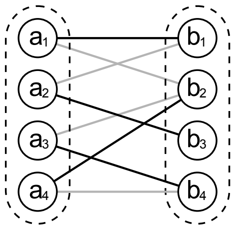
Matrikelnummer	Name

Aufgabenblatt 2 - Perfektes Matching

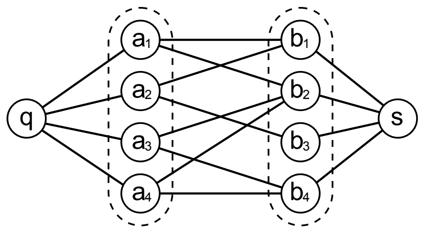
Theoretische Informatik 1, SS15

Ausgabe: 20.3.2015 Abgabe: 24.4.2015



Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (E, V)$, sodass die Knotenmenge V aus zwei disjunkten Knotenmengen A und B besteht, sowie Kanten $(a, b) \in E$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Als Matching $M \subseteq E$ zwischen den Knotenmengen A und B bezeichnet man eine Zuordnung zwischen A und B, sodass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten haben. M heißt perfektes Matching, wenn gilt: $2 \cdot |M| = |V|$ also jeder Knoten aus A einem Knoten aus B zugeordnet wurde (siehe Abbildung links, Kanten des Matchings in schwarz).

Wir erweitern den Graphen nun um 2 Knoten q und s, sowie Kanten zwischen q und allen Knoten aus A, und zwischen allen Knoten aus B und s (siehe Abbildung rechts). Als Fluss durch den Graphen bezeichnet man eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}_+$, die jeder Kante $e \in E$ im Graphen einen Wert $f(e)$ zuweist. Wir schränken die Kapazität, d.h. den maximalen Fluss durch jede Kante mit 1 ein, $0 \leq f(e) \leq 1$. Außerdem muss der Fluss im Graphen immer erhalten bleiben, daher muss die Summe von ein- und ausgehenden Flüsse für jeden Knoten gleich sein.



$$\sum_{p \in Parent(q)} f((p, q)) = \sum_{c \in Child(q)} f((q, c))$$

Dies gilt für jeden Knoten $q \in A \cup B$. Ausgenommen von dieser Regel sind die Quelle und Senke. Der Fluss durch Quelle und Senke definiert den Gesamtfluss $F(f)$ durch den Graphen. Es gilt

$$F(f) = \sum_i f((q, a_i)) = \sum_j f((b_j, s)).$$

Der Fluss f^* durch den Graphen, mit $f^* = \arg\max_f F(f)$ heißt maximal.

1. Beweisen Sie, dass ein perfektes Matching in diesem Graphen mit $|A| = |B| = k$ genau dann existiert wenn $\max_f F(f) = k$. **(5 Punkte)**

2. Ein gerichteter azyklischer Graph (DAG) ist ein gerichteter Graph ohne geschlossene Pfade. Eine Quelle in einem DAG ist ein Knoten ohne eingehende Kanten, eine Senke ist ein Knoten ohne ausgehende Kanten. Beweisen Sie, dass jeder (endliche) DAG zumindest eine Quelle und eine Senke hat. **(5 Punkte)**