

第二周

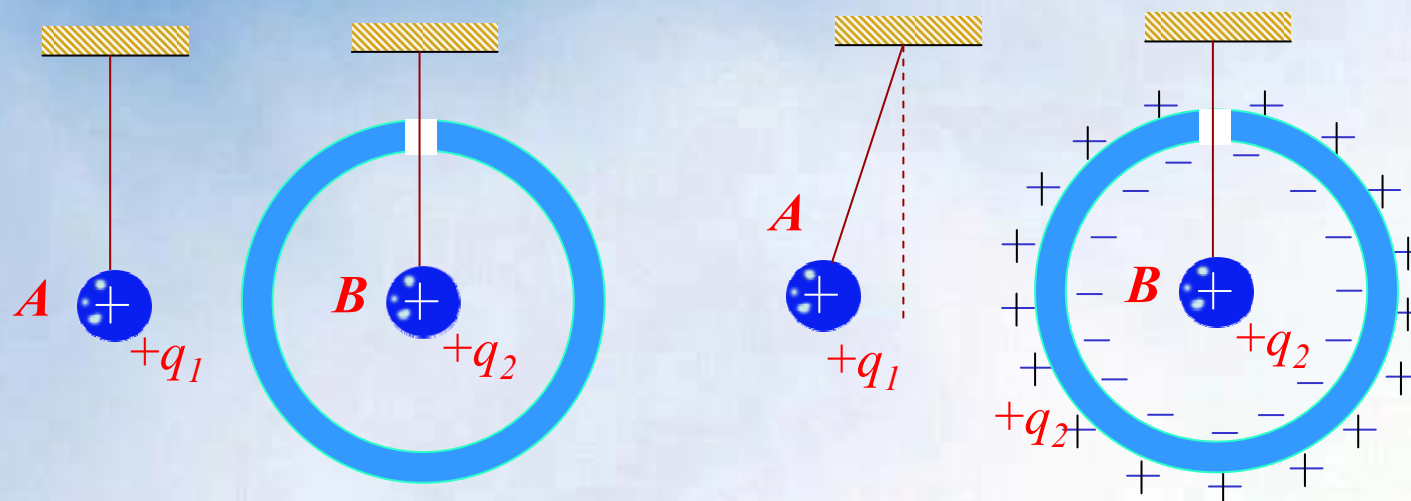
第14章 静电场中的导体和电介质

§ 14. 2, § 14. 3, § 14. 4,
§ 14. 5, § 14. 6

作业: P258 14-5, 14-7, 14-13, * *
* 14-18, 14-20

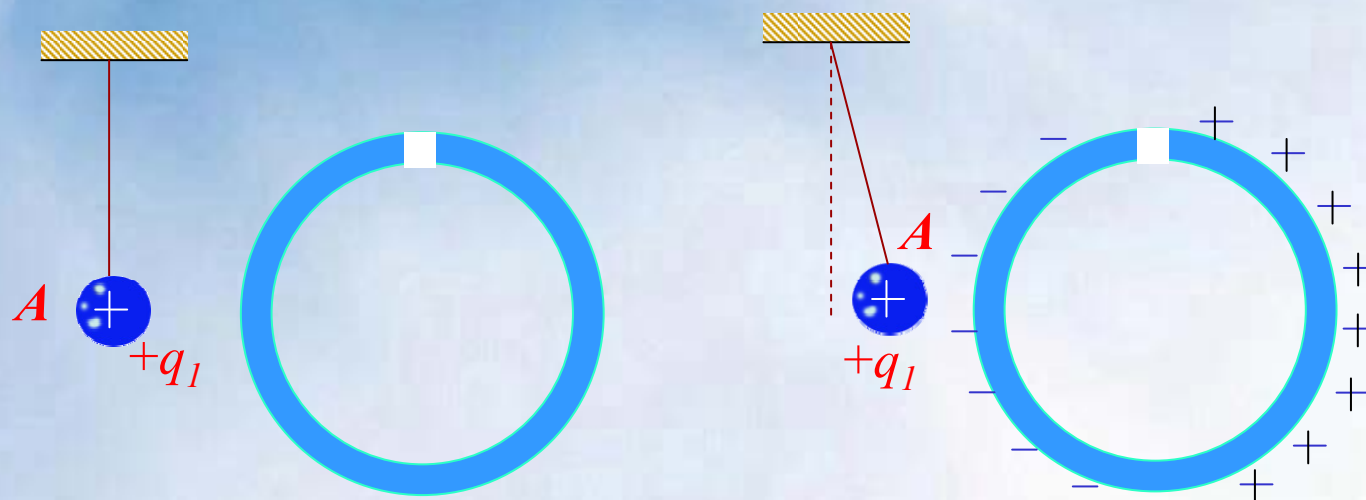
讨论题：静电场中的导体 ($+q_1 \ll +q_2$)

(1) 不带电金属球壳内有带电量为 $+q_2$ 的小球 B ，外面有带电量为 $+q_1$ 的小球 A ，则 A 球受力情况如何？



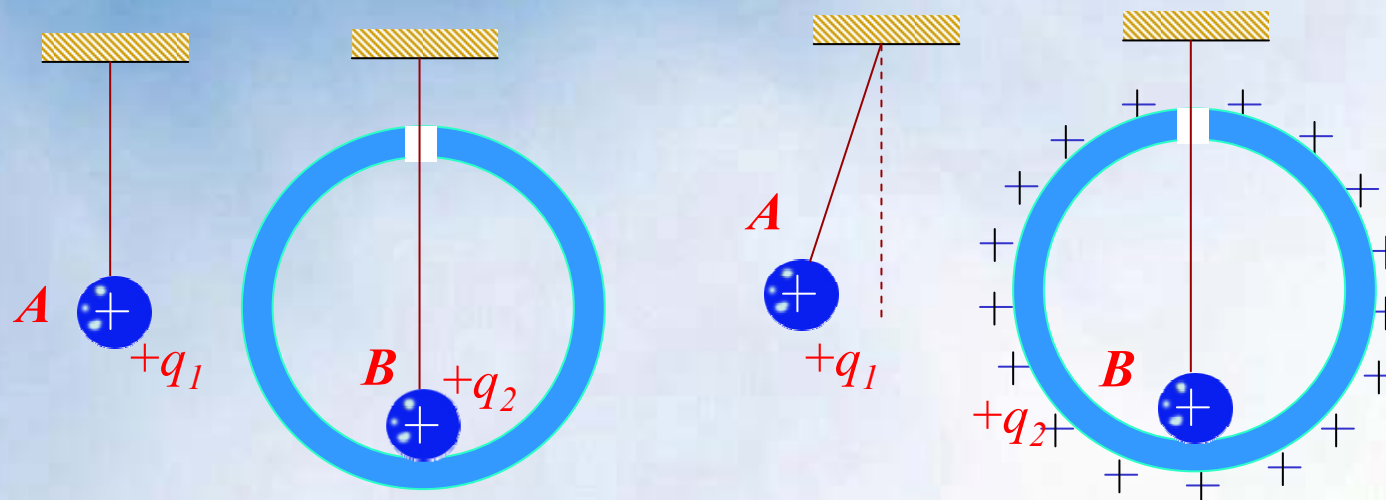
(1) 解答： B 球在球壳内表面感应电荷 $-q_2$ ，则外表面出现感应电荷 $+q_2$ ， B 球所带电量 $+q_2$ 与球壳内表面所带电量 $-q_2$ 对外产生电场完全抵消，故 A 球受到球壳外表面电荷 $+q_2$ 给它的斥力。

(2) 同上，移去B球，则A球受力情况如何？



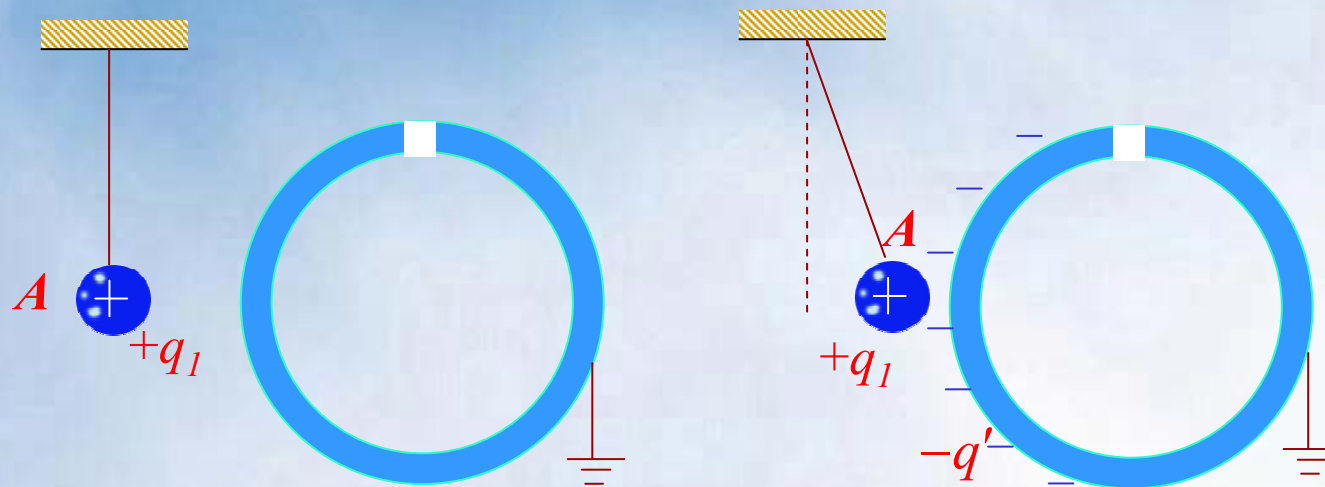
(2) 解答： 在球壳外表面将出现带电量分别为 $+q'$ 和 $-q'$ 的感应电荷。总电荷虽为零，但负电荷靠近A球，而正电荷远离A球，故A球总体上受吸引力。

(3) B球与球壳内表面接触，则A球受力情况如何？



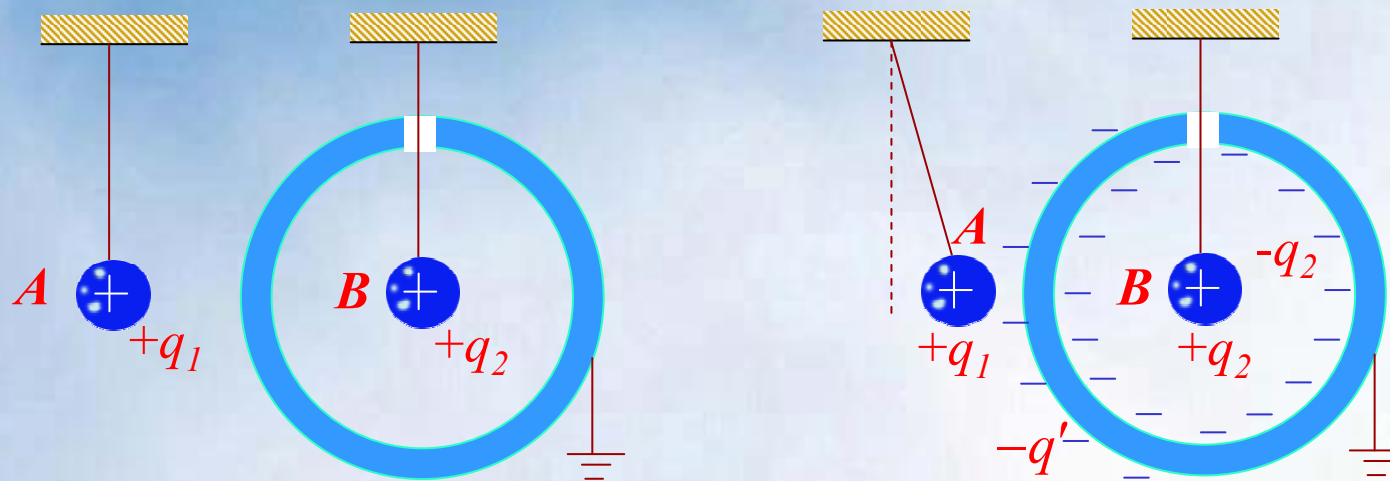
(3) 解答： B球与球壳内表面接触，则构成一体，B球所带的电荷 $+q_2$ 全部转移到了球壳外表面。

(4) 同(2)但球壳接地，则A球受力情况如何？



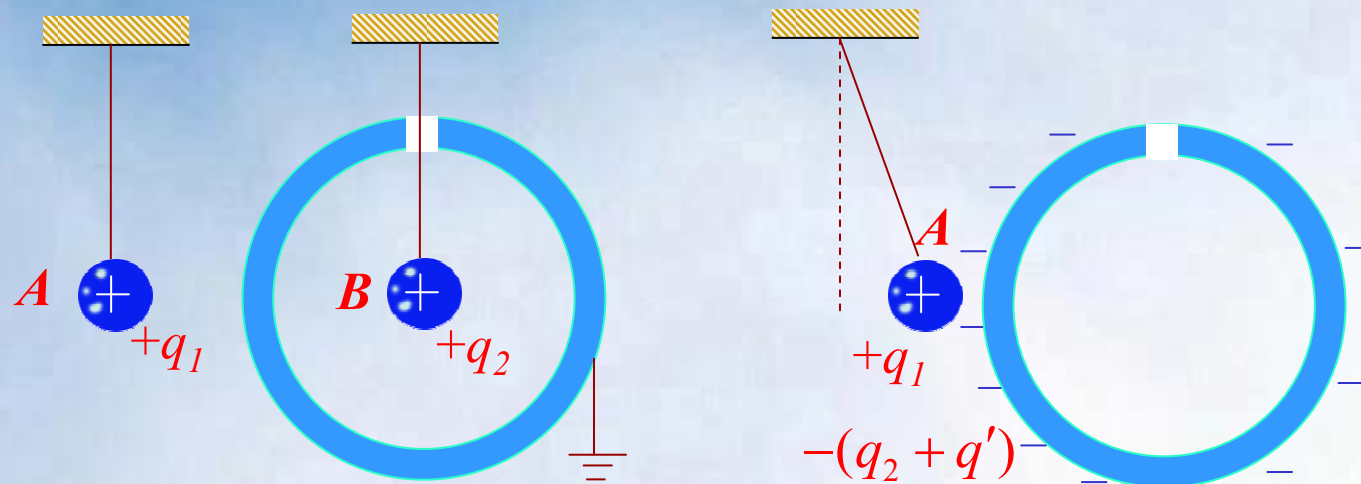
(4) 解答： 接地球壳电势为零，球壳表面的正感应电荷与大地所带的负电荷中和，只剩负感生电荷 $-q'$ 。

(5) 同(4)，但引入B球，则A球受力如何？



(5) 解答：内表面出现感应电荷 $-q_2$ ，由于接地，外表面感应电荷仍为 $-q'$ 。

(6) 在(5)的情况下，先拆地线，再移去B球，则A球受力如何？



(6) 解答：拆地线后，球壳所带总电量 $-(q_2 + q')$ ，B球移去后，这些电荷全部跑到外表面，故A球受吸引力。

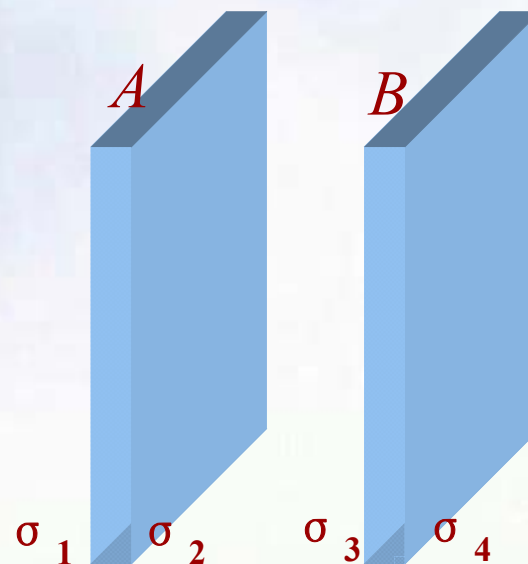
例题2:

一块面积为 S 的金属大薄平板A，带电量为 Q ，在其附近平行放置另一块不带电的金属大薄平板B，两板间距远小于板的线度。试求两板表面的电荷面密度，以及周围空间的场强分布。

解：由电荷守恒定律，根据题意：

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

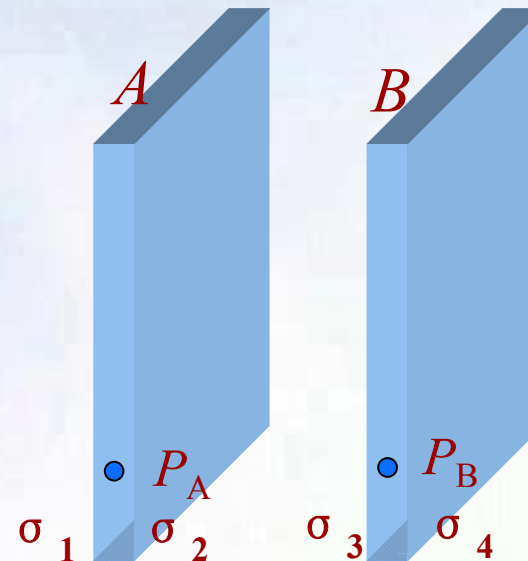
$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad (2)$$



空间任一点的场强是由4个带电平面产生的场强相互叠加。在静电平衡条件下，金属板内场强处处为0，取向右方向为正。

由无限大带电平面的结果可知， σ_1 在 P_A 点引起的场强为 $\sigma_1/2\epsilon_0$ ，方向向右，其他表面电荷 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 ，在 P_A 点引起的场强以此类推，则

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \quad (3)$$



对 P_B 点有:

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (4)$$

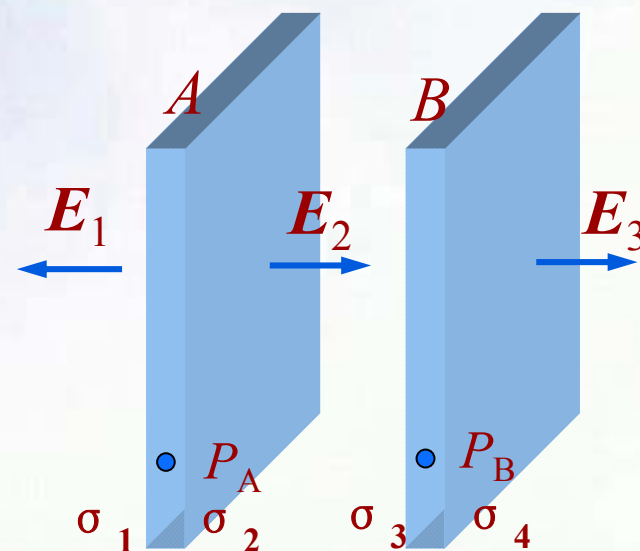
解上述4个方程, 可得:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S} \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{2S} \quad \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

因此, 空间各点场强分别为:

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{2S}$$

方向如图所示。

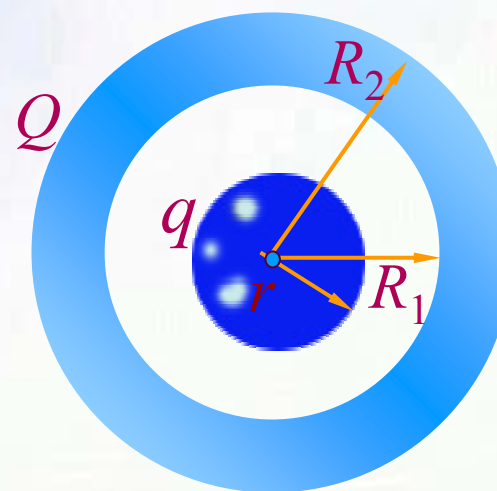


例题3:

在内外半径分别为 R_1 和 R_2 的导体球壳内，有一个半径为 r 的导体小球，小球与球壳同心，让小球与球壳分别带上电荷量 q 和 Q 。试求：

(一) 小球的电势 U_r ，球壳内、外表面的电势；(二) 两球的电势差；(三) 若球壳接地，再次求小球与球壳的电势差。

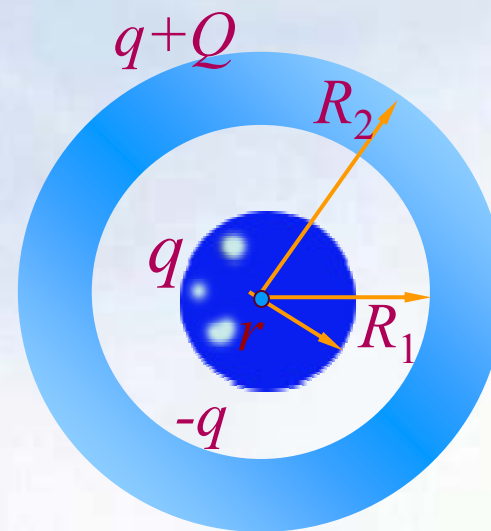
解：小球在球壳内外表面感应出电荷 $-q$ 、 q 。球壳外总电荷为 $q+Q$ ，则由电势叠加原理：



$$(1) \quad U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right)$$

$$\begin{aligned} U_{R_1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R_2} \end{aligned}$$

$$U_{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R_2}$$



球壳内外表面的电势相等。

(2) 两球的电势差

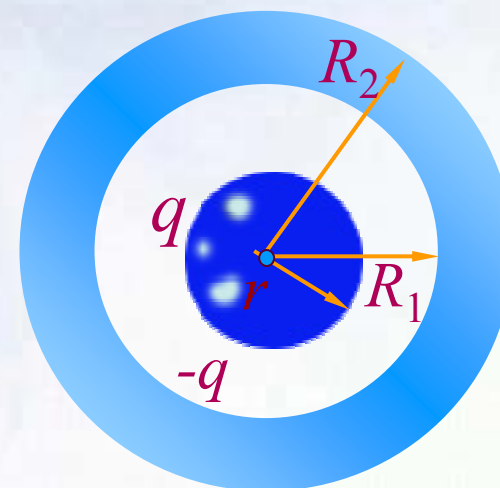
$$U_r - U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} \right)$$

(3) 外壳接地时的各量

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} \right)$$

$$U_{R_2} = U_{R_1} = 0$$

$$U_r - U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} \right)$$



§ 10-2 电容 电容器

一. 孤立导体的电容

一个孤立导体的电势 U 与所带电荷量 q 呈线性关系，其比值称为孤立导体的电容。

孤立球形导体的电容：

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$$

单位：法[拉] $1\text{F}=10^6 \mu\text{F}=10^{12}\text{pF}$

二. 电容器的电容

电容器：是两个导体组成的系统，用来储存电荷和电能。符号： $\text{—}||\text{—}$ 电容器电容定义：

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

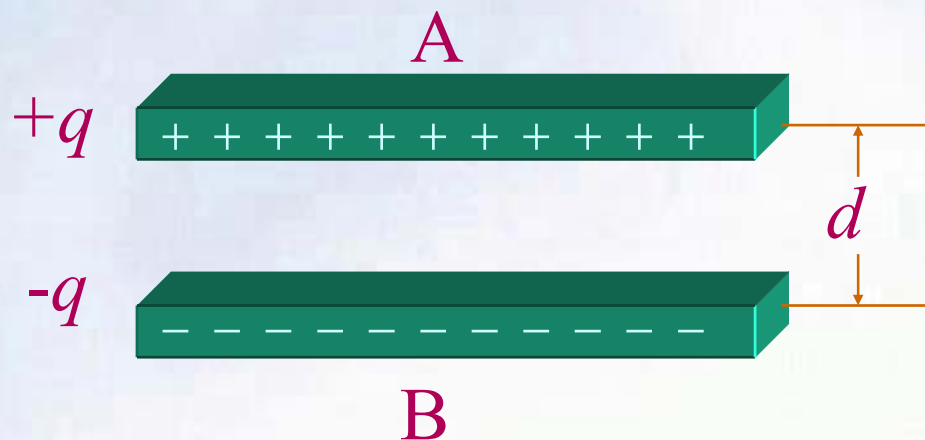
Q 为任一导体所带电量值， $U_A - U_B$ 为两导体间的电势差。



三、电容器电容的计算

1. 平行板电容器

两极板面积 S ，间距 d ，分别带电荷 $+q$ 和 $-q$ ，忽略边缘效应，



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

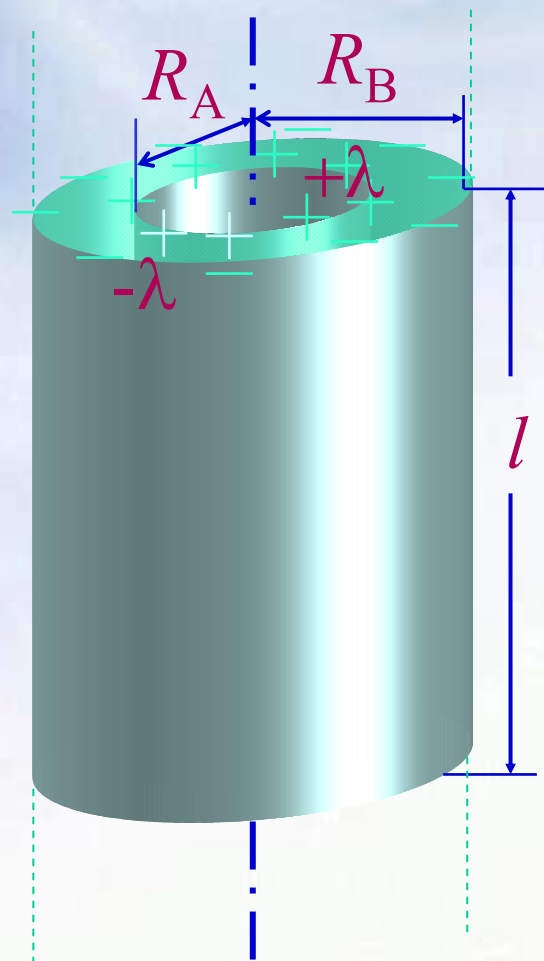
$$U_A - U_B = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

电容大小仅由材料几何结构决定。

2. 圆柱形电容器

两同轴金属圆柱面，
内、外柱面半径 R_A 、 R_B ，内外柱面线电荷密度为 $+\lambda$ 、 $-\lambda$ 。长 $l \gg (R_B - R_A)$ ，忽略边缘效应，即“无限长”，由高斯定理得：



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\begin{aligned} U_A - U_B &= \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A} \end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{\lambda l}{U_A - U_B} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_B / R_A)}$$

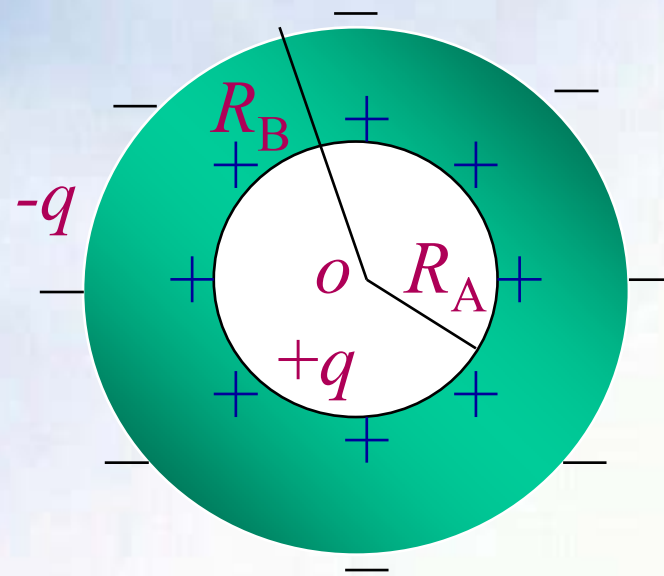
3. 球形电容器

两同心金属球壳半径分别为 R_A 、 R_B ，电荷分别为 $+q$ 、 $-q$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$



$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_B R_A}{(R_B - R_A)}$$

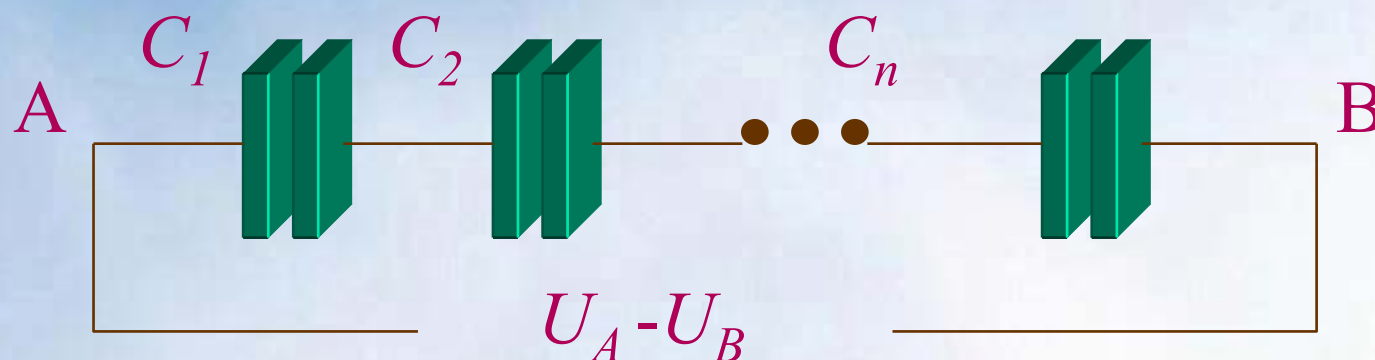
当 $R_B \gg R_A$ 时，即外壳趋向无限远， $R_B \rightarrow \infty$ ， $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 R_A$ ，为孤立导体球电容。

四、电容器的串联和并联

电容器的性能指标：电容量、耐压。

等值电容：多个电容器连接后，它们所带电量与两端电势差之比，称为它们的等值电容。

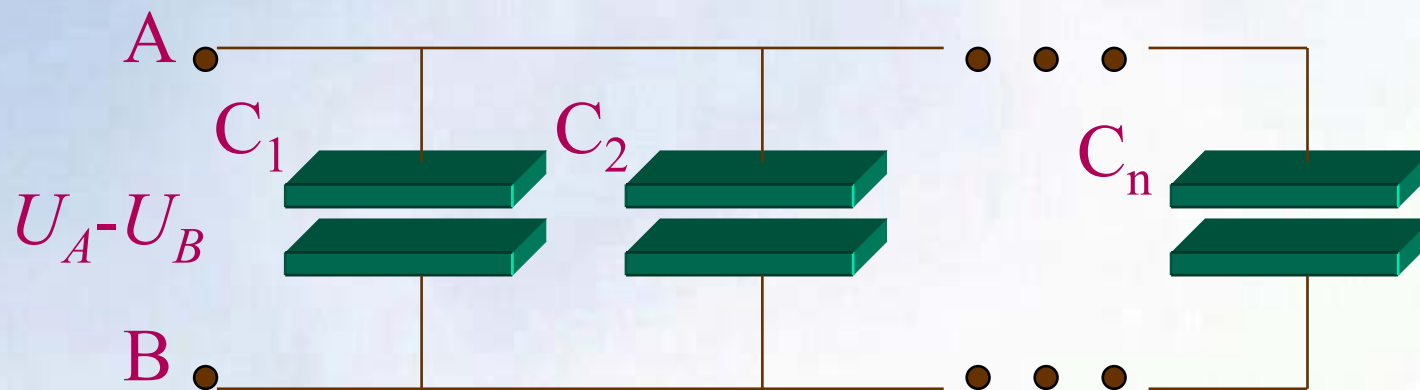
串联：有 C_1 、 C_2 、... C_n ，相应
电势差为 U_1 、 U_2 ... U_n ，每极板电量 Q ，总电势
差 $U_A - U_B = U_1 + U_2 + \dots + U_n$



$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{U_A - U_B}{Q} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{Q} \\ &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\end{aligned}$$

串联：电容减小，耐压增加。

并联：有 C_1 、 C_2 、... C_n ，相应电量为 q_1 、 q_2 ... q_n ，总电量为 $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ ，电势差为 $U_A - U_B$



$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{U_A - U_B} \\ = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

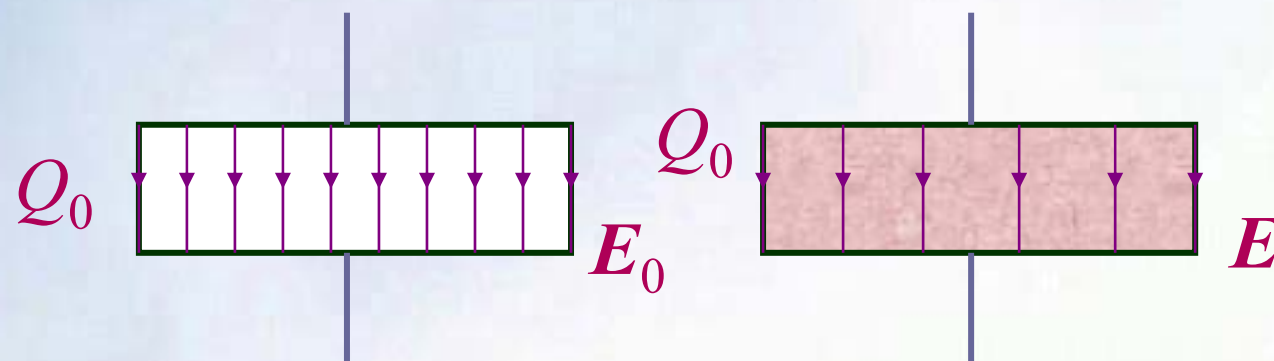
并联增加总电容，耐压值等于其中最低的耐压值。

§ 10-3 静电场中的电介质

电介质：电的非导体，绝缘介质。在外电场中对电场有影响，静电平衡时，内部场强不为零。

一、电介质对电场的影响

对平行板电容器做实验：



电介质对电场的影响

充电后 $Q_0 = U_0 C_0$ ；断电后，插入电介质，实验发现电势差变为 $U < U_0$ ， $U \propto U_0$ 。其比例常数写成 ϵ_r ，称为电介质的相对介电常数（或相对电容率），定义真空中 $\epsilon_r = 1$ 。断电后电荷 Q_0 不变，电容为原来的 ϵ_r 倍：

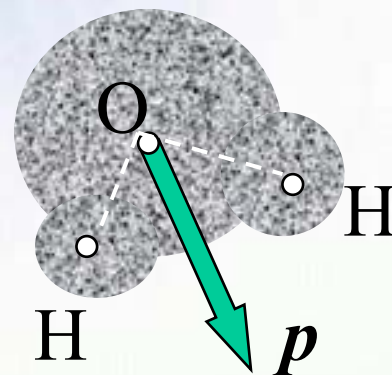
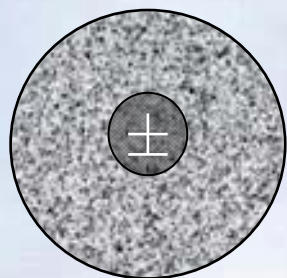
$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}, \quad C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\epsilon_r Q_0}{U_0} = \epsilon_r C_0$$

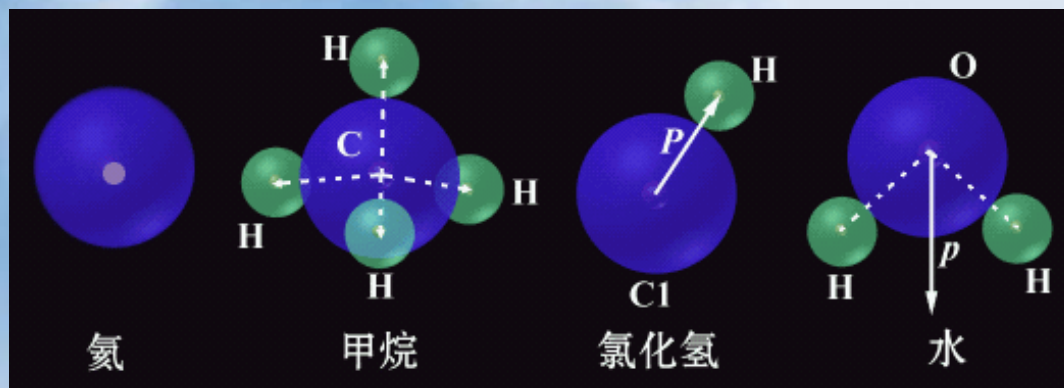
场强减小：

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\epsilon_r d} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

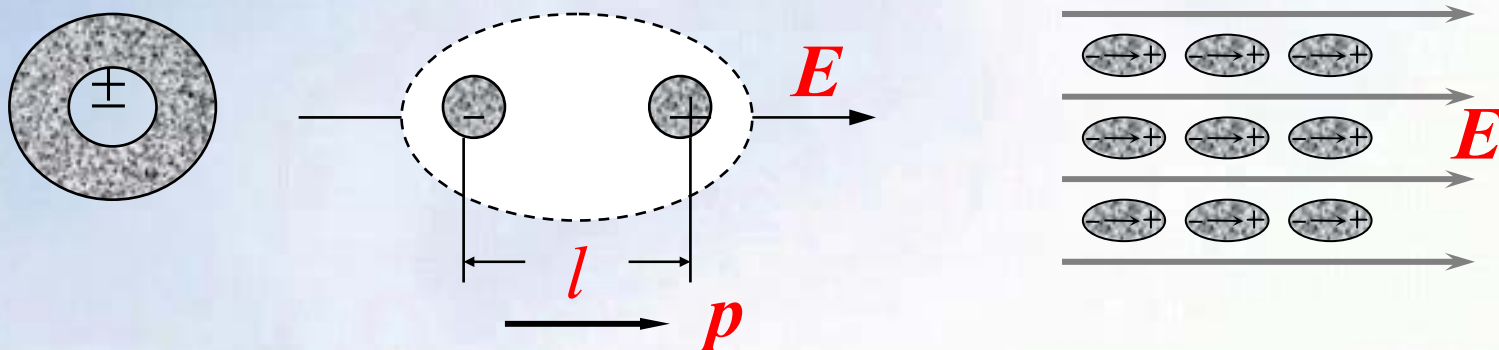
二、电介质的极化

有极分子和无极分子：原子的正负电中心重合，每个原子的电偶极矩为零。几个原子构成分子时，正负电中心可重合，可不重合，前者称**无极分子**，后者称**有极分子**。对有极分子，正负电荷中心组成**等效分子电偶极矩** p 。对大量分子的等效电偶极矩之和 $\Sigma p=0$ 。对无极分子 $p=0$ 。

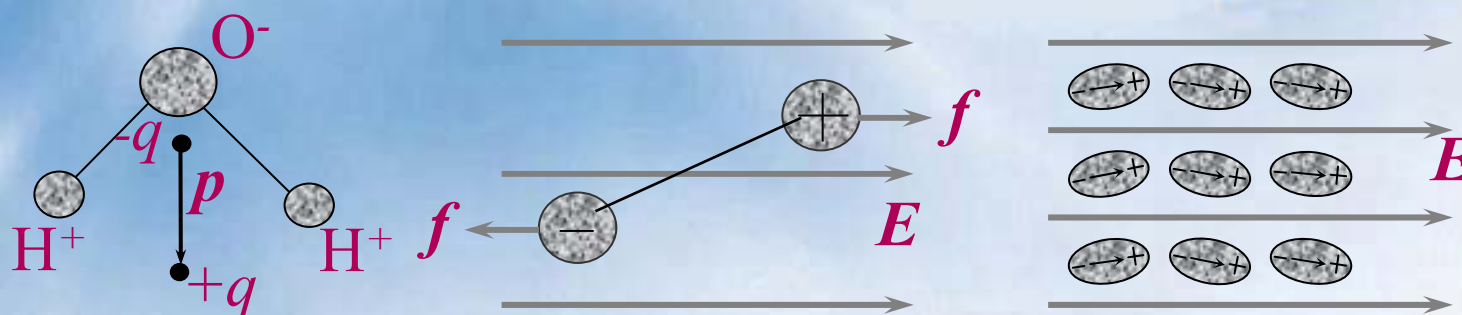




无极分子与有极分子的极化：



无极分子的极化



有极分子的极化

电介质的极化：电介质在外场中，在与外场 E_0 的垂直的表面层里出现正负电荷层，这些电荷不能自由移动，称为**束缚电荷**或**极化电荷**。这种现象称电介质的极化。无极分子的极化称为**位移极化**，有极分子的极化称为**取向极化**。

三、电极化强度矢量 极化电荷面密度

单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

称为**电极化强度矢量**。

实验表明，对大多数各向同性电介质：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

式中 χ_e 称为介质的电极化率。

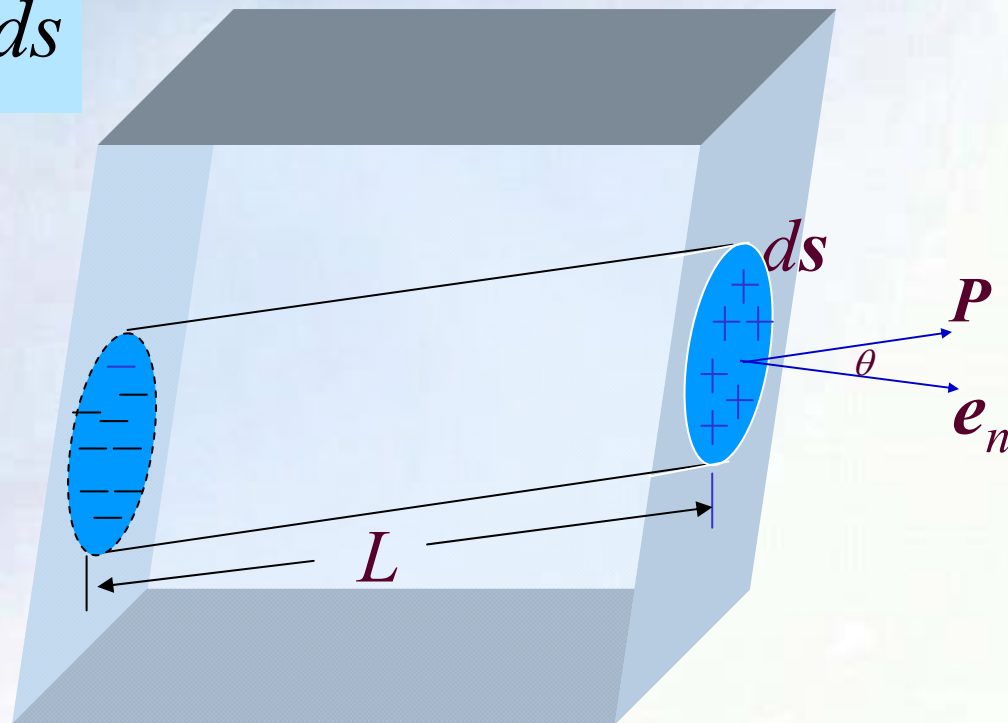
电极化强度矢量与极化电荷面密度之间的关系：斜柱体内分子的电偶极矩之和为

$$|\sum \vec{p}| = qL = \sigma' L ds$$

斜柱体的体积为：

$$dV = dsL \cos \theta$$

电极化强度矢量 \mathbf{P} 的大小为：



$$|\vec{P}| = \frac{|\sum \vec{p}|}{dV} = \frac{\sigma'}{\cos \theta}$$

所以

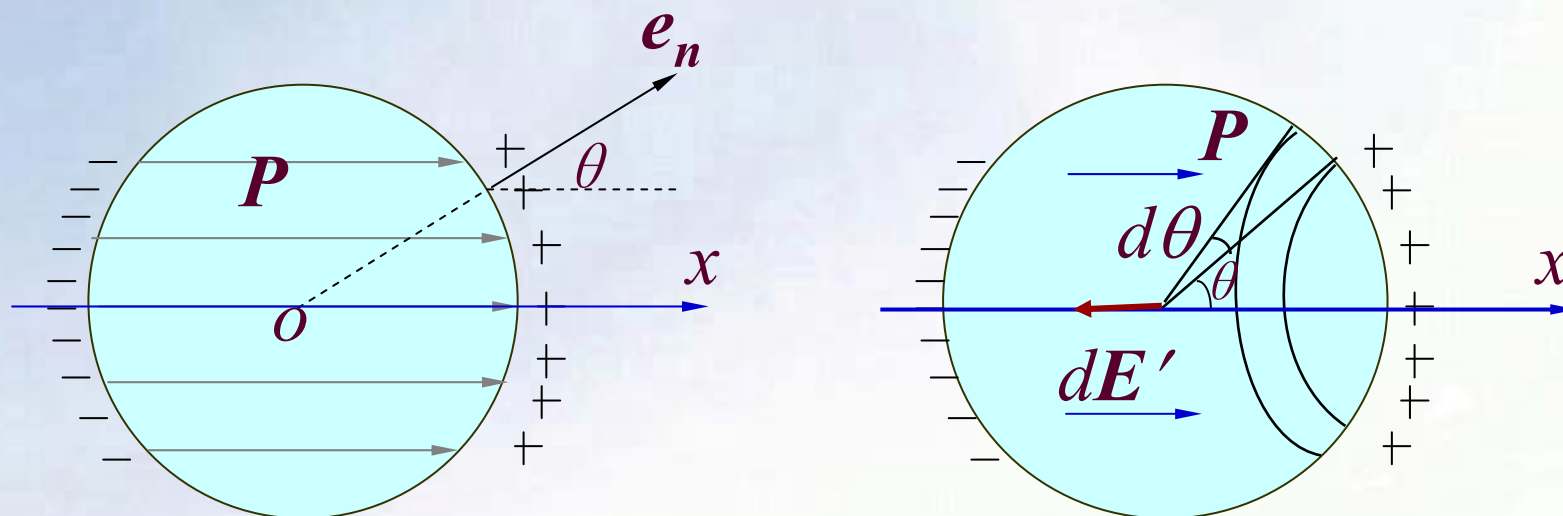
$$\sigma' = |\vec{P}| \cos \theta = P_n = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

电介质极化时的极化电荷面密度等于极化强度沿外法线方向的分量。

上面讨论仅对均匀介质而言，对不均匀介质还可能出现极化电荷体密度。

例题4:

一个半径为 R 的电介质球被均匀极化后，已知电极化强度为 \mathbf{P} ，求：(1)电介质球表面上极化面电荷的分布；(2)极化面电荷在电介质球心处所激发的场强？



解：(1) 由于 $\sigma' = P \cos \theta$

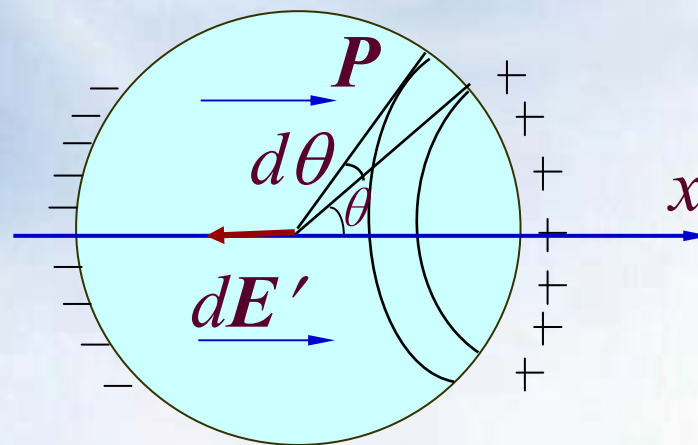
在右半球, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, σ' 为正

在左半球, $|\theta| > \frac{\pi}{2}$, σ' 为负

在两球分界面上, $|\theta| = \frac{\pi}{2}$, $\sigma' = 0$

在轴线两端 $\theta = 0$ 或 π , σ' 绝对值最大

(2) 在球面上 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 之间的环带上的极化电荷为:



$$dq' = \sigma' \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = P 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

此电荷在球心处所激发的场强：

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

方向沿X轴的负方向。整个球面上的极化电荷在球心处所激发的总场强为：

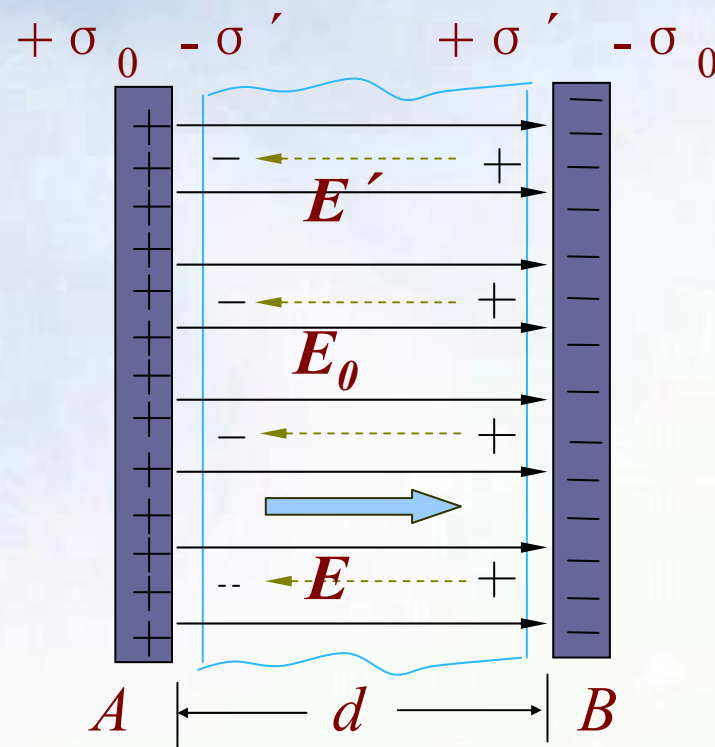
$$E' = \int dE' = \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

§ 10-4 电介质中的静电场的基本定理

一、电介质中的场强

E_0 表示自由电荷激发的电场， E' 表示极化电荷激发的电场，介质中的合场强：

$$E = E_0 + E'$$



对充满极化率为 χ_e 的电介质的无限大平行板电容器，设自由电荷密度为 $\pm\sigma_0$ ，介质表面的束缚电荷密度 $\pm\sigma'$

自由电荷的场强： $|E_0| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$

束缚电荷的场强： $|E'| = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$

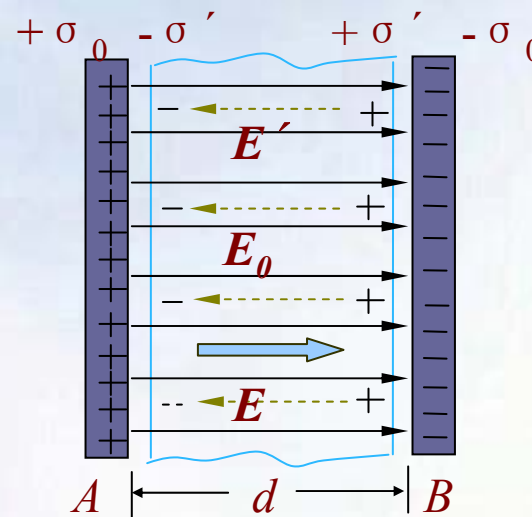
合电场的场强为：

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

介质中的电极化强度 $P = \chi_e \varepsilon_0 E$, 又 $\sigma' = P$
代入上式:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_e}$$



电介质内部的场强 E 是场强 E_0 的 $\frac{1}{1 + \chi_e}$ 倍。
平行板电容器两极板间的电势差:

$$U = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)}$$

设极板的面积为 S ，总电荷量 $q = \sigma_0 S$ ，按电容器的定义：

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0(1 + \chi_e)S}{d} = (1 + \chi_e)C_0$$

插入电介质，电容为原来的 ε_r 倍，由上式可知：

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

ε 称为介电常数或电容率。

ε , ε_r , χ_e 三者得一可求出其他两个。

从 $E = \frac{E_0}{1 + \chi_e}$ 式可知: $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$

将此关系代入 $E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \sigma_0 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \sigma_0$$

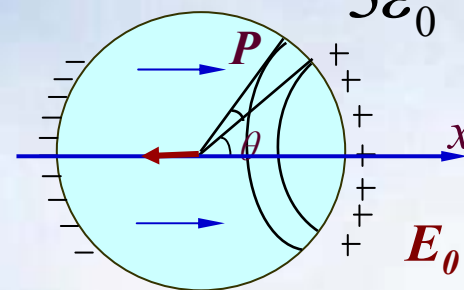
例5：介质球被极化后球心的合场强？

极化电荷在球心所激发的场强： $\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$

合场强： $E = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0}$

因 $P = \chi_e \epsilon_0 E$ 代入上式：

$$E = E_0 - \frac{\chi_e}{3} E \quad \text{或：} \quad E = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0$$



由于 $\epsilon_r + 2 > 3$ ，故电介质内的场强是减弱的。

在介质球外部，靠近上下区域，合场强减弱，靠近左右区域，合场强增强。

二、有电介质时的高斯定理 电位移矢量 D

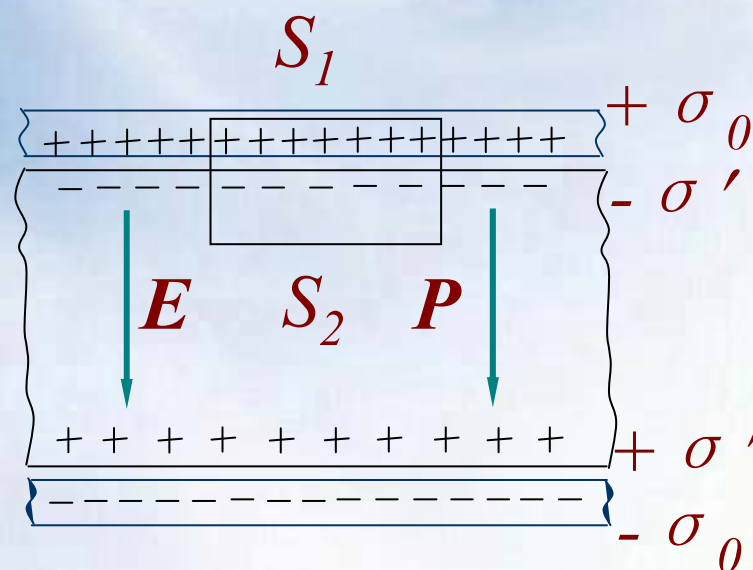
极化电荷与自由电荷一样，它所激发的还是静电场。环路定理仍然成立：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

高斯定理也仍然成立：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_0 + \sum q')$$

上式中极化电荷的分布比较复杂，它与 \mathbf{E} 相互关联，一般无法预知。图示为平行板电容器，在介质和金属板间做圆柱体高斯面，得：



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2)$$

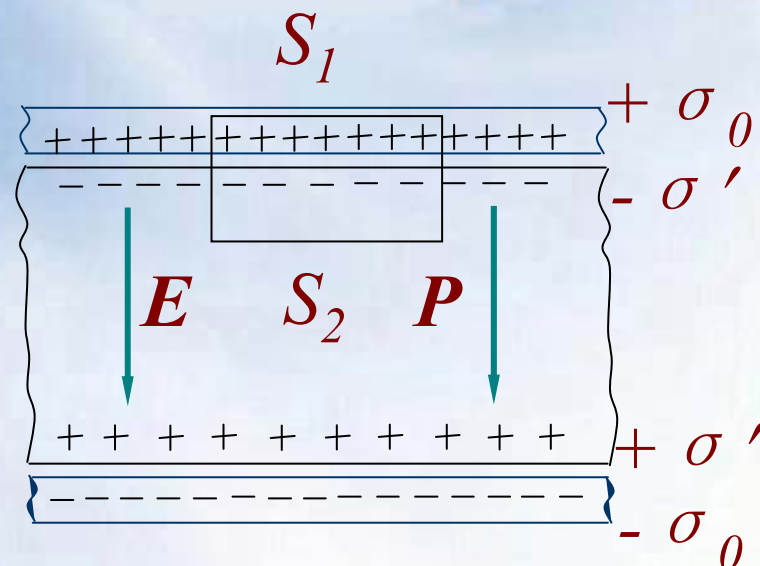
$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

$$= PS_2 = \sigma' S_2$$

将此式代入高斯定理：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 S_1 - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

上式化简：



$$\oiint_S (\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}) \cdot d\vec{s} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = q_0$$

定义电位移矢量: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

有电介质时的高斯定理为:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_0$$

上式虽然从平行板电容器推得，
但它是普遍适用，是静电场的基本定理之一。

引进电位移线：1. 电位移线上每一点的切线方向和该点的电位移 \mathbf{D} 的方向相同；2. 垂直于电位移线的单位面积上通过的电位移线数等于该点的电位移 \mathbf{D} 的量值。

电介质中的高斯定理：通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和。

\mathbf{D} 的单位是 C/m^2 。

对电位移矢量 \mathbf{D} 的几点说明：

1. 电位移矢量没有明显的物理意义；
2. 通过闭合曲面的电位移通量只与自由电荷有关；
3. 电位移矢量决定于自由电荷与极化电荷的分布；
4. 电位移矢量的定义式对各向同性和各向异性的介质都适用。

$\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}$ 三矢量之间的关系

对各向同性的介质： $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ ，代入电位移矢量的定义式：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

上式在各向异性的介质中并不适用，因为 \mathbf{D} ， \mathbf{E} ， \mathbf{P} 三量的方向可能不同。

例题6:

一半径为 R 的金属球，带有电荷 q_0 ，浸埋在均匀“无限大”电介质中（介电常数为 ε ），求球外任一点的场强及极化电荷分布？

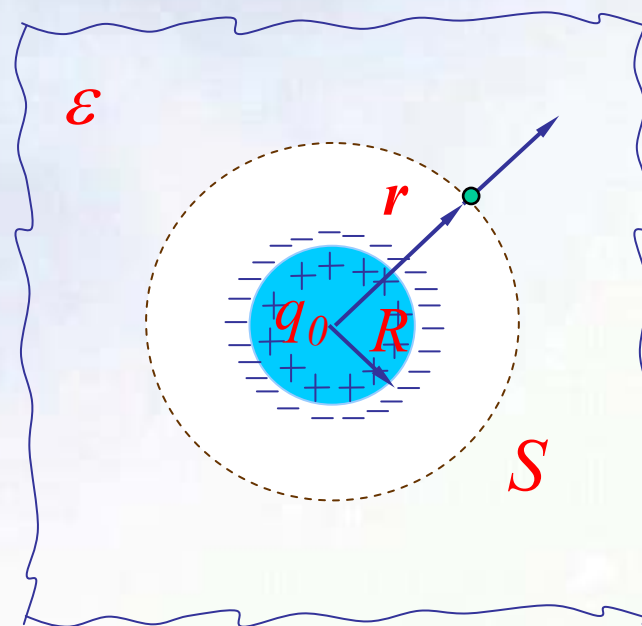
解：由题意可知，介质中的电场具有球对称性，则由高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D4\pi r^2 = q_0$$

所以 $D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$

写成矢量式为：

$$\vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^3} \vec{r}$$



因 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ，则场强为：

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \vec{r} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

电极化强度矢量 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

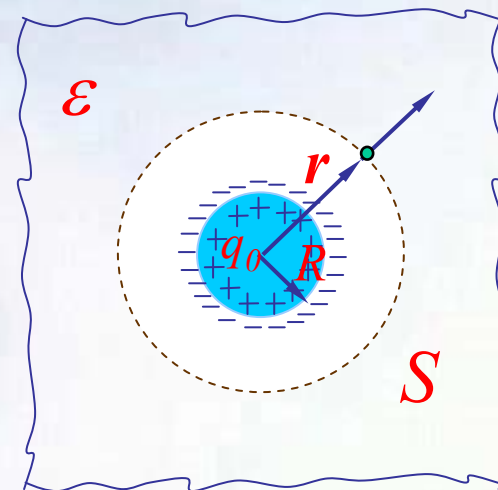
$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{q_0}{4\pi r^3} \vec{r} - \epsilon_0 \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \vec{r} \\ &= \frac{q_0}{4\pi r^3} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \vec{r} \end{aligned}$$

金属球表面的极化面电荷密度 $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$
 \vec{e}_n 是介质外法线方向的单位矢量，与 \vec{r} 反向：

$$\sigma' = -\frac{q_0}{4\pi R^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

自由电荷与极化电荷的总量为：

$$q_0 - q_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{q_0}{\epsilon_r}$$



由于总电荷量减小到自由电荷量的 $1/\epsilon_r$ ，介质中的场强减小为真空时的 $1/\epsilon_r$ 倍。