સંભાવના 16

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

- Albert Einstein

*

The last thing one knows when writing a book is what to put first.

- Blaise Pascal

16.1 પ્રાસ્તાવિક

Karl Pearson
(1857-1936)

ધોરણ IXમાં આપણે ઘટનાની પ્રાયોગિક (અનુભવ પર રચાયેલી) સંભાવના વિશે શીખી ગયાં છીએ, કે જે ખરેખર પ્રયોગના પરિણામ પર આધારિત હતી. હવે આપણે એક સિક્કાને 100 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગની ચર્ચા કરીએ કે જેમાં 47 વખત છાપ અને 53 વખત કાંટો આવવાની આવૃત્તિ છે. આ પ્રયોગને આધારિત છાપ આવવાની સંભાવના $\frac{47}{100} = 0.47$ અને કાંટો આવવાની સંભાવના $\frac{53}{100} = 0.53$ થાય. નોંધ કરો કે આ સંભાવના સિક્કાને 100 વખત ઉછાળવાના ખરેખર કરેલા પ્રયોગ પર આધારિત છે. આ કારણસર, આ સંભાવનાને પ્રાયોગિક અથવા અનુભવ આધારિત સંભાવના કહે છે. ખરેખર આ પ્રાયોગિક સંભાવના પ્રયોગના ખરેખર પરિણામો પર અને પરિણામોની યોગ્ય નોંધણી પર આધારિત છે. વધુમાં આ સંભાવનાઓ ફક્ત અંદાજ છે. જો આપણે આ જ સિક્કાને 100 વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ફરીથી કરીએ તો આપણને અલગ પરિણામ મળી શકે.

ધોરણ IX માં આપણે સિક્કાને ખૂબ વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગની પ્રવૃત્તિઓ કરી છે અને છાપ (અથવા કાંટો) આવવાના પરિણામોની નોંધ કરી છે. આપણે એ પણ નોંધ કરી છે કે જેમ જેમ સિક્કો ઉછાળવાનો પ્રયોગ વધુ કર્યો છે તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ની નજીક અને નજીક આવતી જાય છે. વિશ્વના જુદા જુદા ભાગમાં આ પ્રકારના પ્રયોગો થયા છે અને છાપ (અથવા કાંટો) ઉપર આવવાના પરિણામની નોંધ કરી છે.

આંકડાશાસ્ત્રી **કાર્લ પિઅર્સને** 24000 વખત સિક્કો ઉછાળ્યો અને તેમાં તેને 12012 વખત છાપ ઉપર મળી, આ રીતે છાપ મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{12012}{24000} = 0.5005$ મળી. અઢારમી સદીના ફ્રેન્ચ પ્રકૃતિવાદી **ડે બફને** 4040 વખત સિક્કો ઉછાળ્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. છાપ મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{2048}{4040} = 0.507$ મેળવી.

હવે આપણે વિચારીએ કે, જો એક લાખ વખત સિક્કો ઉછાળવામાં આવે તો કાંટો મેળવવાની સંભાવના શું થશે ? અથવા દસ લાખ વખત ? વગેરે. આપણે અનુભવીએ છીએ કે જેમ જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધારીએ છીએ તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{1}{2} = 0.5$ની આસપાસ જણાય છે. તેને આપણે છાપ (કાંટો) મેળવવાની પ્રશિષ્ટ સંભાવનાની સંકલ્પના તરફ દોરી જાય છે. આ વિચાર પર આધારિત સાદા પ્રશ્નોની વાત કરીશું.

16.2 સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યાનો ખ્યાલ

આપણે એક દાખલાથી શરૂઆત કરીએ.

ધારો કે એક સમતોલ સિક્કો યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવામાં આવે છે.

નોંધ : જ્યારે આપણે સમતોલ સિક્કો કહીએ છીએ, એટલે કે તે સપ્રમાણ હોય કે જેથી એક બાજુ બીજી બાજુ કરતાં વધુ વખત ઉપર આવે તે માટેનું કોઈ કારણ ન હોય. સિક્કો અથવા પાસાના આ ગુણધર્મને આપણે **નિષ્પક્ષપાત (Unbiased)** કહીશું. યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવો એટલે કે સિક્કો અથવા પાસાને કોઈ પક્ષપાત અથવા કોઈ પૂર્વગ્રહ વગર ઉછાળવો તે છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે આપણે સિક્કો ઉછાળીએ છીએ ત્યારે શક્ય પરિણામો બે જ છે, 'છાપ' અથવા 'કાંટો'. આપણે ધારી શકીએ છીએ કે દરેક પરિણામ (છાપ અથવા કાંટો) ઉદ્ભવે તેની શક્યતા સમાન છે. આ પરથી આપણે કહી શકીએ કે પરિણામ છાપ અથવા કાંટો આવે તે સમસંભાવી છે.

સમસંભાવી પરિણામો માટે બીજો દાખલો લઈએ. ધારો કે બે સમતોલ સિક્કા એક વખત ઉછાળીએ તો શક્ય પરિણામો કયા કયા છે ? તે HH, HT, TH, TT છે. દરેક પરિણામને ઉપર દેખાવાની સંભાવના સમાન છે. આથી બે સિક્કાને ઉછાળવાના સમસંભાવી પરિણામો HH, HT, TH અને TT છે.

હવે આપણાં મગજમાં એક પ્રશ્ન ઊભો થાય કે શું દરેક પ્રયોગમાં બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી જ હોય છે ? આપણે જોઈએ.

ધારો કે એક થેલીમાં 5 ભૂરી અને 3 લાલ લખોટીઓ છે અને આપણે થેલીમાં જોયા સિવાય એક લખોટી થેલીમાંથી પસંદ કરીએ છીએ. કયાં પરિણામો મળશે ? શું લાલ લખોટી કે ભૂરી લખોટી પસંદ થવી તે સમસંભાવી છે ? અહીં 5 ભૂરી અને 3 લાલ લખોટીઓ છે માટે સ્વાભાવિક રીતે લાલ લખોટી કરતાં ભૂરી લખોટી પસંદ થવાની શક્યતા વધારે હોય જ. તેથી પરિણામો (એટલે કે ભૂરી અથવા લાલ લખોટી) સમસંભાવી નથી. અલબત્ત, થેલીમાંથી કોઈ પણ રંગની લખોટી પસંદ કરવી તે સમસંભાવી છે, માટે દરેક પ્રયોગમાં બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી હોય તે જરૂરી નથી.

આ પ્રકરણમાં હવે પછીથી **આપણે દરેક પ્રયોગના પરિણામો સમસંભાવી છે તેમ સ્વીકારી લઈશું.**

આપણે ધોરણ IXમાં ઘટના Eની પ્રાયોગિક સંભાવના P(E) આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી છે :

$$P(E) = \frac{\text{જેટલા પ્રયત્નોમાં ઘટના ઉદ્ભવે તે સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

જો પ્રયોગનું વધુ વખત પુનરાવર્તન કરીએ તો પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ દરેક ઘટનાની સંભાવના મેળવી શકીએ. આ પુનરાવર્તનને પણ કેટલીક મર્યાદાઓ છે જેવી કે તે ખૂબ જ ખર્ચાળ છે, સમય વધુ લે તેવી છે, ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં સાનુકૂળ ન હોય. અલબત્ત, તે સિક્કો ઉછાળવામાં કે પાસો ફેંકવામાં સારી રીતે કામ કરે છે. પરંતુ ધરતીકંપ, ત્સુનામી અથવા પૂરની ઘટનાઓમાં પુનરાવર્તન વખતે બહુમાળી મકાન કે જે આ પ્રક્રિયામાં નાશ પામ્યાં છે તેની અનુભવ પર આધારિત સંભાવના વિશે શું ?

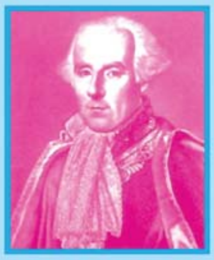
સમસંભાવી ઘટનાઓ માટેની સંકલ્પના આપણને ઘટનાની સંભાવનાની વ્યાખ્યા આપવા દોરી જાય છે.

સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા અનુસાર ઘટના Eની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના P(E) વડે દર્શાવાય છે, તે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્ભવવા માટેના પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગના કુલ પરિણામોની સંખ્યા}}$$

અહીં પ્રયોગના પરિણામો સમસંભાવી છે તેમ આપણે ધારી લઈએ છીએ.

"Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physician and mathematician J.Cardan wrote the first book on the subject, The Book on Games of Chance. Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. James Bernoulli (1654 – 1705), A. de Moivre (1667 – 1754) and Pierre Simon Laplace are among those who made significant contributions to this field. Laplace's Theorie Analytique des Probabilités, 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc



Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)

આપણે જેની ઘટનાઓ સમસંભાવી છે તેવા પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ છીએ તેવી ધારણા કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : જ્યારે એક સમતોલ પાસો ઉછાળવામાં આવે ત્યારે પાસા પર 1, 4 અથવા 5 આવે તે પ્રત્યેક ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : એક સમતોલ પાસો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. ધારો કે, પાસા પર નંબર 1 આવે તે ઘટના Eના ઉદ્ભવ માટેનાં પરિણામો ફક્ત 1 છે. માટે

$$P(E) = P(1 \text{ આવે}) = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્ભવવા માટેના પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય કુલ પરિણામો}} = \frac{1}{6}$$

તે જ રીતે 'નંબર 4 મળે' તે ઘટનાને F કહીએ તો $P(F) = \frac{1}{6}$ અને 'નંબર 5 મળે' તે ઘટનાને G કહીએ તો $P(G) = \frac{1}{6}$.

ઉદાહરણ 2 : એક સમતોલ સિક્કો બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. આ પ્રયોગના બધાં જ પરિણામોની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગના શક્ય પરિણામો HH, HT, TH અને TT છે.

ધારો કે, 'બે છાપ મળે' તે ઘટનાને A કહીએ,

$$P(A) = \frac{\text{A ઉદ્ભવવા માટેનાં પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{કુલ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{4}$$

ધારો કે, 'પ્રથમ છાપ અને પછી કાંટો આવે' તે ઘટનાને B કહીએ,

તો $P(B) = P(\{HT\}) = \frac{1}{4}$

ધારો કે, 'પ્રથમ T અને પછી H મળે' તે ઘટનાને C કહીએ,

તો $P(C) = P(\{TH\}) = \frac{1}{4}$

ધારો કે, 'બંને કાંટા મળે' તે ઘટનાને D કહીએ,

તો $P(D) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$

નોંધ : (1) પ્રયોગની કોઈ પણ ઘટનામાં જો એક જ પરિણામ હોય, તો તેવી ઘટનાને **પ્રાથમિક ઘટના** અથવા **મૂળભૂત ઘટના** કહે છે. ઉદાહરણ 2માં A, B, C અને D ચારેય ઘટનાઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.

(2) નોંધો કે ઉદાહરણ 2માં $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ છે.

જુઓ કે **પ્રયોગની બધી જ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.** આ પરિણામ વ્યાપક રીતે પણ સાચું છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, પાસો એક વખત ફેંકવામાં આવે છે, તો (i) 3 કરતાં મોટો અંક આવવાની સંભાવના કેટલી ?

(ii) 3 કે તેથી નાનો અંક આવવાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : (i) ધારો કે, ઘટના A : 'પાસા પર 3 કરતાં મોટો અંક મળે' છે. પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6. ઘટના A ઉદ્‌ભવવા માટેનાં શક્ય પરિણામો 3 છે. 4, 5 અને 6

$\therefore$ P(A) = P(3 કરતાં મોટો અંક હોય) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ii) ધારો કે, ઘટના B : 'ત્રણ કે 3થી નાની સંખ્યા મળે' તે છે. ઘટના B ઉદ્‌ભવવા માટેનાં શક્ય પરિણામો 3 છે એટલે કે 1, 2, 3.

$\therefore$ P(B) = P(3 કે તેથી નાનો અંક મળે) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

નોંધ : ઘટના A એ '3 થી મોટો અંક મળે' છે અને ઘટના B '3 કે તેથી નાનો અંક મળે તે છે.' યાદ રાખો કે 3 થી મોટો અંક ન મળવો તે 3 કે 3 થી નાનો અંક મળે તે સરખું જ છે. અને આથી ઉલટું પણ સત્ય છે.

માટે 'ઘટના B ઉદ્‌ભવે' એ 'ઘટના A ઉદ્‌ભવતી નથી' તે છે. આપણે 'ઘટના A ઉદ્‌ભવતી નથી' તેને A' અથવા $\overline{A}$ વડે દર્શાવીશું.

$\mathbf{P(A') = P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

વ્યાપક રીતે, એ સત્ય છે કે ઘટના A માટે $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

$\overline{A}$ને Aની પૂરક ઘટના કહે છે. A અને $\overline{A}$ને એકબીજાની **પૂરક ઘટના** છે તેમ કહેવાય.

આગળ વધતાં પહેલાં નીચે આપેલા મુદ્દા જોઈએ :

સમતોલ પાસાને ઉછાળતાં આપણને 6 પરિણામ મળે છે, જે 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. હવે પ્રશ્ન થાય કે અંક 7 પાસા પર મળવાની સંભાવના શું ?

પાસાની એક પણ બાજુ પર અંક 7 અંકિત કરેલ ન હોય, માટે અંક 7 મળે તે પરિણામની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો પાસા પર અંક 7 મળે તે ઘટના **અશક્ય** છે.

માટે P(અંક 7 મળે) = $\frac{0}{6} = 0$.

માટે, **અશક્ય ઘટનાની સંભાવના શૂન્ય થાય.**

ફરીથી આપણા મનમાં બીજો પ્રશ્ન ઊભો થાય કે જો પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે તો 7થી ઓછો અંક પાસા પર મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

અહીં પાસા પરની દરેક બાજુ પર 7 કરતાં નાના અંક અંકિત છે. જ્યારે આપણે પાસો એક વખત ઉછાળીએ છીએ ત્યારે ઉપરની ઘટના ઉદ્‌ભવવા માટેનાં પરિણામો એ પ્રયોગના શક્ય પરિણામો બરાબર જ છે, જે 6 છે.

માટે P(E) = P(7 કરતાં ઓછો અંક મળે) = $\frac{6}{6} = 1$

માટે ઘટના કે જે ચોક્કસ નક્કી છે તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને **ચોક્કસ** અથવા **નિશ્ચિત** ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવનાની વ્યાખ્યા પરથી આપણે કહી શકીએ કે ઘટના E માટે $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલા 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તે પત્તું,

(i) ચિત્રવાળું હોય | (ii) ચોકટનું હોય

(iii) એક્કો ન હોય | (iv) કાળા રંગનો એક્કો હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવાની ઘટના સમસંભાવી છે.

(i) અહીં ચિત્રવાળાં 12 પત્તાં છે (4 રાજા, 4 રાણી, 4 ગુલામ). ધારો કે, ઘટના A : 'પસંદ કરેલ પત્તું ચિત્રવાળું છે.' માટે A ઉદ્ભવવા માટેનાં પરિણામોની સંખ્યા 12 છે.

$\therefore \quad P(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(ii) ચોકટનાં કુલ 13 પત્તાં છે. ધારો કે, ઘટના B : 'પસંદ કરેલ પત્તું ચોકટનું છે.'

માટે B ઉદ્ભવવા માટેનાં પરિણામોની સંખ્યા 13 છે.

$\therefore \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(iii) ધારો કે, ઘટના C : 'પસંદ કરેલ પત્તું એક્કો નથી.' તો ઘટના C' : 'પસંદ કરેલ પત્તું એક્કો છે.' થાય.

$\therefore$ C' ઉદ્ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 4 થાય.

$\therefore \quad P(C') = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\therefore \quad P(C) = 1 - P(C')$

$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iv) ધારો કે, ઘટના D : 'પસંદ કરેલ પત્તું કાળા રંગનો એક્કો છે.' માટે D ઉદ્ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 2 (એટલે કે ફૂલ્લી અથવા કાળીનો એક્કો) છે.

$\therefore \quad P(D) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

ઉદાહરણ 5 : 400 સ્ક્રૂના પૅકેટમાં 120 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ સ્ક્રૂ ખામી વગરનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં પૅકેટમાં કુલ 400 સ્ક્રૂ છે. ધારો કે, ઘટના A : 'પસંદ કરેલ સ્ક્રૂ ખામી વગરનો છે.'

$\therefore$ ઘટના A ઉદ્ભવવાનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા = 400 − 120 = 280 થાય.

$\therefore \quad P(A) = \frac{280}{400} = 0.7$

ઉદાહરણ 6 : ફૂલદાનીમાં 5 લાલ, 2 પીળા અને 3 સફેદ ગુલાબ છે. તેમાંથી એક ગુલાબ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે તો તે (i) લાલ રંગનું (ii) પીળા રંગનું (iii) સફેદ ન હોય તેવા રંગનું હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં ફૂલદાનીમાં કુલ 5 + 2 + 3 = 10 ગુલાબ છે.

(i) ધારો કે, ઘટના A : પસંદ કરેલ ગુલાબ લાલ રંગનું છે.

$\therefore$ Aને ઉદ્ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

$\therefore \quad P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

(ii) ધારો કે, ઘટના B : પસંદ કરેલ ગુલાબ પીળા રંગનું છે.

$\therefore$ Bને ઉદ્ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે.

$\therefore \quad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$

(iii) ધારો કે, ઘટના C : પસંદ કરેલ ગુલાબ સફેદ રંગનું નથી. ઘટના Cની પૂરક ઘટના (એટલે કે $\overline{C}$) : પસંદ કરેલ ગુલાબ સફેદ રંગનું છે.

$\therefore$ $\overline{C}$ ઉદ્ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

$\therefore \quad P(\overline{C}) = \frac{3}{10} = 0.3$

પરંતુ $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.3 = 0.7$

ઉદાહરણ 7 : બે સમતોલ પાસાંને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનાં મળતાં શક્ય તેટલાં કુલ પરિણામો લખો. પાસા પર મળતા પૂર્ણાંકોનો સરવાળો,

(i) 7 **(ii)** 11 **(iii)** 10થી વધુ

(iv) 2થી ઓછો **(v)** 13થી ઓછો અને **(vi)** અવિભાજ્ય થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : બે સમતોલ પાસાંને ઉછાળતાં મળતાં શક્ય પરિણામો :

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

માટે કુલ 36 પરિણામો છે.

(i) ધારો કે ઘટના A : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 7 છે.

∴ આ ઘટના માટેનાં શક્ય પરિણામો (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) છે.

∴ ઘટના A ઉદ્‌ભવવાનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 6 છે.

∴ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ii) ધારો કે ઘટના B : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 11 થાય.

∴ આ ઘટના માટે શક્ય પરિણામો (5, 6) અને (6, 5) થાય.

∴ ઘટના B ઉદ્‌ભવવા માટેનાં શક્ય કુલ પરિણામોની સંખ્યા 2 થાય.

∴ $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

(iii) ધારો કે, ઘટના C : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 10થી વધુ હોય એટલે કે સરવાળો 11 કે 12 હોય. આ ઘટના માટે શક્ય પરિણામો (5, 6), (6, 5) અને (6, 6) છે.
ઘટના C ઉદ્‌ભવવા માટેનાં શક્ય કુલ પરિણામોની સંખ્યા 3 થાય.

∴ $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iv) ધારો કે, ઘટના D : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 2 થી નાનો હોય. સરવાળો ન્યૂનતમ $1 + 1 = 2$ તો હોય જ.
અહીં એક પણ પરિણામમાં પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 2 થી ઓછો થતો નથી. માટે, ઘટના D ઉદ્‌ભવવા માટેનાં શક્ય કુલ પરિણામોની સંખ્યા 0 છે.

∴ $P(D) = \frac{0}{36} = 0$ (એટલે કે આ અશક્ય ઘટના છે.)

(v) ધારો કે, ઘટના E : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 13 કરતાં ઓછો જ છે. સરવાળો વધુમાં વધુ $6 + 6 = 12$ બની શકે.
અહીં તમામ પરિણામોમાં પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 13 કરતાં ઓછો જ છે.

∴ ઘટના E ઉદ્‌ભવવાના કુલ પરિણામોની સંખ્યા 36 થાય.

∴ $P(E) = \frac{36}{36} = 1$ (એટલે કે આ ચોક્કસ ઘટના છે.)

(vi) ધારો કે, ઘટના F : પાસા પરના અંકોનો સરવાળો અવિભાજ્ય હોય. 12થી નાના અવિભાજ્ય 2, 3, 5, 7, 11 છે. આ ઘટનાનાં પરિણામો (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5).

∴ ઘટના F ઉદ્‌ભવવાનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે.

∴ $P(F) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

ઉદાહરણ 8 : પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે, તો પાસા પરનો અંક **(i)** અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય **(ii)** અંક 2 અને 5 ની વચ્ચે હોય, **(iii)** યુગ્મ અંક હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે, માટે તેનાં પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

(i) ધારો કે, ઘટના A : પાસા પરનો અંક અવિભાજ્ય હોય. આ પ્રયોગમાં 2, 3 અને 5 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે માટે ઘટના A ઉદ્‌ભવવા માટેનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) ધારો કે, ઘટના B : પાસા પરના અંકો 2 અને 5ની વચ્ચે હોય.

2 અને 5ની વચ્ચેના અંકો 3 અને 4 છે. માટે ઘટના B ઉદ્‌ભવવાનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા 2 થાય.

$\therefore \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(iii) ધારો કે, ઘટના C : પાસા પરનો અંક યુગ્મ સંખ્યા હોય. અહીં 2, 4 અને 6 એ યુગ્મ અંકો છે. માટે ઘટના C ઉદ્‌ભવવાના કુલ પરિણામોની સંખ્યા 3 થાય.

$\therefore \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 10 : ગોપી તેના પુત્ર માટે ખામી વગરનું રમકડું હોય, તો તે ખરીદે છે. દુકાનદાર 10 રમકડાં ભરેલી એક પેટી લે છે. જેમાં 3 રમકડાં ખામીવાળાં છે, તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક રમકડું ગોપીને બતાવે છે. (i) ગોપી રમકડું ખરીદે, (ii) ગોપી રમકડું ન ખરીદે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં પેટીમાં કુલ 10 રમકડાં છે જે પૈકી 3 ખામીવાળા છે, માટે 7 રમકડાં ખામી વગરનાં છે.

(i) ધારો કે, ઘટના A : ગોપી રમકડું ખરીદે છે. એનો અર્થ એ થયો કે રમકડું ખામી વગરનું છે. માટે ઘટના A ઉદ્‌ભવવા માટેનાં પરિણામોની સંખ્યા 7 થાય.

$P(A) = \frac{7}{10} = 0.7$

(ii) ધારો કે, ઘટના B : ગોપી રમકડું ખરીદતી નથી. એનો અર્થ એ કે રમકડું ખામીવાળું છે માટે ઘટના ઉદ્‌ભવવા માટેનાં પરિણામોની સંખ્યા 3 થાય.

$\therefore \quad P(B) = \frac{3}{10} = 0.3.$

અહીં નોંધીએ કે ઘટના B એ ઘટના A ઉદ્‌ભવતી નથી તે છે.

$\therefore \quad P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

સ્વાધ્યાય 16

1. ભૂલથી આકસ્મિક રીતે 15 ખામીવાળી બોલપેન 135 ખામીવગરની બોલપેનમાં ભેગી થઈ ગઈ છે. ફક્ત જોઈને કહી શકાય નહિ કે બોલપેન ખામીવાળી છે કે ખામીવગરની છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક બોલપેન પસંદ કરવામાં આવે છે તો તે પસંદ કરેલી બોલપેન ખામી વગરની (સારી) છે તેની સંભાવના શોધો.

2. એક પેટીમાં 5 લીલા, 8 પીળા અને 7 ભૂરા રંગના દડા છે. પેટીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તે દડો (i) પીળા રંગનો હોય, (ii) ભૂરા રંગનો હોય, (iii) લીલા કે ભૂરા રંગનો ન હોય, (iv) ભૂરા રંગનો ન હોય તેની સંભાવના કેટલી?

3. એક પેટીમાં નારંગીના સ્વાદની કુલ્ફી છે. રાહી પેટીમાં જોયા વગર એક કુલ્ફી પસંદ કરે તો (i) નારંગીના સ્વાદની કુલ્ફી પસંદ થાય (ii) લીંબુ સ્વાદની કુલ્ફી પસંદ કરવાની સંભાવના કેટલી ?

4. એક પેટીમાં 1થી 100 લખેલા 100 બોર્ડ છે. પેટીમાંથી એક બોર્ડ પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તે બોર્ડ પર (i) એક અંકનો નંબર હોય, (ii) બે અંકનો નંબર હોય, (iii) ત્રણ અંકનો નંબર હોય, (iv) સાત વડે વિભાજ્ય નંબર હોય, (v) નંબર 9નો ગુણિત હોય, (vi) નંબર 5નો ગુણિત હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક ખોખામાં કુલ 100 પેન્ટ છે. જેમાં 73 સારા, 12 થોડી ખામીવાળા અને 15 વધુ ખામીવાળા છે. કનુ એક એવો ટ્રેડર છે કે જે સારા જ પેન્ટ ખરીદે છે પણ બીજા ટ્રેડર રાધાને જેમાં વધુ ખામી છે માત્ર તેવા પેન્ટ અસ્વીકાર્ય છે. ખોખામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પેન્ટ પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તે (i) કનુને સ્વીકાર્ય હોય અને (ii) રાધાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના શોધો.

6. 100 ગુણમાંથી વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે :

મેળવેલ ગુણ	0-34	35-50	51-70	71-90	91-100
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	8	9	14	11	8

તો વિદ્યાર્થીએ (i) 34થી ઓછા, (ii) 71 અને 90 વચ્ચે, (iii) 70થી વધુ, (iv) 50 કે તેથી ઓછા અને (v) 90થી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. બે સમતોલ પાસાં એક સાથે ફેંકવામાં આવે છે. નીચે આપેલી ઘટનાની સંભાવના શોધો :

(1) A : બંને પાસા પર સમાન અંક હોય,

(2) B : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 4 થી વધુ અને 8 થી ઓછો હોય,

(3) C : બંને પાસા પરના અંકોનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય,

(4) D : બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 12 થી વધુ હોય.

8. એક સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલી ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

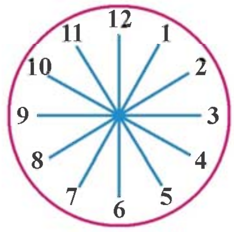
(1) A : ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે,

(2) B : બરાબર બે છાપ મળે,

(3) C : વધુમાં વધુ એક છાપ મળે,

(4) D : કાંટા કરતાં છાપની સંખ્યા વધુ હોય.

9. તકની રમત રમવામાં આવે છે, જેમાં તીર ગોળ ફરે છે અને તે 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 અંકોમાંથી એક અંક પર સ્થિર થાય છે. (આકૃતિ જુઓ). આ બધાં પરિણામો સમસંભાવી છે. તો તીર (1) 7 પર (2) 9 કરતાં મોટા અંક પર (3) અયુગ્મ અંક પર (4) યુગ્મ અંક પર (5) 5 કરતાં ઓછા અંક પર આવે તેની સંભાવના શોધો.



આકૃતિ 16.1

10. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) ઘટના A અને ઘટના $\overline{A}$ (A નહિ)ની સંભાવનાનો સરવાળો ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) 0.5 (d) 0.4

(2) ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 0.5 (c) 0.7 (d) 1

(3) અશક્ય ઘટનાની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 0.5 (c) 0.6 (d) 1

(4) કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના ...... કે તેથી વધુ હોય. ☐

(a) 1 (b) 1.2 (c) 0.2 (d) 0

(5) કોઈ ઘટનાની સંભાવના ...... કે તેથી ઓછી અને અનૃણ હોય. ☐

(a) -1 (b) -0.1 (c) -0.5 (d) 1

(6) જો $P(A) = 0.35$, તો $P(\overline{A}) =$ .... ☐

(a) 0 (b) 0.35 (c) 0.65 (d) 1

(7) જો $P(\overline{E}) = 0.47$, તો $P(E) =$ .... ☐

(a) 0 (b) 0.20 (c) 0.50 (d) 0.53

(8) તમારા હાથમાં રહેલા પ્રશ્નપત્રમાં 101 ગુણ મેળવવાની સંભાવના ...... છે.

(a) 1 (b) 0.5 (c) 0 (d) –0.5

(9) 'સૂર્ય પશ્ચિમમાં ઊગે' તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(a) 1 (b) 0.5 (c) 0 (d) –0.5

(10) પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાનો સરવાળો ...... છે.

(a) 0 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.8

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો ભેદ.
2. ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક (પ્રશિષ્ટ) સંભાવના જે P(E) વડે દર્શાવાય છે તે

$$P(E) = \frac{\text{E ઉદ્ભવવા માટેના પરિણામની કુલ સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગના પરિણામની કુલ સંખ્યા}}$$

3. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.
4. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.
5. ઘટના E ની સંભાવના માટે $0 \le P(E) \le 1$ થાય.
6. જે ઘટનામાં ફક્ત એક જ પરિણામ હોય તે ઘટનાને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય.
7. ઘટના A માટે $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ જ્યાં $\overline{A}$ એટલે 'ઘટના A નહિ'. A અને $\overline{A}$ પૂરક ઘટનાઓ છે.

◆

The mathematics in Sulbasutra

Pythagorean theorem :

The most notable of the rules (the Sulbasutra-s do not contain any proofs of the rules which they describe, since they are sutra-s, formulae, concise) in the Baudhayana Sulba Sutra says:

dirghasyaksanaya rajjuh parsvamani, tiryadam mani,
cha yatprthagbhute kurutastadubhayan karoti.

A rope stretched along the length of the diagonal produces an area which the vertical and horizontal sides make together.

This appears to be referring to a rectangle, although some interpretations consider this to refer to a square. In either case, it states that the square of the hypotenuse equals the sum of the squares of the sides. If restricted to right-angled isosceles triangles, however, it would constitute a less general claim, but the text seems to be quite open to unequal sides.

If this refers to a rectangle, it is the earliest recorded statement of the Pythagorean theorem.

Baudhayana also provides a non-axiomatic demonstration using a rope measure of the reduced form of the Pythagorean theorem for an isosceles right triangle:

The cord which is stretched across a square produces an area double the size of the original square.