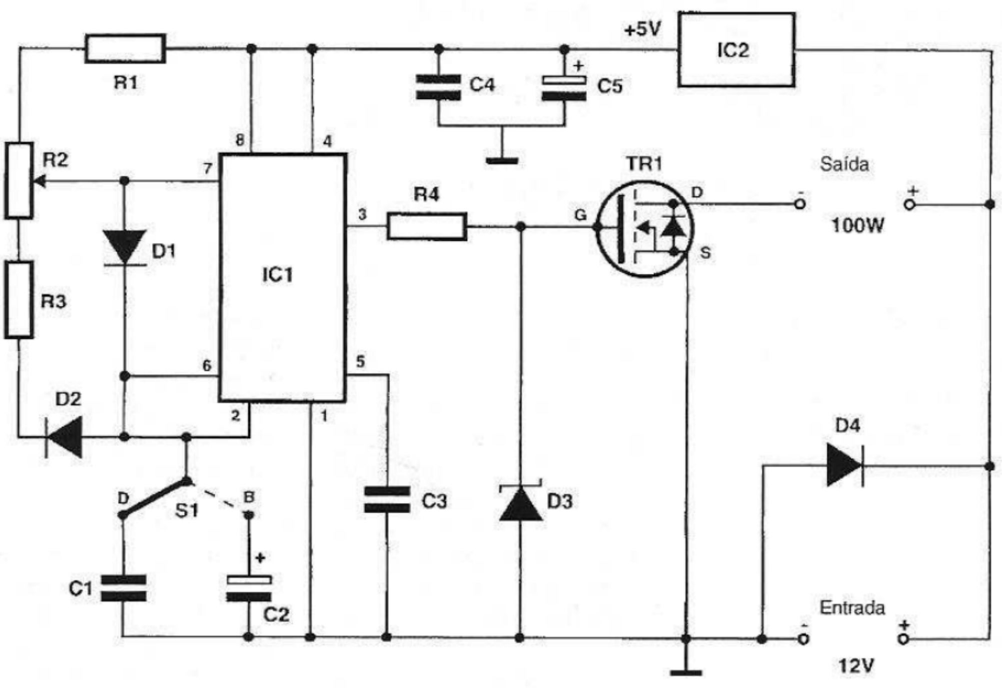
Trabalho de aplicação de Cálculo Numérico para Engenharia

Professor: Sérgio Ávila
Aluno: Mateus Salgado

1. Apresentar um problema da área elétrica

Num determinado circuito elétrico, as correntes i1, i2 e i3 passam através das impedâncias Z1, Z2 e Z3 e são dadas por:



$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ Z_1 i_1 - Z_2 i_2 = e_1 - e_2 \\ Z_2 i_1 - Z_3 i_3 = e_2 - e_3 \end{cases}$$

Se Z1 = 10, Z2 = 8, Z3 = 3, e1 − e2 = 65 e e2 − e3 = 120:

a) Calcule os valores das correntes i1, i2 e i3 por um método direto e estável.

b) Calcule o determinante da matriz.

c) Calcule a matriz inversa.

2. Explicar o porquê que o problema é um problema

O objetivo deste capítulo é resolver exercícios que envolvem sistemas de n equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Em termos matriciais fica $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Em que A ∈ ℜ^n×n é a matriz dos coeficientes, x ∈ ℜ^n é a solução do sistema e b ∈ ℜ^n é o termo independente.

3. Apresentar a sua solução analítica ou a explicação do por que ela não é possível

1. Etapa de Pivotagem Parcial:
   Para cada coluna da matriz A, escolha o elemento com o maior valor absoluto na coluna e troque as linhas, de modo que esse elemento esteja na posição da linha atual.
   Isso é feito para garantir que o pivô seja o maior valor possível, minimizando os erros de arredondamento durante os cálculos.
2. Eliminação:

Execute a Eliminação de Gauss normalmente após a etapa de pivotagem. Isso envolve a redução da matriz original em uma forma triangular superior (com zeros abaixo da diagonal principal).
Para cada linha i a partir da primeira (1 até n-1):
Use a linha i como pivot (a linha atual).
Para cada linha j abaixo da linha i (i+1 até n):
Calcular um fator multiplicativo para eliminar o elemento na coluna i da linha j.
Subtraia a linha i multiplicada pelo fator da linha j para eliminar o elemento na coluna i da linha j.

3. Resolução do sistema:
   Após a eliminação, o sistema de equações lineares está na forma triangular superior. Você pode resolver o sistema facilmente começando pela última linha e trabalhando de baixo para cima usando substituição retroativa.

4. Escolher e justificar a escolha de um método numérico que resolva o problema proposto

O problema escolhido é sobre sistemas de equações lineares. E será utilizado a Eliminação de Gauss com Pivotagem Parcial (EGPP) como método direto.
É utilizado esse método porque foi identificado um tempo muito grande para resolver a questão e a dificuldade de encontrar a determinante da matriz, a matriz inversa sem que haja erros na resolução dos cálculos de uma forma mais simples.

5. Apresentar a resolução do problema pelo método numérico escolhido

Resolução: a) Calcule os valores das correntes i1, i2 e i3 por um método direto e estável.
Inicialmente faz a mudança de variável: i → x
Substituindo as constantes, obtém-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 - 8x_2 = 65 \\ 8x_1 - 3x_3 = 120 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 65 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Procede-se à troca de linhas (1,2) porque o elemento de maior módulo da primeira coluna deve colocar-se na primeira linha, na primeira etapa.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 65 \\ 8 & 0 & -3 & 120 \end{array}\right) \overrightarrow{_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{10} & -8 & 0 & 65 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & 120 \end{array}\right)$$

1ª etapa: Elemento pivot1 (a11): 10 (elemento de maior módulo da primeira coluna)
Cálculo dos multiplicadores:
m21 = − a21 pivot1 = − 1 10 = −0.1; m31 = − a31 pivot1 = − 8 10 = −0.8
O multiplicador m21 vai multiplicar a linha pivot (linha 1) e adicionar à linha 2. O multiplicador m31 vai multiplicar a linha pivot (linha 1) e adicionar à linha 3.
Exemplo: −8 × (−0.1) + 1 = 1.8
A matriz ampliada obtida no final da 1ª etapa é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & 0 & 65 \\ 0 & 1.8 & 1 & -6.5 \\ 0 & 6.4 & -3 & 68 \end{array}\right)$$

2ª etapa: Trocam-se novamente as linhas (2,3), de modo a que o elemento de maior módulo da segunda coluna (da segunda linha para baixo) fique na posição a22.
Elemento pivot2 (a22): 6.4 (elemento de maior módulo da segunda coluna, a partir da segunda linha).
Cálculo do multiplicador:
m32 = − a32 pivot2 = − 1.8 6.4 = −0.281250
O multiplicador m32 vai multiplicar a linha pivot (linha 2) e adicionar à linha 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & 0 & 65 \\ 0 & 6.4 & -3 & 68 \\ 0 & 0 & 1.84375 & -25.625 \end{array}\right)$$

Assim, obteve-se o seguinte sistema, agora triangular, que se resolve por substituição inversa, ou seja, do fim para o início.
Por exemplo, x3 = −25.635 1.84375 = −13.898305, a seguir x2 = 4.110169 e por fim x1 = 9.788136.

$$\begin{cases} 10x_1 - 8x_2 = 65 \\ 6.4x_2 - 3x_3 = 68 \\ 1.84375x_3 = -25.625 \end{cases}$$

Logo, os valores das diferentes correntes correspondem a:

$i1 = 9.788136$,
$i2 = 4.110169$ e
$i3 = -13.898305$.
Utilizando o MATLAB:

MATLAB: Comandos:

```
>> A=[1 1 1; 10 -8 0;8 0 -3]

A =

     1     1     1

    10    -8     0

     8     0    -3

>> b=[0;65;120]

b =

     0

    65

   120

>> A\b

ans =

    9.7881

    4.1102

  -13.8983
```

b) Calcule o determinante da matriz.
det(A) = det(U) × (−1)t = Q i=1,...n(uii) × (−1)t (t é o número de trocas de linhas).
A matriz U é a matriz triangular superior obtida no processo de eliminação de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 0 & 6.4 & -3 \\ 0 & 0 & 1.84375 \end{pmatrix}$$

Assim, det(A) = u11 × u22 × u33 × (−1)2 = 10 × 6.4 × 1.84375 × (−1)2 = 118.
Resolução pelo MATLAB:

MATLAB: Comandos:

```
>> A=[1 1 1; 10 -8 0;8 0 -3]

>> det(A)

ans =

   118
```

c) Calcule a matriz inversa.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplica-se EGPP ao conjunto, efetuando as mesmas operações necessárias para o cálculo da matriz triangular superior U (alínea a)) a partir da matriz (A|I). O resultado é o seguinte:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6.4 & -3 & 0 & -0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 1.84375 & 1 & 0.125 & -0.28125 \end{array}\right)$$

Para calcular a primeira coluna de A−1, resolve-se o sistema que tem como termo independente a 1ª coluna da matriz da direita:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.84375 & 1 \end{array}\right)$$

De onde se obtém x1, x2 e x3 por substituição inversa, ficando calculada a primeira coluna de A−1.
1.84375x3 = 1 ⇔ x3 = 0.542373
6.4x2 − 3x3 = 0 ⇔ x2 = 0.254237
10x1 − 8x2 = 0 ⇔ x1 = 0.203390
Do mesmo modo, obtém-se para a segunda coluna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 6.4 & -3 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1.84375 & 0.125 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.025424 \\ x_2 = -0.093220 \\ x_3 = 0.067797 \end{cases}$$

E para a terceira coluna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1.84375 & -0.28125 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.067797 \\ x_2 = 0.084746 \\ x_3 = -0.152542 \end{cases}$$

Reunindo as soluções dos três sistemas anteriores surge a matriz inversa, A−1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.203390 & 0.025424 & 0.067797 \\ 0.254237 & -0.093220 & 0.084746 \\ 0.542373 & 0.067797 & -0.152542 \end{pmatrix}$$

Resolução pelo MATLAB:

MATLAB: Comandos:

```
>> A=[1 1 1; 10 -8 0;8 0 -3]

>> inv(A)

ans =

    0.2034    0.0254    0.0678

    0.2542   -0.0932    0.0847

    0.5424    0.0678   -0.1525
```

6. Justificar se a solução obtida é adequada – considerações finais

O software utilizado para a resolução é o MATLAB para justificar a facilidade, rapidez e a eficácia da solução da questão, mesmo tendo uma solução analítica para a determinação do problema. Conclui-se que fazendo com o software haja uma porcentagem de erro quase igualada a zero.

7. Referências bibliográficas

http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14965/6/livro_mn.pdf