浙江大学 07-08 学年春夏学期期末考试试卷

一、填空题（每空格 3 分，共 24 分）

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，则 $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}x & a_{11}x+a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}x & a_{21}x+a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}x & a_{31}x+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ ________________.

2. 设 4 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $(A^*)^* =$ ________________________.

3. 设 V 是实数域 R 上的全体 4×4 阶反对称矩阵所成的线性空间，即
$V=\left\{A=(a_{ij})_{4\times4} \mid A^T=-A, a_{ij}\in R\right\}$，写出 V 的一组基______________________________

V 的维数是__________________，设 4 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，写出 A 在上面这组基下的坐标是__________________________.

4. 设 A 是 3 阶矩阵，且 $|A|=0$，$A_{11}=1$，$A_{22}=2$，$A_{33}=-4$，则 A^* 的特征值是 $\lambda_1^* =$ ________，$\lambda_2^* =$ ________，$\lambda_3^* =$ ________.

二、 计算题（本大题共 61 分， 其中第 1 题至第 4 题，每小题 12 分，第 5 题 13 分）

1. 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3 \\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4 \\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5 \end{vmatrix}$

2. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$

问（1）a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

（2）a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多解？并用基础解系来表示它的全部解.

3. 已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，

$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求$a,b$的值，并写出$\beta_3$由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示的表示式(只需写出一种表示式).

4. 设A,B都是 3 阶实可逆矩阵，A的特征值是$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}$，这里$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是互不相同的正数，若$B$的特征值是-5, 1, 7，$B=(A^{-1})^2-6A$，求$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，并写出与$A,A^{-1},B$相似的对角矩阵.

5. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$,

(1) 写出二次型的矩阵A;

(2)用正交线性替换$X=QY$，化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形;

(3) 求实对称矩阵B，使得$A=B^3$.

三、证明题(本大题共 15 分，其中第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分)

1. 设A是实对称矩阵，B是正定矩阵，求证：AB的特征值全是实数.

2. 设A是$m\times n$矩阵，B是$m\times t$矩阵，$r(B)=t$，令$C=(A,B)_{m\times(n+t)}$，$X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，设$X^{(i)}=\begin{pmatrix}X_0^{(i)}\\X_1^{(i)}\end{pmatrix}$，这里$X_0^{(i)}$是$X^{(i)}$的前$n$个元素，$X_1^{(i)}$是$X^{(i)}$的后$t$个元素($i=1,2,\cdots,r$)，求证：$X_0^{(1)},X_0^{(2)},\cdots,X_0^{(r)}$线性无关.