第 十 周

第21章　光的衍射

§21.2，　§21.3，　§21.4，　§21.5，
§21.6(一般了解)

第22章　光的偏振

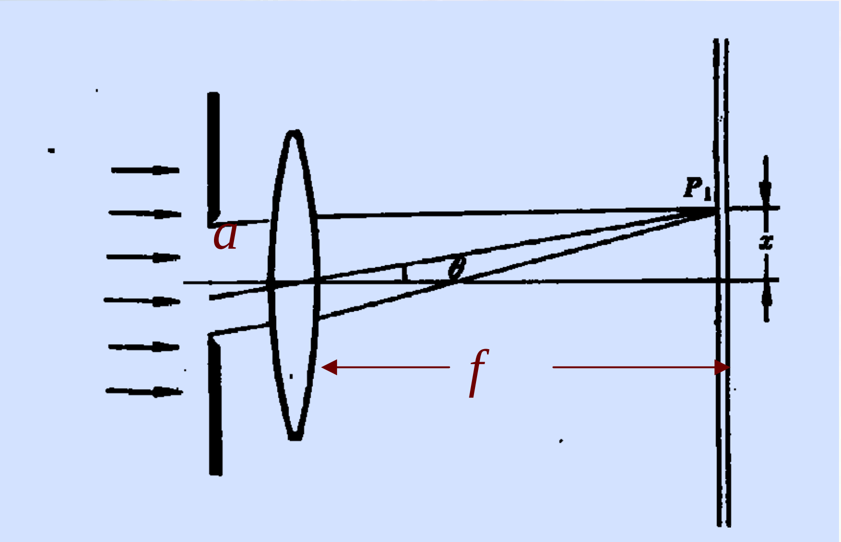
§22.1，　§22.2

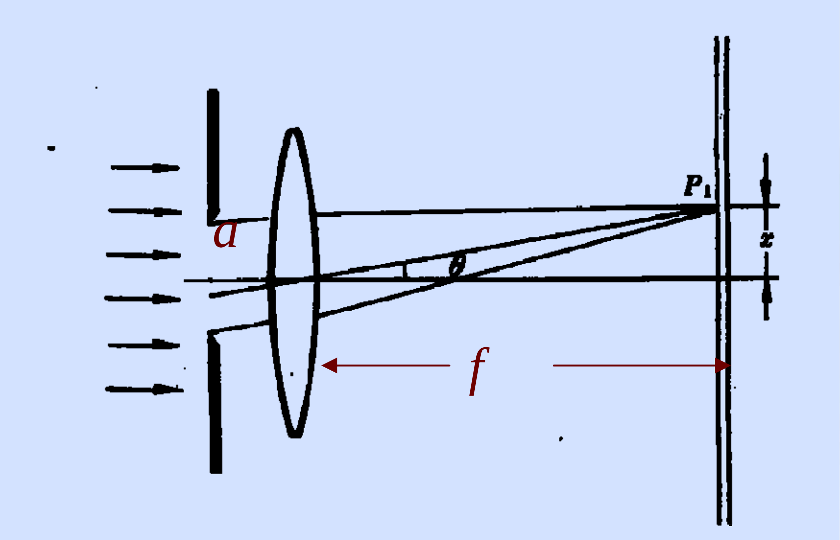
P391　21-1，21-4，21-7，21-9，
*　　　21-12

例题1：

用波长 $\lambda=$ 632.8nm 的平行光垂直入射宽度 a=0.20mm 的单缝，一焦距f=20cm的透镜紧靠缝后，观察屏置于焦平面处。试求屏上中央明纹和第一级明纹的宽度。

解： 由单缝衍射公式，第一级暗纹的衍射角 θ_1 为





$$\sin\theta_1 = \pm\frac{\lambda}{a} = \frac{632.8\times10^{-9}}{0.20\times10^{-3}} = \pm3.16\times10^{-3}$$

因为 θ_1很小，有sin $\theta_1 \approx \theta_1 \approx$ tan θ_1 ；所以中央明纹的宽度为：

$$\Delta l_0 = 2x_1 = 2f\tan\theta_1 = 1.26\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

第一级明纹的宽度等于第一和第二级暗纹的间距。

$$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{a} = 6.33\times10^{-3}$$

这时仍有$\sin\theta_2 \approx \theta_2 \approx \tan\theta_2$。因此，第一级明纹的宽度为：

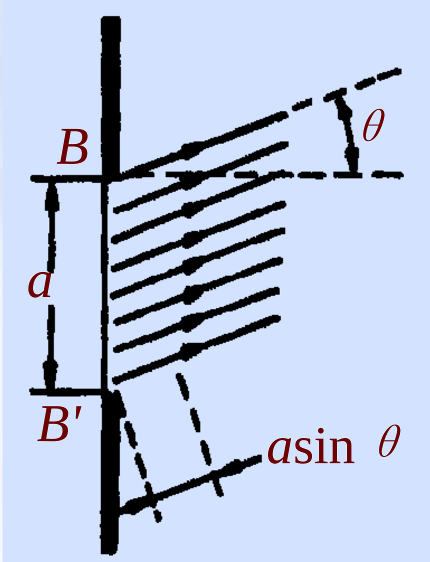
$$\Delta l_1 = x_2 - x_1 = f(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

$$\approx f(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = 0.63\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

可见，第一级明纹的宽度是中央明纹的一半。同理可得，当 θ 很小时，其余各级明纹的宽度均为中央明纹的一半。

二、单缝夫琅禾费衍射的光强分布 *

1.衍射图样的光强分布



半波带法无法定量计算光强分布，下面根据惠更斯—菲涅耳原理，用振幅矢量叠加法导出单缝夫琅禾费衍射的光强分布。将单缝内的波阵面等分成n条等宽度的面元ds，相邻两面元到P点的光程差恒定，即位相差Δφ恒定。若设分振动相位为φ_i，振幅为A_i，则分振动的迭加为振幅矢量首尾相接，依次转过Δφ角，近似构成圆弧MN。

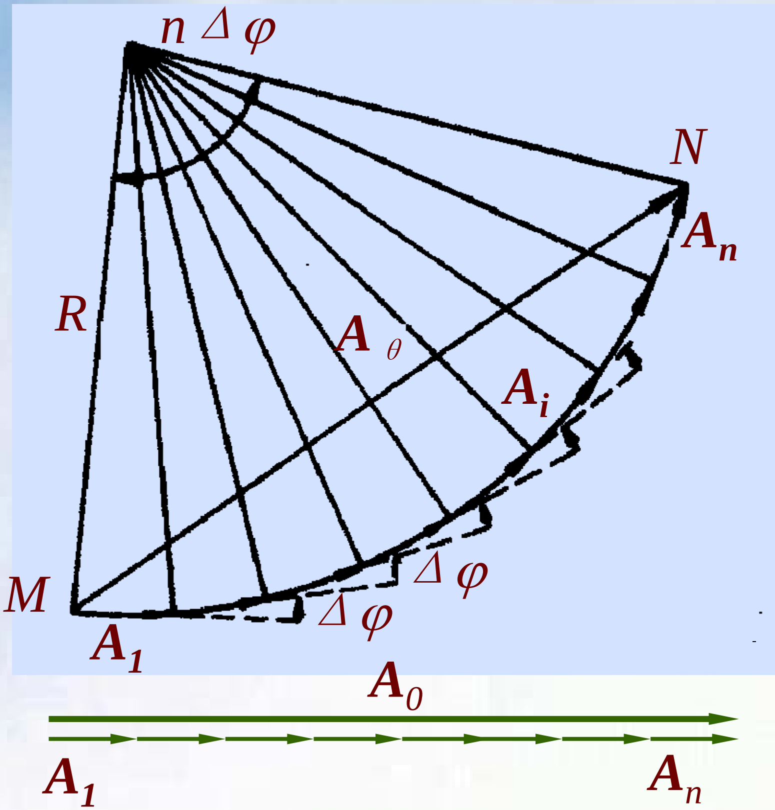
合振幅大小为A_θ，缝边缘光到P点的相差 $n\Delta\varphi$。可得：

$$\overset{\frown}{MN} = R(n\Delta\varphi) \approx nA_1$$

P点的合振动振幅：

$$A_\theta = 2R\sin\frac{n\Delta\varphi}{2}$$

$$= 2\frac{nA_1}{n\Delta\varphi}\sin\frac{n\Delta\varphi}{2}$$



两边缘光线到P点的光程差为 $a\sin\theta$，故有：

$$n\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta$$

则P点的振幅为：

$$A_\theta = \frac{nA_1}{\frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta} \cdot \sin(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta) = nA_1 \frac{\sin u}{u}$$

参数 $u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$。当衍射角 θ=0时，因为：

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

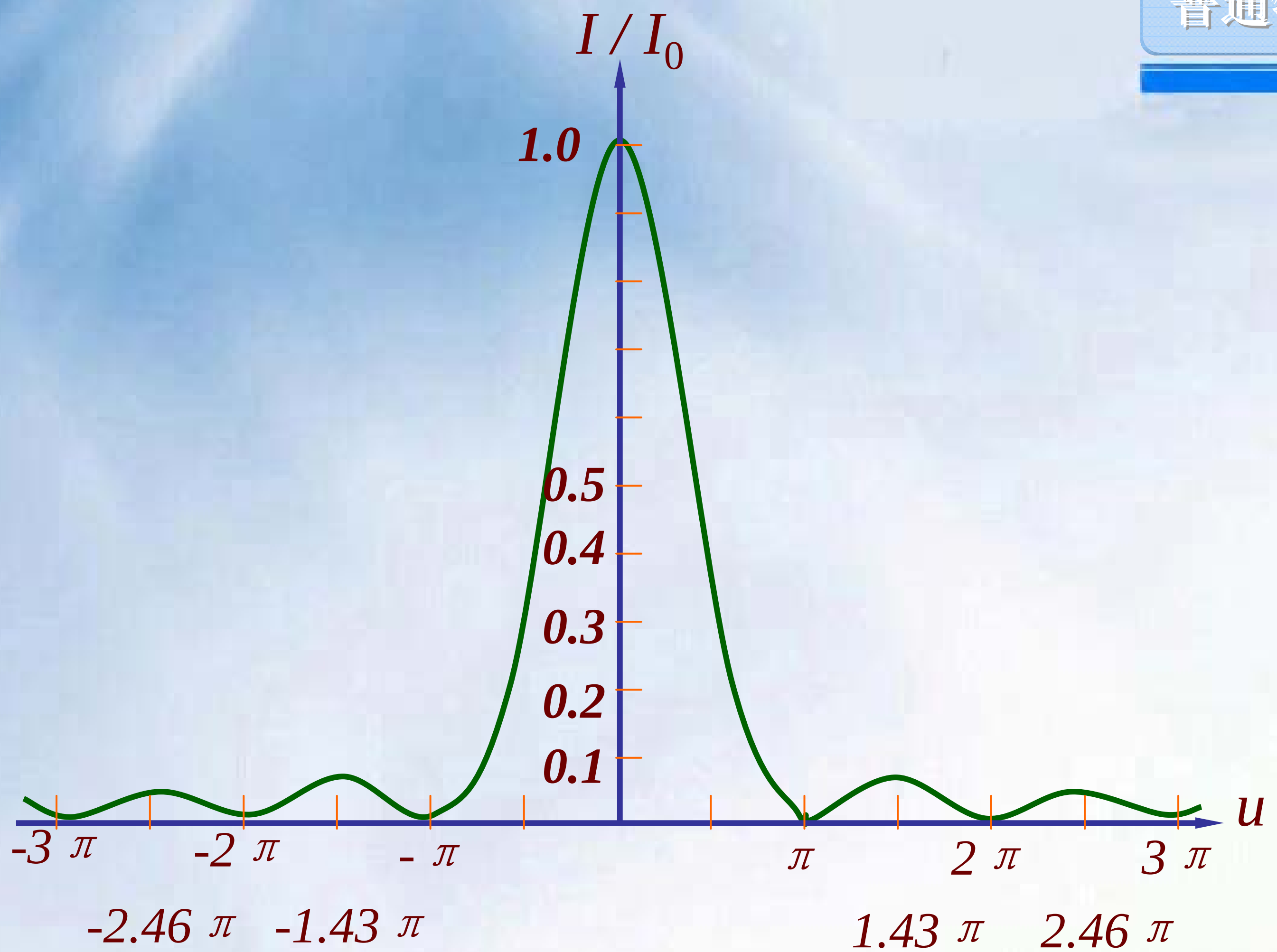
可得：$A_0=nA_1$。 A_0是中央明纹处的振幅。而对应于任意衍射角 θ，P点振幅为：

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin u}{u}$$

P点的光强与中央光强之比为：

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A_\theta^2}{A_0^2} = \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

相对光强 I/I_0 随 $u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$ 的分布曲线见下图：



单缝夫琅禾费衍射相对光强分布

2.光强分布曲线的讨论

(1)中央明纹，$\theta=0$处，$I=I_0$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{A_\theta^2}{A_0^2}=\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

(2)暗纹位置，$u\neq0$而$\sin u=0$时为暗纹位置，此时满足：

$$\sin\theta=\pm k\frac{\lambda}{a} \qquad k=1,2,3\ldots \qquad u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

(3)各级明纹位置，各级明纹将出现在：

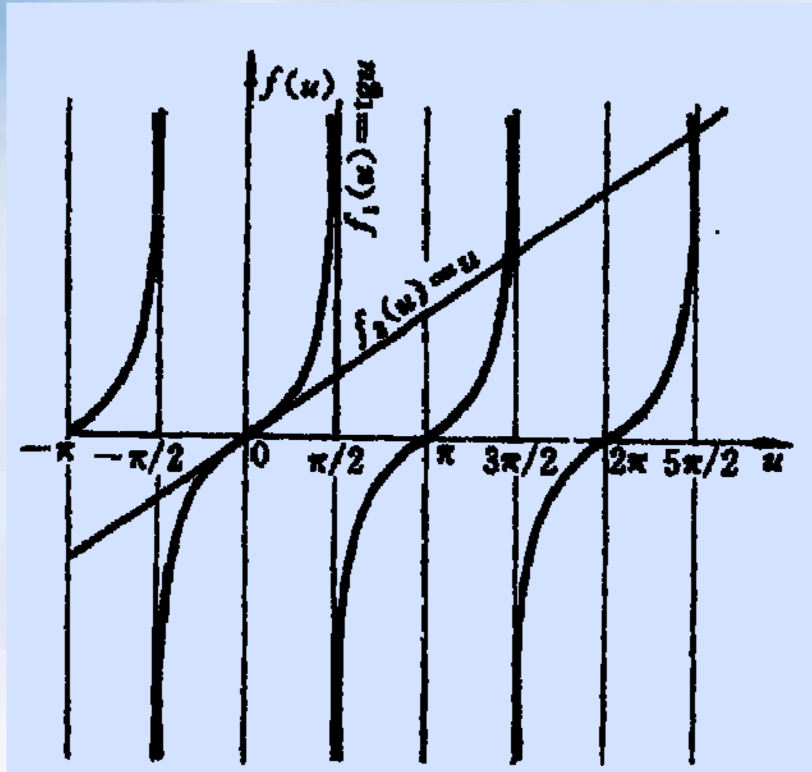
$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)=0$$ 即 $\tan u=u$ 的位置上。

$\tan u = u$ 方程解得出现极大的位置：

$$u_1 = \pm 1.43\pi$$

$$u_2 = \pm 2.46\pi$$

$$u_3 = \pm 3.47\pi$$



相应各级明纹的位置：

$$\sin\theta_1 = \pm 1.43\frac{\lambda}{a}$$

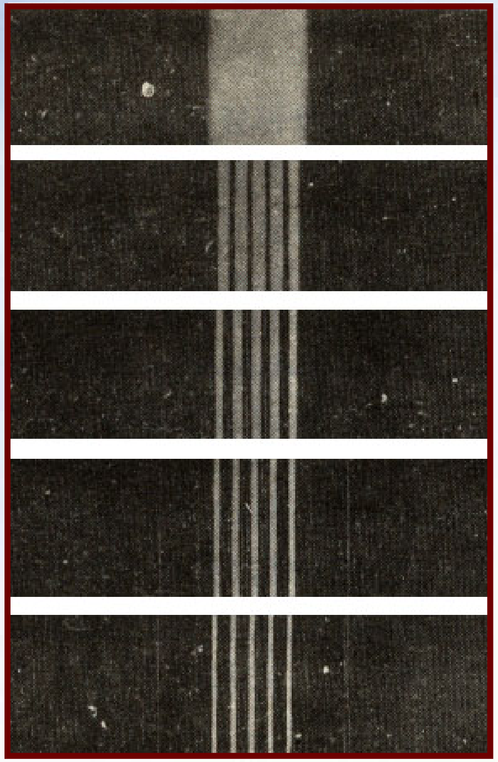
$$\sin\theta_2 = \pm 2.46\frac{\lambda}{a} \qquad \sin\theta_3 = \pm 3.47\frac{\lambda}{a}$$

§17-4 光栅衍射

一、光栅衍射现象

大量等宽度等间距的平行狭缝构成的光学器件称为光栅。光栅由透射、反射之分。

透射光栅的缝宽度a，不透光部分的宽度b，则$d=a+b$称为光栅常数。光栅狭缝数越多，衍射条纹就越细锐、明亮。



1缝

2缝

5缝

10缝

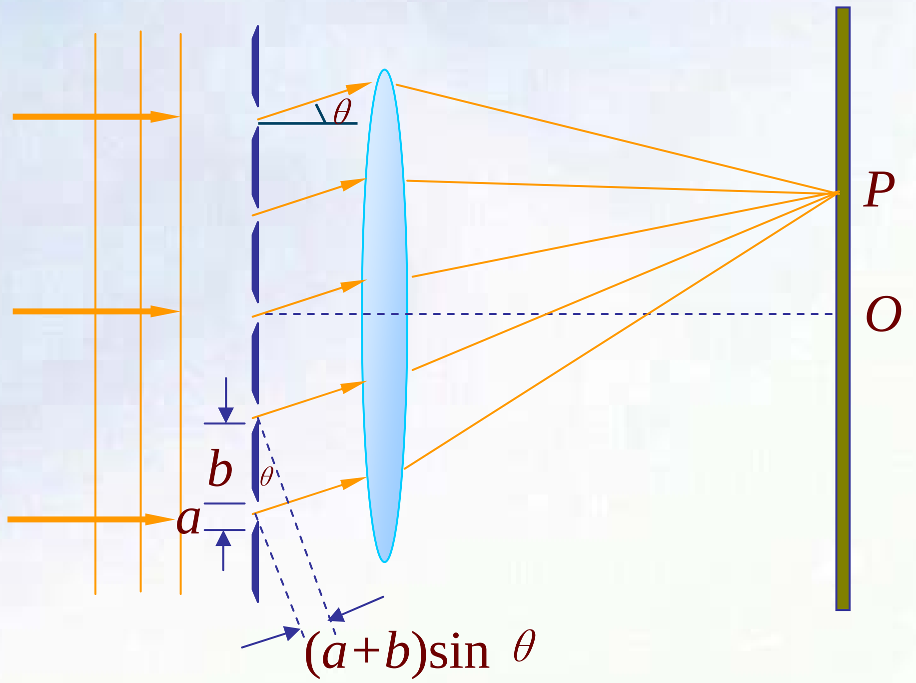
20缝

二、光栅衍射图象的形成

光栅衍射图象是多个狭缝单缝衍射图象相互干涉形成的图象。

1.主极大(明纹)
光栅方程

相邻两缝发出的光束间的相位差为 2π 的整数倍时，产生明纹。



明纹条件为：

$$\frac{2\pi(a+b)\sin\theta}{\lambda}=2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

或：
$$d\sin\theta=k\lambda \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

上式称为光栅方程。由于 θ 角不可能大于 $\pi/2$，因而明纹的最大级数 $k<d/\lambda$。

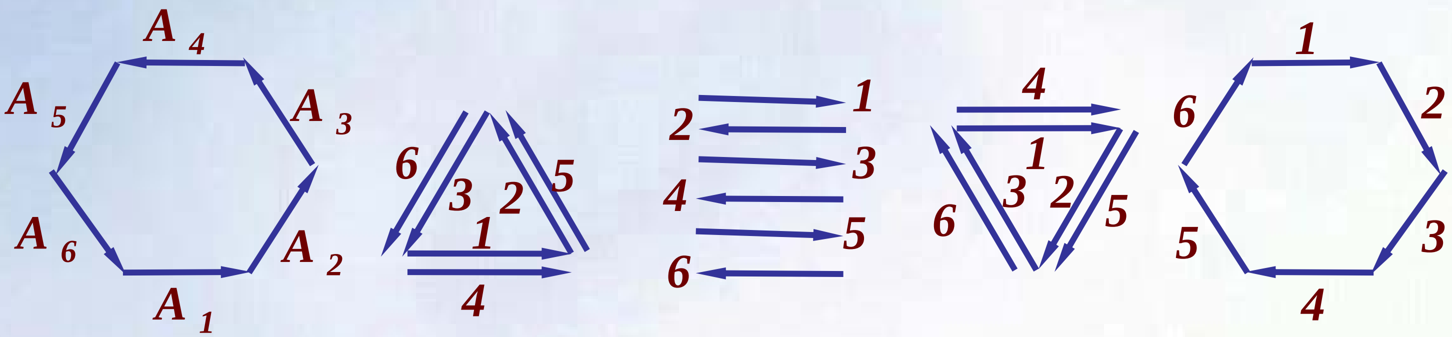
2. 暗条纹

各狭缝在屏幕P点所产生的振幅矢量 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_\mathrm{N}$，它们的位相不同。

相邻两光振动的相位差：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

要使P点出现暗纹，各分振动的振幅矢量应组成一个闭合的多边形。例如，如图6个缝的情况：



$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ $\Delta\varphi = \pi$ $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{3}$ $\Delta\varphi = \frac{5\pi}{3}$

所以，对于6个缝的情况，当相邻光振动的位相差满足：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta = k'\frac{\pi}{3} \qquad k' = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$$

或：
$$d\sin\theta = k'\frac{\lambda}{6} \qquad k' = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$$

P点出现暗纹。推广到N个狭缝的情况：

$$\boxed{d\sin\theta = k'\frac{\lambda}{N} \qquad k' = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots}$$ 暗纹方程

上式中 k′≠kN (因为此时满足明纹条件)，所以k′的取值为：

$$k' = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm (N-1); \pm (N+1), \pm (N+2), \ \cdots$$
$$\pm (2N-1); \pm (2N+1), \pm (2N+2) \cdots$$

在两相邻主极大之间有N-1条暗纹。

3.次极大

两相邻主极大之间有N-1条暗纹，而两暗纹之间还存在1条次明纹，此明纹强度很小，仅为主极大的4%。故在N-1条暗纹之间还有N-2条次明纹。

4.单缝衍射的影响

光栅衍射图样是多个狭缝单缝衍射图象相互干涉形成的，如果单缝衍射暗纹出现的位置正好也是光栅方程主极大出现的位置，即：

$$a\sin\theta = k_1\lambda \qquad k_1 = 1, 2, 3, \cdots$$

$$d\sin\theta = k_2\lambda \qquad k_2 = 0, 1, 2, \cdots$$

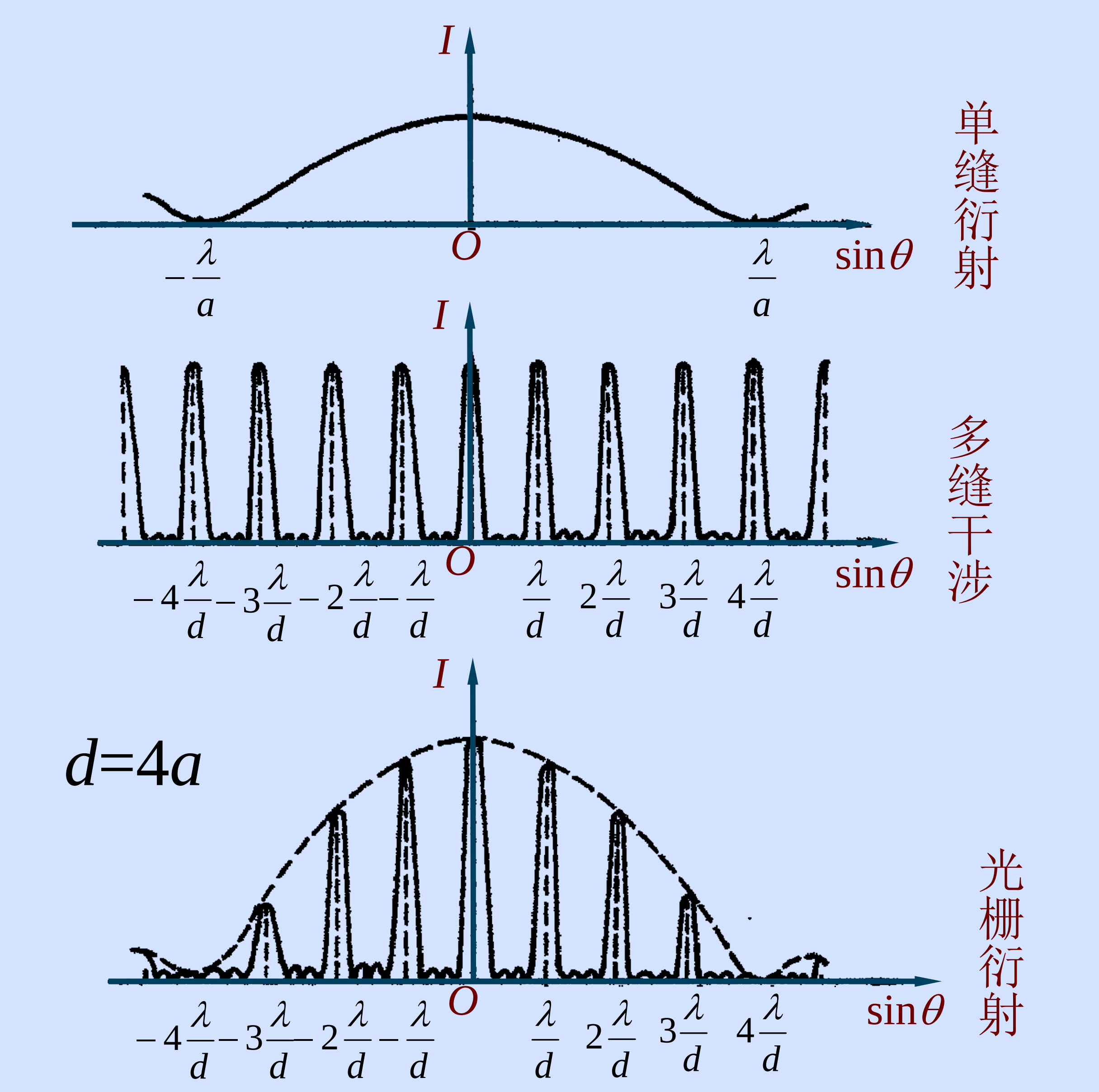
则：

$$k_2 = \frac{d}{a}k_1 \qquad k_1 = 1, 2, \cdots$$

缺级方程

如$d=4a$，则$k_2=\pm4, \pm8, \ldots$为主极大缺级。

光栅衍射图样的光强分布

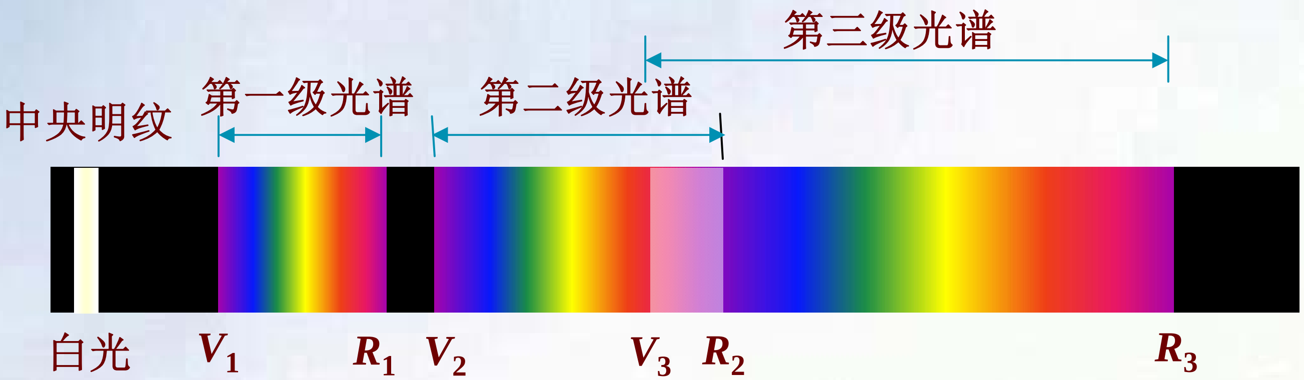


三、光栅光谱

根据光栅方程，

$$d\sin\theta = k\lambda \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

d不变， λ ↓， θ ↓，除中央零级明纹外， 不同波长的同一级衍射主极大的位置均不重合。

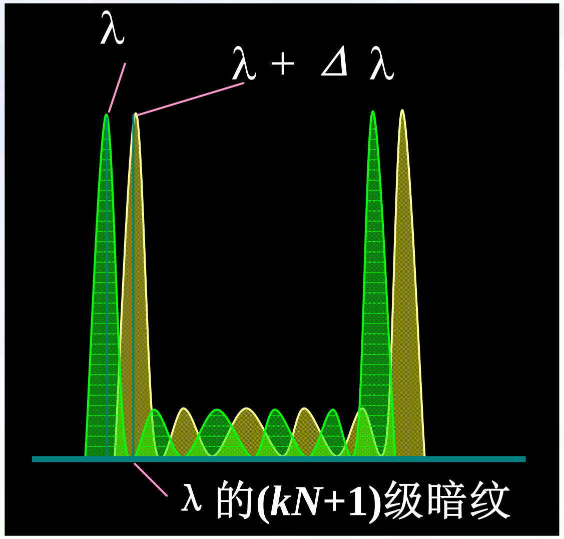


四、光栅的分辨本领

分辨本领是指把靠的很近的两条谱线分辨清楚的能力。光栅的分辨本领定义为：恰能分辨的两条谱线的平均波长λ与两谱线波长差Δλ之比，用R表示。

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

按照瑞利判据，要分辨λ与λ+Δλ，则要求λ+Δλ的第k级明纹与λ的kN+1级暗纹重合，此时认为恰好能分辨。



根据光栅方程和暗纹公式：

$$d\sin\theta = k(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$d\sin\theta = [(kN+1)/N]\lambda$$

可以解得：

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN}$$

光栅的分辨本领与光栅的总缝数N及衍射级数k成正比，与光栅常数无关。

例题2：

以每毫米有500条栅纹的衍射光栅观察钠光谱线(λ=590nm)，缝宽*a*和刻痕宽度*b*之比为1:2。试问：(1) 平行光垂直入射光栅时最高能看到第几级光谱线？观察屏上总共可能出现几条光谱线？(2) 平行光以30°斜入射时，最高能看到第几级光谱线？

解：（1）按题意，光栅常数

$$(a+b)=\frac{1\times10^{-3}}{500}=2\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

因为衍射角最大不能超过π/2，由光栅方程得：

$$k=\frac{(a+b)}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2}=3.39$$

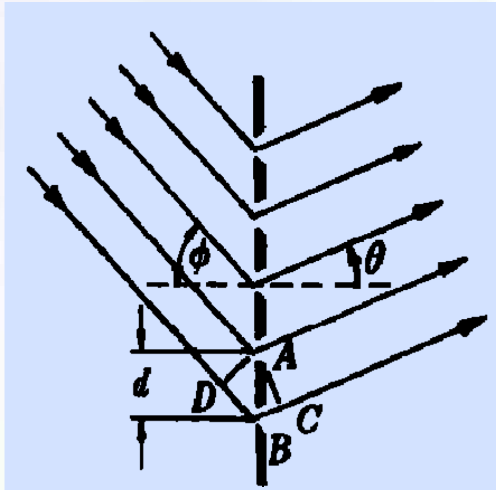
取整数k=3，得最高能看到第3级谱线。

假如没有缺级现象，那么在零级衍射条纹左右各有三条谱线，总共有七条谱线。但由题知：

$$a:(a+b)=1:3$$

由缺级方程得： $k_2=\dfrac{a+b}{a}k_1=3k_1$

即衍射光谱线第3，6，9，…为缺级。故观察屏上实际呈现的谱线是：0,±1,±2级。



（2）斜入射时，相邻两条光线的光程差除BC外应再加上入射前的光程差DB，因此总光程差是：

$$\delta = DB + BC = d\sin\varphi + d\sin\theta = d(\sin\varphi + \sin\theta)$$

则由光栅方程得：

$$k = \frac{d(\sin\varphi + \sin\theta)}{\lambda}$$

式中k的最大值相应于 θ = π /2， 因此

$$k_{\max} = \frac{d(\sin 30^0 + 1)}{\lambda} = 5.08$$

取整数，最高能看到第五级谱线。

例题3：

设计一光栅，要求(1)能分辨钠光谱的5.890×10^{-7}(m)和5.896×10^{-7}(m)的第二级谱线；(2)第二级谱线的衍射角θ≤30°；(3)第三级谱线缺级。

解：(1)按光栅的分辨本领：
$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$

得：
$$N=\frac{\lambda}{k\Delta\lambda}=\frac{5.893\times10^{-7}}{2\times0.006\times10^{-7}}=491$$

即N≥491 狭缝。

(2) 由 $(a+b)\sin\theta=k\lambda$ 可得：

$$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times5.893\times10^{-7}}{\sin30^{0}}=2.36\times10^{-3}(\text{mm})$$

因要求$\theta\leq30^{0}$，所以 $a+b\geq2.36\times10^{-3}(\text{mm})$　最小值

(3)缺级条件：

$$k_2=\frac{a+b}{a}k_1 \qquad \text{取}\ k_1=1$$

$$a=\frac{a+b}{3}=0.79\times10^{-3}(\text{mm})$$

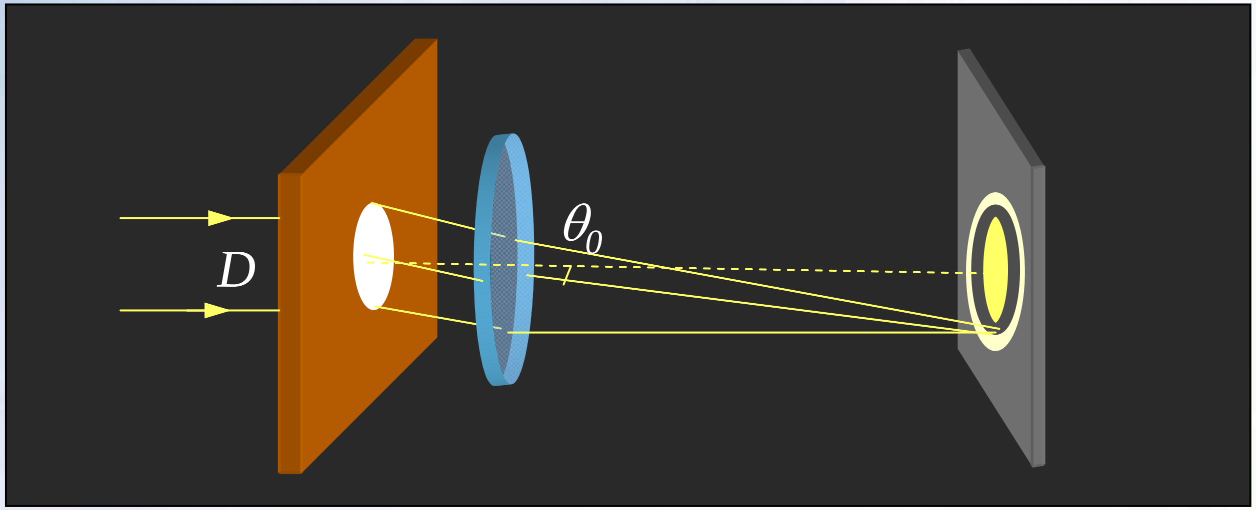
$$b=2.36\times10^{-3}-0.79\times10^{-3}=1.57\times10^{-3}(\text{mm})$$

§17-5 圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

一、圆孔夫琅禾费衍射

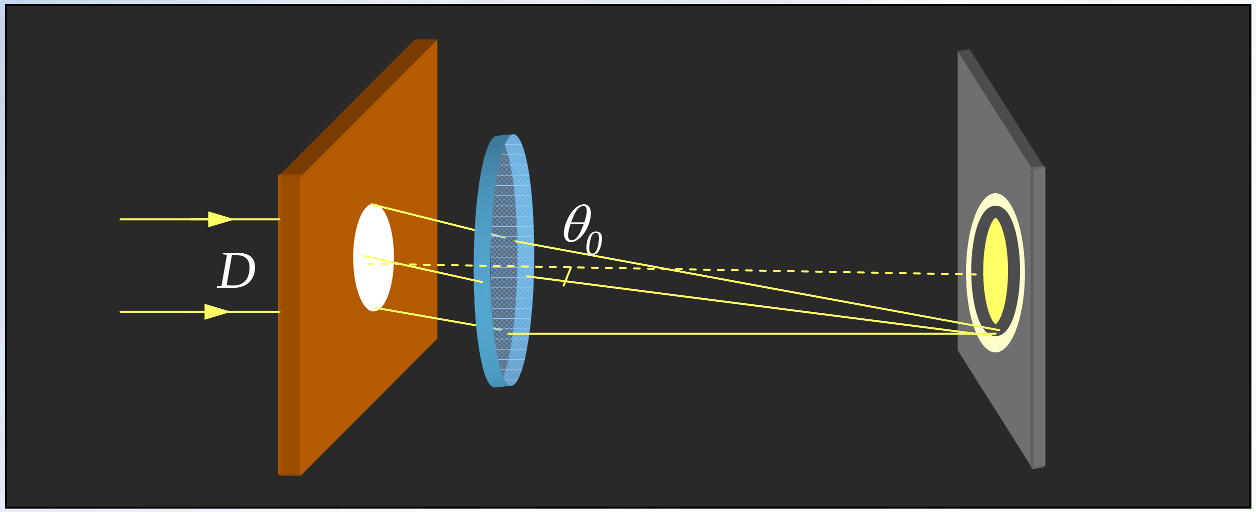
理论计算表明，满足第一级暗环的衍射角为：

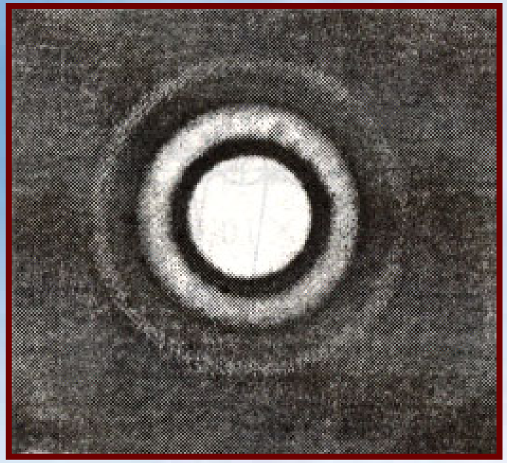
$$\sin\theta_0 \approx \theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$



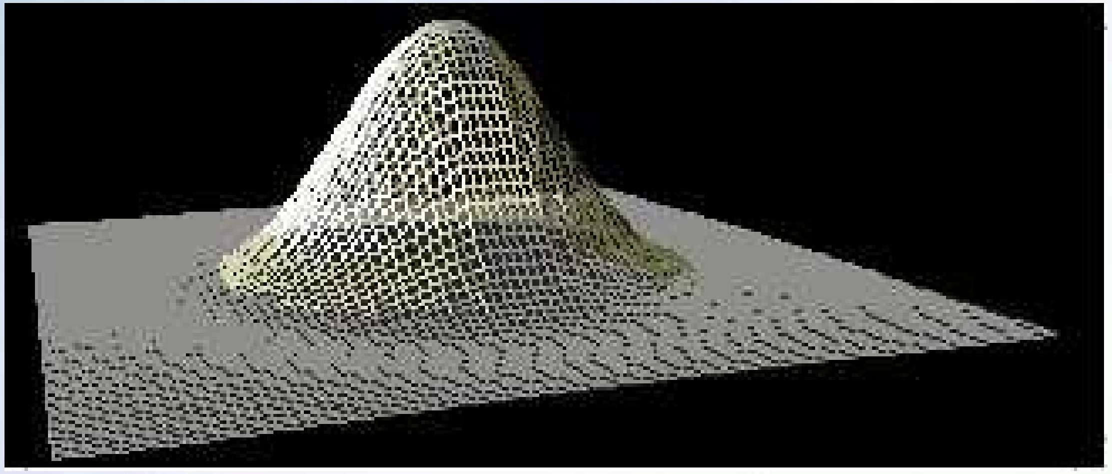
一级暗环所包围的中央圆斑称为爱里斑 (Airy)，爱里斑的角半径即为 θ_0，爱里斑的半径 R 为：

$$R = f\tan\theta_0 \approx f\theta_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}f$$



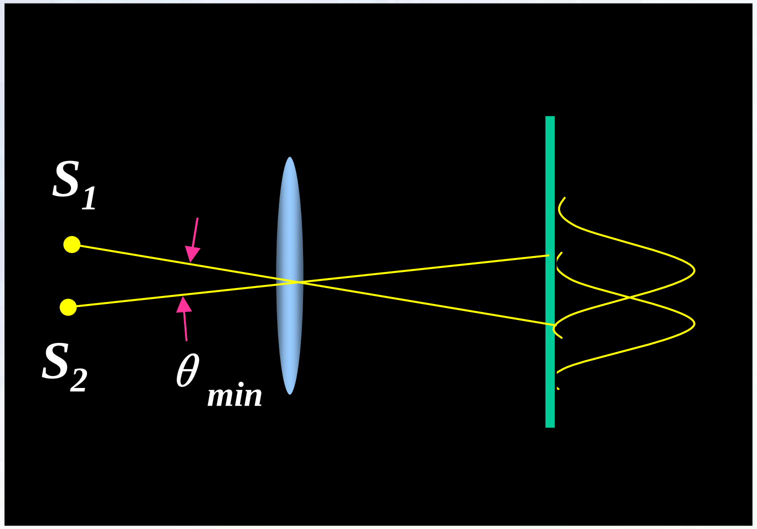


圆孔衍射

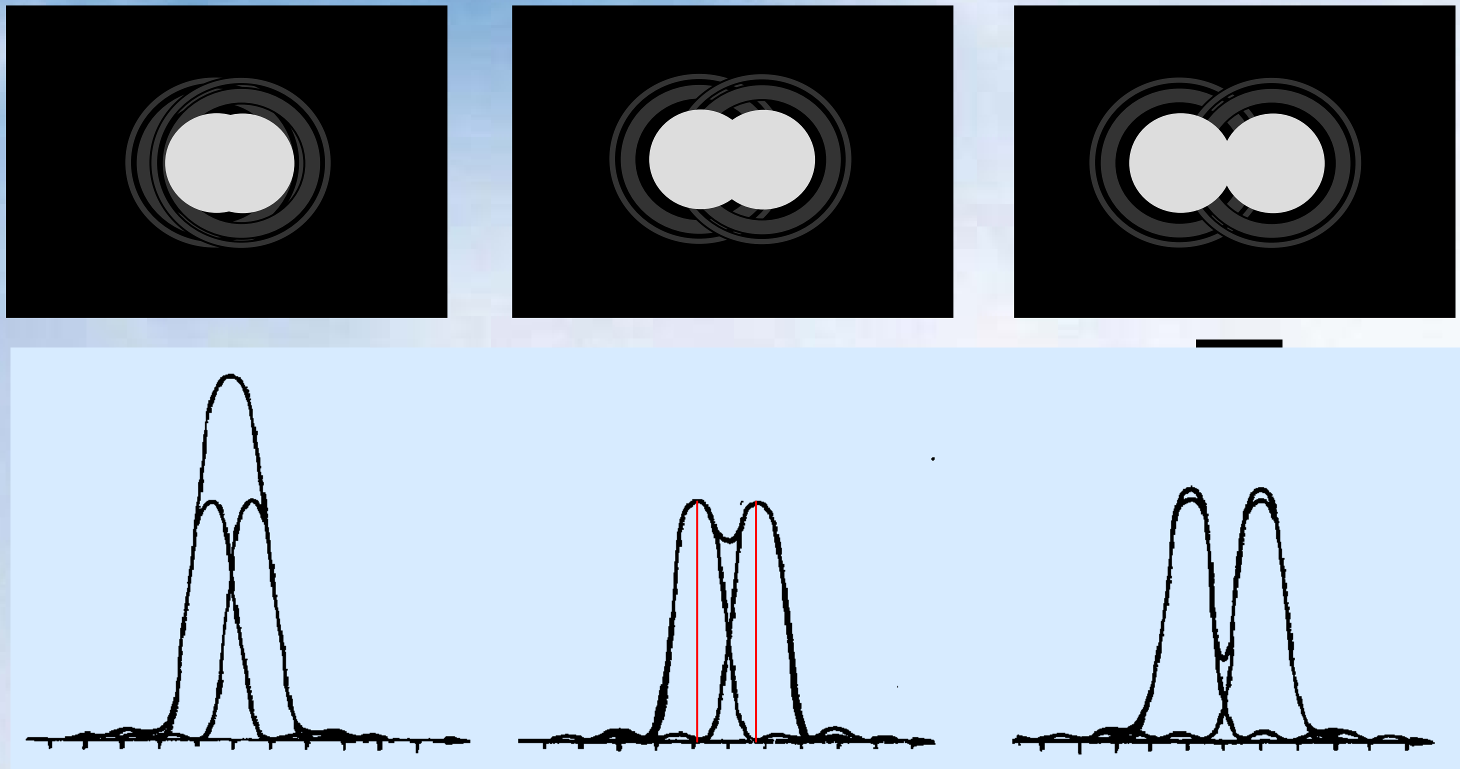


二、光学仪器的最小分辨角

瑞利判据：当一个点的衍射图样的中央主极大恰好与另一个点的第一级极小相重合时，这两点就处于恰能分辨的位置。此时合成曲线的最小强度为最大强度的80%。 两物点对透镜中心的张角称为最小分辨角。



分辨两个点的衍射图象的条件



不能分辨　　　恰能分辨　　　能分辨

最小分辨角为爱里斑的角半径：

$$\theta_{\min}=\theta_0=1.22\frac{\lambda}{D}$$

一般定义分辨本领为：

$$\text{分辨本领}=\frac{1}{\text{最小分辨角}}$$

望远镜的分辨本领：

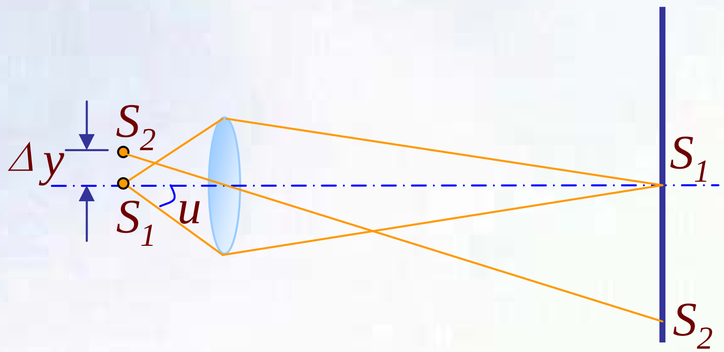
$$R=\frac{1}{\theta_{\min}}=\frac{D}{1.22\lambda}$$

显微镜的分辨本领：*

$$R=\frac{1}{\Delta y}=\frac{n\sin u}{0.61\lambda}$$

上式中 Δ y 称为最小分辨距离， n为物方折射率， u为物点向孔径张角的一半。

提高显微镜分辨本领的方法：



①提高孔径数 $n\cdot\sin u$

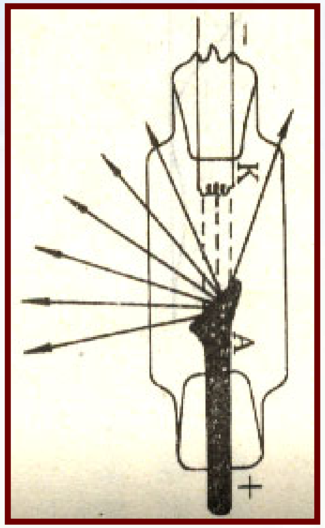
②减小波长 λ， 采用紫外光等。

§ 17-6 X射线在晶体上的衍射

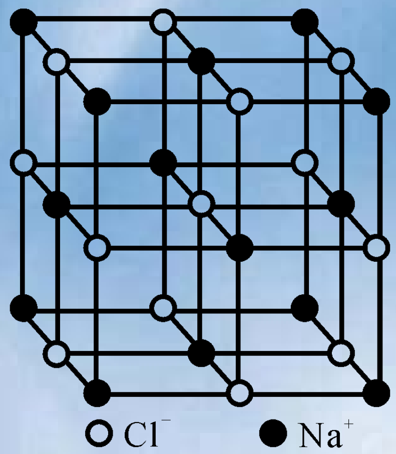
X射线是伦琴（W.K.Rontgen）在1895年发现的。X射线管中加速电子撞击阳极A即产生X射线。

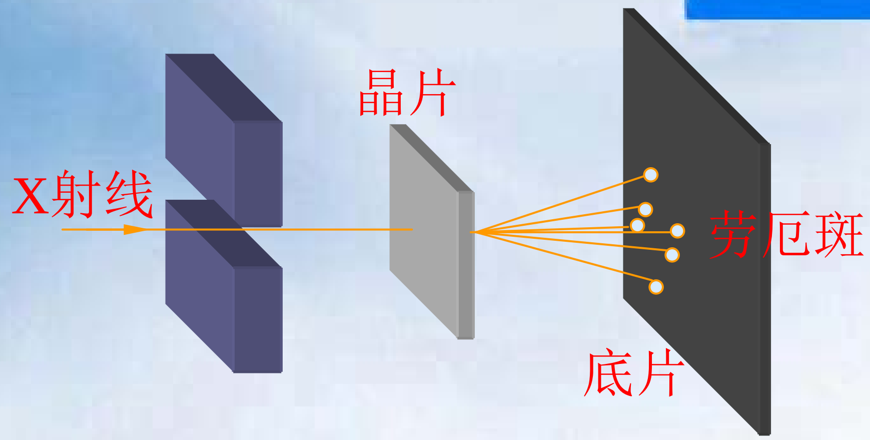
由于X射线的波长范围在$10^{-11}\sim 10^{-9}$ m范围，所以很难制人工的光栅对其进行研究。

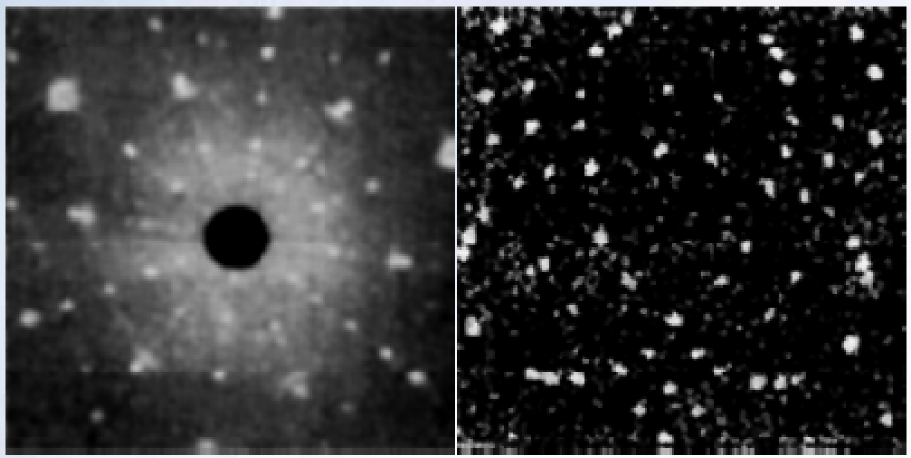
1912年劳厄（M.Von Laue）根据对晶体结构的研究，提出用天然晶体作为三维光栅的设想，其实验装置与衍射图样见下图：



X射线管



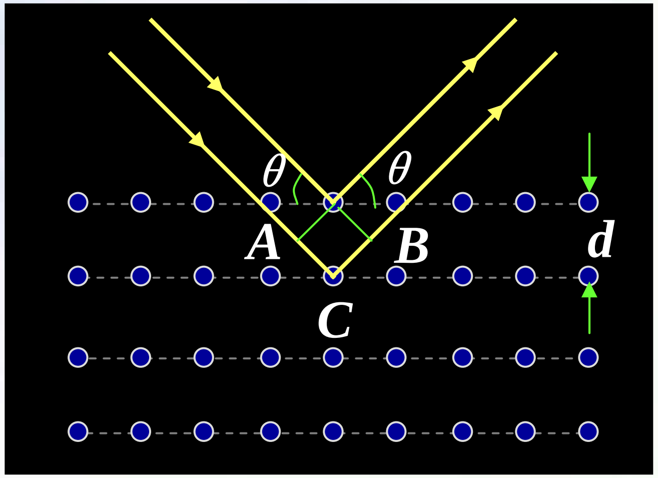




(a) (b)

劳厄实验图样

1913年，英国的布拉格父子提出一种研究X射线衍射的方法，即把晶体的空间点阵当作反射光栅处理，想象晶体是由一系列平行的原子层构成，设原子层间距为d，称晶面间距，当X射线以掠射角 θ 入射时，其反射线的光程差为：

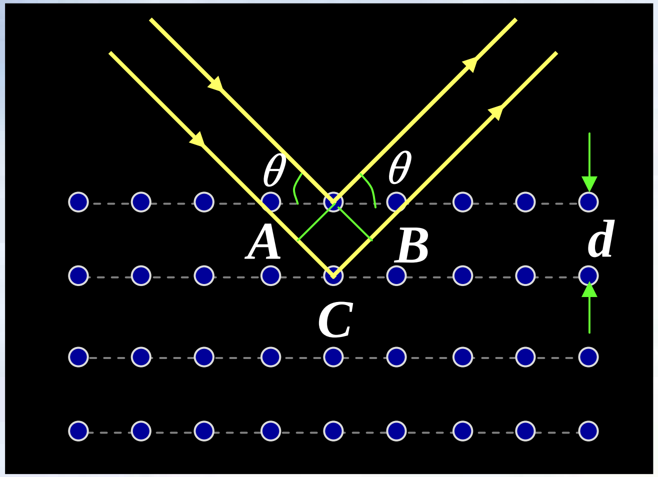


$$\delta = AC + CB = 2d\sin\theta$$

各散射层在反射方向形成干涉加强的条件：

$$2d\sin\theta = k\lambda$$

$$k = 1,2,3,\cdots$$

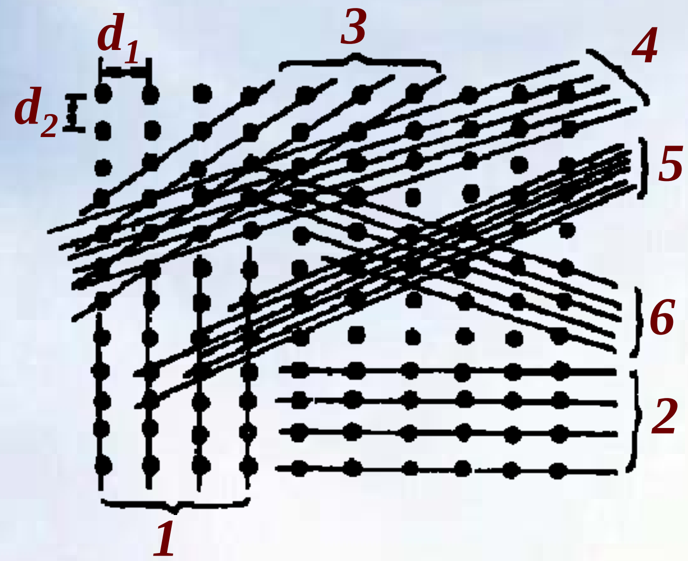


上式称为布拉格公式。

对于单色X射线以任意掠射角 θ 入射时，一般得不到反射加强图案，因为不一定满足上式，对连续X射线，满足反射加强的波长为：

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k} \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

应用布拉格公式可以解释劳厄实验，劳厄实验中的众多斑点是由于晶体中存在众多不同取向的原子层造成的。



晶体内不同取向的原子层面

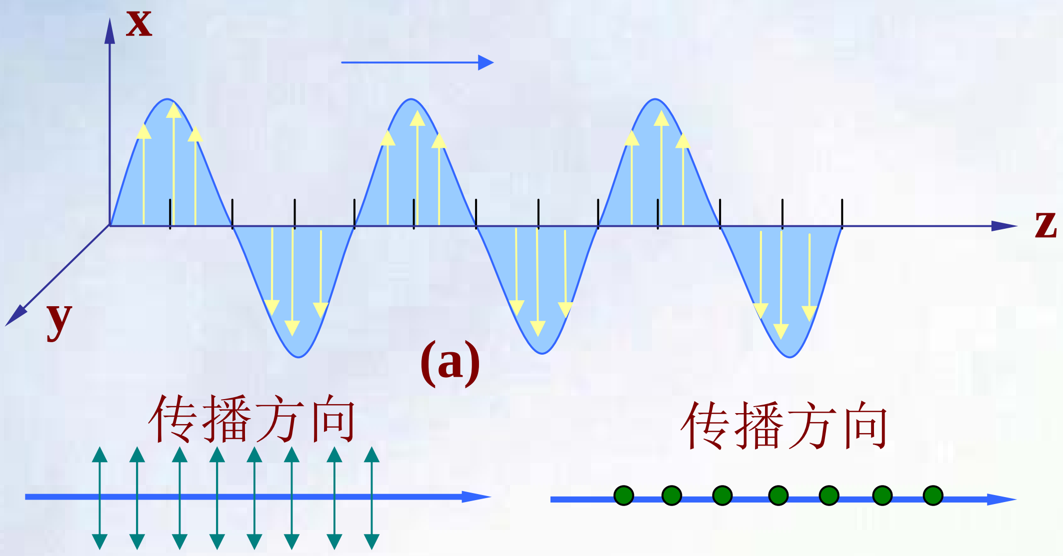
X射线衍射的应用： 1.已知晶格常数，测X射线的波长。 2.已知X射线波长，研究晶体的结构。

第十八章 光的偏振

§18-1 偏振光和自然光

一、线偏振光

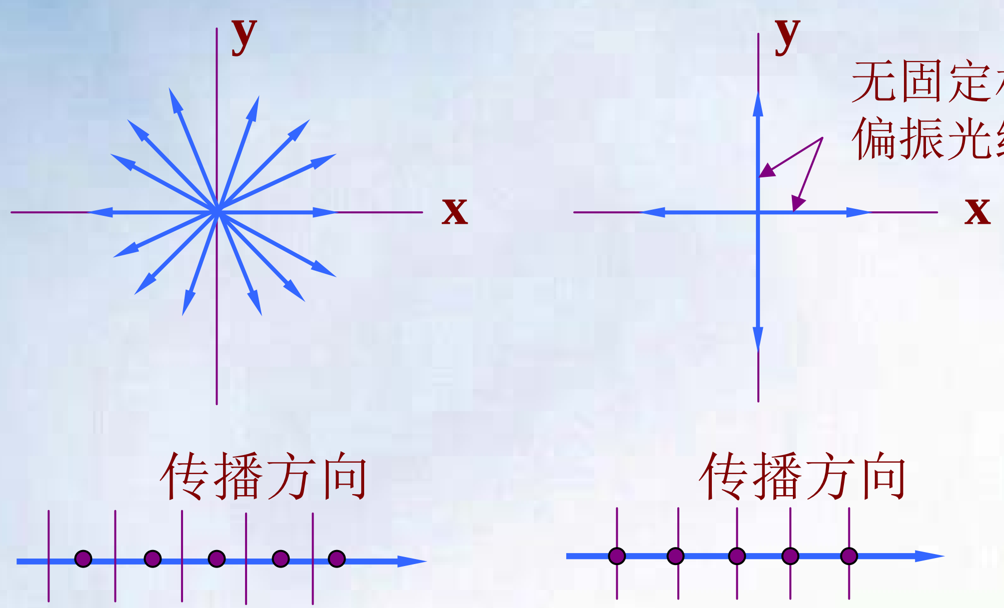
电磁波中$\boldsymbol{E}$矢量始终沿某一方向振动。



(b)振动方向在纸面内 (c)振动方向垂直纸面

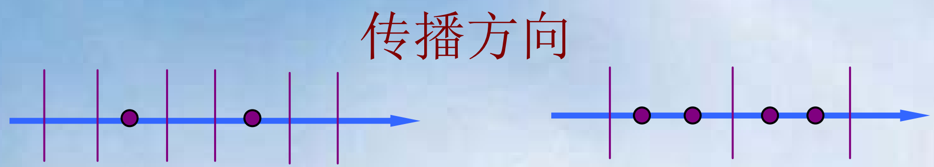
二、自然光 部分偏振光

振动面在空间各个方向高速随机变化的光称为自然光。在x和y方向上的平均振幅相同。



自然光表达

介于自然光和线偏振光之间的一种偏振光称为部分偏振光

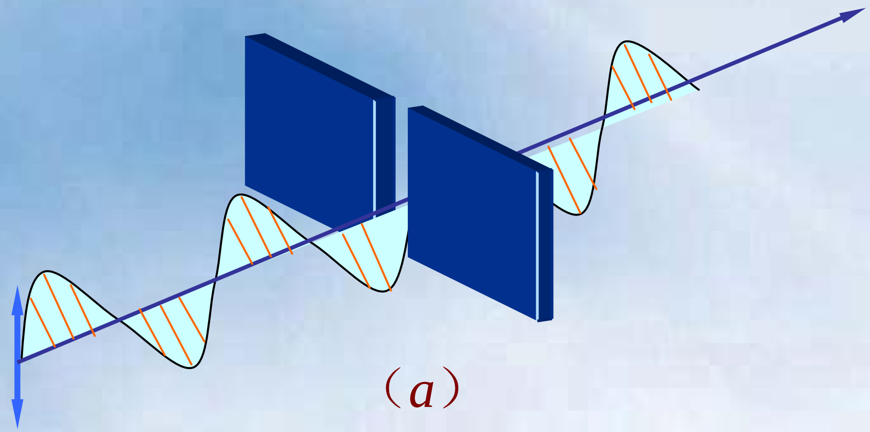


部分偏振光表达

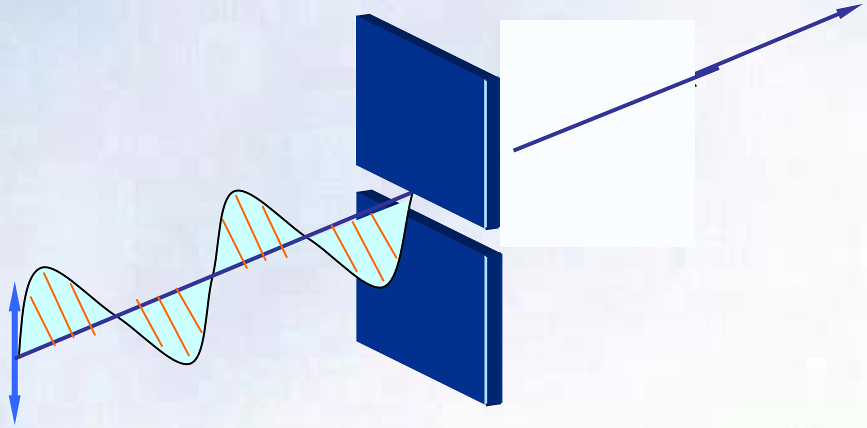
§18-2 起偏和检偏 马吕斯定律

一、起偏和检偏

当机械横波通过一狭缝时，如果狭缝方向与机械横波的振动方向相同时，此横波可通过狭缝；当狭缝方向与机械横波的振动方向相垂直时，此横波就不能通过狭缝，见下图：



（*a*）



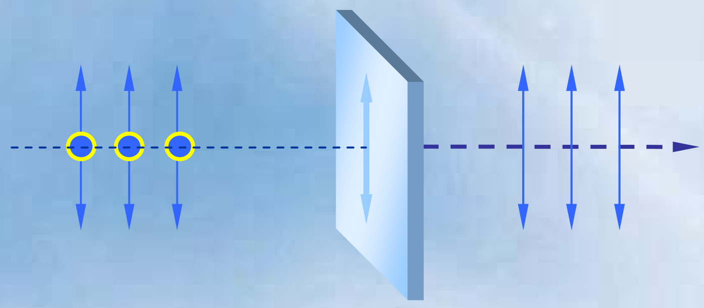
（*b*）

与机械波相仿，对于光波我们也可找到类似的“狭缝”，使自然光通过此狭缝后变为线偏振光，此“狭缝”称为起偏器。

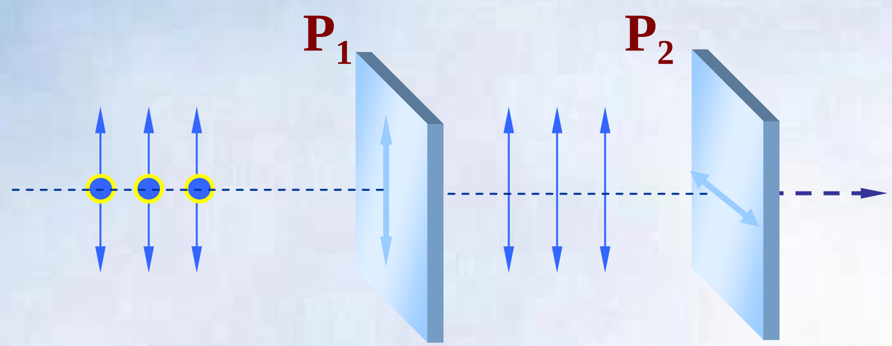
用做起偏器的是一种具有称为“二向色性”的物质，例如1mm厚的电气石薄片就几乎可将某一振动方向的光全部吸收。

利用 “二向色性” 物质所制成的薄片称为偏振片，其中能够让光通过的特定方向称为偏振化方向。

偏振光获得后，检查某光线是否为偏振光时，也可用偏振片。当偏振片的偏振化方向与偏振光的振动方向垂直时，偏振光就不能通过该偏振片。



（a）

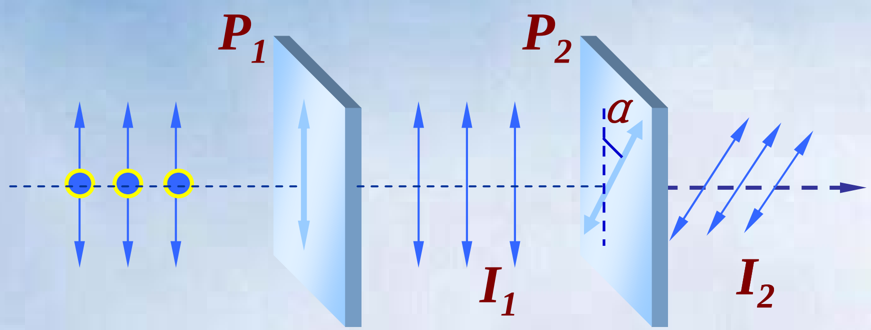


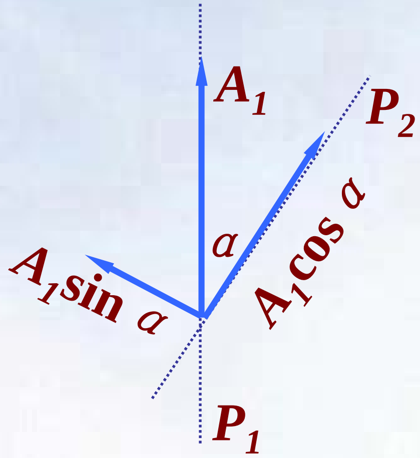
（b）

起偏和检偏

二、马吕斯定律

设起偏器和检偏器的偏振化方向成 α 角，入射到检偏器的光强为I_1，透射光强为I_2，则





$$\boxed{I_2 = I_1 \cos^2 \alpha}$$ 马吕斯定律

由于：$A_2 = A_1 \cos\alpha$

又：$I \propto A^2$

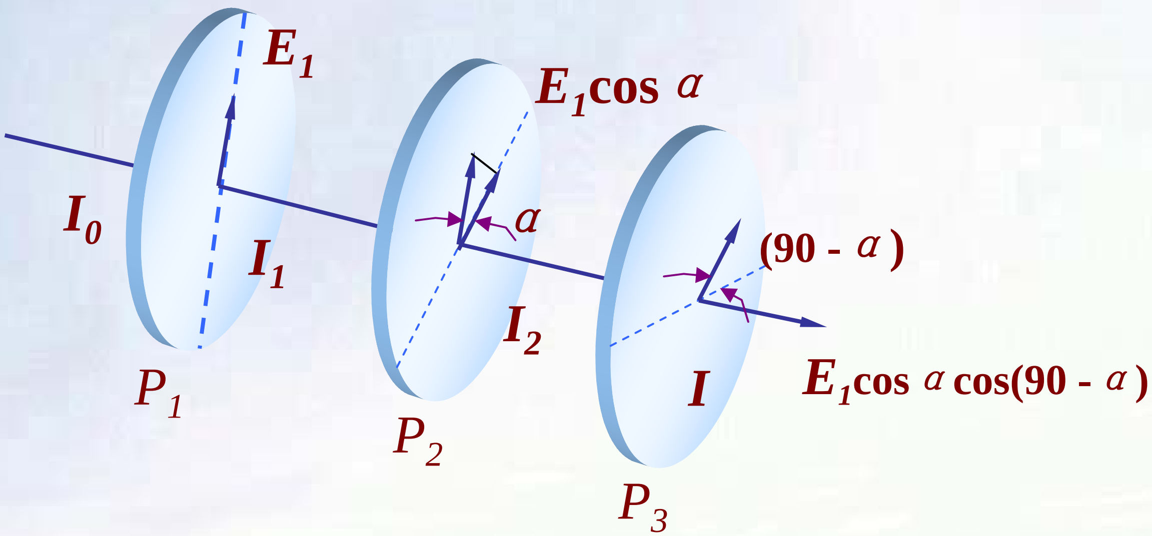
所以：$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$

例题1：

两正交偏振片之间，有一偏振片以角速度 ω 以光传播方向为轴旋转。证明自然光通过这一系统后，出射光的强弱变化频率被调制为旋转频率的四倍。即证明：

$$I = \frac{I_0}{16}(1 - \cos 4\omega t)$$

其中，I_0 自然光强度，I 为最后的出射光强度。



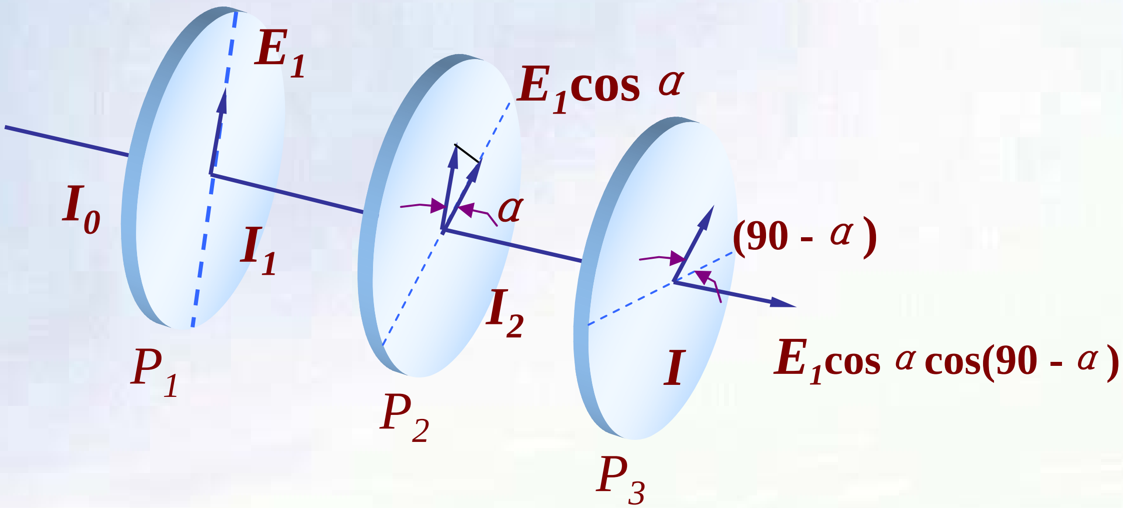
解：当自然光通过P_1时，$I_1 = \frac{1}{2} I_0$

t时刻，P_2转过的角度$\alpha = \omega t$，当线偏振光I_1透过P_2时，

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

当线偏振光I_2再透过P_3时

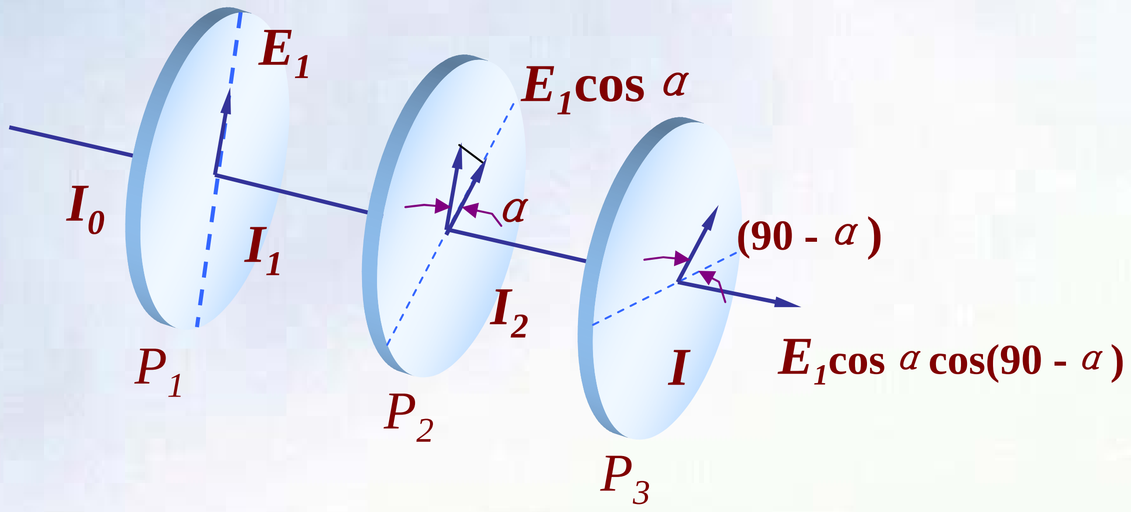
$$I = I_2 \cos^2 (90 - \alpha) = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha \cos^2 (90 - \alpha)$$



$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha \sin^2\alpha = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\alpha$$

$$= \frac{1}{16} I_0 (1-\cos 4\alpha) = \frac{1}{16} I_0 (1-\cos 4\omega t)$$

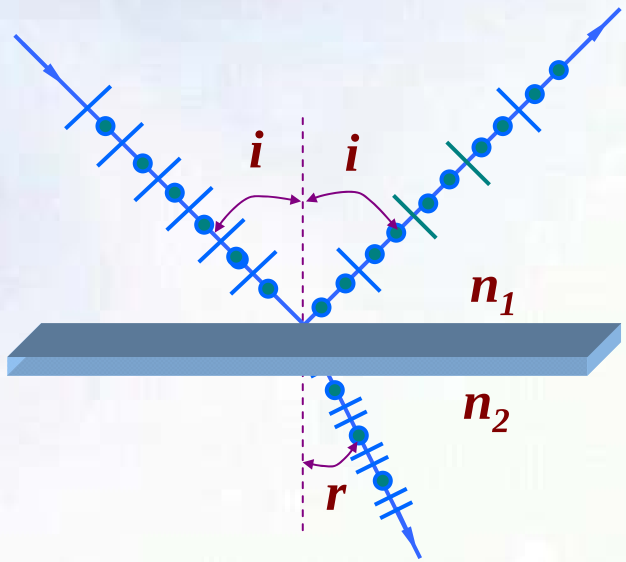
证毕。



§18-3 反射和折射时光的偏振现象

一、由反射和折射产生的部分偏振光

自然光在两种介质n_1、n_2的交界面上发生反射和折射时，反射光和折射光都将成为部分偏振光。反射光中垂直入射面的光矢量加强，折射光中平行入射面的光矢量加强。

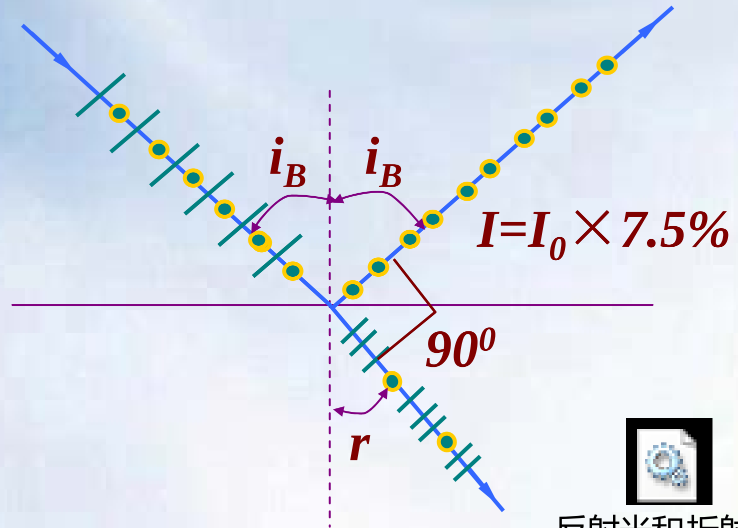


二、布儒斯特定律

当光线以i_B入射时，
满足：

$$i_B + r = 90^0$$

此时，实验发现反射光线为完全偏振光，
折射光线成为部分偏振光。



反射光和折射光

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin r = n_2 \sin(90^0 - i_B) = n_2 \cos i_B$$

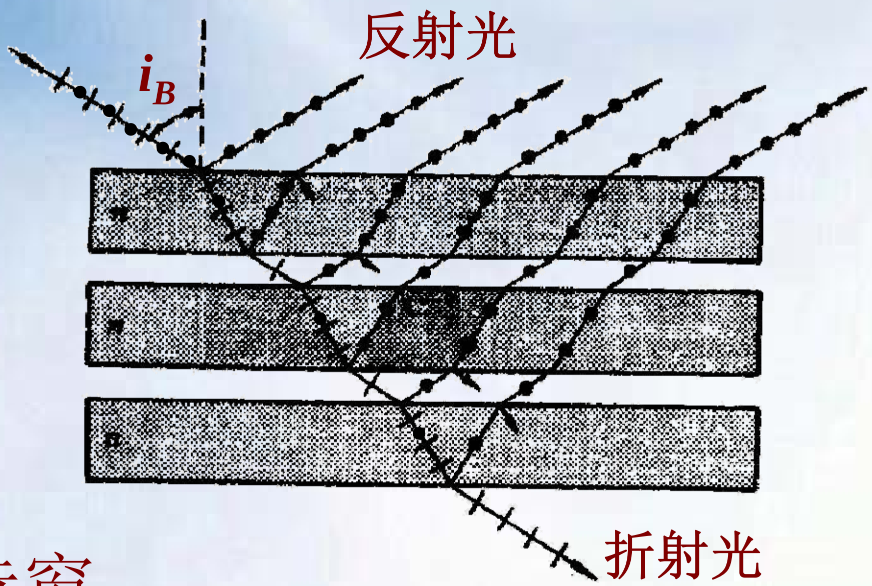
$$\boxed{\tan i_B = n_2 / n_1}$$

此式称为布儒斯特定律。

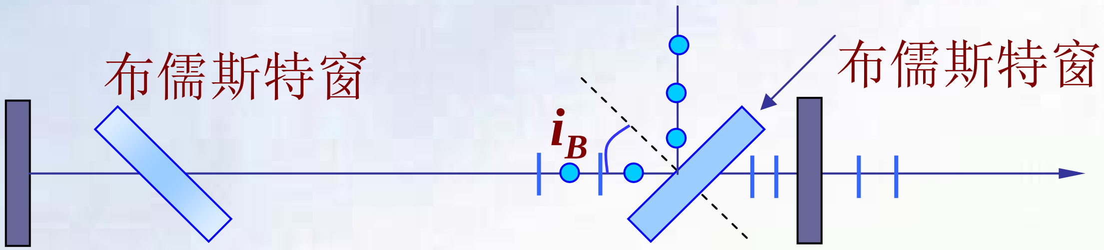
布儒斯特定律的应用：

玻璃堆效应：

增强反射光的强度和提高折射光的偏振化程度。



激光器中的布儒斯特窗



使输出的光为线偏振光