浙江大学 20 17 -20 18 学年 秋冬 学期

《线性代数(甲)》课程期中考试试卷参考答案

一. (本题 15 分)计算下列 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$,其中x,y,z为任意实常数.

答: $y=z$ 时, 行列式值为 $[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$; $y\neq z$ 时, 行列式值为 $\dfrac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}$.

二. (本题 20 分)设 k 为实常数,现有线性方程组如下:

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases} \tag{1}$$

.

问当 k 取何值时, 上述方程组 (1) 无解?有唯一解?有无穷多个解?当方程组 (1) 有解时,求出其所有解.

答:方程组系数矩阵的行列式为 $(k+2)(k-1)^2$. $k=-2$ 时, 方程组无解(因为系数矩阵的秩为2,增广矩阵的秩为3); $k\neq -2, k\neq 1$ 时,方程组有唯一解: $x_1=\dfrac{k-1}{k+2}, x_2=x_3=\dfrac{-3}{k+2}$; $k=1$ 时, 方程组有无穷多个解 $x_1=-2-s-t, x_2=s, x_3=t$, 其中 s,t 为任意常数.

三. (本题 20 分)求解下述矩阵方程:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

答: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. 其中 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

四. (本题 15 分)设 n 是一个正整数, A 是一个秩为 r 的 n 阶实方阵, 试证明: 存在一个秩为 $n-r$ 的 n 阶实方阵 B 使得 $AB=O$.(其中 O 为 n 阶零方阵)

证:由题设 $r(A)=r$, 若 $r=n$,则可令 $B=O$,于是结论成立.

若 $r<n$,由线性方程组理论知, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的所有解向量中必可选取 $n-r$ 个解向量,使得以这 $n-r$ 个解向量为列,若 $r>0$,再添加 r 个全为0的列组成的矩阵的秩为 $n-r$, 设该矩阵为 B ,则结论 $AB=O$ 成立.

五. (本题 15 分)

设 A 是一个秩为 1 的 n (n 是一个正整数)阶实方阵, 试证明:

(1). 存在 $2n$ 个实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 使得 $A=(a_1\cdots a_n)^T(b_1\cdots b_n)$;

(2). 存在实数 k 使得 $A^2=kA$.

证:(1). 因为 $r(A)=1$,故 A 中必有一非零行, 而其余行都是这一行的倍数(否则 $r(A)>1$).于是不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

由此可得 $A=(a_1\cdots a_n)^T(b_1\cdots b_n)$.

(2). 由(1)得: $A^2=(a_1\cdots a_n)^T(b_1\cdots b_n)(a_1\cdots a_n)^T(b_1\cdots b_n)$,利用矩阵乘法的结合律,中间两项先乘, 于是可令 $k=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$, 则有 $A^2=kA$.

六. (本题 8 分)

设 m,n,s 为正整数, 已知线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=d_{m\times 1}$ 有解,线性方程组 $B_{m\times s}X_{s\times 1}=c_{m\times 1}$ 无解, 令 $G=(A\ B\ d\ c)_{m\times(n+s+2)}$, 试证明: $r(G)\le r(A)+r(B)+1$.

证:令 $\overline{A}=(A\ d),\overline{B}=(B\ c)$, 由线性方程组的理论和题设可知: $r(A)=r(\overline{A}),r(\overline{B})=r(B)+1$, 由列互换不改变矩阵的秩可得 $r(G)=r(\overline{A}\ \overline{B})$,从而可得 $r(G)=r(\overline{A}\ \overline{B})\le r(\overline{A})+r(\overline{B})=r(A)+r(B)+1$, 小于等于号可以用分块矩阵证明,例 $r(A)+r(B)=$

$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A\ B)$.

七. (本题 7 分) 设 A, B, C, D 为 4 个 n (n 是一个正整数)阶实方阵, 试证明: 当 $AC = CA$ 时有

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|.$$

证:若 A 可逆, 则由 $\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}D \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B - CA^{-1}D \end{pmatrix}$,两边取行列式得 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B - CA^{-1}D| = |AB - ACA^{-1}D|$,由于 $AC = CA$,故 $|AB - ACA^{-1}D| = |AB - CAA^{-1}D| = |AB - CD|$.

若 A 不可逆, 即 $|A| = 0$, 令 $f(x) = |xE + A|$, 则由行列式的定义知, $f(x)$ 是一个关于 x 的首一 n 次多项式, 于是总存在一个实数 a ,使得当 $x \geq a$ 时有 $f(x) \neq 0$, 即 $xE + A$ 可逆. 又由 $AC = CA$ 可得 $C(xE + A) = (xE + A)C$. 于是由上一段可逆时的结果有

$$\begin{vmatrix} xE + A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |(xE + A)B - CD|. \tag{2}$$

由于这个等式(2)对所有的 $x \geq a$ 都成立,从而它是一个关于 x 的恒等式, 特别地当 $x = 0$ 时等式(2)也成立, 故此时也有

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|.$$