

## 第五周

第15章 电流和磁场 § 15.11

第19章 带电粒子在电场和磁场中的运动

§ 19.1, § 19.4, § 19.5,

§ 19.2(一般了解), § 19.3(一般了解)

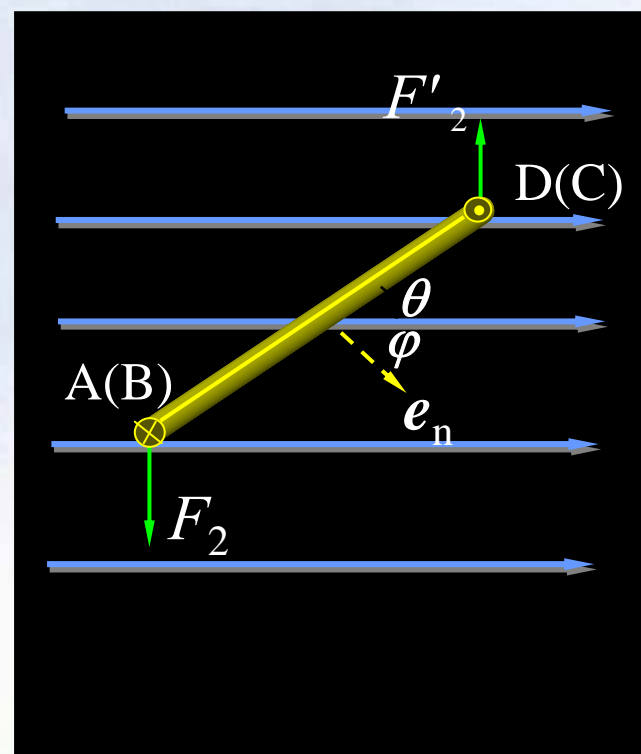
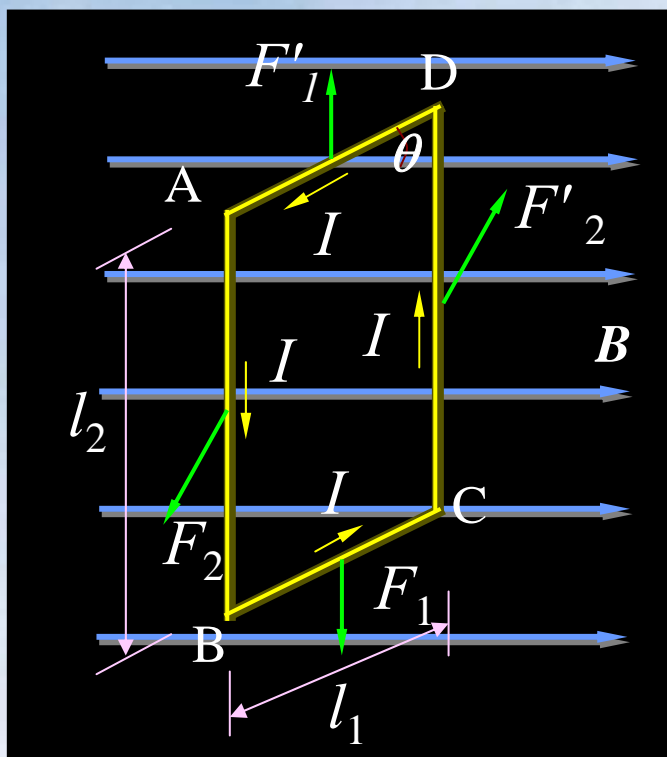
第16章 物质中的磁场 § 16.1, § 16.2

作业: P289 15-19, 15-22\*

\* P352 19-1, 19-2, 19-9, 19-10

### 三、磁场对平面载流线圈的作用 &

磁场中刚性长方形载流线圈，边长 $l_1$ 、 $l_2$ ，线圈平面与磁场成 $\theta$ 。根据安培定律，导线BC、AD受力为：



$$F_1 = BIl_1 \sin \theta$$

$$F'_1 = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin \theta$$

以上两力大小相等，方向相反，相互抵消。

导线AB、CD所受的磁力分别为：

$$F_2 = F'_2 = BIl_2$$

此两力大小相等，方向相反，但作用力不在同一直线上，形成一力偶，力臂 $l_1 \cos \theta$ ，作用在线圈上的力偶矩为：

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

式中  $S=l_1 l_2$ ，由于  $\varphi+\theta=\pi/2$ ，则：

$$M = BIS \sin \varphi$$

如线圈有  $N$  匝，则：

$$M = NBIS \sin \varphi = \left| \vec{p}_m \right| B \sin \varphi$$

$P_m=NIS$  为载流线圈的磁矩，上式写成矢量式：

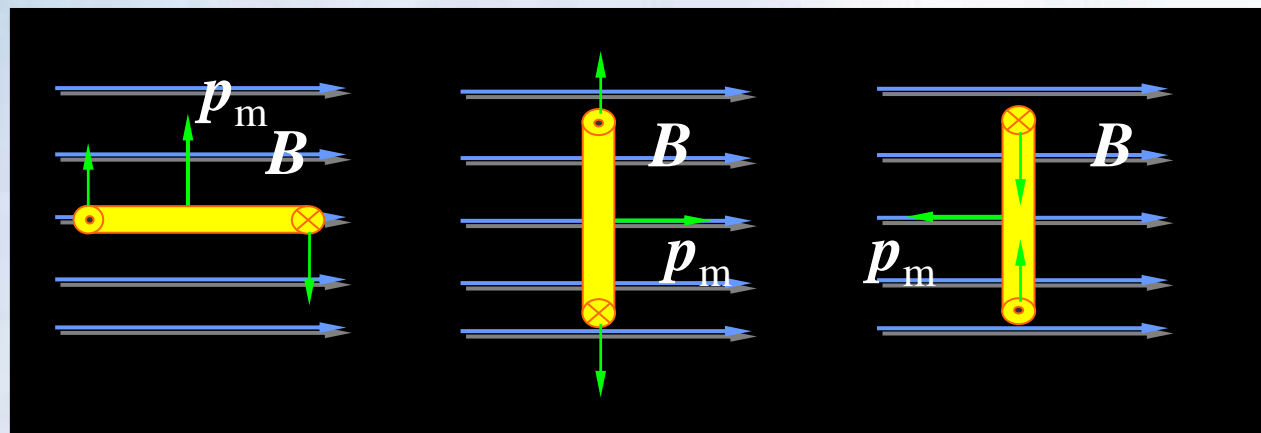
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

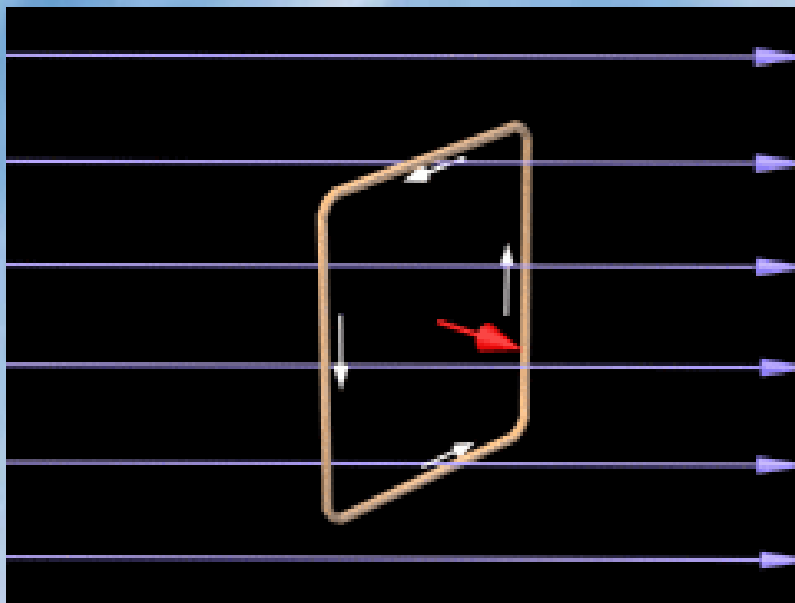
上式虽从矩形线圈推得，但可证明它对均匀磁场中任意形状的平面载流线圈都适用。

讨论几种特殊情况：

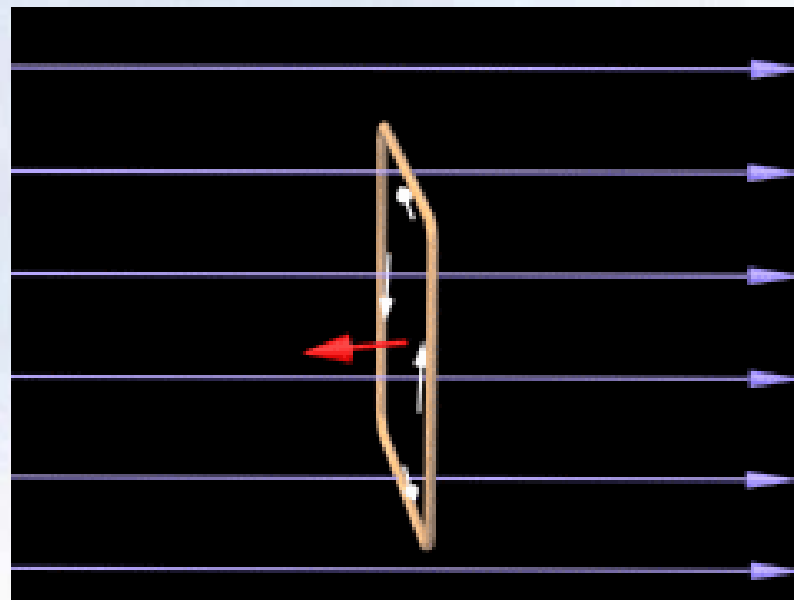
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

- ①当  $\vec{p}_m$  与  $\vec{B}$  的夹角  $\varphi = \pi/2$  时， $\vec{M}$  最大。
- ②当  $\varphi = 0$  时， $\vec{M} = 0$ ，线圈处于稳定平衡。
- ③当  $\varphi = \pi$  时， $\vec{M} = 0$ ，但线圈处于不稳定平衡状态。





载流线圈的稳定平衡

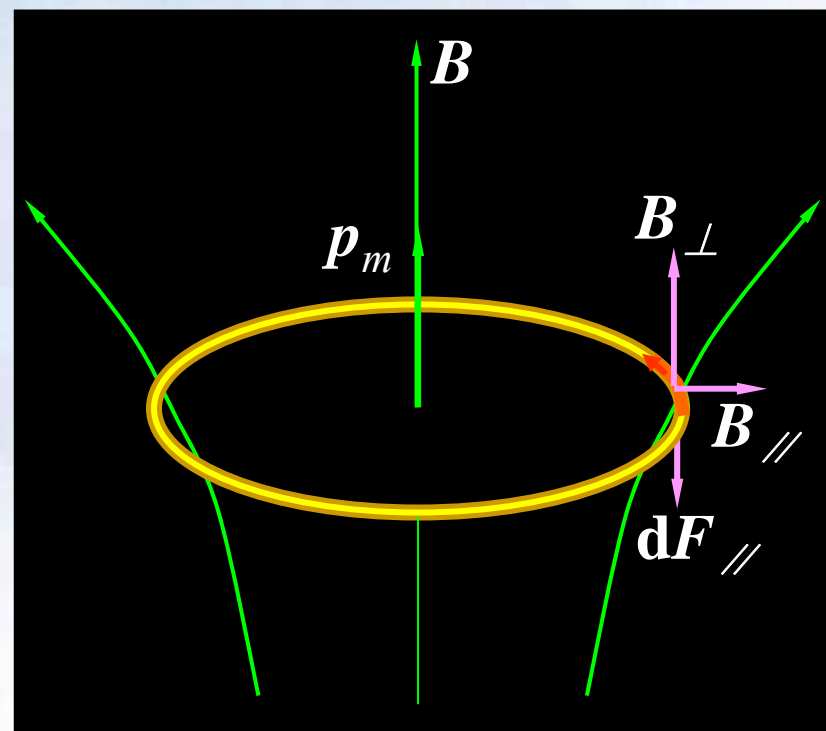


载流线圈的不稳定平衡

均匀磁场中载流线圈所受合力为零。

在非均匀磁场中载流线圈所受合力和合力矩可能都不为零，这样除转动外还要有平动。

例如：磁矩为 $\mathbf{p}_m$ 线圈在辐射形磁场中，电流元受磁场 $\mathbf{B}_\perp$ 的作用力被线圈弹力抵消；而受 $\mathbf{B}_\parallel$ 的作用力竖直向下，线圈将向磁场较强处移动。





## 四、磁力做功 (work) \*

### 1. 载流导线在磁场中运动时磁力所做的功

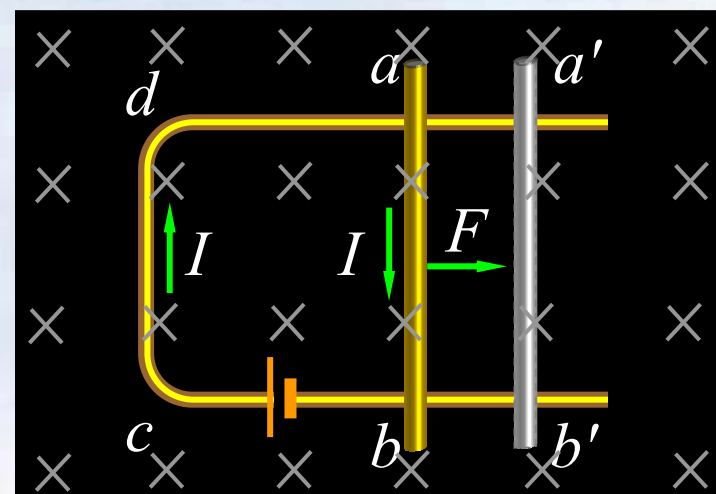
载流回路中可滑动导线 $ab$ 受力为:  $F = B I l$

从 $ab$ 滑动到 $a'b'$ 时, 磁力做功:

$$A = F \overline{aa'} = B I l \overline{aa'}$$

滑动前后磁通量的变化:

$$\Phi_0 = B l \overline{da} \rightarrow \Phi_t = B l \overline{da'} \quad \Delta\Phi = B l \overline{aa'}$$





因而：

$$A = I\Delta\Phi$$

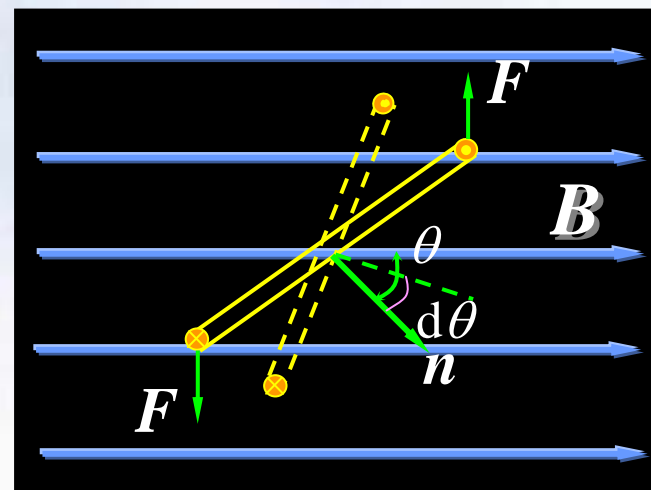
磁力所做的功等于电流乘以磁通量的变化。

## 2. 载流线圈在匀强磁场中转动时磁力所做的功

当线圈法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成 $\theta$ 角时，磁力矩：

$$M = -BIS \sin \theta$$

线圈转过 $d\theta$ 角时，磁力做功：



$$\begin{aligned}dA &= Md\theta = -IBS \sin \theta d\theta \\ &= Id(BS \cos \theta) = Id\Phi\end{aligned}$$

当线圈从 $\theta_1$ 转到 $\theta_2$ 时，磁力做的总功：

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

**例题7：**

半径为 $R$ 的圆形线圈，通以电流 $I$ ，并放置在均匀磁场中，磁感应强度的大小为 $B$ ，方向沿 $y$ 轴正向并与线圈平面平行。试证明线圈所受对 $z$ 轴的力矩为 $BIS$ 。

解：在圆弧上取电流元  $Idl$ ，该电流元所受受力的大小为：

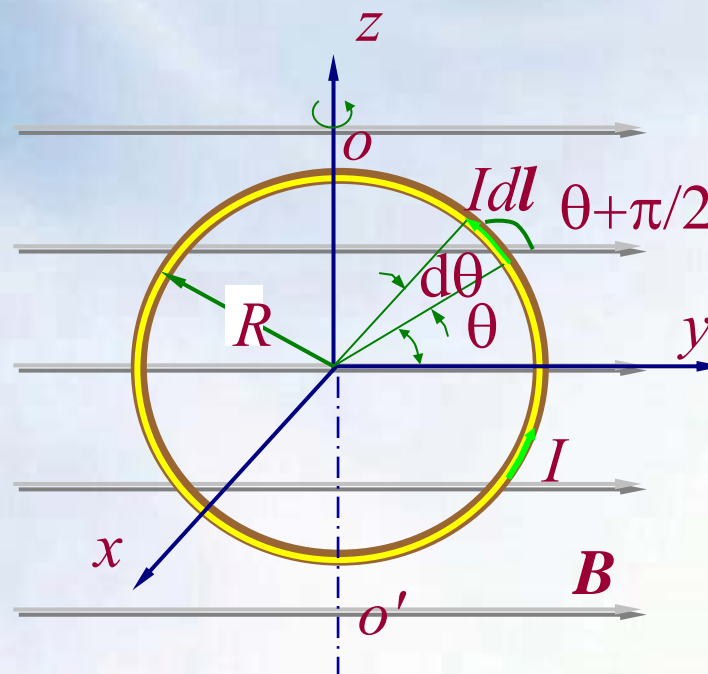
$$dF = Idl \cdot B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

方向沿x轴负向，其力矩为：

$$dM = ydF =$$

$$yIdl \cdot B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = yIBdl \cos \theta$$

上式中  $y = R \cos \theta$ ， $dl = R d\theta$  代入上式得：



$$dM = BIR^2 \cos^2 \theta d\theta$$

线圈右半部分所受合力矩大小为：

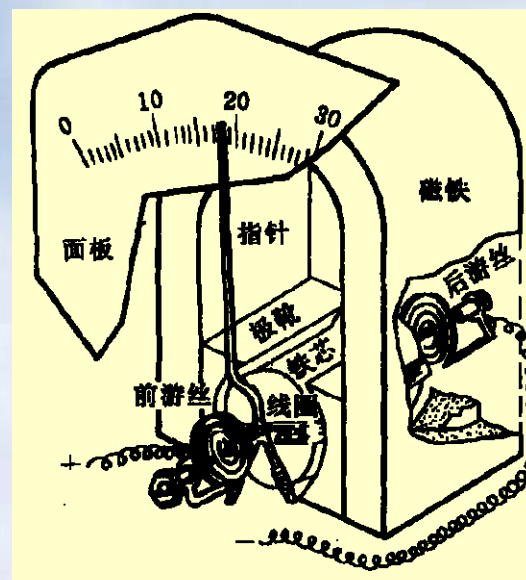
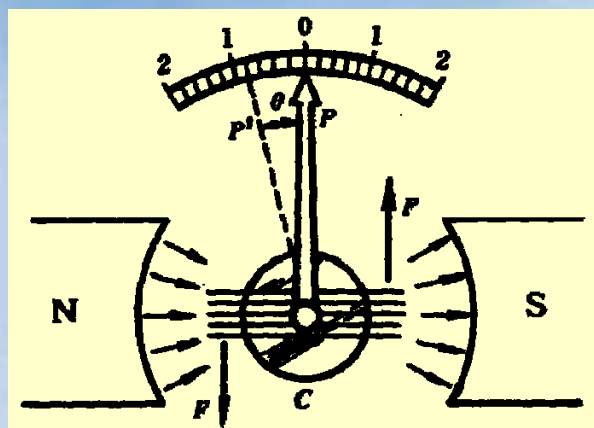
$$M_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} BIR^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} BI\pi R^2$$

方向沿z轴正向，同理线圈左半部受力与右半部相同，但方向相反。整个线圈所受力矩大小：

$$M = 2M_1 = BI\pi R^2 = BIS$$

## 例题8：

## 磁电式电流计



永久磁铁的磁场均匀地沿径向分布，空气间隙放一可绕固定轴转动的线圈，轴的两端各有一游丝，其上固定一指针。通电时，线圈所受的力矩 $M$ 的大小为（线圈平面的法向总与磁场方向垂直）：

$$M = NBIS$$

线圈在此力矩作用下转动时，游丝卷紧，产生的反力矩与转角成正比：

$$M' = k\theta$$

两力矩平衡时：  $NBIS = k\theta$

$$I = \frac{k}{NBS} \theta = K\theta, \quad K = \frac{k}{NBS} \quad \text{为恒量。}$$

线圈转角与电流成正比，此即磁电式电流计工作原理。

若在电流计中通一脉冲电流，电流计怎样偏转？



设脉冲持续时间 $t_0$ ，线圈将受一冲量矩作用：

$$G = \int_0^{t_0} M dt = \int_0^{t_0} NBIS dt = NBS \int_0^{t_0} I dt = NBSq$$

$\int_0^{t_0} I dt = q$  为脉冲电流通过时的总电量。

由于 $t_0$ 极短，脉冲通过后，线圈获得一角速度 $\omega_0$ ，按定轴转动角动量定理：

$$G = J\omega_0 - 0$$

$J$ 为线圈的转动惯量，设线圈的最大偏转角为 $\theta$ ，由机械能守恒定律，线圈的初动能将转变为游丝的弹性势能：



$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

合并以上三式，得：

$$q = \frac{\sqrt{kJ}}{NBS} \theta$$

此即冲击电流计的工作原理。

## 例题9：

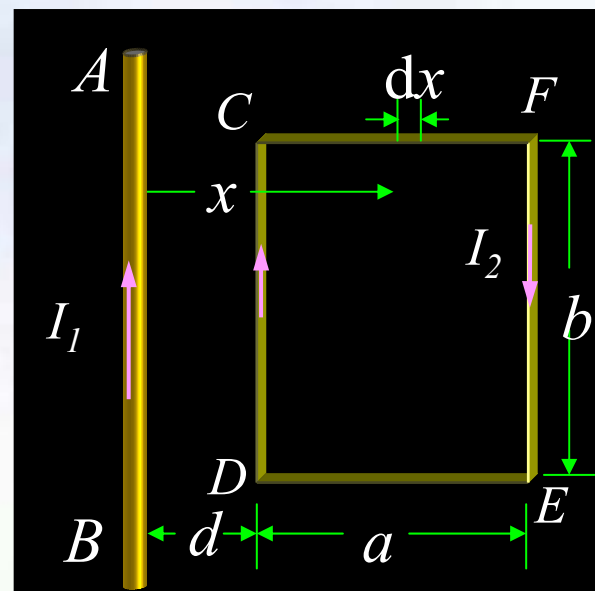
如图所示，无限长直导线 $AB$ 内通有电流 $I_1$ ，与其共面的有一矩形线框 $CDEF$ ，通有电流 $I_2$ 。 $CD$ 、 $EF$ 均平行于 $AB$ 。 $CF$ 长为 $a$ ， $EF$ 长为 $b$ ， $AB$ 与 $CD$ 间距为 $d$ 。试求  
(1) 矩形线框 $CDEF$ 各边所受直导线的磁场力； (2) 矩形线框所受到的磁场合力。

解：(1) 根据安培力公式

$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ，可求：

$$F_{CD} = I_2 b B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d}$$

其方向垂直于 $CD$ 向左。



$$F_{EF} = I_2 b B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+d)}$$

其方向垂直于 $EF$ 向右。

对于 $CF$ 段，由于 $CF$ 边上各点的 $\mathbf{B}$ 不相同，所以在其上取电流元 $I_2 dx$ ，积分可得

$$F_{CF} = F_{DE} = \int_d^{a+d} B I_2 dx = \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$

$F_{CF}$ 的方向垂直 $CF$ 向上， $F_{DE}$ 的方向垂直 $DE$ 向下。

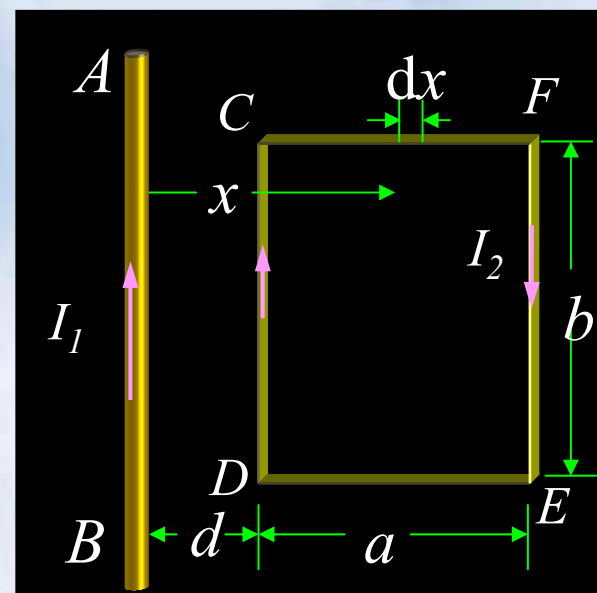
(2) 由(1)中的结果，可求得作用于矩形线框上的合力为

$$F = F_{CD} - F_{EF}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{a+d} \right)$$

由于  $F > 0$ ，则可知合力  $F$  与  $F_{CD}$  方向相同，向左。

### 例题10：

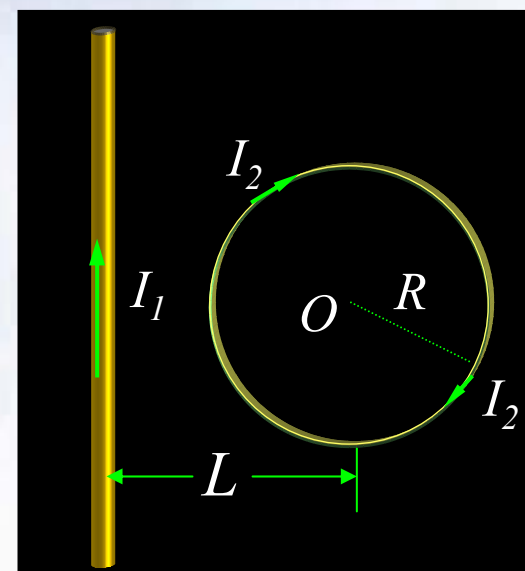


如图所示，无限长直导线中载有电流  $I_1$ ，在它旁边与其共面的半径为  $R$  的圆形线圈中载有电流  $I_2$ 。圆心到导线的距离为  $L$ ，两电流的方向如图所示。试求无限长直导线对圆线圈的磁场力。

解：

对圆线圈来说，由 $I_1$ 激发的磁场的方向均垂直纸面向里，因而圆线圈各电流所受磁场力均沿径向向外。

分析可知，圆线圈上各电流元所受磁场力的 $y$ 分量之和为零。因此只需计算 $x$ 分量之和即可。

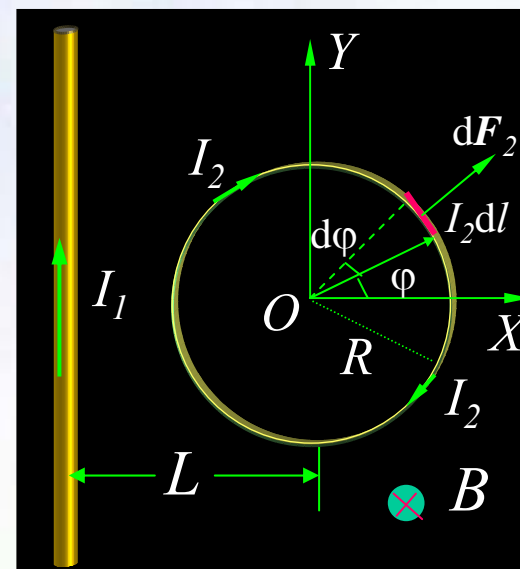


在圆线圈中任取电流  $I_2 d\mathbf{l}$ ，它所受安培力  $d\mathbf{F}_2$  的方向沿径向向外，大小为

$$dF_2 = I_2 dl B = I_2 R d\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(L + R \cos \varphi)}$$

$d\mathbf{F}_2$  的  $x$  分量为

$$\begin{aligned} dF_{2x} &= dF_2 \cos \varphi \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi d\varphi}{2\pi(L + R \cos \varphi)} \end{aligned}$$



故圆线圈所受作用力为

$$F_2 = F_{2x} = \int dF_{2x} = 2 \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(L + R \cos \varphi)}$$

式中：

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(L + R \cos \varphi)} = \frac{\pi}{R} \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \right)$$

代入上式，得

$$F_2 = F_{2x} = \mu_0 I_1 I_2 \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \right)$$



因此：

$$\vec{F}_2 = F_{2x} \vec{i} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right) \vec{i}$$

由于  $L > \sqrt{L^2 - R^2}$

故  $F_2 < 0$ ，即  $\vec{F}_2$  与  $\vec{i}$  反向，指向无限长直导线， $\vec{F}_2$  为吸引力。

## § 12-5 带电粒子在电场和磁场中的运动

带电粒子在电场与磁场存在时的运动方程：

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

考虑到相对论效应后：

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right]$$

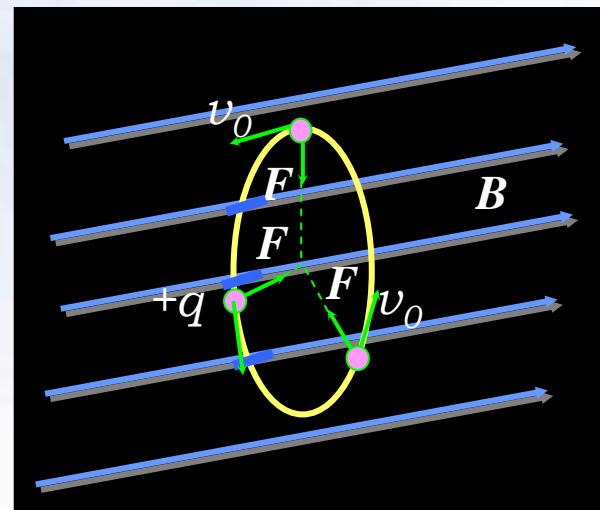
## 一、带电粒子在磁场中的运动

带电粒子可能以三种不同状态入射磁场：

1.  $\boldsymbol{v}_0$ 、 $\boldsymbol{B}$ 相互平行，粒子做匀速直线运动？

2.  $\boldsymbol{v}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$ 入射，  
洛伦兹力  $F = qv_0B$   
起向心力的作用，因此：

$$qv_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

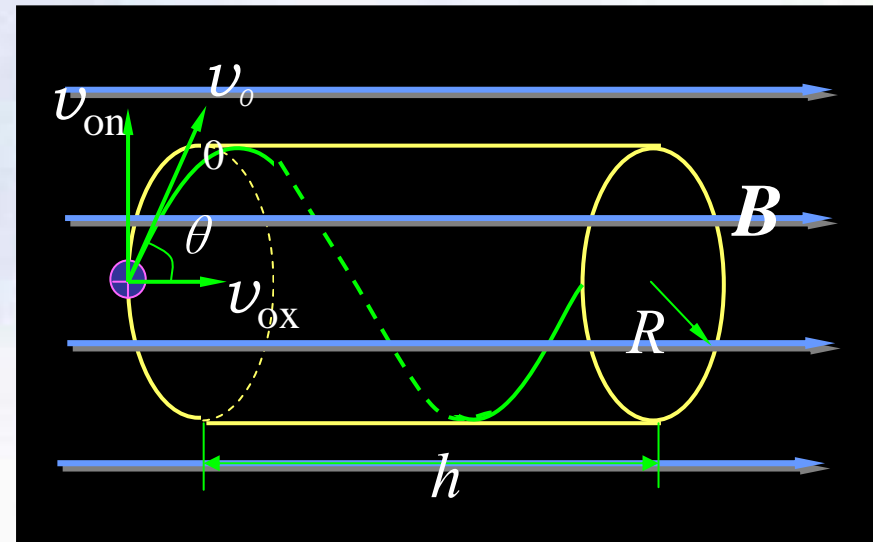


$$R = \frac{m v_0}{q B}$$

上式中 $R$ 为粒子的圆形轨道半径。 $q/m$ 称为荷质比。粒子绕轨道一周所需时间：

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m}{q B}$$

3.  $\mathbf{v}_0$ 、 $\mathbf{B}$  成  $\theta$  角，  
 可把  $\mathbf{v}_0$  分解成平行分量  $v_{0x} = v_0 \cos\theta$  和垂直分量  $v_{0n} = v_0 \sin\theta$



带电粒子的运动轨道为一螺旋线，螺旋半径为：

$$R = \frac{mv_{0n}}{qB}$$

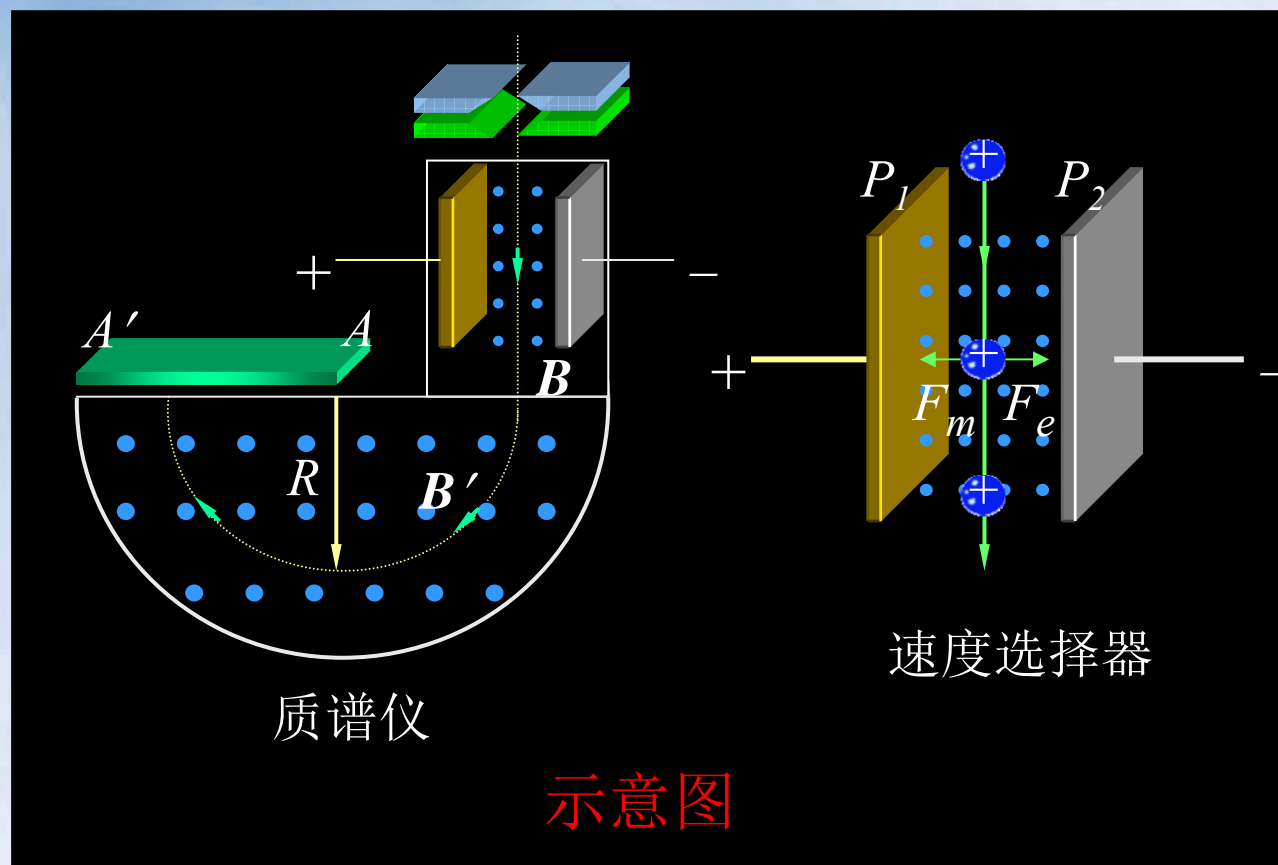
螺距为：

$$h = v_{0x}T = v_{0x} \frac{2\pi R}{v_{0n}} = v_{0x} \frac{2\pi m}{qB}$$

## 二、带电粒子在磁场中运动的应用

## 1. 质谱仪 #

利用磁场和电场的组合把电荷相同但质量不同的粒子分离开来的一种仪器。



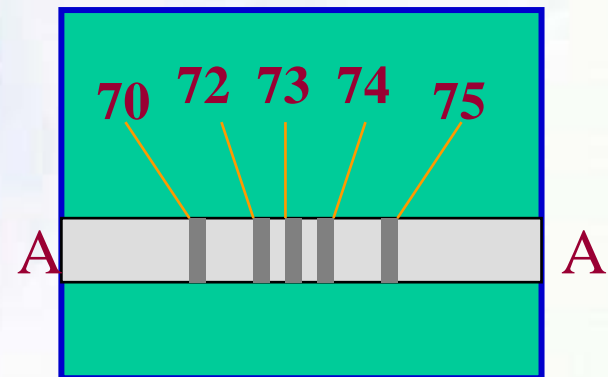
速度选择器原理：

$$qvB = qE \quad v = \frac{E}{B}$$

粒子进入感应区后，做圆周运动，有：

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB'} = \frac{E}{RBB'}$$

上式中R、E、B、B'均可测量，故荷质比可确定。

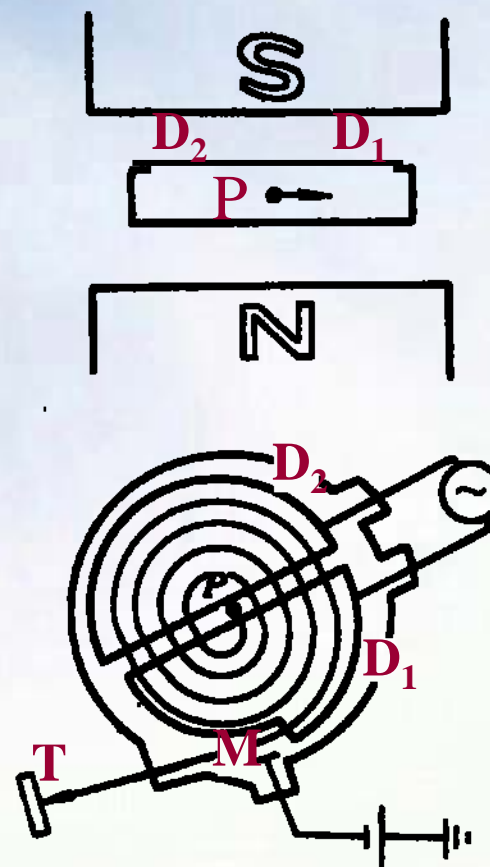
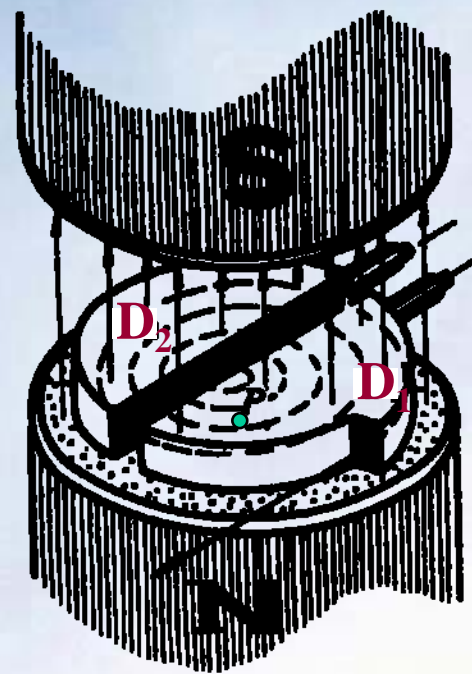


锆的质谱



## 2. 回旋加速器

利用电场和磁场的联合作用，用多次加速获取高能粒子的装置。



通有高频电压的两个*D*形铜盒电极置于均匀强磁场中，粒子在两盒缝隙中加速，进入半盒内电子的回旋半径：

$$R = \frac{v}{(q/m)B}$$

电子在半盒内回旋时间：

$$t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{(q/m)B}$$

如果加速器的振荡频率为： $\nu = \frac{1}{2t}$ ， $T = 2t$

粒子到达缝隙时，会被反复加速，最后引出的半径为 $R$ ，则：

$$v = \frac{q}{m} BR$$

而粒子的动能为：

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{2m} B^2 R^2$$

上式表明，只要回旋半径足够大，就能获得足够大的能量。

### 3. 同步回旋加速器

由于相对论效应，使得回旋加速器不能无限增大半径来获取能量，当粒子速度接近光速时，粒子的质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

半盒内运动粒子所需的时间：

$$t = \frac{m\pi}{qB} = \frac{m_0\pi}{qB\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

为保证电子通过间隙时能够加速，则要求：

$$\nu = \frac{1}{2t} \quad \text{即：} \quad \nu m = \frac{qB}{2\pi}$$

式中 $q$ 、 $B$ 不变，通过改变高频电压频率来达到上式的平衡，称为同步加速器。

#### 4. 磁聚焦 \*

电子在电极板中发散后， $v_0$ 分解成平行分量

$v_{0x} = v_0 \cos\theta \approx v_0$ 和垂直分量 $v_{0n} = v_0 \sin\theta = v_0 \theta$ 。

设在磁场中运动的路径为 $l$ ：

调节磁感应强度 $B$ 使：

$$\frac{l}{v_{0x} T} = n$$



磁聚焦.

可使电子射线聚焦于一点。

电子的速度可从电子枪的加速电压 $U$ 中求出：

$$\frac{1}{2}mv_{0x}^2 = eU$$

代入  $\left(\frac{l}{v_{0x}T}\right)^2 = n^2$  ( $T = \frac{2\pi m}{Be}$ ) 式得：

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 n^2}{B^2 l^2} U$$

上式右端各量可直接测量。利用此法，可求电子的荷质比。



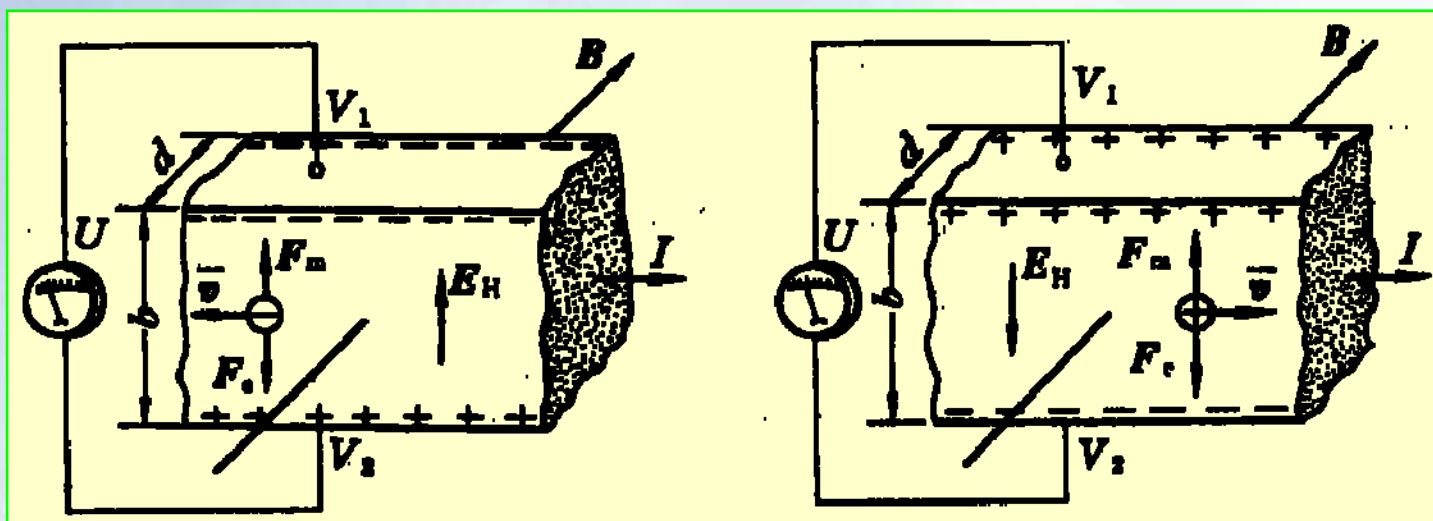
### 三、霍耳效应 (Hall Effect)

1879年E.C.Hall首先观察到此效应。

将载流导体薄板垂直置于磁场中，在垂直于磁场与电流方向的上、下两端出现微弱的电势差的现象。



霍尔效应演示



实验结果：霍耳电势差与I、B成正比，与薄板沿B方向的厚度d成反比：

$$V_1 - V_2 \propto \frac{IB}{d} \quad \text{或写成} \quad U = V_1 - V_2 = R_H \frac{IB}{d}$$

式中 $R_H$ 称为霍耳系数。

霍耳效应是由于导体中的载流子在磁场中受洛伦兹力的作用，发生横向漂移的结果。导体中的自由电子受洛伦兹力为：

$$F_m = e\vec{v}B$$

横向漂移的结果产生电荷积累，进而产生附加电场，称为霍耳电场。电子受电场力为：

$$F_e = eE_H$$

达到动态平衡时：

$$eE_H = e\bar{v}B \quad \text{或} \quad E_H = \bar{v}B$$

霍耳电势差：

$$V_1 - V_2 = -E_H b = -\bar{v}Bb$$

电流：  $I = ne\bar{v}db$  代入上式，得：

$$U = V_1 - V_2 = -\frac{IB}{ned}$$

对于正电荷:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{IB}{nqd}$$

比较以上各式, 霍耳系数为:

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad \text{或} \quad R_H = \frac{1}{nq}$$

## 第十三章 磁场中的磁介质

### § 13-1 磁介质的分类

介质在磁场中被磁化，介质内的磁感应强度 $B$ 为真空中原来的磁感应强度 $B_0$ 和附加磁感应强度 $B'$ 之和。

$$B = B_0 + B'$$

依据附加磁感应强度 $B'$ 的不同可将磁介质分为三类：

顺磁质  $B > B_0$ 、抗磁质  $B < B_0$ 、铁磁质  $B \gg B_0$

## § 13-2 顺磁质和抗磁质的磁化

### 一、原子中电子的磁矩

原子中的电子参与自旋和绕核的轨道运动，两种运动都会产生磁场。电子绕核运动的回旋频率为

$$\nu = \frac{v}{2\pi r}$$

等效电流为：
$$I = \frac{dq}{dt} = \nu e = \frac{\nu e}{2\pi r}$$

类似载流圆线圈磁矩的定义，我们也可引进电子轨道磁矩  $\mu$ ：

$$\mu = IS = \frac{ve}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} ver$$

同时，电子具有做轨道运动的角动量：

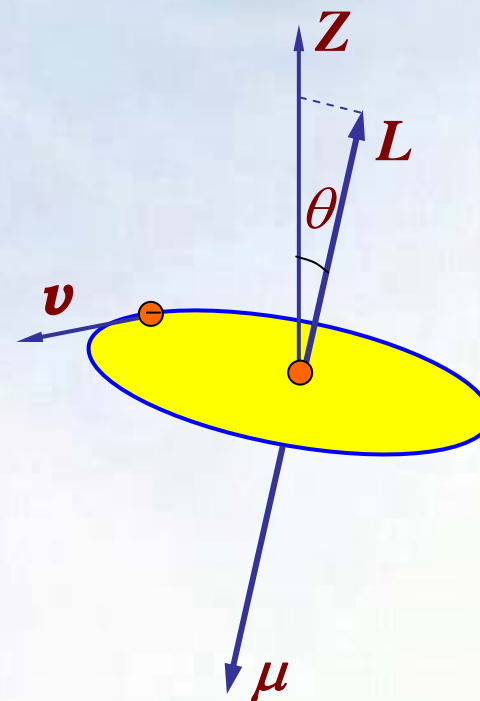
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr\vec{n}$$

代入上式：

$$\mu = \frac{e}{2m} L$$

电子的角动量与磁矩反向，故上式的矢量式为：

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$





在量子理论中，轨道磁矩的值是量子化的，最小值称为**玻尔磁子**：

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

对于电子：**自旋磁矩与自旋角动量的关系**：

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

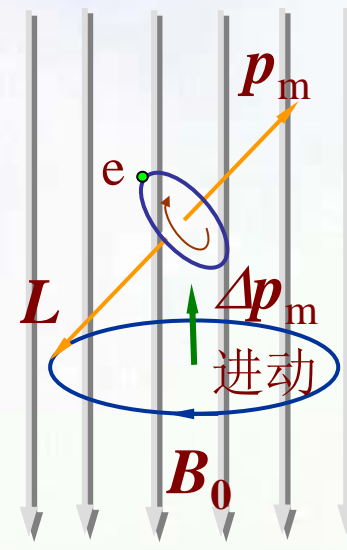
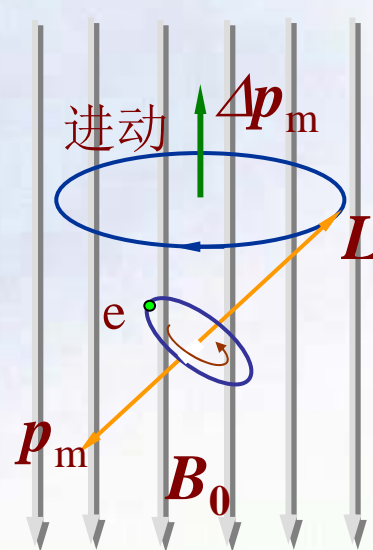
物质的磁性由电子轨道磁矩和自旋磁矩决定。

## 二、分子电流、分子磁矩、附加磁矩

分子或原子中各电子对外界所产生磁效应的总和可等效于一个圆电流——**分子电流**；

与分子电流相应的磁矩称为分子磁矩— $\boldsymbol{p}_m$

当磁介质在外场中时，分子中的运动电子将受洛伦兹力作用，其结果还要产生附加圆周运动。附加圆周运动以外场方向为轴的转动，称进动。



可以证明：不论电子原来的磁矩与磁场方向之间的夹角是何值，在外场 $B_0$ 中，电子角动量 $L$ 进动的转向总是和 $B_0$ 的方向构成右手螺旋关系。

电子的进动也等效于一个圆电流，其附加磁矩 $\Delta p_m$ 方向永远与 $B_0$ 的方向相反。

### 三、顺磁质和抗磁质的磁化

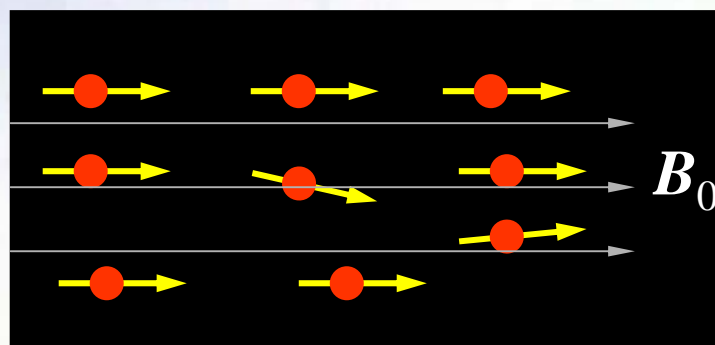
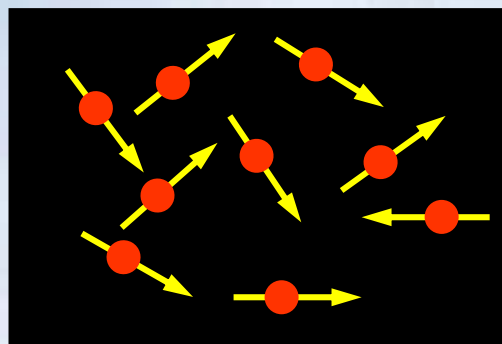
#### 1. 抗磁质的磁化

在抗磁质中，每个原子或分子中所有电子的轨道和自旋磁矩的矢量和等于零。在外场 $B_0$ 中只有电子轨道运动的平面在外场中的进动产生的

附加磁矩 $\Delta p_m$ 起作用，磁体内大量分子的附加磁矩的矢量和 $\Sigma \Delta p_m$ 与外场方向相反，这是抗磁性的起源。

## 2. 顺磁质的磁化

在顺磁质中，每个原子或分子都有一定的磁矩 $p_m$ ，但由于热运动， $\Sigma p_m = 0$ 。但在外场的作用下， $p_m$ 转向外场方向，使 $\Sigma p_m \neq 0$  (远大于 $\Sigma \Delta p_m$ )，且与外场同向，这是顺磁性的起源。



## 四、磁化强度和磁化电流

### 1. 磁化强度

为表征磁介质磁化的程度引进**磁化强度**：  
介质磁化后单位体积内分子磁矩的矢量和。

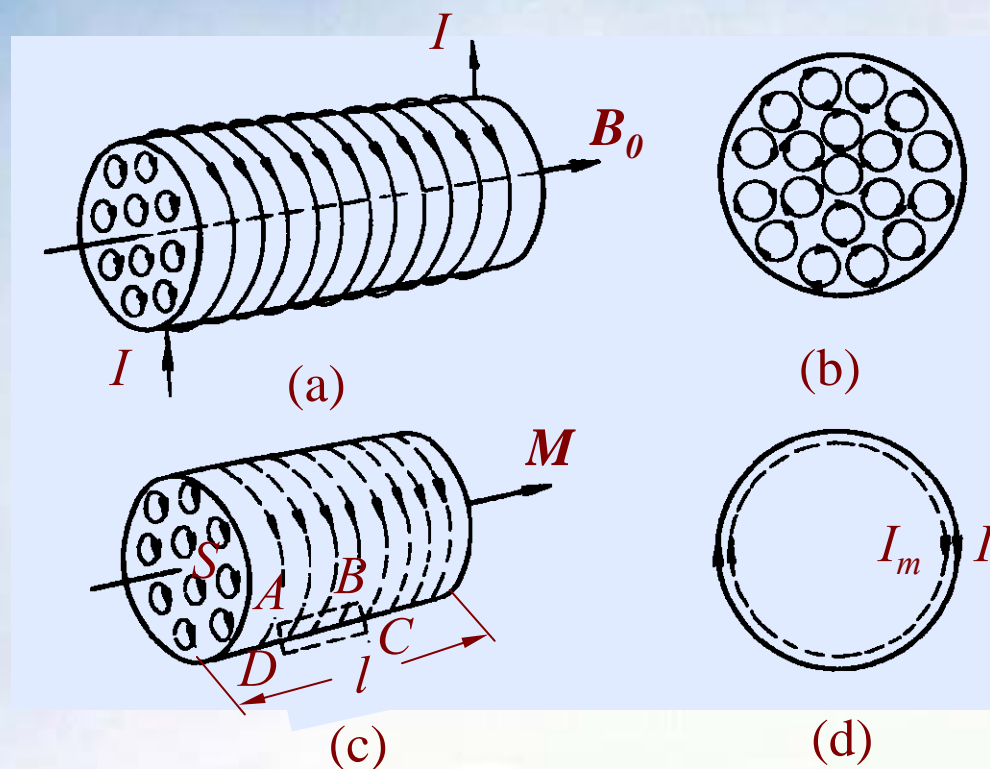
$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{p}_m / \Delta V$$

对真空： **$\mathbf{M}=0$** 。

介质内各点的 **$\mathbf{M}$** 可不同。如果各点 **$\mathbf{M}$** 相同，称为均匀磁化， **$\mathbf{M}$** 的单位是： **$\text{A/m}$** 。

## 2. 磁化强度与磁化电流的关系

介质的磁化可用磁化强度描述，也可以用磁化电流来描述。现讨论两者之间的关系：

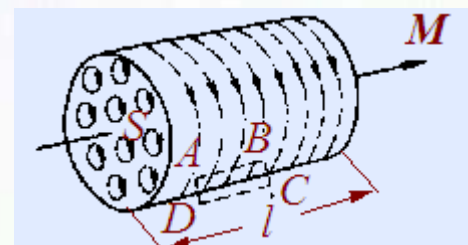




长直螺线管内充满均匀磁介质，通电后产生均匀磁场 $\mathbf{B}_0$ ，介质被均匀磁化。在图中分子电流在内部相互抵消，而在表面形成分子面电流——**磁化电流**。磁化电流与 $\mathbf{M}$ 成右手关系。

在磁介质中截取长为 $l$ 的圆柱体，若单位长度上的磁化电流密度为 $j_m$ ，则 $\Delta I_m = j_m l$ ，该介质段内总分子磁矩应等于磁化电流产生的磁矩，即：

$$\left| \sum_i \vec{p}_m \right| = \Delta I_m S = j_m l S$$





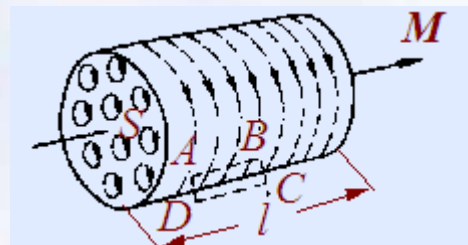
代入 $\mathbf{M}$ 的定义式:

$$|\mathbf{M}| = \frac{\left| \sum_i \mathbf{p}_m \right|}{\Delta V} = \frac{j_m l S}{S l} = j_m$$

磁介质表面上某处磁化强度在数值上等于磁化电流的线密度。

下面讨论磁化强度  
与磁化电流强度的关系:

沿圆柱形磁介质表面附近取一闭合回路  
ABCD, AB在磁介质内, BC、AD与柱面垂直,  
CD在介质外, 则:



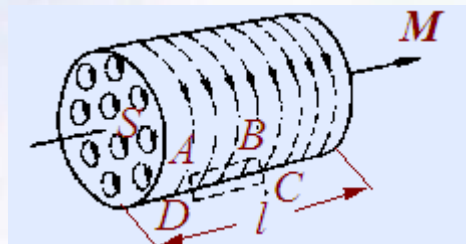
$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

对于均匀磁化，介质外 $\vec{M}=0$ ，介质内 $\vec{M}=\vec{j}_m$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{l} = M \cdot \overline{AB} = j_m \cdot \overline{AB}$$

$j_m \cdot \overline{AB}$  为通过闭合回路的总磁化电流，则：

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_m$$



磁化强度 $\vec{M}$ 沿任意闭合回路 $L$ 的积分，等于通过该回路所包围的磁化电流强度的代数和。