第三章

1. 将第二章习题 1 ~ 3 中的“函数”改成“向量函数”，则这些命题仍成立，试叙述并证明这些命题。

2. 对于非齐次线性方程组，叙述并证明与第二章习题 4 相应的习题。

3. 设 $X(t)$ 是齐次线性方程组 $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 的一个基本解矩阵， $A(t)$ 在区间 (a,b) 内连续， $W(t)$ 是 $X(t)$ 的朗斯基行列式。试证明下述刘维尔公式：

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(\tau)d\tau},t_0\in(a,b),t\in(a,b)\text{ 。}$$

并证明：如果所给的齐次线性方程组是由高阶齐次线性方程经变换 (3.3) 得到的，则上述刘维尔公式与第二章习题 5 的刘维尔公式一致。

1， 2， 3 证明同第二章，略。

4. 设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别是 $\dfrac{dx}{dt}-A(t)x=f_1(t)$ 和 $\dfrac{dx}{dt}-A(t)x=f_2(t)$ 的解，试证明 $x_t+x_2(t)$ 是 $\dfrac{dx}{dt}-A(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解。

证明： $\dfrac{d(x_1(t)+x_2(t))}{dt}-A(t)(x_1(t)+x_2(t))=\dfrac{dx_1}{dt}-A(t)x_1+\dfrac{dx_2}{dt}-A(t)x_2=f_1(t)+f_2(t)$ 。

5. 设 $A(t)$ 是实矩阵， t 是实变量， $x(t)=u(t)+iv(t)$ 是方程 $\dfrac{dx}{dt}-A(t)x=\varphi(t)+i\psi(t)$ 的解，其中 $u(t)$ ， $v(t)$ ， $\varphi(t)$ ， $\psi(t)$ 都是实函数， $i=\sqrt{-1}$ 是虚单位。试证明 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别满足 $\dfrac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)$ 和 $\dfrac{dv(t)}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)$ 。

证明：将 $x(t)=u(t)+iv(t)$ 代入 $\dfrac{dx}{dt}-A(t)x=\varphi(t)+i\psi(t)$

$$\Longrightarrow\frac{du}{dt}-A(t)u(t)+(\frac{dv}{dt}-A(t)v(t))i=\varphi(t)+i\psi(t)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{du}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)\\ \dfrac{dv}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)\end{cases}$$

$\Longrightarrow u(t)$, $v(t)$ 分别是 $\dfrac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)$, $\dfrac{dv(t)}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)$ 的解。

求下列方程组的解 (6 ~ 20) :

$$6.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-3x,\\ \dfrac{dy}{dt}=8x-y.\end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}-3&1\\8&-1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1+\lambda) - 8 = (\lambda+5)(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -5$， $\lambda_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ 8\alpha_1 + 4\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -4\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ 8\alpha_2 - 2\beta_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$。

7.$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$， $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 2 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1+i$， $\lambda_2 = 1-i$ 。

$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -i\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - i\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$e^t(\cos t + i\sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -i\cos t + \sin t \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t(c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$

8.$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$， $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3i$ 。

$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$。

$$(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3t + 5i\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t + (\sin 3t - 3\cos 3t)i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}。$$

$$9.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$$

解： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 =$ $-(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ， $\lambda_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ -\beta_1 + v_1 = 0 \\ \alpha_1 - v_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2 + \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\gamma_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}。$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + (\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)i \\ -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_3 \begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}\text{。}$$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 =$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$(二重)

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})e^{2t} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}$。

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Longrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$(二重)， $\lambda_2 = 2$ 。

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0$

$\Longrightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0$

$$\Longrightarrow v_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad v_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad v_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{。}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\begin{cases}-2\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha-2\beta+\gamma=0\\\alpha+\beta-2\gamma=0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}\text{。}$$

$$12.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-z,\\\dfrac{dy}{dt}=-x+y+z,\\\dfrac{dz}{dt}=x-y+z.\end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-1\\-1&1-\lambda&1\\1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=$

$(1-\lambda)^3+1-1+(1-\lambda)+(1-\lambda)+(1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+4)$

$\Longrightarrow \lambda_1=1$， $\lambda_2=1+\sqrt{3}i$， $1-\sqrt{3}i$。

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=0\Longrightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3}i&1&-1\\-1&-\sqrt{3}i&1\\1&-1&-\sqrt{3}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}=0\Longrightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$$

$$(\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}ti)\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}ti\\(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t)+(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t)i\\(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t)+(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t)i\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^t+(c_2\begin{pmatrix}\cos\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\sin\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t\end{pmatrix})e^t$$

$$13.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x-2z=0,\\\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+x=0,\\\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x+2y=0.\end{cases}$$

解：原方程组可以化为 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=-y-z \\ \dfrac{dz}{dt}=-z \end{cases} \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Longrightarrow (-1-\lambda)^3=0 \Longrightarrow \lambda=-1$(三重)。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow v_1^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_1^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(2)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_3=\begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix})e^{-t}$$

14. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x. \end{cases}$

解：$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=p \\ \dfrac{dp}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=q \\ \dfrac{dq}{dt}=x \end{cases} \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A-\lambda E|=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}=$

$\lambda^4-1=0$

$\Longrightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=-1, \quad \lambda_3=i, \quad \lambda_4=-i$

$$\Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow (\cos t + i\sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \\ -\cos t - i\sin t \\ \sin t - i\cos t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

解：由第二个方程 $x = \dfrac{dy}{dt} + 6y - e^{-2t}$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 2e^{-2t} = 2y - 5\dfrac{dy}{dt} - 30y + 5e^{-2t} + e^t$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 28y = 3e^{-2t} + e^t$ 。

$\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$， $(\lambda+4)(\lambda+7) = 0$， $\lambda_1 = -4$， $\lambda_2 = -7$

$\Longrightarrow$ 齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1e^{-4t} + c_2e^{-7t}$，

$y_0 = Ae^{-2t} + Be^t$， $y_0' = -2Ae^{-2t} + Be^t$， $y_0'' = 4Ae^{-2t} + Be^t$ 。

代入得 $A = \dfrac{3}{10}$， $B = \dfrac{1}{40}$

$\Longrightarrow y = c_1e^{-4t} + c_2e^{-7t} + \dfrac{3}{10}e^{-2t} + \dfrac{1}{40}e^t$

$$\Longrightarrow x = -4c_1e^{-4t} - 7c_2e^{-7t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t \\ + 6c_1e^{-4t} + 6c_2e^{-7t} + \frac{9}{5}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^t - e^{-2t}$$

$$= 2c_1e^{-4t} - c_2e^{-7t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{-4t} - c_2e^{-7t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t \\ c_1e^{-4t} + c_2e^{-7t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t \end{pmatrix}$$ 。

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 3, \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3. \end{cases}$

解： $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3 \end{cases} \Longrightarrow x'' = y' = -x + 3$

$\Longrightarrow x = c_1\cos t + c_2\sin t + 3$ ， $y = -c_1\sin t + c_2\cos t$ 。

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y - e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 4e^{-t}. \end{cases}$

解： $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$ ， $v_0 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow x(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$ ，特解为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_1e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ 。

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 1. \end{cases}$

解： $x'' = -x - \sin t + 1$

$\Longrightarrow x = c_1\cos t + c_2\sin t + At\cos t + 1 \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow x = c_1\cos t + c_2\sin t + \dfrac{t}{2}\cos t + 1$

$y = -c_1\sin t + c_2\cos t - \dfrac{t}{2}\sin t - \dfrac{\cos t}{2}$ 。

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ， $\lambda_{1,2} = -4$

$\Longrightarrow v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，特解为 $e^t\begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix} + c_1 e^{-4t} [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] +$$

$$c_2 e^{-4t} [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{。}$$

$$20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + 2y = 1 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + 2y + z = 2 + e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} - x + z = 3 + e^t. \end{cases}$$

解：$x' + y' + z' - x + 2y + z = 3 + \frac{3}{2}e^t$

$\Longrightarrow x' = x + 1 + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow x = c_1 e^t - 1 + \frac{1}{2}te^t$

$\Longrightarrow y' = -2y + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow y = c_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t$

$\Longrightarrow z' = -z + 2 + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow z = c_3 e^{-t} + 2 + \frac{1}{4}e^t$ 。

21. 试证明，对于高阶线性方程（3.9），按第二章 §4 中二的变动任意常数法得到的通解，与用变换（3.3）将（3.9）化成线性方程组（3.9）' 之后，按本节的变动任意常数法得到的通解（3.42）是一致的（以你 n=2 情形证明之）。

解：$n = 2$ ，$\frac{d^2x}{dt^2} + P_1 \frac{dx}{dt} + P_2 x = f(t)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -P_1 x_2 - P_2 x_1 - f \end{cases}$$

$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -P_2 & -P_1 \end{pmatrix}$，$\lambda^2 + P_1\lambda + P_2$ 。

易证相应的齐次方程的解是一致的，只需证特解即可。

因为齐次方程解一致，所以基本解矩阵与逆矩阵都一致，特解也一致。得证。

22. 飞机在空中沿水平方向等速飞行，速度为 v_0 ，一重为 mg 的炸弹从飞机上下落，设空气的阻力为 R（常数），试求炸弹运动规律。

解：设水平为 x ，垂直为 y ，则 $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ ，$x'(0) = v_0$

$\Longrightarrow mx'' = -R_x$ ，$my'' = mg - R_y$

$\Longrightarrow x = -\frac{R_x}{2} + c_1 t + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$ ，$c_1 = v_0$

$y = \frac{1}{2}(g - \frac{R_y}{m})t^2 + c_3 t + c_4 \Longrightarrow c_3 = c_4 = 0$

$\Longrightarrow x=-\dfrac{R_x}{2m}t^2+v_0t$ ， $y=\dfrac{1}{2}(g-\dfrac{R_y}{m})t^2$ 。

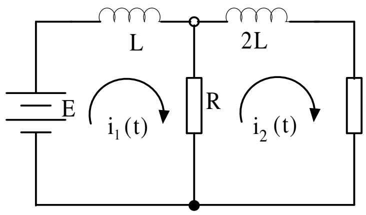

图 3-1

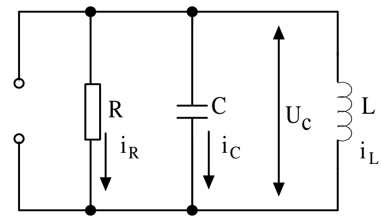

图 3-2

23. 设二电流回路如图 3-1，电动势 E 为常数。若开始时电流 $i_1=i_2=0$，试求电流 $i_1(t)$ ， $i_2(t)$ 随时间 t 的变化规律。

解： $\begin{cases} 2Li_2'+3Ri_2=R(i_3-i_2) \\ Li_1'+R(i_1-i_2)=E \end{cases} \Longrightarrow \lambda^2+3\lambda+\dfrac{3}{2}=0$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$ ， $i_1(0)=0$ ， $i_2(0)=0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=e^{\frac{-3+\sqrt{3}}{2}t}\begin{pmatrix} -\dfrac{(2+\sqrt{3})E}{3R} \\ -\dfrac{(1+\sqrt{3})E}{6R} \end{pmatrix}+e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}t}\begin{pmatrix} -\dfrac{(2-\sqrt{3})E}{3R} \\ -\dfrac{(1-\sqrt{3})E}{R} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{4E}{3R} \\ \dfrac{E}{3R} \end{pmatrix} 。$$

24. 一电路如图 3-2 所示，输入电压为零，电路参数 $C=1$ 法， $L=1$ 亨， $R=1$ 欧。试写出以电容上的电压 U_c 和电感上的电流 i_L 为未知函数，以时间 t 为自变量的微分方程组。并设 $U_c(0)=U_{C_0}$ ， $i_L(0)=i_{L_0}$ ，求方程组的特解。

解： $\begin{cases} Li_L'=-U_c \\ cU_c'=i_c=i_L-i_R=i_L-\dfrac{U_c}{R} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} Li_L'=-U_c \\ U_c'=i_L-U_c \end{cases}$

$U_c(0)=U_{c_0}$ ， $i_L(0)=i_{L_0}$

$\Longrightarrow \lambda^2+\lambda+1=0$ ， $\lambda_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Longrightarrow U_c(t)=U_{C_0}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{2i_{L_0}+U_{c_0}}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

$i_L(t)=\dfrac{1}{2}U_{c_0}e^{-\frac{1}{2}t}(-\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)+\dfrac{2i_{L_0}+U_{c_0}}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}(\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$ 。

25. 质量为 m_1 和 m_2 的两个小球，穿在一光滑水平杆上，由一轻质弹簧连接，且可沿杆移动。当弹簧不受力时，两小球重心间的距离为 l 。若用 x_1 ， x_2 分别表示两小球的位移，并设 $x_1(0)=0$ ， $\dot{x}_1(0)=v_0$ ， $x_2(0)=l$ ， $\dot{x}_2(0)=0$ 。试求两球的运动规律（这里记号 $\cdot$ 表示 $\frac{d}{dt}$ ）。

解： $\begin{cases} m_1x_1''=-k[l-(x_2-x_1)] \\ m_2x_2''=k[l-(x_2-x_1)] \end{cases}$

$x_1(0)=0$ ， $x_2(0)=l$ ， $x_1'=v_0$ ， $x_2'(0)=0$ 。

添加未知元 y_1 ， y_2 ，其中 $y_1=x_1'$ ， $y_2=x_2'$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1y_1'=-k[l-(x_2-x_1)] \\ x_1'=y_1 \\ m_2y_2'=k[l-(x_2-x_1)] \\ x_2'=y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ x_2(0)=l \\ y_1(0)=v_0 \\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2}=0$ ， $\lambda_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$ 。

令 $w^2=\frac{k}{m_1m_2}(m_1+m_2)$

$$\Longrightarrow x_1=\frac{v_0}{m_1+m_2}(m_1t+\frac{m_2}{w}\sin wt)$$

$$x_2=\frac{v_0}{m_1+m_2}(m_1t-\frac{m_1}{w}\sin wt)+l \text{ 。}$$