第 三 周

第14章 静电场中的导体和电介质

§14.6， §14.7

第15章 电流和磁场

§15.1， §15.2， §15.3， §15.4，

§15.6， §15.8

作业： P260 14-22，14-23

* P285 15-1，15-4，15-9

例题7：

平行板电容器两极板面积S，充有两层电介质，介电常数分别为ε_1、ε_2，厚度分别为d_1、d_2，电容器两极板上自由电荷面密度为±σ。求：
（1）在各层电介质内的电位移矢量和场强
（2）电容器的电容？

解：（1）在两交界面处做高斯闭合面S_1

$$\oint\!\!\!\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} = -D_1 S + D_2 S = 0$$

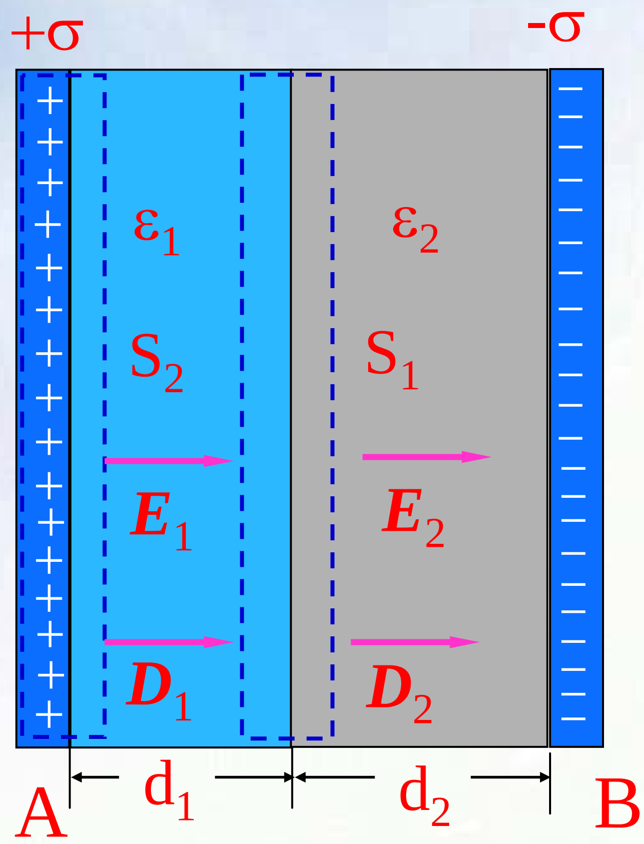
所以 $D_1 = D_2$ S曲线相同

由于 $D_1 = \varepsilon_1 E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_2 E_2$

所以：

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

在介质与金属板内做一高斯闭合面S_2，由高斯定理可得：



$$\oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_1 S = S\sigma \quad D_1 = \sigma = D_2$$

则可求得电场强度：

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$$

D、***E*** 方向均向右。

（2）正负两极板*A*、*B*的电势差为：

$$U_A - U_B = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \sigma\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\right) = \frac{q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\right)$$

按电容的定义式：

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}}$$

上面结果可推广到多层介质的情况。

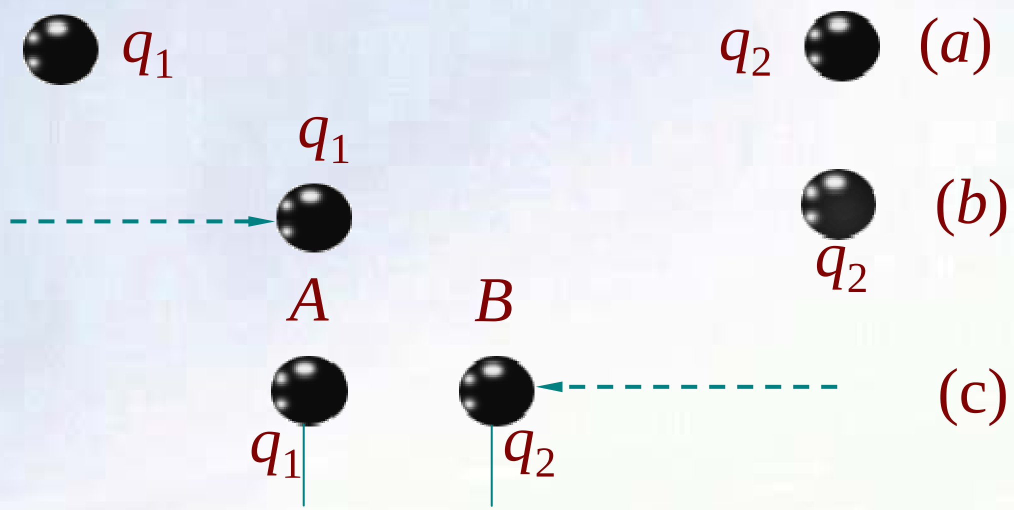
§10-6 静电场的能量

一、点电荷间的相互作用能

（a）q_1， q_2相距无限远，相互作用能为0。

（b）q_1从无穷远移至A点，相互作用能为0。

（c）q_2从无穷远移至B点，外力克服q_1的电场力做功为：



$$A = q_2(U_2 - U_\infty) \qquad U_\infty = 0$$

$$A = q_2 U_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

若先将q_2移至B点，再将q_1移至A点，外力克服电场力做功为：

$$A = q_1 U_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

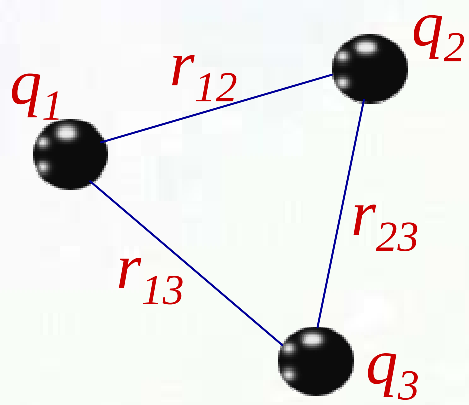
外力做功等于两电荷相互作用的能量：

$$W = A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$ 有对称性，上式写成：

$$W = \frac{1}{2}q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} + \frac{1}{2}q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{2}q_1U_1 + \frac{1}{2}q_2U_2$$

考虑三个点电荷系统形成的情况：

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$$



$$A_3 = q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

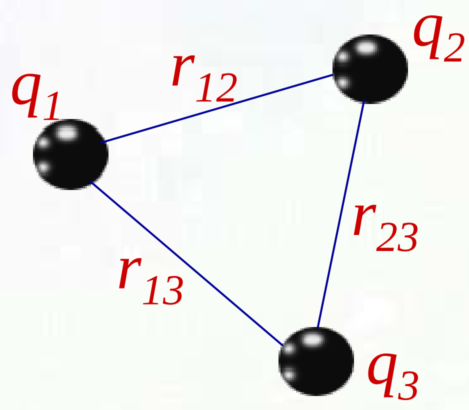
$$W = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} + q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}}\right) + q_3\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)\right]$$

$$W = \frac{1}{2}q_1U_1 + \frac{1}{2}q_2U_2 + \frac{1}{2}q_3U_3$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_iU_i$$



将三个点电荷系统推广至n个点电荷：

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

二、电荷连续分布时的静电能

电荷体分布时的静电能：

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho U dV$$

电荷面分布时的静电能：

$$W=\frac{1}{2}\iint_S \sigma U dS$$

式中U是所有电荷在体元或面元处所激发的电势。以上两式包含带电体各部分电荷之间的相互作用能—静电能。

设一电容器极板间已带电±q，此时两极板电势差为 $U'_A-U'_B$，现把+dq由B板移至A板，外力克服电场力做功为

$$dA = (U'_A - U'_B)dq = \frac{q}{C}dq$$

外力所做的总功：
$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

因而电容器所带的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2}Q(U_A - U_B)$$

三、静电场的能量

变化的电磁场可以脱离电荷而单独存在说明静电场能量的携带者是电场而不是电荷。

将 $U_{AB}=Ed$，$C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$ 代入电容器静电能公式：

$$W=\frac{1}{2}CU_{AB}{}^{2}=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}V$$

则可引进电场能量密度：

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}ED$$

上式虽然从均匀电场得出的，但其具有普遍性，对任意变化静电场都适用。对于任意一个带电体，可由电场能量密度计算它的总静电能：

$$W = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2}EDdV$$

例题8：

计算均匀带电球体的静电能，设球的半径为R，所带电量为q，球外为真空。

解：（1）用式 $W=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\rho U dV$ 来计算。

已知电荷体密度为：$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

均匀带电球体所激发的电场分布为：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}\vec{r} & (r<R)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r} & (r>R)\end{cases}$$

于是，离球心 $r(r<R)$ 处的电势为：

$$U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

由此可得带电球体的静电能为：

$$W=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho U dV=$$

$$\frac{1}{2}\frac{q}{\frac{3}{4}\pi R^3}\int_0^R\left(\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\right)4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$$

(2) 用式 $W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_V E^2 dV$ 来计算。能量分布在整个空间，用场强代入，即可得：

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

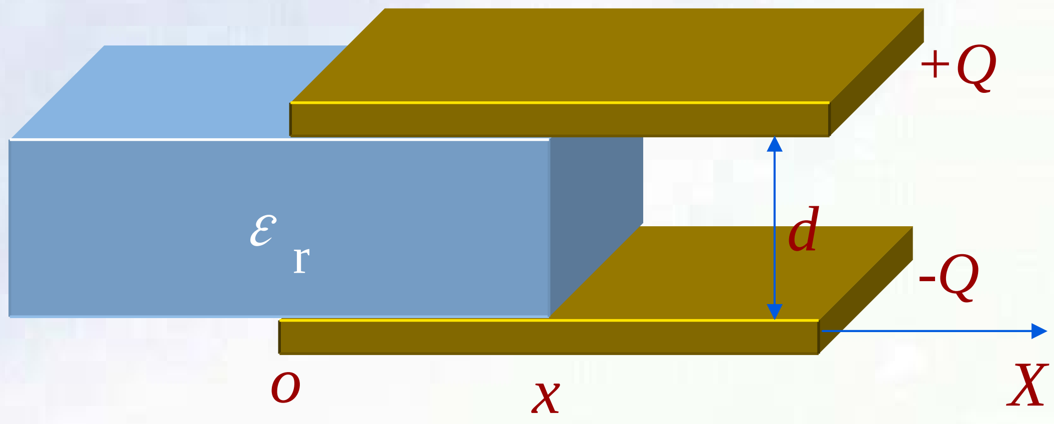
$$=\frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$$

两种方法计算结果相同。

例题9：

平行板电容器的极板是边长为a的正方形，间距为d，两板带电$\pm Q$。如图所示，把厚度为d、相对介电常量为 ε_r 的电介质板插入一半。试求电介质板所受电场力的大小及方向。

解：选取坐标系oX，如图所示，当介质插入x距离时，电容器的电容为



$$C(x)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r xa}{d}+\frac{\varepsilon_0(a-x)a}{d}=\frac{\varepsilon_0 a}{d}[a-(\varepsilon_r-1)x]$$

此时，电容器的静电能为

$$W(x)=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a[a+(\varepsilon_r-1)x]}$$

而电介质未插入时，电容器的静电能为

$$W_0=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^2}$$

当电介质移动dx时，电场力**F**对电介质板所作的功等于电容器静电能的减少：

$$F=-\frac{dW(x)}{dx}=\frac{(\varepsilon_r-1)Q^2d}{2\varepsilon_0a[a+(\varepsilon_r-1)x]^2}$$

插入一半时，$x=a/2$，则

$$F(\frac{a}{2})=\frac{2(\varepsilon_r-1)Q^2d}{\varepsilon_0a^3(\varepsilon_r+1)^2}$$

由 $\varepsilon_r>1$，电场力$\boldsymbol{F}(a/2)$是沿X轴的正方向，即指向电容器内部。

第十一章　稳恒电流

§11.1 稳恒电流

一、电流 电流密度

电流：电荷的定向移动。产生条件：
（1）存在自由电荷。（2）存在电场。

载流子：电荷的携带者：自由电子、离子、电子-空穴对。

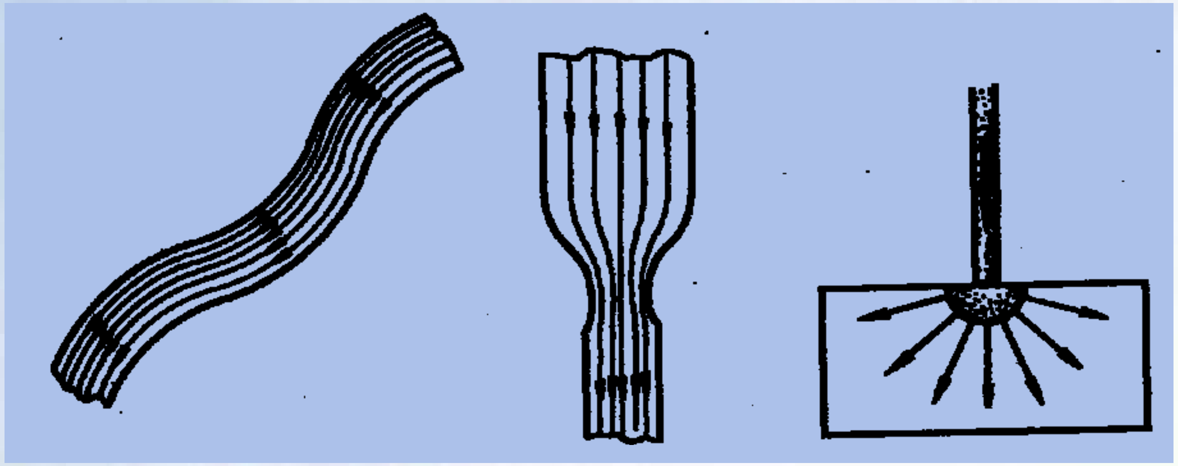
传导电流：自由电子、空穴、离子在导体中定向移动形成。

运流电流：电子、离子、带电体在空间的定向移动形成。

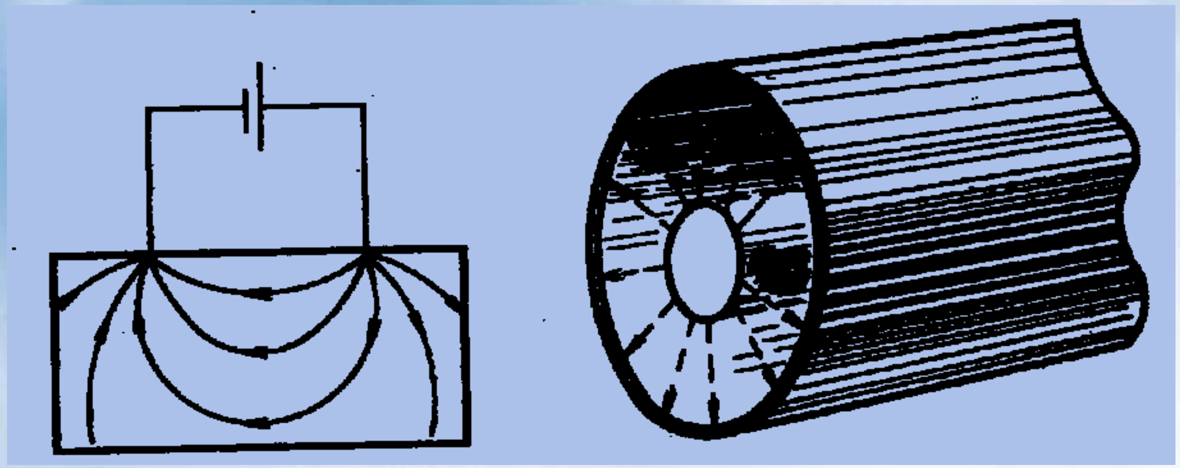
电流强度：单位时间通过导体任一截面的电量（标量），单位：安培（A）

$$I = \mathrm{d}q / \mathrm{d}t$$

电流在导体不同截面或同一截面的不同部位可以有不同的分布，见下图：

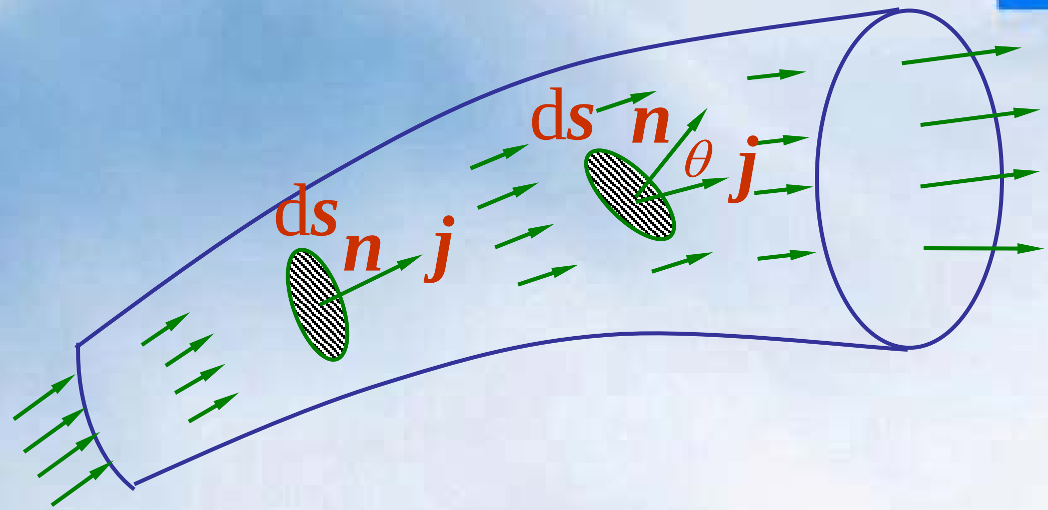


粗细，材料均匀的金属导体　　粗细不均匀的导线　　半球形接地电极



电阻法探矿　　　　*同轴电缆的漏电流*

在导体内某点取一个与该点电流方向垂直的面元$\mathrm{d}S_{\perp}$，设通过该面元的电流强度为dI，则定义电流密度的大小为 $j=\mathrm{d}I/\mathrm{d}S_{\perp}$ ，方向为正电荷移动的方向，单位：安培/米²（A/m²）。



电流密度矢量

取导体内任一面元*dS*，其法线方向*n*，通过该面元的电流强度*dI*为：

$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S_{\perp} = j\mathrm{d}S\cos\theta = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

通过导体任意截面S的电流强度为：

$$I=\int_S j\,\mathrm{d}S\cos\theta=\int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

I 是 $\boldsymbol{j}$ 对曲面 S 的通量，即单位时间通过曲面 S 的电荷量。

电流场：$\boldsymbol{j}$ 形成的矢量场称为电流场。

可引进电流线来描述电流场的分布。

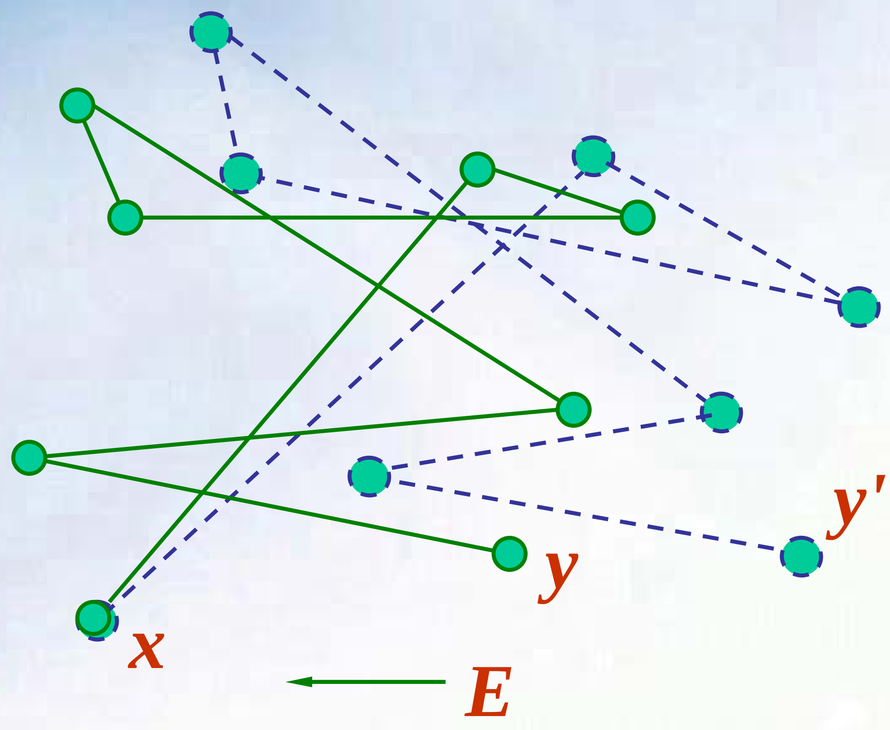
电流线的特点：（1）电流线上的切线方向为$\boldsymbol{j}$ 的方向；（2）电流线密处 j 大，疏处 j 小；（3）两电流线不相交。

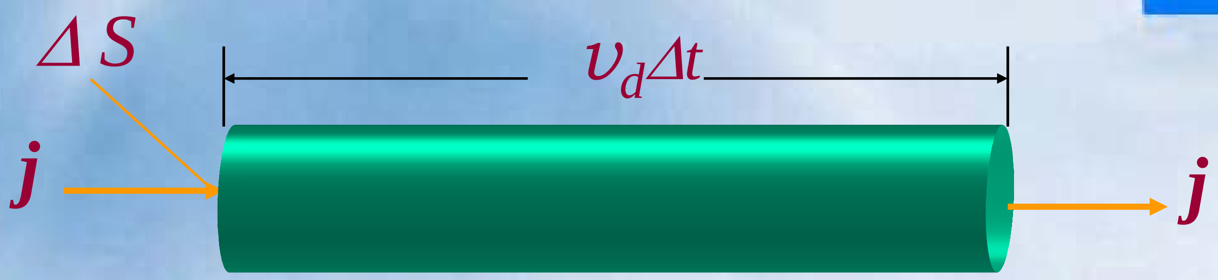
二、电流密度与漂移速度的关系 *

* 代表不考内容

漂移运动：

电子在电场作用下，除了作无规则热运动外，还将定向运动。这种定向运动的平均速度称为漂移速度$\boldsymbol{v}_d$。





上图中设自由电子数密度n、Δt时间内流出ΔS面的电荷$\Delta q = en\Delta S\, v_d \Delta t$，

电流强度和电流密度的数值为：

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = env_d \Delta S \qquad j = \frac{I}{\Delta S} = env_d$$

写成矢量式为： $\boxed{\vec{j} = -en\vec{v}_d}$

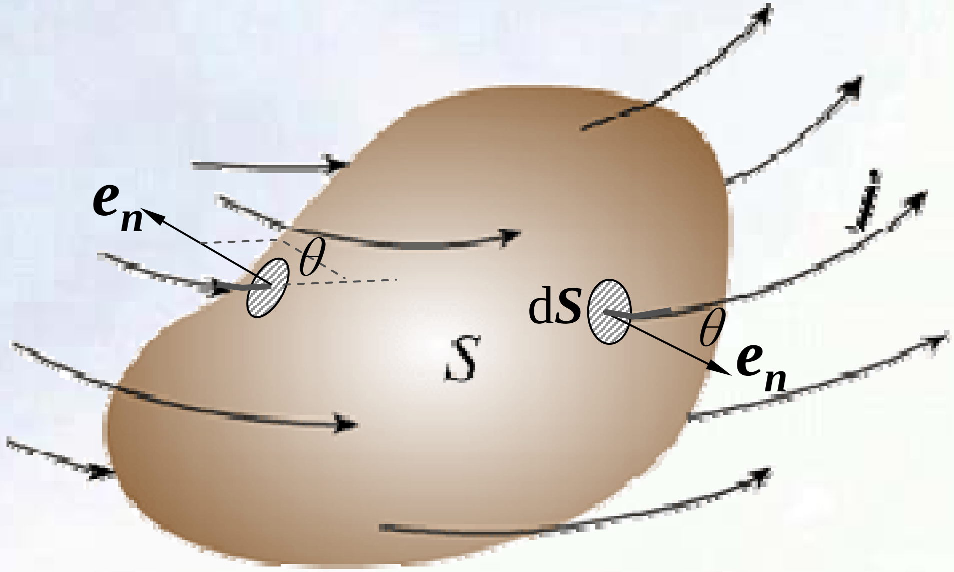
铜：$\upsilon_d \approx 10^{-5}$m/s，热运动速度$\approx 10^6$m/s。

三、稳恒电流与稳恒电场 *

稳恒电流：导体中各点电流密度矢量不随时间变化。

电流连续性方程：

在导体内取一闭合曲面S，则 dt 时间从S面中流出的电量，等于S面内 dt 时间电量的减少量 $-dq$：



$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

上式称为电荷连续性方程。

电流稳恒的条件：电流稳定后，空间电荷密度分布不随时间变化（dq/dt=0），对导体内任何区域S，S内流出的电量等于流入的电量，S内电量不变：

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

上式称为电流稳恒条件。

稳恒电场：在稳恒电流中电荷的分布不随时间变化，其相应的电场也不随时间变化。与静止电荷产生的电场相似，静电场中的规律、公式都适用，如高斯定理，环路定理。

稳恒电场与静电场的区别：

在静电场中：静电平衡时导体中$\boldsymbol{E}=0$，导体为等势体，无电流 $I=0$；

稳恒电场：导体中 $\boldsymbol{E}\neq 0$

§ 11.2 欧姆定律的微分形式 *

一、欧姆定律 电阻 电阻率

欧姆定律：

$$I=\frac{U}{R}$$

电阻 R 决定于导体性质和几何形状

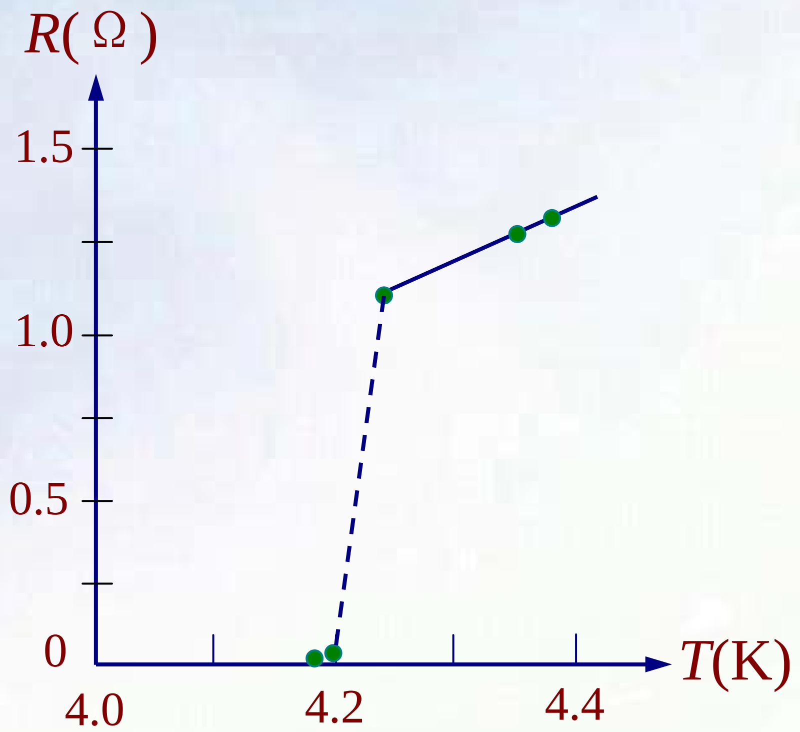
$$R=\rho\frac{l}{S}$$

上式中 ρ 为电阻率，单位是欧·米（Ω·m）。其倒数 $\gamma=1/\rho$ 称为电导率，单位是西门子/米（S/m）。

金属材料的电阻率与温度的关系：

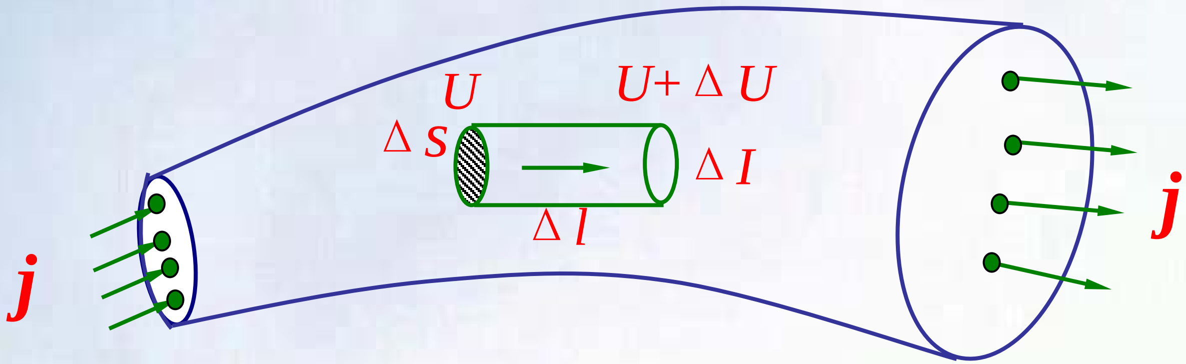
$$\rho_t = \rho_0(1+\alpha t)$$

某些金属，合金或化合物在温度降低到某一数值T_C时，电阻率会突然减小或接近到零，这种现象称为超导现象。图为汞的电阻-温度关系。



二、欧姆定律的微分形式

欧姆定律只适用于一段截面均匀的导体，而对于电流密度分布不均匀的导体，如何研究其导电规律？在导体中取一段底面积Δs，长为Δl，平行于电流线的圆柱。



欧姆定律微分形式推导

上图中导体元两端的电势差 $\Delta U = E\Delta l$，通过的电流强度为 $\Delta I = j\Delta S$，根据欧姆定律：

$$E\Delta l = j\Delta S\Delta R$$

即：

$$j = \frac{\Delta l}{\Delta R\Delta S}E = \frac{1}{\rho}E = \gamma E$$

$$\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}$$

此式即为欧姆定律的微分形式。它是电磁理论的基本方程之一，对变化不太大的非稳恒电场也适用。

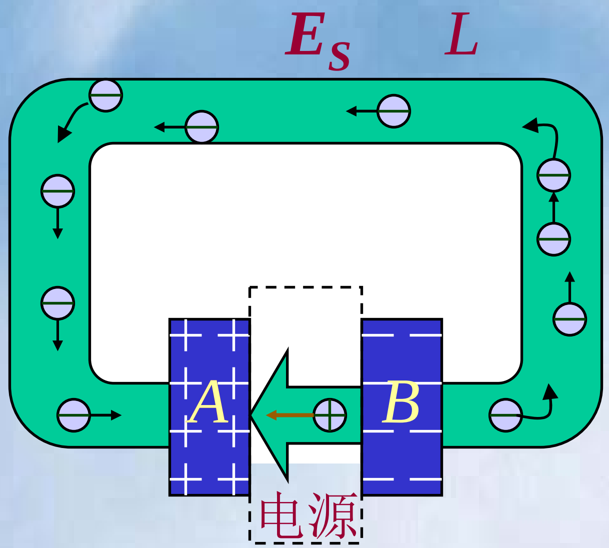
§11.3 电动势

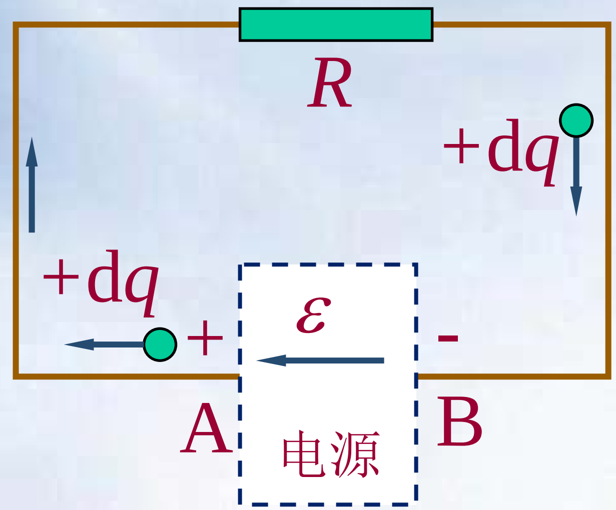
电源：提供非静电性外力的装置。是将其它能量如化学能、机械能、光能、热能、核能等转变为电能的装置。

一、电源的电动势

电动势 ε 是指在电源内部，将单位正电荷从负极移到正极时非静电力所作的功。

$$\varepsilon = \frac{A_K}{q}$$





电源的作用——把正电荷从B经电源内部移到A，使导线内（回路L）保持恒定电场$\boldsymbol{E}_S$。

电源的电动势 ε=dA/dq，dA是正电荷dq从负极经电源内部到正极时，电源克服静电力所做的功。

设想非静电性力由非静电性外场$\boldsymbol{E}_K$引起，非静电性力移动正电荷从负极到正极所作的功：

$$A_K = q\int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

电动势：

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

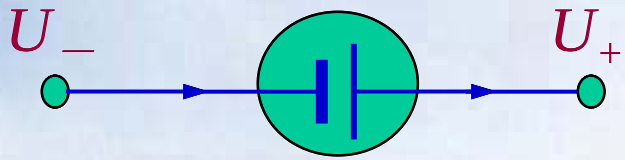
若非静电性外场$\boldsymbol{E}_K$分布于整个回路，则：

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

二、电源的路端电压

指电源两极（外部）的电势差，按定义：

$$U_{+} - U_{-} = \int_{+}^{-} \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



电源内部合场强：　$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_k$

电流　$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_0 + \vec{E}_k)$　（γ 为电导率）

将　$\vec{E}_0 = \dfrac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}_k$　代入，有：

$$U_{+} - U_{-} = \int_{+}^{-} \left(\frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}_k\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_{+}^{-} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{+}^{-} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

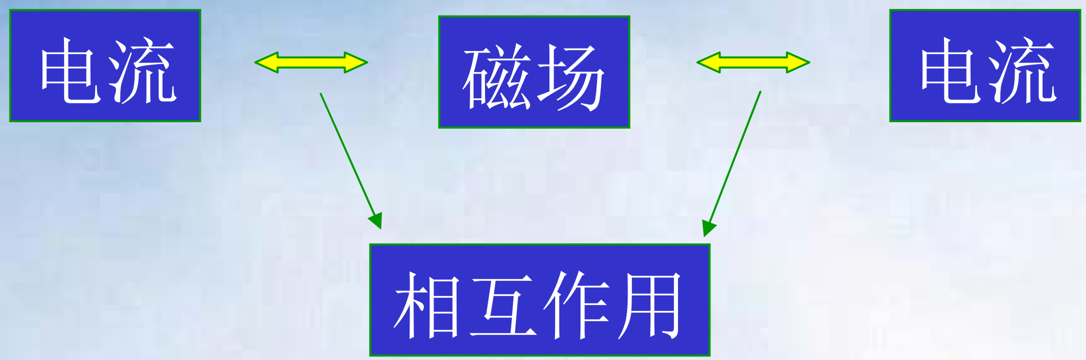
$$= \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{-}^{+} I \rho \frac{\mathrm{d}l}{S} = \varepsilon - Ir$$

第十二章　稳恒磁场

1819年奥斯特在上课时做一实验，在一通电的细铂丝下平行放置一小磁针，结果发现电流的磁效应。

奥斯特发现的电流磁效应，是科学史上的重大发现。它立即引起了那些懂得它的重要性和价值的人们的注意。在这一重大发现之后，一系列新发现接连出现。两个月后安培发现了电流间的相互作用，阿拉果制成了第一个电磁铁，施魏格发明了电流计等，安培曾写道："奥斯特先生……已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了。"

运动电荷形成磁场，磁场也是物质的一种形态。



稳恒电流产生恒定磁场或稳恒磁场。

本章讨论稳恒磁场的基本性质和规律。

§12-1 磁场　磁感应强度

一、基本磁现象

磁性：具有吸引铁、镍、钴等物质的特性。

磁极：北极N，南极S，同性相斥异性相吸。

两磁极的作用力满足平方反比率。

研究磁现象所关心的问题：磁作用是超距作用还是通过场相互作用；是否存在磁单极。

磁现象可归结为运动电荷的相互作用，这种相互作用通过磁场传递。

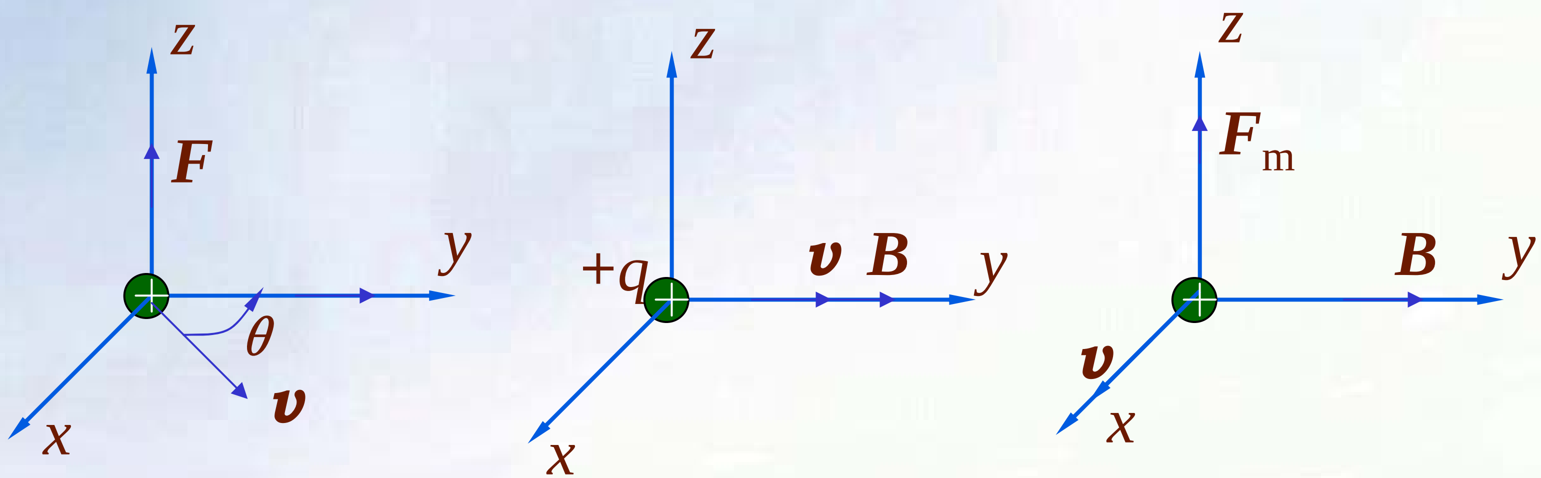
二、磁感应强度

引入检验电荷q_0以速度$\boldsymbol{v}$运动，所受的力为$\boldsymbol{F}$，实验发现：

①改变$\boldsymbol{v}$而保持速率不变，发现力$\boldsymbol{F}$总是垂直于$\boldsymbol{v}$。

②当$\boldsymbol{v}$在某些方向时，$\boldsymbol{F}=0$，定义该方向为磁感应强度$\boldsymbol{B}$的方向。

③当$\boldsymbol{v}$垂直于$\boldsymbol{B}$时，力达到极大值$\boldsymbol{F}_{max}$。



定义： $B=F_{max}/q\upsilon$。

$\boldsymbol{B}$的方向可由$\boldsymbol{F}_{m}\times\boldsymbol{\upsilon}$的方向确定，可用右手螺旋法则确定。

磁感应强度的单位T(特斯拉)，

1T=1N/(A·m)　1T=10^4G(高斯)

磁场中运动电荷受力大小 $F=q\upsilon B\sin\theta$，写成矢量式：

$$\vec{F}=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

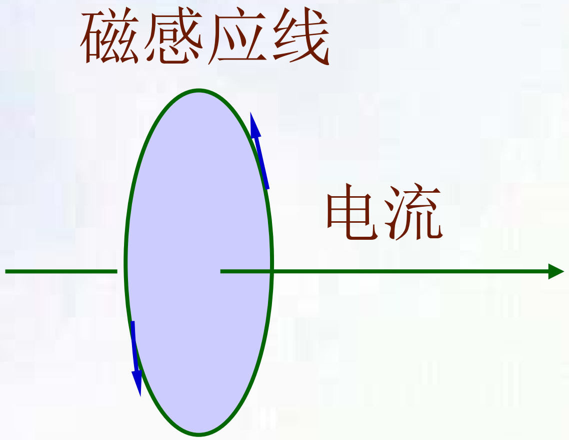
若电场和磁场同时存在，则电荷受力为：

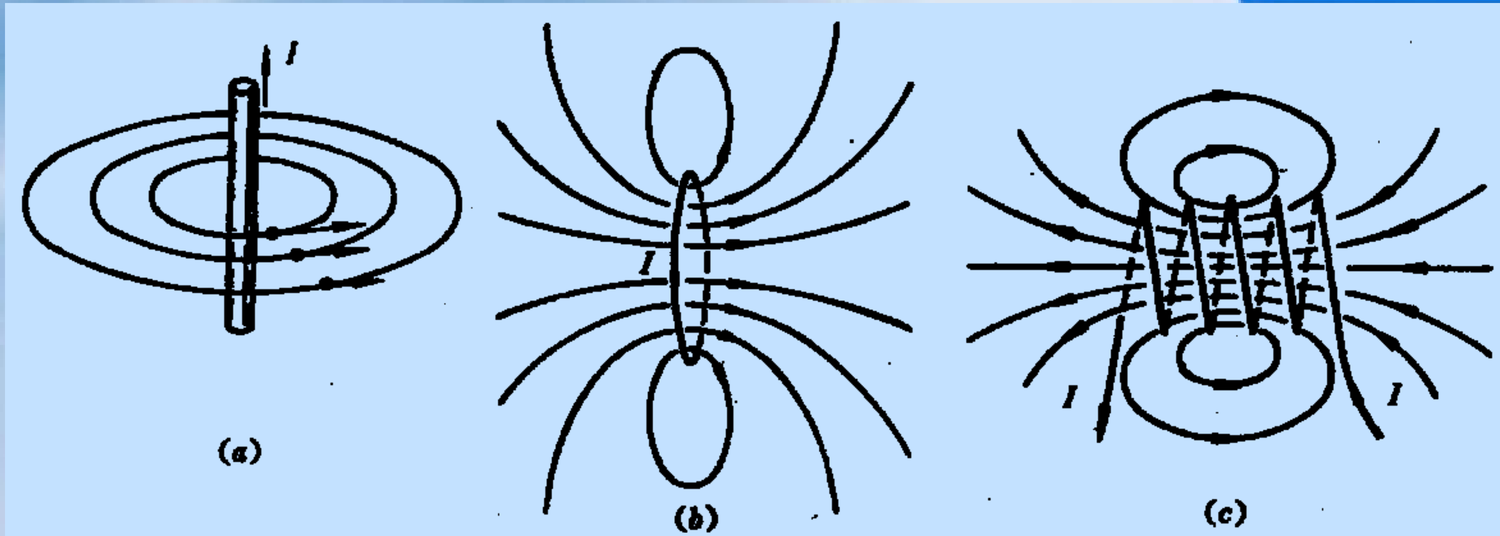
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

上式是洛伦兹从实验得出的，故称为洛伦兹力。

三、磁感应线

磁感应线：磁感应线上任一点的切线方向和该点的磁场方向一致。磁感应线是闭合曲线，环流方向和电流构成右手螺旋关系。磁场强处，磁感应线密。





几种磁场的磁感应线

磁感应线的特点：①磁感应线为闭合曲线，相应的磁场称涡旋场。②磁感应线的环绕方向与电流方向服从右手螺旋法则。

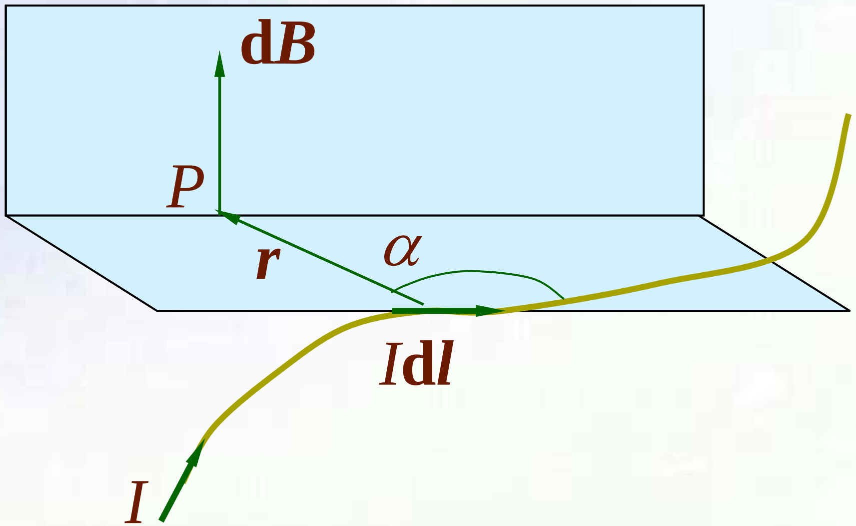
§12-2 毕奥—萨伐尔定律

一、毕奥—萨伐尔定律

毕奥和萨伐尔通过实验研究了不同形状导线产生的磁场；拉普拉斯分析他们的实验数据，提出了电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$在空间$P$点激发的磁感应强度公式：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$$



对任意载流导线所激发的总磁感应强度为：

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

二、毕奥—萨伐尔定律的应用

1. 载流长直导线的磁场

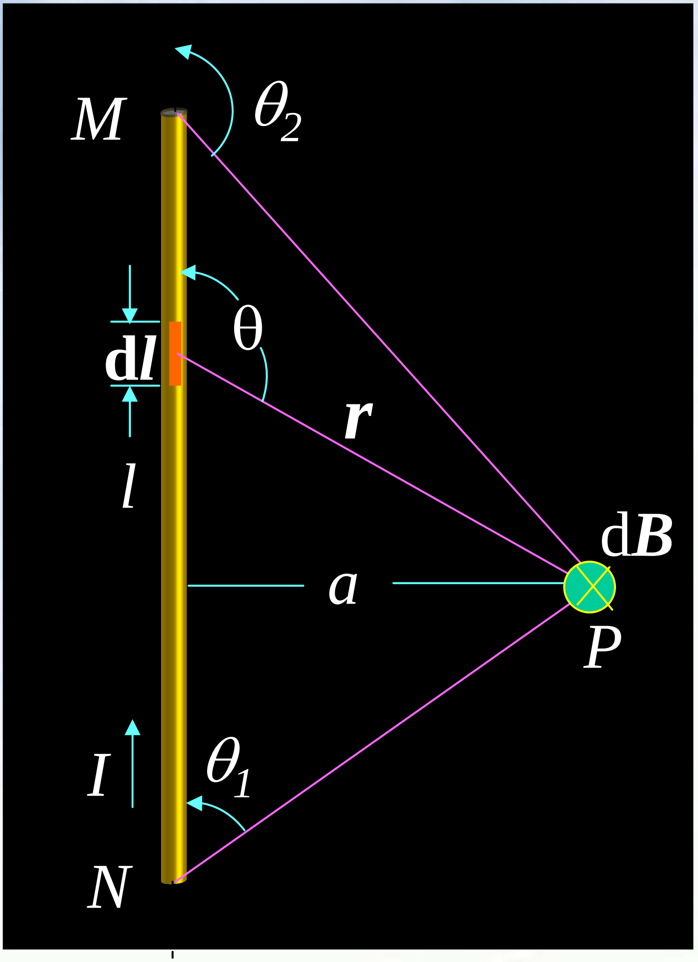
设长L的载流直导线MN，电流为I，求离导线距离为a的场点P处的磁感应强度：

取电流元**d*l***，按毕奥—萨伐尔定律，电流元在P点的磁感应强度：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

垂直纸面向内，且各电流元在P点的d***B***同向，可用标量积分求合场：

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$



上式中的变量之间的关系：

$$r=\frac{a}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{a}{\sin\theta}$$

$$l=a\cot(\pi-\theta)=-a\cot\theta,\quad dl=a\csc^2\theta d\theta$$

将以上关系式代入磁感应强度的积分式：

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$

当$L>>a$， $\theta_1=0$， $\theta_2=\pi$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$