第四周

第15章 电流和磁场

§ 15.3, § 15.5, § 15.6, § 15.7,

§ 15.9, § 15.10(一般了解)

作业: P285 15-3, 15-5, 15-8, 15-10, 15-11, 15-14

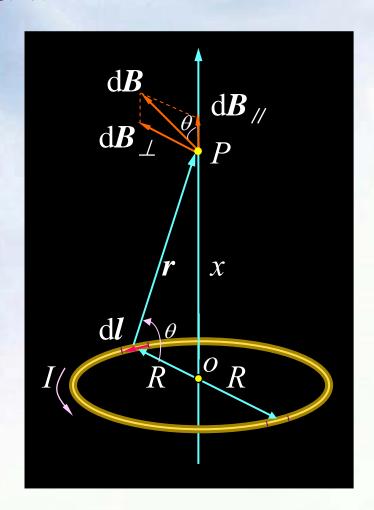
2. 载流圆线圈轴线上的磁场

设圆形线圈半径R,通电流I,计算轴线上P点处的磁感应强度。由流源dL,在P占产生的

电流源dI,在P点产生的dB为:

$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$$

dB可分解为 $dB_{//}$ 和 dB_{\perp}



 dB_{\perp} 分量相互抵消, dB_{\parallel} 相互加强:

$$B = \int \mathrm{d}B_{//} = \int \mathrm{d}B \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$
 代入上式得:

$$B = \int dB_{//} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 IR}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

B的方向沿OP轴,与电流方向成右螺旋关系。

讨论两特殊点的情况:

①在圆心O处,
$$x=0$$
,则: $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$

若圆线圈密绕N匝,则: $B(0) = \frac{\mu_0 IN}{2R}$

②在轴线上远离圆线圈 (x>>R):

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3}$$

上式中 $S=\pi R^2$ 为圆线圈的面积。

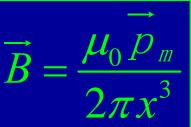
载流线圈的磁矩 磁偶极子

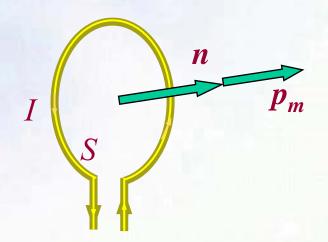
引入磁矩 pm来描述载流线圈的磁性质:

$$p_m = NISn$$

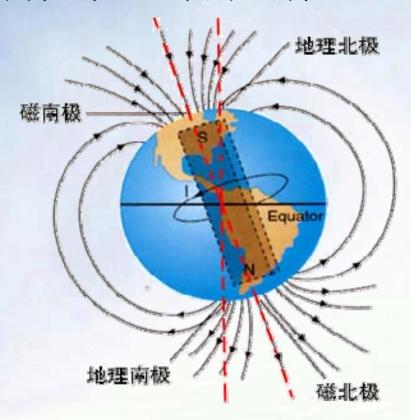
n的方向与电流环绕方向呈右手螺旋关系。

引入磁矩概念后,在轴线上远离载流圆线圈的磁场为:





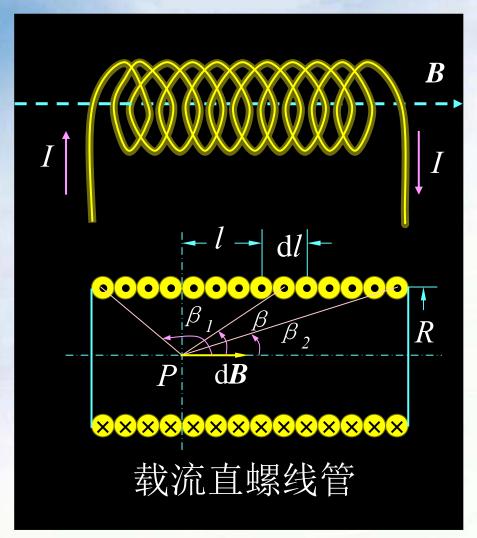
场点到场源的距离远大于线圈尺寸的载流线圈—磁偶极子。一般地说,转动的带电球体等效于一个圆形电流,在远处可看成磁偶极子的场,如地球的磁场。



3. 载流直螺线管内部的磁场

计算螺线管内轴线上P点的磁感应强度。在螺线管人工。在螺线管上取dl,相当于电流强度Indl的圆电流,它在P点产生的磁感应强产生的磁感应强度的大小为:

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$



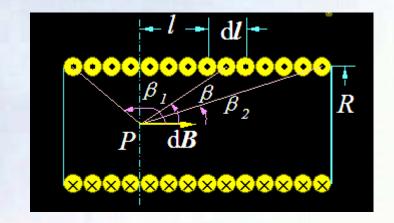
引入变量 β,它是P点到dl 所引矢量与轴线间的夹角,由图可知:

$$l = R \cot \beta \qquad dl = -R \csc^2 \beta d\beta$$

$$R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$$

代入上式得:

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta \mathrm{d}\beta$$



各圆电流在P点产生的dB方向相同。

整个螺线管在P点产生的磁感应强度为:

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

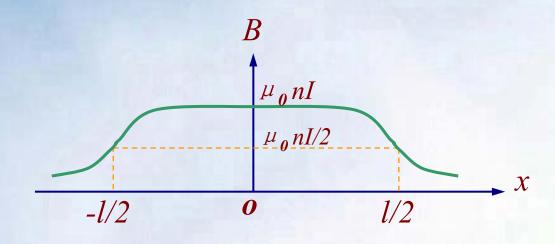
讨论两种特殊情况:

①L>>R, 此时 $\beta_1 \rightarrow \pi$, $\beta_2 \rightarrow 0$, 于是有:

$$B = \mu_0 nI$$

②长直螺线管上的两端点, $\beta_1 = \pi/2$, $\beta_2 \rightarrow 0$ 或 $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_1 \rightarrow 0$,则:

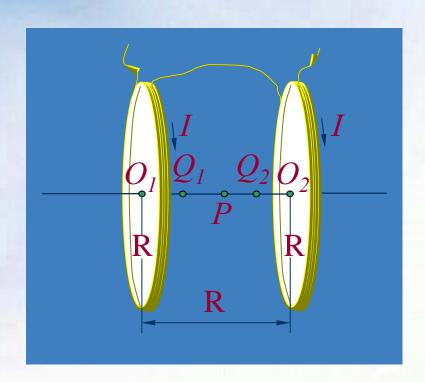
$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI$$



直螺线管轴线上的磁场分布

亥姆霍兹(Helmholtz 1838-1894)线圈。

设两线圈半径R, 间距也为R,各有 N匝,电流为I。两 线圈沿轴线上各点 的磁场方向均向右 。在圆心O₁、O₂处 磁感应强度相等, 大小为:



$$B_O = \frac{\mu_0 NI}{2R} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\mu_0 NI}{2R} (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0.677 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

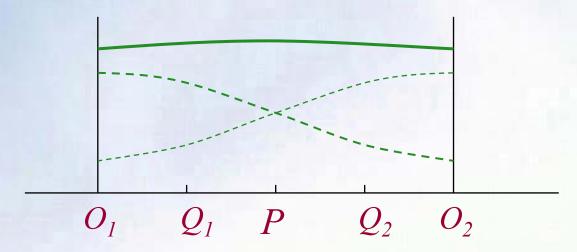
两线圈轴线上中点P处的磁感应强度:

$$B_P = 2 \frac{\mu_0 NIR^2}{2[R^2 + (\frac{R}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} = 0.716 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

在P点两侧的Q1、Q2两点, 磁感应强度为:

$$B_{Q} = \frac{\mu_{0}NIR^{2}}{2[R^{2} + (\frac{R}{4})^{2}]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_{0}NIR^{2}}{2[R^{2} + (\frac{3R}{4})^{2}]^{\frac{3}{2}}} = 0.712 \frac{\mu_{0}NI}{R}$$

由此可见, 轴线上的磁场基本均匀。

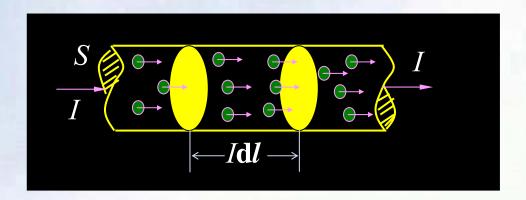


三、运动电荷的磁场 &

电荷的定向运动形成电流,可从毕奥—萨伐尔定律导出运动电荷的磁场表达式:

设带电粒子数密度n,每电荷的带电量q,漂移速度v,电流元Idl,导体的截面S,则:

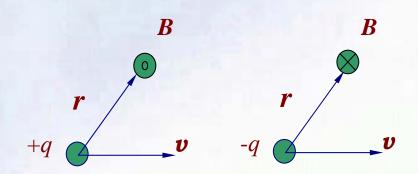
$$I = qnvS$$



电流元Idl内有带电粒子数 dN = nSdl 设dB为这些运动粒子所激发的磁场,则每个粒子所激发的磁场为B(vdl = vdl):

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}\right) / dN = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

关于磁场的方向, 见下图:

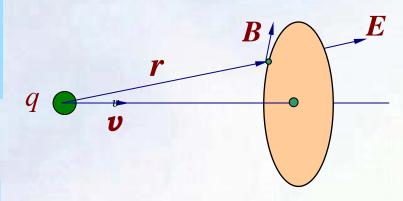


当运动电荷速率v接近光速时上式不成立。 运动电荷同时要激发电场,当速度v远小 于光速时,电场强度仍表示为:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

将此式代入上式:

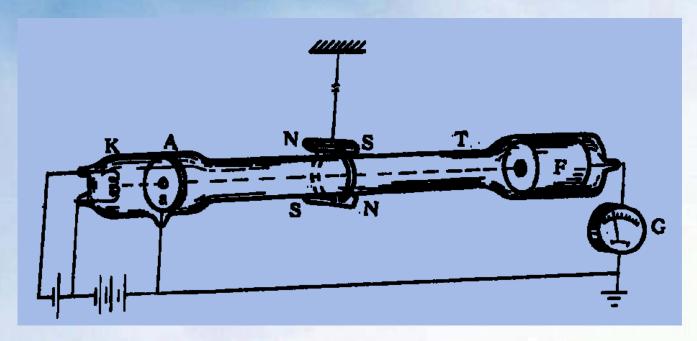
$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$



运动正电荷激发的电场和磁场

说明运动电荷激发的电场和磁场紧密相关。

运动电荷激发磁场的实验验证:



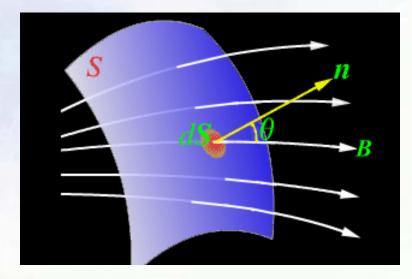
测定电子射线磁场的实验装置简图

§ 12-3 磁场的高斯定律 安培环路定律

一、磁通量

磁通量:通过一给定曲面的总磁感应线数,用 • 表示:

如图,dS与磁感应强度B的夹角为 θ ,则通过dS的磁通量为:



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \vec{\Box} \quad d\Phi = B\cos\theta dS$$

通过有限曲面S的磁通量为:

$$\Phi = \iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量的单位T·m², 叫做韦伯Wb。 1T=1Wb/m²。

二、磁场中的高斯定律

磁感应线是无始无终的闭合线,从一闭合面穿进的磁力线,必从另一处穿出。

对闭合曲面,取外法线方向为正,磁力线从闭合曲面穿出磁通量为正,穿入为负,则对闭合曲面:

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

此式称为磁场中的高斯定理,可从毕奥—萨伐尔定律出发严格证明。

磁场中的高斯定理反映了无源场的特性,电场中的高斯定理反映了有源场的特性。

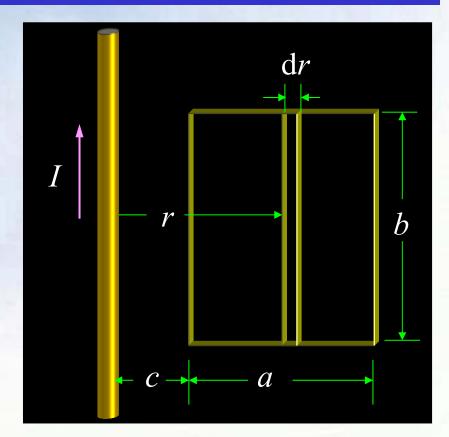
例题1 :

一无限长直导线通有电流 I, 其近旁平行放置一矩形线框, 求穿过矩形线框的磁通量?

解: 无限长载流直导线磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在距导线r处取面元 bdr,则通过此面元的磁通量为:



$$d\Phi_m = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr$$

则通过整个矩形线框的总磁通量为:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln(\frac{a+c}{c})$$

三、安培环路定律

我们在研究静电场时,得到静电场的环流为零;但对磁场而言,由于磁感应线是闭合的,**B**的环流不为零。

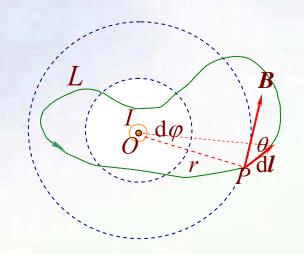
下面以无限长直导线为例来研究磁感应强度的环流问题:

在垂直于导线的平面内做一闭合曲线,线上任一点的磁感应强度:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

I为导线电流,见图:





图中 $dl\cos\theta = rd\varphi$

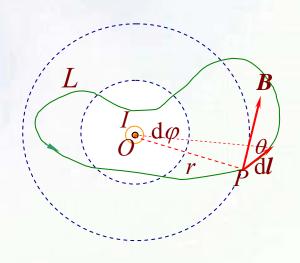
按如图的绕行方向B矢量沿闭合曲线的环路积分为:

$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L} B \cos \theta dl = \oint_{L} B r d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{\mu_{0}}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

当L不在垂直于导线的平面,将dl分解为dl₁和dl₁,所以:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l}_{\perp} + d\vec{l}_{//}) =$$

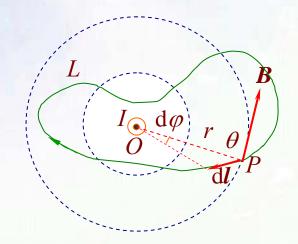


$$= \oint_L B\cos 90^0 dl_\perp + \oint_L B\cos \theta dl_{//}$$

$$=0+\oint_{I} Br d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

此结果与上式相同。

如果其他条件不变,只改变绕行方向,则:



$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L} B \cos \theta dl = \oint_{L} Br d\varphi$$

$$= \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \int_{0}^{-2\pi} d\varphi = -\mu_{0}I$$

把上式的负号放入电流中,即 $-\mu_0 I = \mu_0 (-I)$

可以认为对闭合曲线的绕行方向而言, 电流取负值。

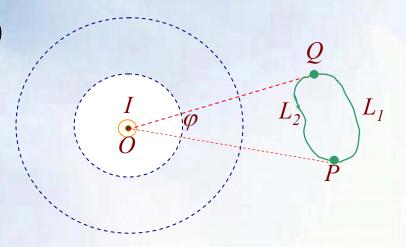
闭合曲线不包围电流时, B矢量的环流为:

$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_{1}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_{2}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi) = 0$$

闭合曲线不包围电流时, **B**矢量的环流为零。

在一般情况下:



$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

上式称为安培环路定理。表述如下:

在磁场中,沿任何闭合曲线,B矢量的线积分(或B矢量的环流),等于真空的磁导率 μ_0 乘以穿过这个闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

环路定律中电流的正负值由右手螺旋法则决定。

环路定律中电流 I 只包括穿过环路的电流,但定理中的磁场是环路内外的电流共同决定的。

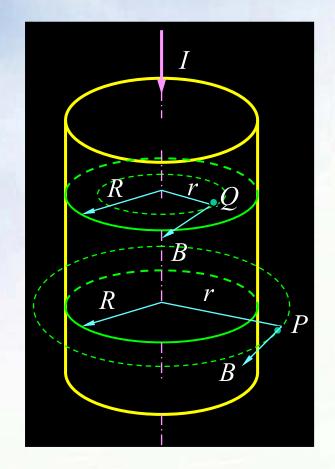
B矢量的环流不为零,表明磁场不是有势场。

四、安培环路定理的应用

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场

设:圆柱截面半径为R, 电流 I 沿轴流动,过P点 (或Q点)取半径为r的 磁感应线为积分回路, 则B矢量的环流为:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r$$



当r>R(图中P点),由环路定律得:

$$B2\pi r = \mu_0 I$$
 即:

$$B2\pi r = \mu_0 I \qquad \exists \Gamma: \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

当r < R(图中Q点),可考虑两种情形:

①电流分布在圆柱形导体表面:

②电流均匀分布在圆柱形导体的截面上时,穿 过积分回路的电流应是:

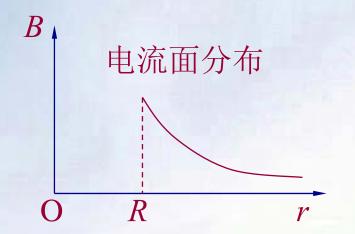
$$\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

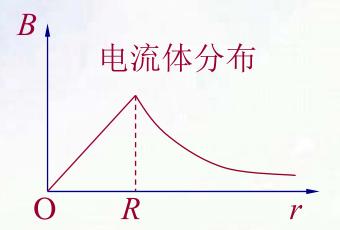
所以,应用安培环路定律得:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

由此可得Q点的磁感应强度为:

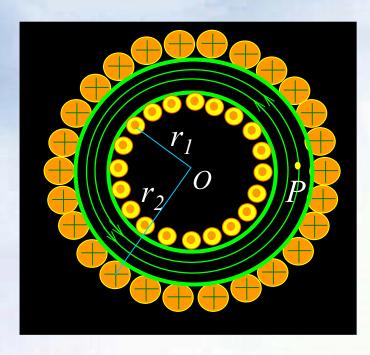
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2}$$





2. 载流螺绕环内的磁场

考虑到对称性,环内磁场的磁感应线都是同心场的磁感应线都是同心圆,选择通过管内某点P的磁感应线L作为积分环路,则B矢量的环流:



$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{L} dl = B2\pi r$$

设环上线圈的总匝数为N, 电流为I, 由环路定理:

$$B2\pi r = \mu_0 NI$$

计算得P点的磁感应强度为:

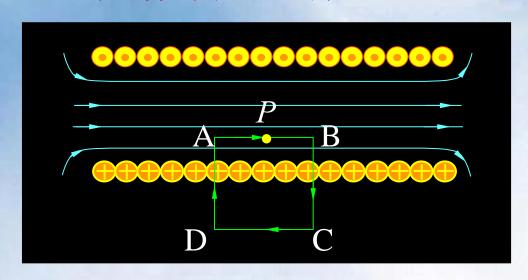
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当 r_2 - r_1 远小于环的平均半径r时,令 $l=2\pi r$,则:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$$

式中n为螺绕环单位长度上的匝数,B的方向与电流流向成右手螺旋关系。

3. 载流长直螺线管内的磁场



设密绕长螺线管,通电流I,计算管内任一点P处的磁感应强度。过P点做闭合回路ABCDA,CD段及BC和DA在管外部分B=0,BC和DA在管内部分,虽然 $B\neq 0$,但dl=B垂直,dl-B=0。所以B矢量沿ABCDA的线积分为:

$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot AB$$

设螺线管长为*l*共有*N*匝,则单位长度上有*N*/*l*=*n* 匝线圈。回路ABCDA包围的总电流为AB*nI*,由安培环路定律:

$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot AB = \mu_{0} ABnI$$

所以:

$$B = \mu_0 nI$$

或:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

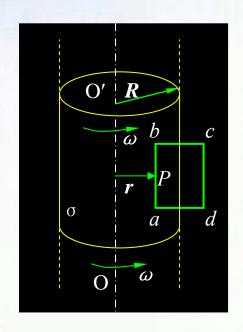
由于矩形回路是任取的,AB段在管内任何位 置时上式均成立,故磁场在管内均匀分布。

例题2:

如图所示,一半径为R的无限长非导体圆筒均匀带电,电荷面密度为 σ 。若受到外力矩的作用,圆筒从静止开始以匀角加速度 β 绕OO'轴转动,试求t时刻圆筒内距转轴r处的磁感应强度B的大小。

解:圆筒绕OO'轴转动相当于长直密绕螺线管,磁场分布具有轴对称性。对密绕螺线管,管内为均匀磁场,管外磁场强度为零。过管内场点P做一矩形积分回路abcda。

由安培环路定理,有:



$$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{a}^{b} B \cos 0^{0} dl + \int_{b}^{c} B \cos 90^{0} dl + \int_{c}^{d} 0 dl$$

$$+\int_{d}^{a} B\cos 90^{0} dl = B\overline{ab} = \mu_{0} \sum I_{i}$$

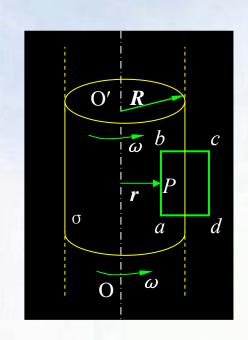
分析系统可知,积分回路所包围的电流代数和为:

$$\sum I_i = \sigma(\omega R \Delta t \cdot \overline{ab}) / \Delta t$$
$$= \sigma(\omega R \cdot \overline{ab})$$

由题意可知

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$
, $t = 0$ $\exists t$, $\omega_0 = 0$

则: $\omega = \beta t$



所以
$$\sum I_i = \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$$

因此
$$B\overline{ab} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$$

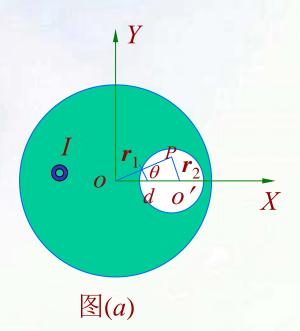
即得
$$B = \mu_0 \sigma \beta t R$$

B的方向根据 σ 的情况决定。由结果分析可知,圆筒内部的磁场B与r无关,磁场均匀分布。

शिस्ति ।

一半径为R的无限长圆柱形导体,在其中距其轴线为d处挖去一半径为r(2r < R)、轴线与大圆柱形导体平行的小圆柱,形成圆柱形空腔,导体中沿轴均匀通有电流I,如图(a)所示。试求空腔内的磁感应强度B。

解:取坐标系XOY,如图(a)所示。由于空腔的存在,不能直接用安培环路定理求解。小圆柱空腔表示其中通过的电流等于0,这可以等效成空腔中同时存在两个等值反向的电流,因此可采用补偿法求解。将空腔部分等效成同时存在着电流密度为j和(-j)的电流,



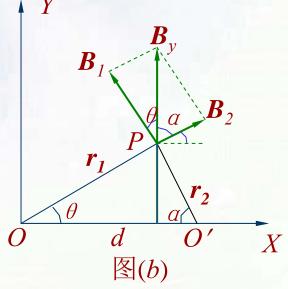
空腔中任意一点的磁场为通有电流密度j半径为R的大圆柱体,和通有反向电流密度(-j)半径为r的小圆柱体产生的磁场的矢量和,即

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

取空腔中任意一点P, $\overline{OP} = r_1$, $\overline{O'P} = r_2$

由于半径为R和半径为r的长圆柱体产生的磁场具有轴对称性,故可根据安培环路定理,有

$$B_1 = \frac{\mu_0 j \pi r_1^2}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 r_1}{2} j$$

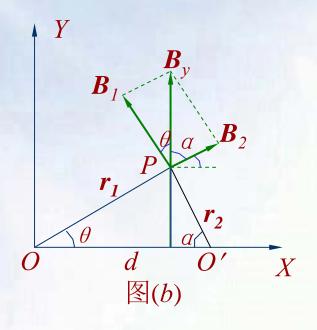


上式中
$$j = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$$
 所以

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r_1}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

同理可得

$$B_2 = \frac{\mu_0 r_2}{2} j = \frac{\mu_0 I r_2}{2\pi (R^2 - r^2)}$$



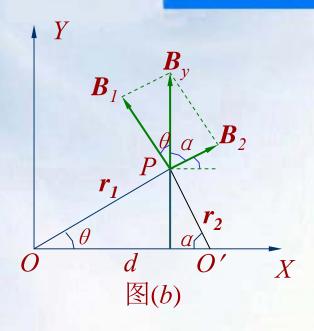
 B_1 和 B_2 方向根据右手法则确定,如图(b)所示。将 B_1 , B_2 在X,Y轴上投影,其分量为:

$$B_{1x} = -B_1 \sin \theta = -\frac{\mu_0}{2} j r_1 \sin \theta$$

$$B_{1y} = B_1 \cos \theta = \frac{\mu_0}{2} j r_1 \cos \theta$$

$$B_{2x} = B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2} j r_2 \sin \alpha$$

$$B_{2y} = B_2 \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2} j r_2 \cos \alpha$$



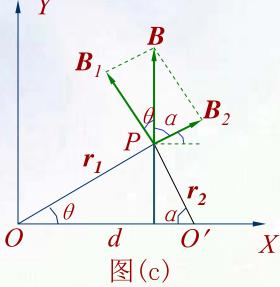
P点的磁感应强度B的两个正交分量为:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = \frac{\mu_0 j}{2} (r_2 \sin \alpha - r_1 \sin \theta) = 0$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu_0 j}{2} (r_2 \cos \alpha + r_1 \cos \theta) = \frac{\mu_0 j}{2} d$$

结果表明,P点的磁感应强度B的大小为一常量,方向垂直于OO'之间的连线d,即在Y轴正方向,所以空腔中的磁场为匀强磁场:

$$B = \frac{\mu_0 Id}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

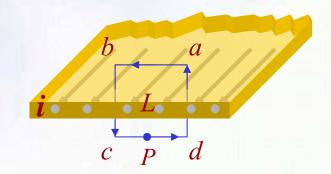


例题4:

无穷大平行平面上有均匀分布的面电流,面电流密度为*i*,*i*的方向为电流流动的方向(*i*为垂直于电流方向上单位长度的电流强度),求此平面外的磁感应强度*B*的大小。

m: 由于平板无穷大,所以平板外任一点的磁感应强度B都与平板平行。在垂直于i的一环路abcda,由安培环路定理:

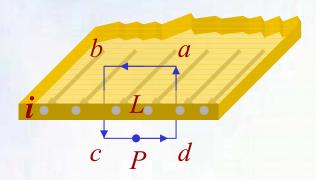
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^d \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{a}^{b} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{c}^{d} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2BL$$

又:



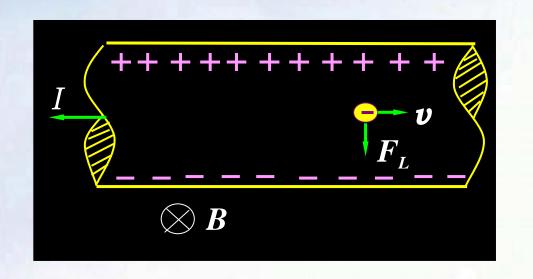
$$\mu_0 \sum I = \mu_0 i L, \quad \text{所以} \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

§ 12-4 磁场对电流的作用

一、安培力

实验指出,载流导线在磁场中将受到力的作用,称这种力为安培力。

在载流导线上 任取一电流元 ,所在处的磁 感应强度为B, 方向垂直纸面 向里。



电流元中的电子受洛伦兹力:

$$\vec{F}_L = -\vec{ev} \times \vec{B}$$

设电子数密度为n,电流元Idl中的电子数为: dN=nSdl,则电流元所受的安培力:

$$d\vec{F} = dN\vec{F}_{L} = -dNe\vec{v} \times \vec{B}$$
$$= -nSdle\vec{v} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

式中*I=enSv*,上式称为安培定律。对于任意形状的载流导线,安培定律可写成:

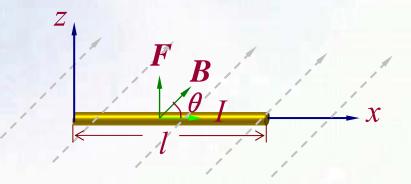
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_{L} I d\vec{l} \times \vec{B}$$

例题目:

求均匀磁场中一段长直导线所受的安培力?

设导线长l, 电流I, 置于磁感应强度B中,导线与B的夹角为 θ , 见下图,长直导线各段受力都朝Z轴:

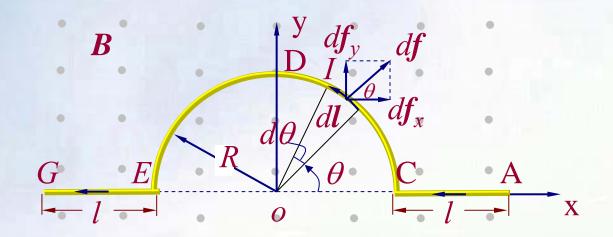
$$F = \int dF = \int_0^l I dl B \sin \theta$$
$$= IB \sin \theta \int_0^l dl = IlB \sin \theta$$



例题的。

如图所示,一根弯曲导线通有电流*I*,弯曲部分是半径为*R*的半圆,两端直线部分的长度均为*I*,载流导线位于与匀强磁场垂直的平面内,求作用在导线上的安培力。

解: 取坐标xoy, 由安培定律, 两端直线受力:



$$F_{AC} = F_{EG} = IlB\vec{j}$$

在圆弧形导线上取电流元: Idl, 此电流元所 受安培力为: $d\vec{f} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ 此力可分解为 df_x 和 df_y ,由对称性可知,各电流元水平分量之和为 零,而垂直分量为:

$$F_{CE} = \int df_y = \int_0^{\pi} (IBRd\theta) \sin \theta = 2IBR$$

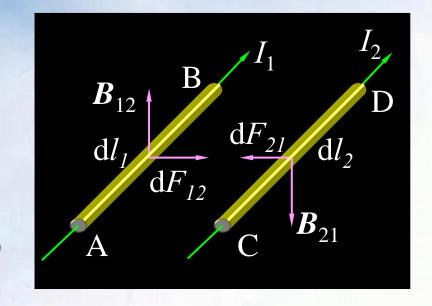
作用在整个导线上的力:

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{EG} + \vec{F}_{CE} = 2(l+R)IB\vec{j}$$

二、平行长直载流导线间的相互作用力

相距为d的无限长直 导线,电流分别为I、 I2, 导线2上的电流元 受力为:

$$dF_{21} = B_{21}I_2dl_2\sin\theta$$



$$B_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$dF_{21} = B_{21}I_2dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1I_2}{d}dl_2$$

单位长度受力:

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} = \frac{dF_{12}}{dl_1}$$

安培定义:真空中相距为1m的无限长直细导线,载有相等的电流,若每米导线上受力正好为2×10⁻⁷N,则导线内电流定义为1A。