资产定价 复习

securtity 证券

asset 资产

stock 股票

在表示一种商品的时候，会混用。

Chapter 2

security

security 证券的 payoff

$$x^j=\begin{bmatrix}x_1^j\\ \vdots\\ x_s^j\end{bmatrix}$$

下标 s 表示 state，在不同状态的未来有不一样的 payoff。

定义 security structure

$$X=\begin{bmatrix}x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{J-1} & x_1^J\\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{J-1} & x_2^J\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{S-1}^1 & x_{S-1}^2 & \cdots & x_{S-1}^{J-1} & x_{S-1}^J\\ x_S^1 & x_S^2 & \cdots & x_S^{J-1} & x_S^J\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^1 & x^2 & \cdots & x^{J-1} & x^J\end{bmatrix}$$

j 表示债券序号

当 X 是满秩的时候，称为完全市场，因为在 R^s 中任意资产价格组合（在任何 state 都可以有想要的 payoff ）都可以被 X 中的 J 种债券组合出来。

否则称为不完全市场。

标准正交基向量称为 Arrow-Debreu securities.

$$X^{AD}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

short-sell： 证券除了买，也可以卖。在图中画的话就是这个证券反向。

portfolio

是 $h \in R^j$ 一个**列**向量

表示每种证券取的数量

$$portfolio\ payoff = \sum_{j=1}^{j} h_j x^j = Xh$$

Asset Span $< X >= z \in R^S : \exists h \in R^J\ such\ that\ z = Xh$

就是能被 Xh 表示出来的 portfolio 集合。

所有 $< X >= R^S$ 的时候就是 complete market.

所以，complete market 当且仅当 $rank(X) = S$ 也就是市场上至少存在 S 个线性独立的证券。

所以当存在 $x^j = Xh$ 且 $h_j = 0$，（j 这个资产完全可以由别的组合出来，也就是 j 和其他资产不是线性独立的）则 j 是多余的。

price

$p \in R^j$ 因为 portfolio 是列向量，所以 price 是**行**向量。乘下来是一个1*1，即一个数。

The cost of portfolio h is given by

$$p \times h = \sum_{j=1}^{J} p_j h_j$$

如果 $p_j \neq 0$ 则 收益 $R_j = \frac{x^j}{p_j}$

Return = payoff / prize

Use option to complete the market

假设一个 stock 的 payoff为

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ S-1 \\ S \end{pmatrix}$$

如果引入 call option 则

$payoff = max(0, s - k)$,

s = future prize

k = strike prize

如果引入 S-1 个 call option 对应 $k=1,\cdots,S-1$ 则我们可以得到如下如下证券。

$$c_1=(0,1,2,\cdots,S-2,S-1)'$$

$$c_2=(0,0,1,\cdots,S-3,S-2)'$$

$$c_{S-1}=(0,0,0,0,0,\cdots,0,1)'$$

结合原有的 stock 可以组成 security structure

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ S & S-1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

是一个上三角矩阵，行列式的值为1（主对角线的乘积)，所以是个满秩矩阵，所以市场完备。

Chapter 3

几个符号

- $y\geq x$ 对任意i $y_i\geq x_i$
- $y>x$ if $y\geq x$ and $y\neq x$ （可以有部分 $y_i=x_i$）
- $y>>x$ 对任意 i , $y_i>x_i$
- $y\cdot x$ 是内积 $\sum_{i=1}^n x_iy_i$

No-Arbitrage

设 h,k 是两个 portfolio

1. **Law Of One Prize** (LOOP) if $Xh=Xk$ then $p\cdot h=p\cdot k$
2. **No Strong Arbitrage(NSA)** if $Xh\geq 0$ then $p\cdot h\geq 0$
3. **No Arbitrage** (NA) if $Xh>0$ then $p\cdot h>0$

Three lemmas:

1. LOOP implies that every portfolio with 0 payoff has zero prize.
2. NA implies NSA
3. NSA implies LOOP

定义

$$v(z)=\{p\cdot h:z=Xh\}$$

v 可以理解为所有资产组合的价格的集合，z 是一个组合的payoff，是列向量

如果 LOOP 成立，则 v 是一个线性泛函。也就是说，它把$<X>$映射到了 R

1. v 是单值的，因为如果 $Xh=z$，根据 LOOP 则存在一个唯一的 $p\in R^j$ 使得 $p\cdot h=v$.

   所以我们可以写成 $v(Xh)=p\cdot h$ （函数体现出来了）
2. v 在$<X>$上是线性的

$v(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha v(z_1) + \beta v(z_2)$

3. $v(0) = 0$

反向也正确，也就是说，如果v是$< X >$上的线性泛函，则 $LOOP$ 成立。

State Prices

定义

$q \in R^S$ 使得 $p = X'q$

所以q 是一个列 向量，和 p 一样。

> 速记
>
> h z q 都是列向量
>
> p 是行向量

定义

线性泛函V是价值评估函数当且仅当

1. 对每一个$z \in < X >$ 都有 $V(z) = v(z)$
2. 对每一个$z \notin < X >$, $V(z) = q' \cdot z$ 对 $q \in R^s$ with $q_s = V(e_s)$

也就是说 V把 v 从$< X >$扩展到了R^S

其中 e_s 是个基向量

Proposition

若 LOOP 成立, q 是 state price 则对所有的$z \in < X >$, $V(z) = q' \cdot z$

反之也成立。即 iff q 是个 state price 且 loop 成立，则对所有的 $z \in R^S$， $V(z) = q' \cdot z$

Fundamental Theorem of Finance

Proposition 1

Security prices exclude arbitrage iff there exists a valuation functional with $q >> 0$

Proposition 2

Let X be a $S \times J$ matrix, and $p \in R^j$. There is no $h \in R^j$ satisfying $h \cdot p \leq 0$, $Xh \geq 0$ and at least one strict inequality iff there exists a vector $q \in R^S$ with $q >> 0$ and $p = X'q$.

中心思想

the absence of arbitrage is equivalent to the existence of a vector of positive state prices.

Pricing Kernel

q 可以有无数个，然而 kernel 只有一个。就是这个 q 在 $< X >$ 上的投影。说白了就是 q 在 $< X >$ 上。

Proposition 3

Markets are complete and there is no arbitrage iff there exists a **unique** valuation functional.

Asset Pricing Formulas

要推导!

State Price Model

$p_j = \sum_{s=1}^{S} q_s x_s^j$

这就是 $p = X'q$ 没啥好讲的

Stochastic Discount Factor

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{q_s}{\pi_s} x_s^j$$

π 是每个 state 发生的概率。

定义 stochastic Discount Factor

$$m_s = \frac{q_s}{\pi_s}$$

所以可以说

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \pi_s m_s x_s^j = E[m \cdot x^j]$$

因为

$p_j = E[m \cdot x^j] = E[x^j]E[m] + Cov[m, x^j]$

假设存在一个 risk-free bond $x_s^b = 1$

我们有 $p_b = E[m] = \frac{1}{R^f}$

其中 R^f 是 risk-free return。

这样子对任意 j

$$P_j = \frac{E[x^j]}{R^f} + Cov[m \cdot x^j]$$

典型情况下 $Cov[m, x^j]$ < 0.

定义 $R_j = \frac{x^j}{p_j}$ 则可以得到 $E[m \cdot R^j] = 1$.

因为对于一个 risk-free bond $R^f = \frac{1}{E[m]}$ 我们可以写出 $E[m \cdot (R^j - R^f)] = 0$ 或者

$$E[m \cdot (R^j - R^f)] = E[m](E[R^j] - R^f) + Cov(m, R^j) = 0$$

也就是说

$$E[R^j] - R^f = -\frac{Cov(m, R^j)}{E[m]}$$

所以对于一个资产j的超额收益单纯只和协方差与随机贴现因子有关。所以一个投资者只能得到系统性风险的补偿。

equivalent martingale measure

等价鞅 风险中性概率

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} q_s x_s^j$$

对于无风险债券

$$p_b = \sum_{s=1}^{S} q_s = \frac{1}{1+r^f}$$

其中 r_f 是无风险净return.

$$p_j = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s} x_s^j = \frac{1}{1+r^f} \sum_{s=1}^{S} \hat{\pi}_s x_s^j = \frac{1}{1+r^f} E^Q[x^j]$$

其中

$$\hat{\pi}_s = \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s}$$

也就是说$\hat{\pi}_s$是s状态价格占总状态价格的比重。

State-Price Beta Model

在CAPM模型里会详解。

Chapter 4 Risk Preferences and Expected Utility Theory

State-by-State Dominance （SSD）

given two random variables X and Y defined over the state space (Ω,F,P), we say that Y State-by-State dominates X if $\forall\omega \in \Omega\ X(\omega) \le Y(\Omega)$

定义有点复杂，其实就是每一个state的收益都占优。

mean-variance dominance

算期望收益和方差

期望收益大且方差小的更好。

Sharpe Ratio

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E[R] - r^f}{\sigma(R)}$$

Stochastic Dominance

First Order Stochastic Dominance

let F_A and F_B represent, respectively, the cumulative distribution functions of two random variables (investments payoff) defined in the interval [a,b]. We say that F_A first-order stochastically dominates (FSD) F_B if $\forall x \in [a, b]\ F_A(x) \leq F_B(x)$

在任何时期，B的累计分布函数都大于等于A，称 F_A FOSD F_B .

Second Order Stochastic Dominance

F_A SOSD F_B if $\forall x \in [a, b]$

$$\int_a^x [F_B(t) - F_A(t)]dt \geq 0$$

要每一点的累积分布函数的差的积分大于0.

也就是说，如果$F_A(t)$ 稍大了一点点但是后来一直远远小于$F_B(t)$ 那也不能说 A 比 B 强，只能说无法比较。

FOSD implies SOSD.

Mean-Preserving Spread

we say that the random variable x_A is a mean-preserving spread of the random variable x_B if $x_A = x_B + \epsilon$, where the random variable ϵ is independent of x_B, and has zero mean and positive variance.

Proposition

Let F_A and F_B be the CDFs of two random variables x_A and x_B defined on the same space with identical means. Then F_A SSD F_B iff x_B is a mean-preserving spread of x_A.

derive 要考!

Certainty Equivalent

it is the certain payoff which gives the same expected utility as the uncertain lottery p.

if $E[u(x)]$ is the expected utility of lottery p, $u^{-1}(E[u(x)])$ will be the certainty equivalent of p.

Jensen's Inequality

Let g be concave over $[a, b]$ and let x be a random variable such that $P[x \in [a, b]] = 1$. If the expectations $E[x]$ and $E[g(x)]$ exist, then $E(g(x)) \leq g(E[x])$. Forthermore, if $g(\cdot)$ is concave then then the inequality is strict.

Risk Aversion

1. Absolute Risk Aversion

$$R_A(Y) = -\frac{u''(Y)}{u'(Y)}$$

2. Relative Risk Aversion

$$R_R(Y) = -Y \cdot \frac{u''(Y)}{u'(Y)} = Y \cdot R_A$$

3. Risk Tolerance

$$R_T(Y) = \frac{1}{R_A(Y)}$$

Constant Absolute Risk Aversion

CARA utility function

$$U(x) = -e^{-\rho Y}$$

Constant Relative Risk Aversion

CRRA utility function

$$U(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{Y^{1-\tau}}{1-\tau} & if\ \tau \neq 1 \\ lnY & if\ \tau = 1 \end{cases}$$

Q: When utility function invariant when you transform wealth?

A: Risk Neutral. When $R_A = 0$.

Q: economic meaning of relative and absolute risk aversion

A: They measure the change in the investment due to the change in the wealth. Relative one measues the ratio whether absolute one measures the total amount.

Portfolio Allocation

$$\frac{a}{Y_0} = \frac{(1+r^f)(E[r]-r^f)}{(r_2-r^f)(r^f-r_1)} > 0$$

Savings

smooth consumption and collateral constrain.