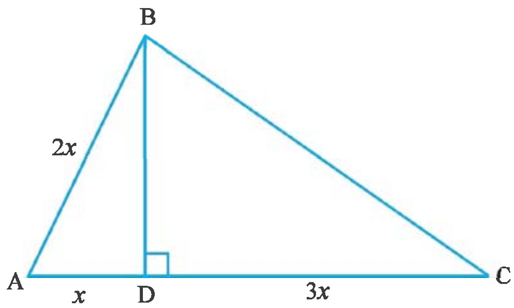
$\therefore$ AB = AC = 15

$\therefore$ BC = 48 − 30 = 18

$\therefore$ (i) પરથી $\Delta$ABCનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}BC \cdot AD$

$= \frac{1}{2} \times 18 \times 12 = 108$

**ઉદાહરણ 17 :** $\Delta$ABC માં $\overline{BD}$ વેધ છે. AB = 2AD, CD = 3AD અને A–D–C. સાબિત કરો કે $\Delta$ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.23

**ઉકેલ :** $\Delta$ABC માં AB = 2AD, CD = 3AD અને A–D–C.

ધારો કે AD = $x$.

$\therefore$ AB = $2x$, CD = $3x$

વળી, A–D–C.

$\therefore$ AC = AD + DC = $x + 3x = 4x$ **(i)**

$\Delta$ADB કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ **($\overline{BD} \perp \overline{AC}$)**

$\therefore$ $BD^2 = AB^2 - AD^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2$ **(ii)**

$\Delta$BDC કાટકોણ ત્રિકોણ છે. **($\overline{BD} \perp \overline{AC}$)**

$\therefore$ $BC^2 = BD^2 + CD^2 = 3x^2 + (3x)^2 = 12x^2$ **((ii) પરથી) (iii)**

હવે, $AB^2 + BC^2 = (2x)^2 + 12x^2$ **((iii) પરથી)**

$= 16x^2$

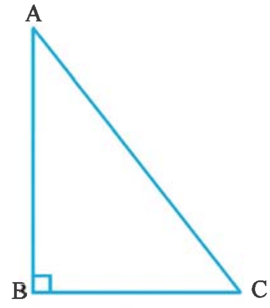
$= AC^2$ **((i) પરથી)**

$\therefore$ $\Delta$ABC માં $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore$ પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં સાબિત થાય છે કે, $\Delta$ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle$B કાટકોણ છે.

**ઉદાહરણ 18 :** $\Delta ABC$ માં $m\angle A + m\angle C = m\angle B$ અને $AC : AB = 17 : 15$.

જો $BC = 12$ હોય, તો $\Delta ABC$ નું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 7.24

**ઉકેલ :** $\Delta ABC$ માં $m\angle A + m\angle C + m\angle B = 180$.

પરંતુ $m\angle A + m\angle C = m\angle B$

$\therefore$ $m\angle B + m\angle B = 180$

$\therefore$ $m\angle B = 90$ અને $\overline{AC}$ ત્રિકોણનો કર્ણ છે.

$\therefore$ $\Delta ABC$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં $\angle B$ કાટકોણ છે.

$AC : AB = 17 : 15$

$\therefore$ ધારો કે $AC = 17k$, $AB = 15k$, જ્યાં $k > 0$

$\Delta ABC$ માં $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore$ $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 289k^2 - 225k^2 = 64k^2$

$\therefore$ $BC = 8k$. પરંતુ $BC = 12$ (આપેલ છે.)

$\therefore$ $8k = 12$.

$\therefore$ $k = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

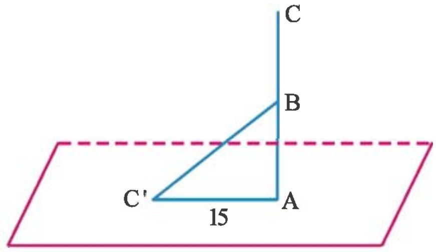
$\therefore$ $AB = 15k = 15 \times \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$

$BC = 12$

$\therefore$ $ABC = \frac{1}{2}BC \times AB = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{45}{2} = 45 \times 3 = 135$

## સ્વાધ્યાય 7

1. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ એ $\Delta ABC$ ની મધ્યગાઓ છે. જો $BE = 12$, $CF = 9$ અને $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 600$ હોય, તો $AD$ શોધો.
2. $\Delta ABC$ નો વેધ $\overline{AD}$ છે કે જેથી $B-D-C$. જો $AD^2 = BD \cdot DC$, તો સાબિત કરો કે $\angle BAC$ કાટખૂણો છે.
[**સૂચના :** $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. અને $B-D-C$ આપેલ છે. $\Delta ADB$ અને $\Delta ADC$ કાટકોણ ત્રિકોણો છે તેથી પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકાય. આ જ રીતે નીચેના દાખલા 3, 4, 5 ગણી શકાય.]
3. $\Delta ABC$ માં $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $B-D-C$. જો $AB^2 = BD \cdot BC$, તો સાબિત કરો કે $\angle BAC$ કાટકોણ છે.
4. $\Delta ABC$ માં $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $B-D-C$. જો $AC^2 = CD \cdot BC$, તો સાબિત કરો કે $\angle BAC$ કાટકોણ છે.
5. $\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. જો $BD = AD$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\Delta ABC$નો $\angle A$ કાટકોણ છે.
6. આકૃતિ 7.25 માં $AC$ એ મેદાનમાં લંબદિશામાં ઊભા કરેલા એક થાંભલાની લંબાઈ છે. થાંભલાને B બિંદુએથી વાળવામાં આવે છે કે જેથી થાંભલાની ટોચ મેદાનને અડે તે બિંદુ થાંભલાના તળીયાથી 15 મીટર દૂર હોય અને જો થાંભલાની લંબાઈ 25 મીટર હોય, તો થાંભલાના ઉપરના ભાગની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 7.25

7. $\Delta ABC$ માં $AB > AC$. $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ D છે. $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ કે જેથી $B-M-C$. સાબિત કરો કે, $AB^2 - AC^2 = 2BC \cdot DM$.

**8.** $\Delta ABC$ માં $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $D \in \overline{AC}$ અને $\angle B$ કાટકોણ છે. જો $AC = 5CD$ તો સાબિત કરો કે, $BD = 2CD$.

**9. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

**(1)** $\Delta PQR$ માં $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$. $PR = 7$, $QR = 24$ હોય, તો $PQ =$ ...... ☐

(a) 31 (b) 25 (c) 17 (d) 15

**(2)** $\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$ વેધ છે અને $\angle A$ કાટકોણ છે. જો $AB = \sqrt{20}$, $BD = 4$ તો $CD =$ ...... ☐

(a) 5 (b) 3 (c) $\sqrt{5}$ (d) 1

**(3)** $\Delta ABC$ માં $AB^2 + AC^2 = 50$. મધ્યગાની લંબાઈ $AD = 3$. તેથી $BC =$ ...... ☐

(a) 4 (b) 24 (c) 8 (d) 16

**(4)** $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$, $AB = BC$, તો $AB : AC =$ ...... ☐

(a) $1 : 3$ (b) $1 : 2$ (c) $1 : \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} : 1$

**(5)** $\Delta ABC$ માં $m\angle B = 90$ અને $AC = 10$. મધ્યગાની લંબાઈ $BM =$ ...... ☐

(a) 5 (b) $5\sqrt{2}$ (c) 6 (d) 8

**(6)** $\Delta ABC$ માં $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}}$, તો $\angle B$ ...... ☐

(a) લઘુકોણ છે. (b) ગુરુકોણ છે. (c) કાટકોણ છે. (d) મેળવી શકાય નહિ.

**(7)** $\Delta ABC$ માં $\frac{AB}{1} = \frac{AC}{2} = \frac{BC}{\sqrt{3}}$, તેથી $m\angle C =$ ...... ☐

(a) 90 (b) 30 (c) 60 (d) 45

**(8)** $\Delta XYZ$ માં $m\angle X : m\angle Y : m\angle Z = 1 : 2 : 3$. જો $XY = 15$ હોય, તો $YZ =$ ...... ☐

(a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (b) 17 (c) 8 (d) 7.5

**(9)** $\Delta ABC$ માં $\angle B$ કાટકોણ છે અને $\overline{BD}$ વેધ છે. જો $AD = BD = 5$, તો $DC =$ ...... ☐

(a) 1 (b) $\sqrt{5}$ (c) 5 (d) 2.5

**(10)** $\Delta ABC$ માં $\overline{AD}$ મધ્યગા છે. જો $AB^2 + AC^2 = 130$ અને $AD = 7$, તો $BD =$ ...... ☐

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

**(11)** ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ $5\sqrt{2}$ છે. ચોરસની બાજુનું માપ ...... થાય. ☐

(a) 10 (b) 5 (c) $3\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

**(12)** લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ 13 છે. જો લંબચોરસની એક બાજુનું માપ 5 હોય, તો લંબચોરસની પરિમિતિ ...... થાય. ☐

(a) 36 (b) 34 (c) 48 (d) 52

**(13)** એક સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાનું માપ $\sqrt{3}$ છે. તેની બાજુનું માપ ....... થાય. ☐

(a) 1 (b) $2\sqrt{3}$ (c) 2 (d) $3\sqrt{3}$

**(14)** એક સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 6 છે. ત્રિકોણના વેધનું માપ ...... થાય. ☐

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) 2 (d) $\sqrt{3}$

**(15)** $\Delta ABC$ માં $m\angle A = 90$. $\overline{AD}$ તેની મધ્યગા છે. જો $AD = 6$, $AB = 10$, તો $AC = ......$

(a) 8 (b) 7.5 (c) 16 (d) $2\sqrt{11}$

**(16)** $\Delta PQR$ માં $m\angle Q = 90$ અને $PQ = QR$. $\overline{QM} \perp \overline{PR}$, $M \in \overline{PR}$. જો $QM = 2$, તો $PQ = ......$

(a) 4 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 8 (d) 2

**(17)** $\Delta ABC$ માં $m\angle A = 90$, $\overline{AD}$ વેધ છે. $AB^2 = ......$

(a) $BD \cdot BC$ (b) $BD \cdot DC$ (c) $\frac{BD}{DC}$ (d) $BC \cdot DC$

**(18)** $\Delta ABC$ માં $m\angle A = 90$, $\overline{AD}$ વેધ છે. તેથી $BD \cdot DC = ......$

(a) $AB^2$ (b) $BC^2$ (c) $AC^2$ (d) $AD^2$

*

## સારાંશ

**આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :**

1. $\Delta ABC$માં જો $m\angle B = 90$ અને $\overline{BD}$ એ ત્રિકોણનો એક વેધ હોય, તો સંગતતા $ABC \leftrightarrow ADB$, સંગતતા $ABC \leftrightarrow BDC$ અને સંગતતા $ADB \leftrightarrow BDC$ સમરૂપતા છે. આ સમરૂપતાઓનો ઉપયોગ કરી આપણે નીચેનાં પરિણામો મેળવ્યા :

   (i) $AB^2 = AD \cdot AC$ (ii) $BC^2 = CD \cdot AC$ (iii) $BD^2 = AD \cdot DC$
2. **પાયથાગોરસનો પ્રમેય :** કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોનાં સરવાળો જેટલો હોય. બીજા શબ્દોમાં, $\Delta ABC$માં જો $\angle A$ કાટકોણ હોય, તો $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
3. **પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય :** જો કોઈ ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય, તો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય અને પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટકોણ હોય.
4. **એપોલોનિયસ પ્રમેય :** જો $\Delta ABC$માં $\overline{AD}$ મધ્યગા હોય, તો $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

◆

**Kaprekar constant :**

Kaprekar discovered the Kaprekar constant or 6174 in 1949.[4] He showed that 6174 is reached in the limit as one repeatedly subtracts the highest and lowest numbers that can be constructed from a set of four digits that are not all identical. Thus, starting with 1234, we have

4321 - 1234 = 3087, then

8730 - 0378 = 8352, and

8532 - 2358 = 6174.

Repeating from this point onward leaves the same number (7641 - 1467 = 6174). In general, when the operation converges it does so in at most seven iterations.

A similar constant for 3 digits is 495. However, in base 10 a single such constant only exists for numbers of 3 or 4 digits.