第一章

1. 验证函数 $y=cx^3$(c 是常数) 是方程 $3y-xy'=0$ 的解。

证明：　$y'=3cx^2 \Longrightarrow 3cx^3-x3cx^2=0$ 。

2. 验证函数 $y=cx+\dfrac{1}{c}$(c 是常数) 和 $y=\pm2\sqrt{x}$ 都是方程 $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$ 解。

证明：　$y=cx+\dfrac{1}{c}$ ，　$y'=c \Longrightarrow xy'+\dfrac{1}{y'}=cx+\dfrac{1}{c}=y$ 。

$y=\pm2\sqrt{x}$ ，　$y'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow xy'+\dfrac{1}{y'}=\pm2\sqrt{x}=y$ 。

3. 验证参数变量方程 $x=t^3-t+2$ ，　$y=\dfrac{3}{4}t^4-\dfrac{1}{2}t^2+c$ (c 是常数，　t 是参变量) 所决定的函数 y 满足方程 $x=(\dfrac{dy}{dx})^2-\dfrac{dy}{dx}+2$ 。

证明：　$\dfrac{dx}{dt}=3t^2-1$ ，　$\dfrac{dy}{dt}=3t^3-t \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^3-t}{3t^2-1}=t$

$\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}^3-\dfrac{dy}{dx}+2=t^3-t+2=x$ 。

4. 验证函数 $y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$(k，c_1，c_2 是常数) 是方程 $y''+k^2y=0$ 的解。

证明：　$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx \Longrightarrow y'=-c_1k\sin kx+c_2k\cos kx \Longrightarrow y''=-c_1k^2\cos kx-c_2k^2\sin kx \Longrightarrow y''+k^2y=-c_1k^2\cos kx-c_2k^2\sin kx+c_1k^2\cos kx+c_2k^2\sin kx$ 。

5. 验证函数 $y=-6\cos2x+8\sin2x$ 是方程的 $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos2x$ 解，且满足初值条件 $y(0)=-6$ ，　$y'(0)=16$ 。

证明：　$y=-6\cos2x+8\sin2x \Longrightarrow y'=12\sin2x+16k\cos2x \Longrightarrow y''=24\cos2x-32\sin2x \Longrightarrow y''+y'+\dfrac{5}{2}y=24\cos2x-32\sin2x+12\sin2x+16\cos2x-15\cos2x+20\sin2x=25\cos2x$ ，且 $y(0)=-6$ ，　$y'(0)=16$ 。

求下列可分离变量方程的解 (6-10)：

6.$\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$ 。

解：　$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \Longrightarrow \arcsin x+c=\sqrt{1-y^2}$ ，及 $y=\pm1$ 。

7.$y'=(2y+1)\cot x$ ，　$y(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$ 。

解：　$\dfrac{dy}{2y+1}=\dfrac{\cos xdx}{\sin x} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\ln|2y+1|+c=\ln|\sin x| \Longrightarrow \sqrt{|2y+1|}=c\sin x \Longrightarrow 2y+1=c\sin^2 x$ ，　$y=\dfrac{c}{2}\sin^2 x-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow y(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{4}c-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ ，

$c=4 \Longrightarrow y=4\sin^2 x-\frac{1}{2}$

8.$y'=2\sqrt{y}\ln x$， $y(e)=1$ 。

解： $\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\ln x dx \Longrightarrow \sqrt{y}=x\ln x-x+c$，而 $\sqrt{y(e)}=1=e-e+c \Longrightarrow c=1 \Longrightarrow y=(x\ln x-x+1)^2$， $y\equiv 0$ 时不合理 $\Longrightarrow y=(x\ln x-x+1)^2$ 。

9.$2(x^2-1)yy'=(2x+3)(1+y^2)$ 。

解： $\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{(2x+3)dx}{2(x^2-1)} \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln 1+y^2=\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+c \Longrightarrow \sqrt{1+y^2}=c(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{4}}(x-1) \Longrightarrow 1+y^2=c(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{2}}(x-1)^2 \Longrightarrow y^2=c(x-1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1$ 。

10.$y'=(1-y^2)\tan x$， $y(0)=2$ 。

解： $\frac{dy}{1-y^2}=\frac{\sin x}{\cos x}dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln|\frac{1+y}{1-y}|=-\ln|\cos x|+c \Longrightarrow \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=c\frac{1}{\cos x} \Longrightarrow \frac{1-y}{1+y}=c\cos^2 x \Longrightarrow y=\frac{1-c\cos^2 x}{1+c\cos^2 x}$， $y(0)=\frac{1-c}{1+c}=2 \Longrightarrow c=-\frac{1}{3} \Longrightarrow y=\frac{3+\cos^2}{3-\cos^2 x}$ 。

求下列齐次方程的解 (11-17)：

11.$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 。

解：令 $y=ux$， $\frac{xdy+udx}{dx}=\frac{2x^2u}{x^2+u^2x^2}=\frac{2u}{1+u^2} \Longrightarrow \frac{xdu}{dx}+u=\frac{2u}{1+u^2} \Longrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u-u^3}{1+u^2} \Longrightarrow \frac{1+u^2}{u-u^3}du=\frac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|u|-\ln|1-u|-\ln|1+n|=\ln|x|+c \Longrightarrow \frac{u}{(1-u)(1+u)}=cx \Longrightarrow \frac{u}{1-u^2}=cx \Longrightarrow \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=cx \Longrightarrow \frac{xy}{x^2-y^2}=cx \Longrightarrow \frac{y}{x^2-y^2}=c$，或 $y=\pm x$ 。

12.$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$ 。

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x})$，令 $y=ux \Longrightarrow x\frac{du}{dx}+u=u(1+\ln u) \Longrightarrow x\frac{dy}{dx}=u\ln u \Longrightarrow \frac{1}{u\ln u}du=\frac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|\ln|u||=\ln|x|+c \Longrightarrow \ln|u|=cx$， $u=e^{cx}$， $x>0 \Longrightarrow y=xe^{cx}$ 。

13.$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 。

解： $\frac{y^2}{x^2}+\frac{ydy}{xdx}$，令 $xu=y \Longrightarrow u^2+x\frac{du}{cx}+u=u(x\frac{du}{dx}+u) \Longrightarrow u=$

$(u-1)x\dfrac{du}{dx} \Longrightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{u-1}{u}du \Longrightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + c \Longrightarrow \dfrac{e^u}{u} = cx \Longrightarrow e^{\frac{y}{x}} = cy \Longrightarrow y = ce^{\frac{y}{x}}$ 。

14.$(y+x)dy = (y-x)dx$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x} = \dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$ ，令 $y = ux \Longrightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{u-1}{u+1} \Longrightarrow x\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1+u^2}{1+u} \Longrightarrow \dfrac{1+u}{1+u^2}du = -\dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \arctan u + \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c \Longrightarrow e^{\arctan u}\sqrt{1+u^2} = \dfrac{c}{|x|} \Longrightarrow e^{\arctan u}\sqrt{x^2+y^2} = c \Longrightarrow c\sqrt{x^2+y^2} = e^{-\arctan\frac{y}{x}}$ 。

15.$(x - y\cos\dfrac{y}{x})dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$ 。

解：$(1-\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x})dx + \cos\dfrac{y}{x}dy = 0$，令 $y = ux \Longrightarrow (1-u\cos u) + \cos u(x\dfrac{du}{dx}+u) = 0 \Longrightarrow 1 + x\cos u\dfrac{du}{dx} = 0 \Longrightarrow \cos u du = -\dfrac{dx}{x}$ ， $\sin u = -\ln|x| + c \Longrightarrow e^{\sin u} = \dfrac{c}{x} \Longrightarrow xe^{\sin\frac{y}{x}} = c \Longrightarrow \sin\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{c}{x}$ 。

16.$\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ ， $y(1) = 4$ 。

解：令 $y = ux$ ， $u \geq 0 \Longrightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = 2\sqrt{u} + u \Longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{x}dx \Longrightarrow \sqrt{u} = \ln|x| + c \Longrightarrow e^{\sqrt{u}} = cx \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = cx$ ， $y(1) = 4 \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{4}{1}}} = c$ ， $c = e^2 \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = e^2x \Longrightarrow \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 2 + \ln x$ 。

17.$xy' - y = \sqrt{x^2-y^2}$ ， $y(1) = \dfrac{1}{2}$ 。

解：令 $y = ux$ ， $x(x\dfrac{du}{dx}+u) - ux = \sqrt{x^2 - x^2u^2} \Longrightarrow x^2\dfrac{du}{dx} = |x|\sqrt{1-u^2} \Longrightarrow$ 若 $x > 0$ ， $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \arcsin u = \ln x + c$；若 $x < 0$ ， $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \arcsin u = -\ln -x + c$ 。 $y(1) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} = u \times 1 = u \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow \arcsin\dfrac{1}{2} = \ln 1 + c$ ， $c = \dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow \arcsin\dfrac{y}{x} = \ln x + \dfrac{\pi}{6}$ 。

求下列一阶线性方程或伯努利方程的解 (18-24)：

18.$\dfrac{dy}{dx} = x^2 - \dfrac{y}{x}$ 。

解： $y' + \dfrac{1}{x}y = x^2$ ， $p(x) = \dfrac{1}{x}$ ， $f(x) = x^2$ ， $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{x}(\displaystyle\int x^3dx + c) = \dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{4}x^4 + c) = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{c}{x}$ 。

19.$xy' - y = x^3e^{-x}$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=x^2e^{-x}$ ， $p(x)=-\frac{1}{x}$ ， $f(x)=x^2e^{-x}$ ， $e^{-\int p(x)dx}=x$ ，
$\Longrightarrow y=x(\int x^2e^{-x}\dfrac{1}{x}dx+c)=x(\int xe^{-x}dx+c)=x(-xe^{-x}-e^{-x}+c)$ 。

20.$\dfrac{dy}{dx}+2xy+x=e^{-x^2}$ ， $y(0)=2$ 。
解： $\dfrac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}-x$ ，$p(x)=2x$ ，$f(x)=e^{-x^2}-x$ ，$e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}\Longrightarrow$
$y=e^{-x^2}(\int(e^{-x^2}-x)e^{x^2}dx+c)=e^{-x^2}(\int(1-xe^{x^2})dx+c)=e^{-x^2}(x-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+c)=(c+x)e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$ ， $y(0)=c-\dfrac{1}{2}=2\Longrightarrow c=\dfrac{5}{2}\Longrightarrow y=(\dfrac{5}{2}+x)e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$ 。

21.$xy'=x\cos x-2\sin x-2y$ ， $y(\pi)=0$ 。
解： $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=\cos x-\dfrac{2}{x}\sin x$ ， $p(x)=\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=\cos x-\dfrac{2}{x}\sin x\Longrightarrow$
$e^{-\int p(x)dx}=(\dfrac{1}{x})^2$ ，
$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{x^2}(\int(\cos x-\frac{2}{x}\sin x)x^2dx+c)\\ &=\frac{1}{x^2}(\int(x^2\cos x-2x\sin x)dx+c)\\ &=\frac{1}{x^2}(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c)\\ &=\frac{1}{x^2}(x^2\sin x+4x\cos x-4\sin x+c) \text{ 。}\end{aligned}$$
$y(\pi)=\dfrac{1}{\pi^2}(4\pi+c)=0\Longrightarrow c=-4\pi\Longrightarrow y=\dfrac{1}{x^2}(x^2-4)\sin x+\dfrac{4}{x}\cos x-\dfrac{4\pi}{x^2}=(1-\dfrac{4}{x^2})\sin x+\dfrac{4}{x}\cos x-\dfrac{4\pi}{x^2}$ 。

22.$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy}{2(x^2-1)}-\dfrac{x}{2y}=0$ ， $y(0)=1$ 。
解：两边乘以 y ，$y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy^2}{2(x^2-1)}-\dfrac{x}{2}=0$ ，令 $z=y^2\Longrightarrow\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{xz}{2(x^2-1)}=\dfrac{x}{2}\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{xz}{x^2-1}=x$ 。
$p(x)=-\dfrac{x}{x^2-1}$ ， $f(x)=x\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}=\sqrt{|x^2-1|}$ ，这里初值是 $x=0$ 取 $x^2<1$ 。
$z=\sqrt{1-x^2}(\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+c)=\sqrt{1-x^2}(-\sqrt{1-x^2}+c)$ ， $y^2=(x^2-1+c\sqrt{1-x^2})$ 。
$y(0)=1>0\Longrightarrow y=\sqrt{x^2-1+c\sqrt{1-x^2}}$ 。
$y(0)=\sqrt{-1+c}=1\Longrightarrow -1+c=1\Longrightarrow c=2\Longrightarrow y=\sqrt{x^2-1+2\sqrt{1-x^2}}$ 。

23.$xy'-4y=x^2\sqrt{y}$ 。
解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ ，两边同除以 $\sqrt{y}$ ，令 $z=\sqrt{y}\Longrightarrow 2\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{4}{x}z=x\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{x}{2}$ 。

$p(x)=-\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 。

$e^{-\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2\Longrightarrow z=x^2(\int\dfrac{x}{2}\dfrac{1}{x^2}dx+c)=x^2(\dfrac{1}{2}\ln|x|+c)\Longrightarrow$ $\sqrt{y}=\dfrac{x^2}{2}\ln|x|+cx^2$ 或 $y=0$ 。

24.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x}{2xy}$ 。

解： $\dfrac{2ydy}{dx}=\dfrac{y^2-x}{x}$ ，令 $z=y^2\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{x}-1\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-1$ 。

$p(x)=-\dfrac{1}{x}$ ， $f(x)=-1$ ， $e^{-\int p(x)dx}=x\Longrightarrow z=x(\int -1\times\dfrac{1}{x}dx+c)=$ $x(-\ln|x|+c)\Longrightarrow y^2=cx-x\ln|x|$ 。

验证下列方程为全微分方程或找出积分因子，然后求其解 (25-36)：

25.$(5x^4ydx+x^5dy)+x^3dx=0$ 。

解： $(5x^4y+x^3)dx+x^5dy=0\Longrightarrow\dfrac{\partial(5x^4y+x^3)}{\partial y}=5x^4$ ， $\dfrac{\partial x^5}{\partial x}=5x^4\Longrightarrow$ 是全微分方程，

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(5x^4y_0+x^3)dx+\int_{y_0}^{y}x^5dy\\&=x^5y_0-x_0^5y_0+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x_0^4+x^5y-x^5y_0\\&=x^5y+\frac{1}{4}x^4-x_0^5-\frac{1}{4}x_0^4=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x^5y+\dfrac{1}{4}x^4=c$ 。

26.$2(ydx+xdy)+xdx-5ydy=0$ ， $y(0)=1$ 。

解： $(2y+x)dx+(2x-5y)dy=0\Longrightarrow\dfrac{\partial(2y+x)}{\partial y}=2$ ， $\dfrac{\partial(2x-5y)}{\partial x}=2\Longrightarrow$ 全微分方程，

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(2y_0+x)dx+\int_{y_0}^{y}(2x-5y)dy\\&=2y_0x-2x_0y_0+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x_0^2+2xy-2xy_0-\frac{5}{2}y^2+\frac{5}{2}y_0^2\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2+2xy-2x_0y_0-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{5}{2}y_0^2=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2+2xy=c$ ， $y(0)=1\Longrightarrow c=-\dfrac{5}{2}\Longrightarrow\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2+2xy+\dfrac{5}{2}=0\Longrightarrow x^2-5y^2+4xy+5=0$ 。

27.$\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{ydx-xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 。

解： $(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y}{x^2+y^2})dx+(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\dfrac{x}{x^2+y^2})dy$ ，

$$\frac{\partial(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y}{x^2+y^2})}{\partial y}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial x}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$\Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y_0^2}}+\frac{y_0}{x^2+y_0^2})dx+\int_{y_0}^{y}(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2})dy\\&=\sqrt{1+x^2+y_0^2}-\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}+\arctan\frac{x}{y_0}-\arctan\frac{x_0}{y_0}\\&\quad+\sqrt{1+x^2+y^2}-\sqrt{1+x^2+y_0^2}-\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{y_0}{x}\\&=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sqrt{1+x^2+y_0^2}=\arctan\frac{y}{x}+c$ 。

28.$(ye^x-e^{-y})dx+(xe^{-y}+e^x)dy=0$ 。

解: $\dfrac{\partial(ye^x-e^{-y})}{\partial y}=e^x+e^{-y}$, $\dfrac{\partial(xe^{-y}+e^x)}{\partial x}=e^{-y}+e^x\Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(y_0e^x-e^{-y_0})dx\int_{y_0}^{y}(xe^{-y}+e^x)dy\\&=y_0e^x-y_0e^{x_0}-xe^{y_0}+x_0e^{y_0}-xe^{-y}+xe^{-y_0}+ye^x-y_0e^x=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow ye^x-xe^{-y}=c$ 。

29.$(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2})dx+(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})dy=0$ 。

解: $\dfrac{\partial(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2})}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x-y)^3}\Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(\frac{1}{x}-\frac{y_0^2}{(x-y_0)^2})dx+\int_{y_0}^{y}(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})dy\\&=\ln|x|-\ln|x_0|+y_0^2\frac{1}{x-y_0}-y_0^2\frac{1}{(x_0-y_0)}+\frac{x^2}{x-y}-\frac{x^2}{x-y_0}\\&\quad-\ln|y|+\ln|y_0|\end{aligned}$$

而 $\dfrac{y_0^2}{x-y_0}-\dfrac{x^2}{x-y_0}=-\dfrac{(x-y_0)(x+y_0)}{x-y_0}=-x-y_0$

$\Longrightarrow \ln|x|-\ln|y|+\dfrac{x^2}{x-y}-x=\ln|x|-\ln|y|+\dfrac{xy}{x-y}=c$ 。

30.$(4ydx+xdy)-x^2dx=0$ 。

解: $(4y-x^2)dx+xdy=0$, $\dfrac{\partial(4y-x^2)}{\partial y}=4$, $\dfrac{\partial x}{\partial x}=1\Longrightarrow$ 不是全微分方程。

$\varphi(x)=\dfrac{4-1}{x}=\dfrac{3}{x}$, $\mu=e^{\int\frac{3}{x}dx}=x^3$

$\Longrightarrow (4x^3y-x^5)dx+x^4dy=0$

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(4x^3y_0-x^5)dx+\int_{y_0}^{y}x^4dy$$
$$=x^4y_0-x_0^4y_0-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{6}x_0^6+x^4y-x^4y_0$$
$$\Longrightarrow x^4y-\frac{1}{6}x^6=c \text{ 。}$$

31.$(2xydx-3x^2dy)+y^2dy=0$ 。

解： $2xydx+(y^2-3x^2)dy$ ， $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$ ， $\dfrac{\partial(y^2-3x^2)}{\partial x}=-6x$

$$\Longrightarrow \psi(y)=\frac{2x+6x}{-2xy}=-\frac{4}{y}\text{ ，}\quad \mu=e^{\int-\frac{4}{y}dy}=\frac{1}{y^4}$$
$$\Longrightarrow 2xy^{-3}dx+(y^{-2}-3x^2y^{-4})dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}2xy_0^{-3}dx+\int_{y_0}^{y}(y^{-2}-3x^2y^{-4})dy$$
$$=x^2y_0^{-3}-x_0^2y_0^{-3}-y^{-1}+y_0^{-1}+x^2y^{-3}-x^2y_0^{-3}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c \text{ 。}$$

32.$(ydx-xdy)+x^4dx=0$ 。

解： $(y+x^4)dx-xdy=0\Longrightarrow\dfrac{\partial(y+x^4)}{\partial y}=1$ ， $\dfrac{\partial-x}{\partial x}=-1$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{1+1}{-x}=-\frac{2}{x}\text{ ，}\quad \mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}\text{ 。}$$
$$\Longrightarrow (yx^{-2}+x^2)dx-x^{-1}dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(y_0x^{-2}+x^2)dx+\int_{y_0}^{y}-x^{-1}dy$$
$$=-\frac{y_0}{x}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x_0^3-\frac{y}{x}+\frac{y_0}{x}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{y}{x}=c \text{ 。}$$

33.$(2xy^2-y)dx+(2x-x^2y)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(2xy^2-y)}{\partial y}=4xy-1$ ， $\dfrac{\partial(2x-x^2y)}{\partial x}=2-2xy$

$$\Longrightarrow \psi(y)=\frac{4xy-1-2+2xy}{-(2xy^2-y)}=\frac{6xy-3}{-y(2xy-1)}=\frac{3(2xy-1)}{-y(2xy-1)}=-\frac{3}{y}\text{ ，}$$
$$\mu=e^{-\int\frac{3}{y}dy}=\frac{1}{y^3}$$
$$\Longrightarrow (2xy^{-1}-y^{-2})dx+(2xy^{-3}-x^2y^{-2})dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(2xy_0^{-1}-y_0^{-2})dx+\int_{y_0}^{y}(2xy^{-3}-x^2y^{-2})dy$$
$$=x^2y_0^{-1}-x_0^2y_0^{-1}-xy_0^{-2}+x_0y_0^{-2}-xy_0^{-2}+xy_0^{-2}+x^2y^{-1}-x^2y_0^{-1}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y}-\frac{x}{y^2}=c \text{ 。}$$

34.$2dx+(2x-3y-3)dy=0$ ， $y(2)=0$ 。

解： $\dfrac{\partial 2}{\partial y}=0$ ， $\dfrac{\partial(2x-3y-3)}{\partial x}=2$

$\Longrightarrow \psi(y)=\dfrac{0-2}{-2}$ ， $\mu=e^{\int 1dy}=e^y$

$\Longrightarrow 2e^y dx+(2xe^y-3ye^y-3e^y)dy=0$

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x} 2e^{y_0}dx+\int_{y_0}^{y}(2xe^y-3ye^y-3e^y)dy$$
$$=2e^{y_0}x-2e^{y_0}x_0+2e^yx-2e^{y_0}x-3e^yy+3e^{y_0}y_0+3e^y-3e^{y_0}-3e^y+3e^{y_0}$$

$\Longrightarrow 2xe^y-3ye^y=c$ 。

$y(2)=0\Longrightarrow 4-0=c\Longrightarrow c=4\Longrightarrow 2xe^y-3ye^y=4$ 。

35.$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(3x^2+2xy-y^2)}{\partial y}=2x-2y$ ， $\dfrac{\partial(x^2-2xy)}{\partial x}=2x-2y\Longrightarrow$ 是全微分方程

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(3x^2+2xy_0-y_0^2)dx+\int_{y_0}^{y}(x^2-2xy)dy$$
$$=x^3-x_0^3+x^2y_0-x_0^2y_0-xy_0^2+x_0y_0^2+x^2y-x^2y_0-xy^2+xy_0^2$$

$\Longrightarrow x^3+x^2y-xy^2=c$ 。

36.$(3xy^2+2y)dx+(2x^2y+x)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(3xy^2+2y)}{\partial y}=6xy+2$ ， $\dfrac{\partial(2x^2y+x)}{\partial x}=4xy+1$

$\Longrightarrow \varphi(x)=\dfrac{6xy+2-4xy-1}{2x^2y+x}=\dfrac{2xy+1}{x(2xy+1)}=\dfrac{1}{x}$ ， $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(3x^2y_0^2+2xy_0)dx+\int_{y_0}^{y}(2x^3y+x^2)dy$$
$$=x^3y_0^2-x_0^3y_0^2+x^2y_0-x_0^2y_0+x^3y^2-x^3y_0^2+x^2y-x^2y_0$$

$\Longrightarrow x^3y^2+x^2y=c$ 。

判别下列各方程的类型，并选择一种方法求解 (37-49)：

37.$xy(y-xy')=x+yy'$ ， $y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

解： $xy^2-x^2y\dfrac{dy}{dx}=x+y\dfrac{dy}{dx}\Longrightarrow y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy^2=-x\Longrightarrow y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y^2=\dfrac{-x}{1+x^2}\Longrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y^2=-\dfrac{x}{1+x^2}$ 。

令 $z=y^2$ ， $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2x}{1+x^2}z=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $p(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $f(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=1+x^2$

$\Longrightarrow z=(1+x^2)(-\displaystyle\int\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}+c)=(1+x^2)(\dfrac{1}{1+x^2}+c)=1+c(1+x^2)$ 。

$y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0\Longrightarrow y=\sqrt{1+c(1+x^2)}\Longrightarrow y(0)=\sqrt{1+c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow 1+c=\dfrac{1}{2}$ ， $c=-\dfrac{1}{2}\Longrightarrow y=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}(1+x^2)}=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2}$ 。

38.$\tan t\dfrac{dx}{dt}-x=5$ 。

解： $\tan t\dfrac{dx}{dt}=5+x \Longrightarrow \dfrac{dx}{5+x}=\dfrac{\cos t}{\sin t}dt \Longrightarrow \ln|5+x|=\ln|\sin t|+c \Longrightarrow$ $5+x=c\sin t \Longrightarrow x=c\sin t-5$ 。

39.$d\theta+2\theta r dr=r^3 dr$ 。

解： $\dfrac{d\theta}{dr}+2r\theta=r^3$ ， $p(r)=2r$ ， $f(r)=r^3$ 。

$e^{-\int p(r)dr=e^{-r^2}} \Longrightarrow \theta=e^{-r^2}(\int r^3e^{r^2}dr+c)=e^{-r^2}(\dfrac{1}{2}r^2e^{r^2}-\dfrac{1}{2}e^{r^2}+c)=$ $\dfrac{1}{2}(r^2-1)+ce^{-r^2}$ 。

40.$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial e^y}{\partial y}=e^y$ ， $\dfrac{\partial(xe^y-2y)}{\partial x}=e^y \Longrightarrow$ 是全微分方程

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(e^{y_0})dx+\int_{y_0}^{y}(xe^y-2y)dy$$
$$=e^{y_0}x-e^{y_0}x_0+e^yx-e^{y_0}x-y^2+y_0^2$$

$\Longrightarrow xe^y-y^2=c$ ， $xe^y=c+y^2 \Longrightarrow x=e^{-y}(c+y^2)$ 。

41.$yy'+xy^2=x$ 。

解： $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}+xy^2=x$ ， 令 $z=y^2$

$\Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}+2xz=2x \Longrightarrow p(x)=2x$ ， $f(x)=2x \Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}$ 。

$z=e^{-x^2}(\int 2xe^{x^2}dx+c)=e^{-x^2}(e^{x^2}+c)=1+ce^{-x^2} \Longrightarrow y^2=1+ce^{-x^2}$ 。

42.$xyy'=x^2+y^2$ 。

解： $y\dfrac{dy}{dx}=x+\dfrac{y^2}{x}$ ， $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}-\dfrac{1}{x}y^2=x$ ， 令 $z=y^2 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=2x \Longrightarrow$ $p(x)=-\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=2x \Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=x^2 \Longrightarrow z=x^2(\int 2xx^{-2}dx+c)=$ $x^2(\int \dfrac{2}{x}dx+c)=x^2(2\ln|x|+c) \Longrightarrow y^2=2x^2\ln(cx)$ 。

43.$ydx-xdy=x^2ydy$ 。

解： $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=x^2 \Longrightarrow x^{-2}\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{x}=1 \Longrightarrow -\dfrac{d\frac{1}{x}}{dy}-\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{x}=1$ 。

令 $z=\dfrac{1}{x}$

$\Longrightarrow \dfrac{dz}{dy}+\dfrac{1}{y}z=-1 \Longrightarrow p(y)=\dfrac{1}{y}$ ， $f(y)=-1$ ， $e^{-\int p(y)dy}=\dfrac{1}{y} \Longrightarrow z=$ $\dfrac{1}{y}(\int -1ydy+c)=\dfrac{1}{y}(-\dfrac{1}{2}y^2+c)=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{c}{y} \Longrightarrow \dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{c}{y} \Longrightarrow \dfrac{y}{x}=$ $-\dfrac{1}{2}y^2+c \Longrightarrow \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}y^2=c$ 。

44.$(y^2+x)dx-2xydy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(y^2+x)}{\partial y}=2y$ ， $\dfrac{\partial(-2xy)}{\partial x}=-2y\Longrightarrow\varphi(x)=\dfrac{2y+2y}{-2xy}=-\dfrac{2}{x}$ ，
$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}\Longrightarrow(x^{-2}y^2+x^{-1})dx-2x^{-1}ydy=0$ 。

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(x^{-2}y_0^2+x^{-1})dx-2\int_{y_0}^{y}x^{-1}ydy\\&=-x^{-1}y_0^2+x_0^{-1}y_0^2+\ln|x|-\ln|x_0|-x^{-1}y^2+x^{-1}y_0^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ln|x|-x^{-1}y^2=c\Longrightarrow y^2=x(-\ln|x|+c)$ 。

45.$(x-y)dx+xdy=0$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=-1$ ， $\Longrightarrow p(x)=-\dfrac{1}{x}$ ， $f(y)=-1$ ， $\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=x\Longrightarrow$
$y=x(\int-\dfrac{1}{x}dx+c)=x(-\ln|x|+c)$ 。

46.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^2}$ 。

解： $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}+y^2$ ， $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^2$ ， $p(y)=-\dfrac{1}{y}$ ， $f(y)=y^2$ ，
$e^{-\int p(y)dy}=y\Longrightarrow x=y(\int y^2\dfrac{1}{y}dy+c)=y(\dfrac{1}{2}y^2+c)=\dfrac{1}{2}y^3+cy$ 。

47.$(xy+1)ydx-xdy=0$ 。

解： $y^2+\dfrac{y}{x}=\dfrac{dy}{dx}\Longrightarrow\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y}=1$ ，令 $z=\dfrac{1}{y}\Longrightarrow-\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=1\Longrightarrow$
$\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{1}{x}z=-1$ ， $p(x)=\dfrac{1}{x}$ ， $f(x)=-1\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=\dfrac{1}{x}\Longrightarrow z=$
$\dfrac{1}{x}(\int-xdx+c)=\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{2}x^2+c)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{c}{x}=\dfrac{c-x^2}{2x}=\dfrac{1}{y}\Longrightarrow y=\dfrac{2x}{c-x^2}$ 或
$y=0$ 。

48.$(x^2+y^2)dy+2xydx=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}=2x$ ， $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x\Longrightarrow$ 是全微分方程。

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{y_0}^{y}(x_0^2+y^2)dx+\int_{x_0}^{x}2xydy\\&=x_0^2y-x_0^2y_0+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}y_0^3+x^2y-x_0^2y\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\dfrac{1}{3}y^3+x^2y=c$ 及 $y=0$ (已包括于 $\dfrac{1}{3}y^3+x^2y=c$)

49.$(y-x^2)y'+4xy=0$ 。

解： $4xydx+(y-x^2)dy=0$ ， $\dfrac{\partial(4xy)}{\partial y}=4x$ ， $\dfrac{\partial(y-x^2)}{\partial x}=-2x\Longrightarrow\psi(y)=$
$\dfrac{4x+2x}{-4xy}=-\dfrac{3}{2y}$ ， $\mu(y)=e^{-\int\frac{3}{2y}dy}=(\dfrac{1}{y})^{\frac{3}{2}}\Longrightarrow4xy^{-\frac{1}{2}}dx+(y^{-\frac{1}{2}}-x^2y^{-\frac{3}{2}})dy=0$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}4xy_0^{-\frac{1}{2}}dx+\int_{y_0}^{y}(y^{-\frac{1}{2}}-x^2y^{-\frac{3}{2}})dy$$

$$= 2x^2y_0^{-\frac{1}{2}} - 2x_0^2y_0^{-\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}} + 2x^2y^{-\frac{1}{2}} - 2x^2y_0^{-\frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow 2y^{\frac{1}{2}} + 2x^2y^{-\frac{1}{2}} = c \Longrightarrow y^{\frac{1}{2}} + x^2y^{-\frac{1}{2}} = c \Longrightarrow x^2 = -y + c\sqrt{y}$ 或 $y = 0$ 。

50. 设 f(x) 是连续函数，并且满足 $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2$ 。求 f(x) 。

解： $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2 \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) = 2x \Longrightarrow p(x) = 2$ ，$e^{-2\int dx} = e^{-2x}$ 。

$f(x) = e^{-2x}(\int 2xe^{2x}dx + c) = e^{-2x}(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c) = (x - \frac{1}{2}) + ce^{-2x}$

$f(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = -\frac{1}{2} + c = 0$ ， $c = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ 。

51. 设 f(x) 有一阶连续的导数，并且满足

$$2\int_0^x (x + 1 - t)f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x) ,$$

求 f(x) 。

解： $2\int_0^x (x + 1 - t)f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x) \Longrightarrow 0 = \int_0^0 (0 + 1 - t)f'(t)dt = 0 - 1 + f(0) \Longrightarrow f(0) = 1$ 。

$2f'(x) + 2\int_0^x f'(t)dt = 2x + f'(x) \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) - 2f(0) = 2x \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) = 2x + 2$ ， $p(x) = 2$ ， $e^{-\int p(x)dx} = e^{-2x}$ 。

$f(x) = e^{-2x}(\int (2x+2)e^{2x}dx+c) = e^{-2x}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+e^{2x}+c) = x+\frac{1}{2}+ce^{-2x}$ 。

$f(0) = \frac{1}{2} + c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ 。

52. 设 $\varphi(x)$ 有一阶连续的导数， $\varphi(0) = 1$ ，并设 $(y^2 + xy)dx + (\varphi(x) + 2xy)dy = 0$ 是全微分方程。求 $\varphi(x)$ 及此全微分方程的通积分。

解： $(y^2 + xy)dx + (\varphi(x) + 2xy)dy = 0$ 是全微分方程。

$\Longrightarrow \frac{\partial(y^2 + xy)}{\partial y} = 2y + x$ ， $\frac{\partial(\varphi(x) + 2xy)}{\partial x} = \varphi'(x) + 2y \Longrightarrow \varphi'(x) = x$ ，

$d(\varphi(x)) = xdx \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ 。

又 $\varphi(0) = c = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Longrightarrow (y^2 + xy)dx + (\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 1)dy = 0$

$$\Longrightarrow u(x, y) = \int_{x_0}^x (y_0^2 + xy_0)dx + \int_{y_0}^y (\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 1)dy$$

$$= y_0^2x - y_0^2x_0 + \frac{1}{2}x^2y_0 - \frac{1}{2}x_0^2y_0 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2y_0 + xy^2 - xy_0^2 + y + y_0$$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}x^2y + xy^2 + y = c$ 。

用适当变换解下列方程 (53-55)：

53.$(x + y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$ 。

解：令 $z=x+y \Longrightarrow z^2\dfrac{dz-dx}{dx}=a^2 \Longrightarrow z^2\dfrac{dz}{dx}=a^2+z^2 \Longrightarrow \dfrac{z^2}{a^2+z^2}dz=dx \Longrightarrow (1-\dfrac{a^2}{a^2+z^2})dz=dx \Longrightarrow z-a\arctan\dfrac{z}{a}=x+c \Longrightarrow x+y-a\arctan\dfrac{x+y}{a}=x+c \Longrightarrow y=a\arctan\dfrac{x+y}{a}+c$ 。

54.$\dfrac{dy}{dx}=y^2-x^2+1$ 。

解：令 $z=y-x \Longrightarrow \dfrac{dz+dx}{dx}=z(z+2x)+1 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}=z^2+2xz \Longrightarrow \dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{2x}{z}$ ，令 $u=\dfrac{1}{z} \Longrightarrow -\dfrac{du}{dx}=1+2xu \Longrightarrow \dfrac{du}{dx}+2xu=-1 \Longrightarrow p(x)=2x$ ，

$e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}$

$\Longrightarrow u=e^{-x^2}(\int -1e^{x^2}dx+c)$

$=e^{-x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)=\dfrac{1}{z}$

$\Longrightarrow z=e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y-x=e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y=x+e^{x^2}(c-\int e^{x^2}dx)^{-1}$ 。

55.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\dfrac{y^2}{x}$ 。

解：$y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{y^2}{x} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}=\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{y^2}{x}$, 令 $z=\dfrac{y^2}{x} \Longrightarrow \dfrac{d(xz)}{dx}=z+\tan z \Longrightarrow \dfrac{xdz}{dx}+z=z+\tan z \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx}=\tan z \Longrightarrow \dfrac{\cos z}{\sin z}dz=\dfrac{1}{x}dz \Longrightarrow \ln|\sin z|=\ln|x|+c \Longrightarrow \sin z=cx \Longrightarrow \sin\dfrac{y^2}{x}=cx \Longrightarrow y^2=x\arcsin cx$ 。

56. 求 $y=y'^2$ 的奇解。

解： $y'=p^2 \Longrightarrow F(x,y,p)=p^2-y=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2p \Longrightarrow p=0 \Longrightarrow y=0$ 。

代入 $y=0$ 是解 $\Longrightarrow$ 是奇解。

57. 求 $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$ 的奇解。

解： $y'=p \Longrightarrow F(x,y,p)=y^2p^2-2xyp+2y^2-x^2=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2y^2p-2xy=0 \Longrightarrow (yp-x)y=0$ 。 $y=0$ 代入显然不是上述方程的解。

$p=\dfrac{x}{y}$ 代入 $F(x,y,p)=0 \Longrightarrow x^2-2x^2+2y^2-x^2=0$ ， $y=\pm x$ 。

$p=\pm 1$ 代入是方程的解 $\Longrightarrow y=\pm x$ 是奇解。

58. 求 $[(y')^2+1](x-y)^2=(x+yy')^2$ 的奇解。

解： $F=(p^2+1)(x-y)^2-(x+yp)^2=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2p(x-y)^2-2(x+yp)y=0 \Longrightarrow p=\dfrac{y}{x-2y} \Longrightarrow y(x-y)^2(x-2y)=0 \Longrightarrow$ 经检验 $y=0$ 为奇解。

59. 求曲线族 $y=cx-(c^2+1)x^2$ 的包络，其中 c 是参数。

解： $\frac{\partial\Phi}{\partial c}=x-2cx^2 \Longrightarrow c=\frac{1}{2x} \Longrightarrow y=\frac{1}{4}-x^2(x\neq 0)$ 。

60. 求曲线族 $\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=a$ 的包络，其中是 a 常数， θ 是参数。

解： $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-\frac{x\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{y\sin\theta}{\cos^2\theta}=0 \Longrightarrow \frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta} \Longrightarrow \frac{y\sin^2\theta}{\cos^3\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=a \Longrightarrow \frac{y}{\cos^3\theta}=a \Longrightarrow \frac{1}{\cos\theta}=(\frac{a}{y})^{\frac{1}{3}}$ ， $\frac{1}{\sin\theta}=(\frac{a}{x})^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 。

61. 曲线族 $(y-a)^2-x^3=0$ 有无包络？其中 a 是参数。

解： $\frac{\partial\Phi}{\partial a}=2(a-y)=0 \Longrightarrow y=a \Longrightarrow$c- 判别曲线 $x=0$ 不是包络。

62. 求圆族 $(x-c)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)=0$ 的包络，其中 a， b 是常数，c 是参数。

解： $\frac{\partial\Phi}{\partial c}=2(c-x)+2c\frac{b^2}{a^2}=0 \Longrightarrow c=\frac{xa^2}{a^2+b^2} \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 。

求下列方程的解 (63-73)：

63.$y'=\ln x$ 。

解： $y''=\ln x \Longrightarrow y'=x\ln x-x+c_1 \Longrightarrow y''=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+c_1x+c_2$ 。

64.$xy''+y'=4x$ 。

解： $y'=p \Longrightarrow p'x+p=4x \Longrightarrow p=2x+\frac{c}{x} \Longrightarrow y=x^2+c_1\ln|x|+c_2$ 。

65.$2yy''=(y')^2$ 。

解：$y'=p \Longrightarrow 2yp\frac{dp}{dy}=p^2 \Longrightarrow p=0$ 或 $p=cy^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y=c$ 或 $y=(c_1x+c_2)^2$ 。

66.$yy''-(y')^2=y^4$ ， $y(0)=1$ ， $y'(0)=0$ 。

解： $y'=p \Longrightarrow yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^4 \Longrightarrow \frac{dp^2}{dy}-\frac{2}{y}p^2=2y^3 \Longrightarrow p^2=y^2(c_1+y^2) \Longrightarrow c_1=-1 \Longrightarrow \frac{d(\frac{1}{y})}{\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}}=-dx \Longrightarrow \frac{1}{y}=\sin(-x+c_2) \Longrightarrow c_2=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y=\sec x$ 。

67.$y''=e^y$ 。

解：令 $z=e^{\frac{1}{2}y} \Longrightarrow y=2\ln z \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2}{z}\frac{dz}{dx}$ ， $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{z}\frac{dz^2}{dx^2}-\frac{2}{z^2}(\frac{dz}{dx})^2 \Longrightarrow \frac{2}{z}z''-\frac{2}{z}(z')^2=z^2$ 。

令 $p=z' \Longrightarrow \dfrac{dp^2}{dz}-\dfrac{2}{z}p^2=z^3 \Longrightarrow p^2=z^2(\dfrac{1}{2}z^2+c_1) \Longrightarrow \dfrac{2c_1dz}{z\sqrt{z^2+c_1^2}}=\sqrt{2}c_1dx \Longrightarrow \sqrt{2}c_1(x+c_2)=\ln\dfrac{\sqrt{c_1^2+e^y}-c_1}{\sqrt{c_1^2+e^y}+c_1}$ 。

68.$yy''+(y')^2=y'$ 。

解： $y'=p \Longrightarrow yp\dfrac{dp}{dy}+p^2=p \Longrightarrow 1-p=cy \Longrightarrow y=c_1+c_2e^{-\frac{x}{c_1}}$ 。

69.$y^3y''+1=0$ 。

解： $p=y' \Longrightarrow y^3p\dfrac{dp}{dy}+1=0 \Longrightarrow \dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2y^2}+c \Longrightarrow 1+c_1y^2=(c_1x+c_2)^2$ 。

70.$2y''=3y^2$ ， $y(-2)=1$ ， $y'(-2)=1$ 。

解： $p=y' \Longrightarrow 2p\dfrac{dp}{dy}=3y^2 \Longrightarrow p^2=y^3+c \Longrightarrow c=0 \Longrightarrow y=\dfrac{4}{(x+c_1)^2} \Longrightarrow c_1=0 \Longrightarrow y=\dfrac{4}{x^2}$ 。

71.$y''(1-y)+2(y')^2=0$ 。

解： $y'=p$ ， $p\dfrac{dp}{dy}(1-y)+2p^2=0 \Longrightarrow p=c(1-y)^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{1-y}=c_1x+c_2$ 。

72.$y''+\sqrt{1+(y')^2}=0$ 。

解： $y'=p$ ， $p'+\sqrt{1+p^2}=0 \Longrightarrow y'+\sqrt{1+(y')^2}=ce^{-x} \Longrightarrow y'=\dfrac{1}{2}ce^{-x}-\dfrac{1}{2c}e^{-x} \Longrightarrow y=\dfrac{1}{2}c_1e^{-x}-\dfrac{1}{2c_1}e^{x}+c_2$ 。

73.$xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$ 。

解：令 $y'=p \Longrightarrow xp'=p\ln\dfrac{p}{x}$ 。令 $z=\ln\dfrac{p}{x} \Longrightarrow p=xe^z$ ， $\dfrac{dp}{dx}=e^z+xe^z\dfrac{dz}{dx} \Longrightarrow x(e^z+xe^z\dfrac{dz}{dx})=zxe^z \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx}-z=-1 \Longrightarrow z=x(c_1+\dfrac{1}{x})=c_1x+1 \Longrightarrow y'=exe^{c_1x}$ 。

当 $c_1=0$ 时， $y=\dfrac{1}{2}ex^2+c$ ，

当 $c_1\neq 0$ 时， $y=\dfrac{e}{c_1}(x-\dfrac{1}{c_1})e^{c_1x}+c_2$ 。

74. 设当 $x\geq 0$ 时 f(x) 有一阶连续导数，并且满足

$$f(x)=-1+x+2\int_0^x(x-t)f(t)f'(t)dt\,,$$

求 $f(x)$(当 $x\geq 0$) 。

解：

$$f'(x)=1+2\int_0^x f(t)f'(t)dt$$

$$\Longrightarrow f'(x)=1+f^2(x)-f^2(0)=f^2 \qquad (f(0)=-1)$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{f}x+c\,,\quad c=1$$

$\Longrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$ 。

75. 设曲线通过点 $A(1,-1)$ ，且曲线上任一点处的切线斜率等于切点纵坐标的平方，求此曲线的方程。

解： $y(1)=-1$ ， $y'=y^2\Longrightarrow -\dfrac{1}{y}=x+c\Longrightarrow c=0\Longrightarrow y=-\dfrac{1}{x}$ 。

76. 设 100 摄氏度的物体置于 20 摄氏度的屋子里，在 10 分钟内冷却到 60 摄氏度，问在多少时间内该物体冷却到 25 摄氏度。

解： $y'=k(y-20)\Longrightarrow \ln y-20=kt+c$ ， $y(0)=100$ ， $y(10)=60\Longrightarrow c=\ln 80$ ， $k=-\dfrac{1}{10}\ln 2\Longrightarrow$ 当 $y(t)=25$ 时， $t=40m$ 。

77. 已知放射性物质镭的裂变规律是：裂变速率与剩余量成正比。设已知在某一时刻 $t=t_0$ 时，镭的份量是 R_0 克，求在任意时刻 t 镭的份量 $R(t)$ 。

解： $R'(t)=-\lambda R(t)$ ， $R(t_0)=R_0\Longrightarrow R(t)=ce^{-\lambda(t-t_0)}$ ， $c=R_0\Longrightarrow R(t)=R_0e^{-\lambda(t-t_0)}$ 。

78. 一厂房体积为 V 立方米，开始时空气中含有二氧化碳 m_0 克，每分钟通入体积为 Q 立方米的新鲜空气 (设新鲜空气中不含二氧化碳)，同时排出等量的混浊空气，室内空气始终保持均匀，求室内二氧化碳的含量与时间的函数关系。

解： $y(0)=m_0$ ， $y'=-\dfrac{Q}{V}y\Longrightarrow y=ce^{-\frac{Q}{V}t}\Longrightarrow c=m_0\Longrightarrow y=m_0e^{-\frac{Q}{V}t}$ 。

79. 已知曲线的曲率处处都等于常数 $k(k\neq 0)$，法线方程为 $-y'(Y-y)=X-x$ ， $Y=0$ 时， $X=x+yy'$ ，求此曲线的方程。

解：曲线过 $Q(x+yy',0)$ 点， $|\overline{PQ}|=\sqrt{(x+yy'-x^2)+y^2}=\sqrt{y^2p^2+y^2}=\dfrac{1}{k}$ ， $y^2p^2+y^2=\dfrac{1}{k^2}\Longrightarrow p^2=\dfrac{1}{y^2k^2}-1\Longrightarrow p=\pm\sqrt{\dfrac{1-y^2k^2}{y^2k^2}}\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\dfrac{1-y^2k^2}{y^2k^2}}$ 。

取 + 时，不妨先设 $y>0\Longrightarrow \dfrac{yk}{\sqrt{1-y^2k^2}}dy=dx\Longrightarrow -\dfrac{1}{2k}\dfrac{d(1-y^2k^2)}{\sqrt{1-y^2k^2}}=dx\Longrightarrow -\dfrac{1}{k}\sqrt{1-y^2k^2}=x+c\Longrightarrow 1-y^2k^2=k^2(x+c)^2\Longrightarrow \dfrac{1}{k^2}=(x+c)^2+y^2\Longrightarrow$ 是圆，其余几种情况类似可得都是圆。

80. 求一曲线族，使在其上每一点处与曲线族 $y=cx^3$ 正交。

解： $y'=\dfrac{-1}{3cx^2}=-\dfrac{x}{3y}\Longrightarrow x^2+3y^2=c$ 。

81. 一盛满水的直立圆柱形贮水器，直径为 4 米，高为 6 米，其底上有

一半径为 $\frac{1}{12}$ 米的圆孔，问容器中水全部由小孔流完需多少时间？已知水从小孔流出的速度等于 $0.6\sqrt{2gh}$ (g 是重力加速度， h 是小孔离液面的距离) 。

解： $h' = -\dfrac{(\frac{1}{12})^2 0.6\sqrt{2gh}}{2^2} \Longrightarrow 2\sqrt{h} = \dfrac{-0.6t\sqrt{2g}}{24^2} + c$ ，

$h(0) = 6 \Longrightarrow c = 2\sqrt{6}$ 。

当 $h = 0$ 时， $t = 1062s = 17.7m$ 。

82. 设对任意 $x > 0$ ，曲线 $y = f(x)$ 上点 (x,f(x)) 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ ，求 f(x) 的一般表达式。

解： $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow \dfrac{1}{x_0}\displaystyle\int_0^{x_0} f(t)dt - f(x_0) = -f'(x_0)x_0 \Longrightarrow xf''(x) = -f'(x) \Longrightarrow f(x) = c_1 \ln x + c_2$ 。

83. 某湖泊的水量为 V ，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$ ，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$ ，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$ 。已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$ ，超过了国家规定指标。为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不得超过 $\dfrac{m_0}{V}$ 。问至多经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量就可降至 m_0 以内？ (注：设湖水中 A 的浓度是均匀的。)

解： $m' = \dfrac{m_0}{6} - \dfrac{m}{3} \Longrightarrow m(t) = \dfrac{m_0}{2} + ce^{-\frac{t}{3}}$ ，

又 $m(0) = 5m_0 \Longrightarrow c = \dfrac{9}{2}m_0 \Longrightarrow$ 当 $m(t) = m_0$ 时， $t = 6\ln 3$ 。

84. 求一条凹曲线，已知其上任一点处的曲率 $k = \dfrac{1}{2y^2\cos\alpha}$ ，其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾角 $(\cos\alpha > 0)$ ，且曲线在点 (1,1) 处的切线为水平。

解： $\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y^2}$ 。

令 $y' = p$ ， $y(1) = 1$ ， $y'(1) = 0$ ， $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1+p^2} + c \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow p = \sqrt{y-1} \Longrightarrow 4y = (x+c_1)^2 + 1 \Longrightarrow c_1 = -1 \Longrightarrow 4y = (x-1)^2 + 4$ 。

85. 求连接两点 A(0,1) 与 B(1,0) 的一条曲线，它位于弦 AB 的上方，并且对于此弧上的任意一条弦 AP ，该曲线与弦 AP 之间的面积为 x^3 ，其中 x 为点 P 的横坐标。

解： $\displaystyle\int_0^x y(t) - (\frac{y(x)-1}{x}t + 1)dt = x^3$ ， $x \in [0,1]$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_0^x y(t)dt - \frac{x}{2}(y-1) - x = x^3 \Longrightarrow y - xy' = 6x^2 + 1 \Longrightarrow y'' = -12 \Longrightarrow y = -6x^2 + c_1x + c_2$ ， $y(0) = 1$ ， $y(1) = 0 \Longrightarrow c_1 = 5$ ， $c_2 = 1 \Longrightarrow y = -6x^2 + 5x + 1$ 。

86. 跳伞运动员从高空自飞机上跳下，经若干秒后打开降落伞，开伞后运动过程中所受空气阻力为 kv^2 ，其中常数 $k>0$ ， v 为下降速度，设人与伞的质量为 m ，且不计空气浮力，试证明：只要打开伞后有足够的降落时间着地，则落地速度将近似地等于 $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 。

解： $mv' = mg - kv^2$(当时间足够时， $v'=0$ ，即 $v=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$) 。

$v' = -\dfrac{k}{m}(v^2 - \dfrac{gm}{k})$ ，令 $b^2 = \dfrac{gm}{k}$ ， $a^2 = \dfrac{kg}{m} \Longrightarrow \dfrac{v-b}{v+b} = ce^{-\frac{2k}{m}bt} = ce^{-2at} \Longrightarrow$

$v = b\dfrac{ce^{2at+1}}{ce^{2at-1}} \Longrightarrow$ 当 t 充分大时， $v = b = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 。

87. 设函数 p(x) 和 f(x) 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = a > 0$ ， $|f(x)| \le b$ ， a ， b 均为常数。试证明：方程 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ 的一切解在 $[0,+\infty)$ 上有界。

解： $p(x)$ ， $f(x)$ 在 R^+ 上连续 $\Longrightarrow y = e^{-\int p(t)dt}[c + \int f(t)e^{\int p(s)ds}dt]$ 在 R^+ 也连续。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = a > 0$ ， $|f(x)| \le b \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ce^{-\int_0^x p(t)dt} = 0$ ，即 $ce^{-\int_0^x p(t)dt}$ 在 R^+ 上有界。

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} |e^{-\int p(t)dt}\int f(t)e^{\int p(s)ds}| \le b\lim\limits_{x\to+\infty} |\dfrac{\int e^{\int p(s)ds}dt}{e^{\int p(t)dt}}| = b\lim\limits_{x\to+\infty} |\dfrac{e^{\int p(s)ds}dt}{p(x)e^{\int p(t)dt}}| = \dfrac{b}{a}$

$\Longrightarrow e^{-\int p(t)dt}\int f(t)e^{\int p(s)ds}dt$ 在 R^+ 上也有界 $\Longrightarrow y$ 在 R^+ 上有界。

88. 设初值问题

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} - (2x^2+1)y = x^2, \quad x \ge 1, \\ y(1) = y_1. \end{cases}$$

(1) 求满足上述初值问题的解 (用积分表示)；

(2) 是否存在适当的 y_1 ，使对应的解 y(x) 当 $x \longrightarrow +\infty$ 时存在有限极限？若有，这种 y_1 有多少？求出之，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ 。

解： $y' - (2x + \dfrac{1}{x})y = x$

$\Longrightarrow y = e^{x^2+\ln x}[c + \int_1^x te^{-t^2-\ln t}dt] = xe^{x^2}[c + \int_1^x e^{-t^2}dt]$ 。

由 $y(1) = y_1 \Longrightarrow c = e^{-1}y_1 \Longrightarrow y = xe^{x^2}[y_1e^{-1} + \int_1^x e^{-t^2}dt]$ 。

当 $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ 存在时，

$\lim\limits_{x\to+\infty} y' = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2 + \dfrac{1}{x^2})y = -1$ ，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\dfrac{1}{2}$ 。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(y_1e^{-1}+\int_1^x e^{-t^2}dt)'}{(\frac{1}{x}e^{-x^2})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{-x^2}-\frac{1}{x}2xe^{-x^2}}=-\dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ 要使 y 极限存在只需 $\lim\limits_{x\to+\infty}y_1e^{-1}+\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt=0$,即 $y_1=-e\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t^2}dt$ 。

89. 求 $y'+y\cos x=\sin x$ 的通解 (用积分表示)；在这些解中，有无周期为 2π 的？若有，求出之，若无，说明理由。

解： $y=e^{\sin x}[c+\displaystyle\int_0^x \sin te^{-\sin t}dt]$ ，

此解不以 2π 为周期 (因为 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin te^{-\sin t}dt\neq 0$) 。