第二章 线性微分方程 习题解答

2004 年 10 月 10 日

1. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 (a,b) 内线性无关，则这些函数中的部分函数在区间 (a,b) 内也线性无关。换句话说，如果函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 (a,b) 内线性相关，则添上一些函数也是线性相关。

证明：若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性无关，则若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 线性相关，那么存在 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ ，使得函数 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x) \equiv 0$ ，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 不全为 0 。不妨设 $c_1 \neq 0$ ，那么函数 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x) + c_{k+1} f_{k+1}(x) + \cdots + c_m f_k(m) \equiv 0$ ，其中 $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_m = 0$ 。但因为 $c_1 \neq 0$ ，所以函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性相关，产生矛盾！所以就可以得到函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性无关。

2. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 在 (a,b) 内线性无关，则由这些函数构造出的 k 个新的函数

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

在 (a,b) 内也线性无关的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：" $\Rightarrow$ " $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)$ 线性无关，则对于任意的 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，我们有 $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k \equiv 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ 。而 $g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x)$ ，所以 $\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij}) f_j \equiv 0$. 因为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 线性无关，所以 $\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij} = 0$. 即

$$\begin{cases} a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \cdots + a_{1k} c_k = 0 \\ a_{21} c_1 + a_{22} c_2 + \cdots + a_{2k} c_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} c_1 + a_{k2} c_2 + \cdots + a_{kk} c_k = 0 \end{cases}$$

而由上可知其只有零解。所有由代数知识，我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

" $\Leftarrow$ " 和前面一样，若 $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k \equiv 0$ ，我们有 $\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j = 0$ ，即

$\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij} = 0$ ，那么有

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1k}c_k = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2k}c_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \cdots + a_{kk}c_k = 0 \end{cases}$$

同样由代数知识可知由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

所以方程只有零解，也就是 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ ，即得 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 线性无关。

3. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots, f_{k+m}(x)$ 在 (a, b) 内线性无关，并假设由其中的部分函数，例如 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 构造 k 个新的函数

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

在 (a, b) 内线性无关，则以 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)$ 代替 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 得到的 $k + m$ 个函数 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x), f_{k+1}(x), \cdots, f_{k+m}(x)$ 在区间 (a, b) 内也线性无关。

证明："$\Leftarrow$" 定义 $g_{k+1} = f_{k+1}, \cdots, g_{k+m} = f_{k+m}$ ，也即 $a_{ii} = 1, i \geq k+1, a_{ij} = 0, i \geq k+1$, 所以

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2(k+m+\cdots+k+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

所以 $f_1, \cdots, f_{k+m}$ 线性无关，所以 $f_1, \cdots, f_k$ 也线性无关。则由 1 得 $c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k = 0$ ，有某个 $c_i \neq 0$ 。那么 $c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k + 0 \cdot f_{k+1} + \cdots + 0 \cdot f_{k+m} = 0 \Rightarrow f_1, \cdots, f_{k+m}$ 也线性相关。产生矛盾。所以， $f_1, \cdots, f_k$ 线性无关。由 2 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \Rightarrow A \neq 0$$

由 2 得 $g_1, \cdots, g_{k+m}$ 线性无关。由因为 $f_{k+i} = g_{k+i}$ ，所以 $g_1, \cdots, g_k, f_{k+1}, \cdots, f_{k+m}$ 线性无关

4. 设 $y_i (i = 1, \cdots, n+1)$ 是 n 阶非齐次线性方程 $L[y] = f(x)$ 的 $n+1$ 个线性无关的解，试求对应的齐次线性方程 $L[y] = 0$ 的基本解组；并求 $L[y] = f(x)$ 的通解。

解：令 $z_i = y_{i+1} - y_i$ ，那么 $L(z_i) = L(y_{i+1}) - L(y_i) = f(x) - f(x) = 0$ 。所以 z_i $i = 1, 2, \cdots, n$ 是齐次线性方程 $L[y] = 0$ 的一组解。又设 $c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n = 0$ ，那么代入

后， $c_n y_{n+1}+(c_{n-1}-c_n)y_n+\cdots+(c_1-c_2)y_2-c_1y_1=0$ 。因为 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$ 线性无关，所以 $c_n=0,c_{n-1}-c_n=0,\cdots,c_{i-1}-c_i=0,\cdots.c_1-c_2=0,c_1=0\Rightarrow c_{i-1}=c_i\Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，那么我们就有 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 线性无关。所以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $L[y]=0$ 的基本解组。那么 $L[y]=f(x)$ 的通解为

$$\begin{aligned} y &= c_1z_1+c_2z_2+\cdots+c_nz_n+y_1 \\ &= (1-c_1)y_1+(c_1-c_2)y_2+\cdots+(c_{n-1}-c_n)y_n+c_ny_{n+1}, \forall c_1,\cdots,c_n \end{aligned}$$

5. 设 $y_i(i=1,\cdots,n+1)$ 是齐次线性方程

$$y^n+p_1(x)y^{n-1}+p_2(x)y^{n-2}+\cdots+p_n(x)y=0$$

的基本解组，其中 $p_i(x)(i=1,\cdots,n+1)$ 在区间 (a,b) 内连续。 $W(x)$ 是 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 的朗斯基行列式。试证明下述刘维尔公式成立：

$$W(x)=W(x_0)\exp[-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi], \qquad x_0,x\in(a,b).$$

其中 $\exp u=e^u$ 。

证明：

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W' &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n} & y_2^{n} & \cdots & y_n^{n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n} & y_2^{n} & \cdots & y_n^{n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sum i=1^n p_iy_1^{n-i} & -\sum_{i=1}^n p_iy_2^{n-i} & \cdots & -\sum_{i=1}^n p_iy_n^{n-i} \end{vmatrix} \\ &= -\sum_{i=1}^{n}p_i\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-i} & y_2^{n-i} & \cdots & y_n^{n-i} \end{vmatrix} \\ &= -p_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}=-p_1W \end{aligned}$$

所以 $W'=-p_1W$ ，即 $\frac{W'}{W}=-p_1$ 那么就有 $\int_{x_0}^x\frac{W'}{W}dx=-\int_{x_0}^x p_1$ ，则 $\ln W(x)-\ln W(x_0)=-\int_{x_0}^x p_1(x)dx$ ，于是就得到 $W(x)=W(x_0)\exp[-\int_{x_0}^x p_1(\xi)d\xi]$

求下列方程的通解或特解（ 6～ 17 ）：

$6.4y'-3y=0.$

解： $4\lambda-3=0,\lambda=\frac{3}{4}$, 通解为 $y=ce^{\frac{3}{4}x}$.

$7.y''-4y'=0.$

解： $\lambda^2-4\lambda=0,\lambda_1=0,\lambda_2=4$, 通解为 $y=c_1+c_2e^{4x}$.

$8.y''+2y=0.$

解： $\lambda^2+2=0,\lambda_1=\sqrt{2}i,\lambda_2=-\sqrt{2}i$, 通解为 $y=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x$.

$9.y''-2y'+y=0.$

解： $\lambda^2-2\lambda+1=0 \qquad \lambda=1$, 通解为 $y=(c_1+c_2x)e^x$.

$10.y''+4y'+13y=0.$

解： $\lambda^2+4\lambda+13=0,\lambda_1=-2+3i,\lambda_2=-2-3i$, 通解为 $y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$.

$11.y''-5y'+4y=0,y|_{x=0}=5,y'|_{x=0}=8.$

解： $\lambda^2-5\lambda+4=0,\lambda_1=1,\lambda_2=4$, 则通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{4x}$, 于是我们有 $y'=c_1e^x+4c_2e^{4x}$, 代入初始条件 $\left\{\begin{array}{l} {}_1+c_2=5 \\ c_1+4c_2=8 \end{array}\right.$ ，于是有 $\left\{\begin{array}{l} {}_1=4 \\ c_2=1 \end{array}\right.$ ，那么解为： $y=4e^x+e^{4x}$.

$12.y'''-2y''-y'+2y=0.$

解： $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0,\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$, 通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3e^{2x}$.

$13.y'''-y''+y'-y=0.$

解： $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0,\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$, 通解为 $y=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x$.

$14.y^{(4)}+2y''+y=0.$

解： $\lambda^4+2\lambda^2+1=0,\lambda_{1,2}=i,\lambda_{3,4}=-i$, 通解为 $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$.

$15.y^{(4)}+4y'''+8y''+8y'+4y=0.$

解： $\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^2+8\lambda+4=0,\lambda_{1,2}=-1+i,\lambda_{3,4}=-1-i$, 通解为 $y=e^{-x}((c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x)$.

$16.y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0.$

解： $\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1=0,\lambda_{1,2,3,4}=1$, 通解为 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)e^x$.

$17.y^{(4)}-y=0,y(0)=2,y'(0)=-1,y''(0)=-2,y'''(0)=1.$

解： $\lambda^4-1=0,\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$, 通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$, 于是有 $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}-c_3\sin x+c_4\cos x$, $y''=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x$, $y'''=c_1e^x-c_2e^{-x}+c_3\sin x-c_4\cos x$, 代入初始条件 $\left\{\begin{array}{l} c_1+c_2+c_3=2 \\ c_1-c_2+c_4=-1 \\ c_1+c_2-c_3=-2 \\ c_1-c_2-c_4=1 \end{array}\right.$ ，则有 $\left\{\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=2 \\ c_4=-1 \end{array}\right.$ ，于是解为 $y=2\cos x-\sin x$.

求下列方程的通解或特解（ 18$\sim$ 36 ）：

$18.y''+y=a(a$ 是常数 $),y(0)=0,y'(0)=0.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，去特解 $y_0=A$ ，则 $A=a$ ，所以 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+a,y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$ ，代入初值 $\left\{\begin{array}{l} c_1+a=0 \\ c_2=0 \end{array}\right.$ ，得到 $\left\{\begin{array}{l} c_1=-a \\ c_2=0 \end{array}\right.$ ，于是解为 $y=-a\cos x+a$

$19.y''+5y'+4y=20e^x,y(0)=0,y'(0)=-2.$

解: 齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}$, 设特解为 $y_0=Ae^x$, 则 $Ae^x+5Ae^x+4Ae^x=20e^x$, 就可以得到 $A=2$ 。于是 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}+2e^x$ ， $y'=-c_1e^{-x}-4c_2e^{-4x}+2e^x$ ，代入初始条件，我们有 $\left\{\begin{array}{l} c_1+c_2+2=0 \\ -c_1-4c_2+2=-2 \end{array}\right.$ ，得到 $\left\{\begin{array}{l} c_1=-4 \\ c_2=2 \end{array}\right.$ ，那么解就为 $y=-4e^{-x}+2e^{-4x}+2e^x$ 。

$20.y''+y=xe^{-x}.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，设特解为 $y_0=(Ax+B)e^{-x}$ ，则 $y_0''=(Ax-2A+B)e^{-x}$ ，所以 $(2Ax-2A+2B)e^{-x}=xe^{-x}$ ，那么 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$ ，所以就得到解为 $y=$

$c_1\cos x+c_2\sin x+(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})e^{-x}$ 。

21.$y''+6y'+5y=-10x+8.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}$ ，设特解为 $y_0=Ax+B,y_0'=A,y_0''=0$ ，所以就有 $6A+5(Ax+B)=-10x+8$ ，则 $A=-2,B=4$ ，于是解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}-2x+4$ 。

22.$y'+4y=x^2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=ce^{-4x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2+Bx+C$ ，则有 $y_0'=2Ax+B$ ，所以可以得到 $A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{8},C=\frac{1}{32}$ ，那么解就为 $y=Ce^{-4x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}$ 。

23.$y''+4y'+1=0.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-4x}$ ，设特解为 $y_0=Ax$ ，于是有 $y_0'=A$ ，则可得 $A=-\frac{1}{4}$ ，那么就可以得到解为 $y=c_1+c_2e^{-x}-\frac{1}{4}x$ 。

24.$y''+2y'+y=2e_{-x}.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=(c_1+c_2x)e^{-x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2e^{-x}$ ，于是有 $y_0'=2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x}$ ， $y_0''=2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+Ax^2e^{-x}$ ，则有 $A=1$ ，那么解为 $y=(c_1+c_2x+x^2)e^{-x}$ 。

25.$y''-4y=e^{2x},y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$ ，设特解为 $y_0=Axe^{2x}$ ，于是有 $y_0''=(4A+4Ax)e^{2x}$ ，则有 $A=\frac{1}{4}$ ，那么有 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$ ，则有 $y'=-2c_1e^{-2x}+2c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$ ，代入初值条件 $\begin{cases}c_1+c_2=1\\-2c_1+2c_2+\frac{1}{4}=2\end{cases}$ ，得到 $\begin{cases}c_1=\frac{1}{16}\\c_2=\frac{15}{16}\end{cases}$ ，于是得到解为 $y=\frac{1}{16}e^{-2x}+(\frac{15}{16}+\frac{1}{4})e^{2x}$ 。

26.$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos 2t,x|_{t=0}=\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-2.$

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x}=c_1\cos t+c_2\sin t$ ，设特解为 $x_0=Ae^{2it}$ ，则有 $x_0''=-4Ae^{2it}$ ，于是就得到 $A=-\frac{1}{3}$ ，所以 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t,\ x'=-c_1\sin t+c_2\cos t+\frac{2}{3}\sin 2t$ ，代入初始条件就得到 $\begin{cases}c_1-\frac{1}{3}=-2\\c_2=-2\end{cases}$ ，得到 $\begin{cases}c_1=-\frac{5}{3}\\c_2=-2\end{cases}$ ，于是解为 $x=-\frac{5}{3}\cos t-2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t$ 。

27.$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin at,a>0.$

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x}=c_1\cos t+c_2\sin t$

$a\neq 1$ 时：设特解为 $x_0=Ae^{ait}$ ，此时有 $x_0''=-a^2Ae^{ait}$ ，可得 $A=\frac{1}{1-a^2}$ ，于是有 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{1-a^2}\sin at$ 。

$a=1$ 时：设特解为 $x_0=Ate^{it}$ ，此时有 $x_0''=(2Ai-At)e^{it}$ ，可得 $A=-\frac{1}{2}$ ，于是就有解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\sin t$ 。

28.$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=2\sin x+\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-3x}$ ，设特解为 $y_0=A\sin x+B\cos x$ ，可得 $y_0'=A\cos x-B\sin x,y_0=-A\sin x-B\cos x$ ，于是就可得到 $A=\frac{1}{10},B=-\frac{7}{10}$ ，那么解就为 $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{7}{10}\cos x$ 。

29.$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+2k^2x=5k^2\sin kt.$

解： $k=0$ 时：为齐次方程， $x=c_1t+c_2$ ；

$k\neq 0$ 时：齐次方程的通解为 $\widetilde{x}=e^{-kt}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)$ ，设特解为 $x_0=Ae^{kit}$ ，则有 $x_0'=Akie^{kit},x_0''=-Ak^2e^{kit}$ ，于是得到 $A=1-2i$ ，那么解为 $x=e^{-kt}(c_1\cos kt+c_2\sin kt)+\sin kt-2\cos kt$ 。

30.$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=4-e^x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+c_2e^{-x}$ ，设特解为 $y_{01}=A,y_{02}=Be^x$ ，则有 $A=4,B=-\frac{1}{6}$ ，那么就有解为 $y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-x}+4-\frac{1}{6}e^x$ 。

31.$2y''+5y'=\cos^2 x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}}$ ，因为 $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ，则我们设特解为 $y_{01}=Ax,y_{02}=Be^{2xi}$ ，于是可得到 $A=\frac{1}{10},B=\frac{-4-5i}{164}$ ，那么解为 $y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{x}{10}-\frac{1}{41}\cos 2x+\frac{5}{164}\sin 2x$ 。

32.$y''+y=\sin x\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，因为 $2\sin x\cos x=\sin 2x$ ，所以设特解为 $y_0=Ae^{2ix}$ ，则有 $y_0''=-4Ae^{2ix}$ ，可得 $A=-\frac{1}{6}$ ，那么解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x$ 。

33.$y''-2y'+2y=e^{-x}\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$ ，设特解为 $y_0=Ae^{(-1+i)x}$ ，则有 $y_0'=A(-1+i)e^{(-1+i)x},y_0''=-2Aie^{(-1+i)x}$ ，于是可得 $A=\frac{1+i}{8}$ ，那么解为 $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{8}e^{-x}(\cos x-\sin x)$ 。

34.$y''+4y=x\sin 2x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ ，设特解为 $y_0=x(Ax+B)e^{2ix}$ ，则有 $y_0''=[2A+4i(2Ax+B)-4(Ax^2+Bx)]e^{2ix}$ ，于是可得 $A=-\frac{i}{8},B=\frac{1}{16}$ ，那么解为 $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{8}x^2\cos 2x+\frac{1}{16}x\sin 2x$ 。

35.$y'''-y''-4y'+4y=x^2+3.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2+Bx+C$ ，则有 $y_0'=2Ax+B,y_0''=2A,y_0'''=0$ ，于是可得 $A=\frac{1}{4},B=\frac{1}{2},C=\frac{11}{8}$ ，那么解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$ 。

36.$y^{(4)}+2y''+y=x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$ ，设特解为 $y_0=Ax+B$ ，则有 $y_0''=y^{(4)}=0$ ，于是可得 $A=1,B=0,$ 那么解为 $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+x$ 。

37. 设 $y=(c_1+x)e^x+c_2e^{-2x}$ 是微分方程 $y''+ay'+by=ge^{cx}$ 的通解，则常数 a,b,c,g 分别等于多少？

解：因为通解为 $y=(c_1+x)e^x+c_2e^{-2x}$ ，则可见 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ ，所以 $a=1,b=-2,c=1$ ，有上式可见特解为 $y_0=xe^x$ ，则有 $y_0'=e^x+xe^x,y_0''=2e^x+xe^x$ ，所以有 $g=3$ 。即有 $a=1,b=-2,c=1,g=3$ 。

38. 设 $y=x\sin x$ 为 $y''+by'+cy=A\cos x+B\sin x$ 的一个解，则常数 b,c,A,B 分别等于多少？

解：因为 $y=x\sin x$ 是解，可见非齐次项 e^{aix} 中的 ai 一定是特征根（不然不会有 x ），所以有 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ ，那么 $b=0,c=1$ ，又有 $y'=\sin x+x\cos x,y''=2\cos x-x\sin x$ ，我们可以得到 $A=2,B=0$ 。即有 $b=0,c=1,A=2,B=0$ 。

39. 设 $y=x^2e^x$ 为 $y''+by'+cy=Ae^x$ 的一个解，则常数 b,c,A 分别等于多少？

解： $y=x^2e^x$ 是解，所以有非线性项可见 $\lambda=1$ 是 2 重根，所以 $b=-2,c=1$ ，又因为 $y'=2xe^x+x^2e^x,y''=(2+4x+x^2)e^x$ ，则有 $A=2$ 。即有 $b=-2,c=1,A=2$ 。

40. 求一个阶数尽可能低的常系数线性齐次微分方程，是得函数 $y_1=2xe^x$ 与 $y_2=3\sin 2x$ 是它的解。

解：可见 y_1,y_2 是线性无关的。则一定还有 $\cos 2x$ ， y_1 前面有 x ，则至少是两重的。所以 $\lambda_1=2i,\lambda_2=-2i,\lambda_3=\lambda_4=1$ ，所以就有 λ 应满足 $\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$ ，所以就得方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$ 。

41. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(1)=0,f'(1)=0$ ，并设 $x>0$ 时

$$(3x^2-2f(x))ydx-(x^2f'(x)+\sin y)dy=0$$

为全微分方程，求 $f(x)$ ，并求上述全微分方程的通解。

解：有全微分知识可知： $3x^3-2f(x)=-x^2f''(x)-2xf'(x)$ ，即 $f(x)$ 满足 $x^2f''(x)+2xf'(x)-2f(x)+3x^3=0,f(1)=0,f'(1)=0$ ，令 $x=e^t$ ，则有 $f''+f'-2f=-3e^{3t}$ ，所以 $f(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^t-\frac{3}{10}e^{3t}$ ，即 $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{5x^2}-\frac{3}{10}x^3$ 。所以 $(\frac{18}{5}x^3+\frac{2}{5}x^{-2}-x)ydx-(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5x}-\frac{9}{10}x^4+\sin y)dy=0$ ，则有 $\cos y+\frac{9}{10}x^4-\frac{2}{5x}-\frac{x^2}{2}=c$ 。

42. 设 $f(x)$ 二阶可导，并设 $f'(x)=f(1-x)$ ，求 $f(x)$ 。

解： $f''(x)=(f'(x))'=-f'(1-x)=-f(x)$，所以 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，又因为 $f'(x)=f(1-x)$，所以有 $c_2\cos x-c_1\sin x=c_1\cos(1-x)+c_2\sin(1-x)$，则有 $c_2=\frac{1-\sin 1}{\cos 1}$。所以可以得到 $f(x)=c_1(\cos x+\frac{1-\sin 1}{\cos 1})$。

43. 求 $y''-y=e^{|x|}$ 的通解。

解： $x\ge 0$ 时： $y''-y=e^x\Rightarrow y=(c_1-\frac{1}{2})e^x+(c_2+\frac{1}{2})e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$； $x<0$ 时：$y''-y=e^{-x}\Rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$。

44. 设 $f(x)$ 二阶可导， $f(x)+f'(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{2})=0.$ 求 $f(x)$。

解：令 $x'=\pi-x$，可得 $f'(x)=\sin x-f(\pi-x)$，所以 $f''(x)=\cos x+f'(\pi-x)=\cos x+\sin x-f(x)$，则有 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$。又因为 $f(x)+f(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{x})=0$，就得到 $c_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, c_2=-\frac{\pi}{4}$。所以有 $f(x)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{x}{2})\cos x+(-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$。

45. 设 $f(x)$ 是连续函数，并且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

解：因为 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ 所以 $f'(x)=e^x+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x), f''(x)=e^x+f(x)$。所以就有 $f(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$。又因为 $f(0)=1, f'(0)=1$，所以 $c_1=\frac{3}{4}, c_2=\frac{1}{4}$。所以 $f(x)=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$。

46. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，是确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解。

解：将特解代入得 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\\\gamma=-1\end{cases}$ 所以就可以得到 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$。

47. 质量为 1 克的质点被一力从某中心沿直线推开，该力的大小与这个中心到质点的距离成正比（比例常数为 4）；介质阻力和运动速度成正比（比例常数为 3）。在运动开始时，质点于中心的距离为 1 厘米，速度为 0，求质点的运动方程。

解：设距离为 x，则 $x''(t)=4x(t)-3x'(t), x(0)=1, x'(0)=0$，所以就有 $x(t)=c_1e^{-4t}+c_2e^t, c_1=\frac{1}{5}, c_2=\frac{4}{5}$，所以就有 $x(t)=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$。

48. 重量为 P 牛顿的列车沿水平轨道作直线运动，当速度不大使列车受到阻力 $R=(a+bv)P$ 牛顿，其中 a,b 是常数， v 是列车速度。设机车的牵引力是 F 牛顿。当 $t=0$ 时， $s=0$（s 为走过的路程）， $v=0$。求火车的运动方程。

解： $S''=F/(P/g)-(a+bS')P/(P/g)=(Fg/P-ag)-bgS', S(0)=0, S'(0)=0$

$S(t)=c_1e^{-bgt}+c_2+\frac{1}{bg}(Fg/P-ag)t\Rightarrow c_1=-c_2=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)$，

所以有 $S(t)=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)(e^{-bgt-1+bgt})$。

49. 一电阻 $R=250$ 欧，电感 $L=1$ 亨，电容 $C=10^{-4}$ 法的串联电路，外加直流电压 $E=100$ 伏，当时间 $t=0$ 时，电流 $i=0$， $\frac{di}{dt}=100$ 安 / 秒，求电路重点流域时间的函数关系。

解： $100=250i+\int_0^t idt/c+li\Rightarrow i''+250i'+10^4i(t)=0\Rightarrow i(t)=c_1e^{-50t}+c_2e^{-200t}, i(0)=0, i'(0)=100,$ 则有 $c_1=-c_2=\frac{2}{3}\Rightarrow i(t)=\frac{2}{3}(e_{-50t}-e^{-200t})$。

求下列方程的通解（ 50～ 52 ）：

50.$x^2y''+3xy'+y=0.$

解：令 $x=e^t$，那么原式就变为： $y''(t)+2y'(t)+y=0$。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2te^t$，那么就得到 $y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x), x>0$。

51.$x^2y''-2xy'+2y=x\ln x.$（题目要改一下）

解：令 $x=e^t$ ，有 $y''(t)-3y't+2y=te^t$。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+(At^2+Bt)e^t$，有 $A=-\frac{1}{2}, B=-1$，那么就得到解为 $y=x[c_1-\frac{1}{2}(\ln x)2-\ln x]+c_2x^2, x>0$。

52.$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$

解： $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})$，那么就有 $y'''-6y''+11y'-6y=0$，通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$，于是有解为 $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$。

53. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$， $f(r)$ 具有二阶导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$。求 $f(r)$。

解：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r^{-2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + (r^{-1} - x^2r^3)\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$$

已知下列方程对应的齐次线性方程的一个解 y_1 ，求该方程的通解（ 54～ 56 ）：

54.$x^3y''' - xy' + y = 0$ ，已知 $y_1 = x$ 。

解： $y'' - x^{-2}y' + x^{-3}y = 0$ ，令 $y = xu$ ，

$$\Rightarrow xu'' + [2 - \frac{1}{x}]u' = 0$$

$$\Rightarrow u = c_1 + c_2e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y = c_1x + c_2xe^{-\frac{1}{x}}$$

55.$(1-x^2)y''' - xy'' + y' = 0$ ，已知 $y_1 = x^2$ 。

解：令 $z = y'$ ，则 $z = 2x$ 。原式就变为 $z'' - \frac{x}{1-x^2}z' + \frac{x}{1-x^2}z = 0$

$$\Rightarrow 2xu'' + [4 - \frac{2x^2}{1-x^2}]u' = 0$$

$$z = c_1x + c_2\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$z = c_1x + c_2\sqrt{1-x^2}$$

$$y = c_1 + c_2x^2 + c_3(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

56.$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = -2$ ，已知 $y_1 = x$ 。

解： $y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$ ，令 $y = xu$

$$\Rightarrow xu'' + [2 + \frac{2x}{1-x^2}x]u' = 0$$

$$\Rightarrow u = c_1 + c_2(x + \frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow y = c_1x + c_2(x^2+1) + y^*, y^* = 1$$

$$\Rightarrow y = c_1x + c_2(x^2+1) + 1$$

57. 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

所对应的齐次线性方程两个线性无关的解，它们的朗斯基行列式为 $W(x)$ 。试证明：该非齐次线性方程的通解为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{W(x)}[y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

其中 $p(x), q(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续， $x_0 \in (a,b)$ 。

解：变动任意常数法。 $y = u_1y_1 + u_2y_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1' = -\frac{y_2 f}{w}, u_2' = \frac{y_1 f}{w}$$

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\xi)}[y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

求下列方程的通解（ 58∼ 61 ）：

58.$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

解： $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + y^*, y^* = e^x x \ln|x|$ 代入上题的公式得到

$$y = e^x(x \ln|x| + c_1 + c_2 x)$$

59.$y'' - y = 2\sec^3 x$.

解：

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y^*, y^* = -\frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

60.$y''' + 4y' = 4\cot 2x$.

解：

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 + y^*$$

$$(y')^* = \int (\cos 2\xi \sin 2x - \sin 2\xi \cos 2x) \ln|\cos 2\xi| d\xi$$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 + \frac{1}{2} ln|\sin 2x| - \frac{1}{2}\cos 2x \ln|\cos 2x - \cot 2x|$$

61.$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

解： $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + y^*, y^* = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + e^{-2x}(-e^x+1)$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$$

62. 用幂级数解法求 $y'' + 4xy = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ，

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2} i(i-1) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2}x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} [(i+1)(i+2)a_{i+2} + 4a_{i-1}]x^i + 2a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{i+2} = a_{i-1}\frac{4}{(i+1)(i+2)}, a_2 = 0$$

$$a_{3k} = \frac{(-4)^k a_0}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$

$$a_{3k+1} = \frac{(-4)^k a_0}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

$$a_{3k+2} = 0$$

$$\Rightarrow y = c_1(1 + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k}}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots) + c_2(x + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k+1}}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3})$$

63. 用广义幂级数法求 $4xy'' + 2y' + y = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+\frac{1}{2}}$

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2}x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+\frac{1}{2})(i-\frac{1}{2})b_{i+2}x^{i-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}[4i(i+1)a_{i+1}+2(i+1)a_{i+1}+a_i]x^i+(2a_1+a_0)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}[4(i+\frac{3}{2})(i+\frac{1}{2})b_{i+1}+2(i+\frac{3}{2}b_{i+1})+b_i]x^{i+\frac{1}{2}}=0$$

$$a_1=-\frac{a_0}{2},a_{i+1}=-\frac{a_i}{(2i+2)(si+1)},b_{i+1}=-\frac{b_i}{(2i+2)(2i+3)}$$

$$y=c_1(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!}+\cdots)$$

$$+c_2(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3!}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5!}x^{\frac{5}{2}}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{\frac{2k-1}{2}}}{(2k-1)!})$$

$$=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$$

64. 用幂级数解法求 $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{9}y=0$ 满足 $y(0)=\sqrt{3}/2$， $y'(0)=\frac{1}{6}$ 的解。

解：同理 $\Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty}[(i+1)(i+2)a_{i+2}-i(i-1)a_i-ia_i+\frac{1}{9}a_i]x^i+\frac{a^0}{9}+a_2+x(\frac{a_1}{9}-a_1+a_3)=0$

$$\Rightarrow a_{i+2}=(i^2-\frac{1}{9})\frac{a_i}{(i+1)(i+2)},a_2=-\frac{a_0}{9},a_3=\frac{8}{9}a_1$$

由 $y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2},y'(0)=\frac{1}{6}\Rightarrow a_0=\frac{\sqrt{3}}{2},a_1=\frac{1}{6}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}[1-\frac{1}{9}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\cdots]$$

$$+\frac{1}{6}[x+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\frac{x^5}{5!}+\cdots+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+\cdots]$$

65. 对于什么样的常数 p 和 q ，方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=0$ 的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零？

解：当 $\triangle>0$ 时， $\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\triangle}}{2},\lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{\triangle}}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2<\lambda_1<0\Rightarrow p>0,q>0$$

当 $\triangle=0$ 时，同理可得 $\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2<0\Rightarrow p>0,q>0$

当 $\triangle<0$ 时， $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta,\alpha=-\frac{p}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\alpha t}(c_1\sin\beta t+c_2\cos\beta t)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha<0\Rightarrow p>0,q>0$$

综合得到 $p>0,q>0$

66. 给定方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=f(t)$ ，其中常数 $p>0,q>0$ ，函数 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上连续。试证明： (1) 如果 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上有界，则上述方程的每一个解在 $0\le t<+\infty$ 上也有界； (2) 如果当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to 0$ ，则上述方程的每一个解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零。解：利用 57 与 65 的结论，可知对于齐次通解 (1) 、 (2) 显然成立，因此只需要证明特解即可。

当 $\triangle>0$ 时

$(1)\lambda_2<\lambda_1<0,y_1=e^{\lambda_1 t},y_2=e^{\lambda_2 t}$

$$W(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_1+\lambda_2}\xi$$

$$|y*|=|\int_0^t\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\xi}(e^{\lambda_1\xi+\lambda_2 t}-e^{\lambda_2\xi+\lambda_1 t})f(\xi)d\xi|$$

$$\le\frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t|e^{\lambda_2(t-\xi)}-e^{\lambda_1(t-\xi)}|d\xi$$

$$= \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}[1-e^{\lambda_1}t] + \frac{1}{\lambda_2}(1-e^{\lambda_2 t})$$

$$\leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

所以有界。

(2)$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0,$

$$s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon, e^{\lambda_1 t} < \epsilon, e^{\lambda_2 t} < \epsilon. \forall t, \exists M > 0, |f(t)| \leq M,$$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + \int_A^t y(\xi)d\xi$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1(t-A)} - e^{\lambda_1 t}) + \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2(t-A)} - e^{\lambda_2 t})] + \frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

只需要 $t > 2A$ 就有

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{2\epsilon}{\lambda_1} - \frac{2\epsilon}{\lambda_2}) + \frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{1}{\lambda_1}) \leq c_0\epsilon(t > 2A)$$

当 $\triangle = 0$ 时

(1)$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = te^{\lambda_1 t}, W(\xi) = e^{2\lambda_1 \xi}$

$$|y^*| = |\int_0^t (t-\xi)e^{\lambda_1(t-\xi)}f(\xi)d\xi|$$

$$\leq |f|_{\max}|[-\frac{t-\xi}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-\xi)} + \frac{1}{\lambda_1^2}e^{\lambda_1(t-\xi)}]|_0^t|$$

$$= |f|_{\max}\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 te^{\lambda_1 t}|$$

所以有界.

(2) 同理， $\forall \epsilon > 0, \exists A, s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon$

$$e^{\lambda_1 t} < \epsilon, te^{\lambda_1 t} < \epsilon, \forall t, |f(t)| < M$$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + |\int_0^t y(\xi)d\xi|$$

$$M|\frac{-(t-A)}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-A)}| + M|\frac{t}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}| + \epsilon\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t 3^{\lambda_1 t}| < c_0\epsilon$$

只需要 $t > 2A$ 即可。

当 $\triangle < 0$ 时

(1)$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha = -\frac{p}{2}$

$$W(\xi) = e^{2\alpha\xi}, y_1 = e^{\alpha t}\cos\pi t, y_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$|y^*| = |\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)}\sin\beta(t-\xi)f(\xi)d\xi|$$

$$\leq |f|_{\max}\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)d\xi}$$

$$= |f|_{\max}\frac{1}{(-\alpha)}(1-e^{\alpha t})$$

所以有界。

(2) 同理 $\forall \epsilon > 0, \exists A, s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon, e^{\alpha t} < \epsilon, \forall t, |f(t)| < M$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + |\int_A^t y(\xi)d\xi|$$

$$\leq M\frac{1}{(-\alpha)}|e^{\alpha(t-A)} - e^{\alpha t}| + \epsilon\frac{1}{-\alpha}[1-e^{\alpha(t-A)}] \leq c_0\epsilon$$

只需要 $t > 2A$ 即可。