*В.В. Гуренко*

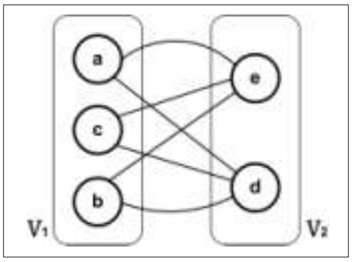

## Двудольные графы

**Опр. 1.** Неограф называется *двудольным* или *графом Кёнига*, если множество $S$ его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества $V_1$и $V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = S$,) так, что каждое ребро графа инцидентно одной вершине из $V_1$ и одной вершине из $V_2$.

Подмножества $V_1$ и $V_2$ называют *долями* двудольного графа.

Если любые две вершины из разных долей смежны, то такой граф называют *полным двудольным*. Если обозначить $|V_1| = p$ и $|V_2| = q$, то полный двудольный граф обозначают $K_{p,q}$.

<u>Пример</u>: полный двудольный граф $K_{3,2}$.



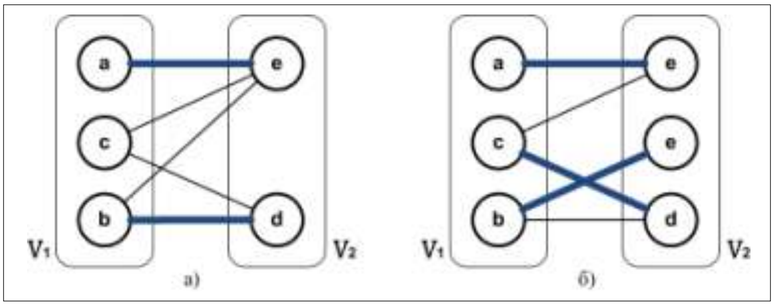

**<u>Th</u> Граф является полным двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.**

В приведенном примере: длина любого простого цикла данного двудольного графа четная. Например, циклы $(a, d, b, e, a)$ и $(a, e, c, d, a)$ имеют длину 4, цикл $(a, e, c, d, b, e, a)$ – длину 6.

Применительно к двудольному графу интересна задача о построении максимальных паросочетаний. Наиболее известная ее постановка носит название *«задача о назначениях»*. Имеется состав из $p$ работников и $q$ видов работ. Каждый работник может выполнять работу нескольких видов, и на работе каждого вида могут быть заняты несколько работников. Ставится задача о выполнении назначений по принципу «один работник – один вид работ» так, чтобы задействовать максимальное число работников. Возможны и другие варианты постановки задачи о назначениях.

Для предложенного варианта, очевидно, имеет место двудольный граф с долями «работники» и «виды работ». Ребра графа задают соответствие видов работ работникам и наоборот. Решение задачи сводится к поиску в данном двудольном графе максимальных паросочетаний и наибольшего из них по мощности.

<u>Пример</u>.




$V_1$ – «работники»,
$V_2$ – «виды работ».

Некоторые максимальные паросочетания выделены.

## Планарные графы

Алгоритмы, основанные на построении, исследовании и преобразовании планарных графов, широко применяются в практических приложениях. Например, в области электроники это задача о трассировке многослойной печатной платы по заданной принципиальной электрической схеме устройства или топологических слоев кристалла интегральной микросхемы. Математически аналогичны задачи проектирования железнодорожных путей, автодорожных развязок, комплексирования линий связи компьютерных сетей и подобные задачи для других сетевых структур, где недопустимы пересечения на одном уровне линий связи, путей сообщения, геодезических маршрутов, геометрических объектов и т.д.

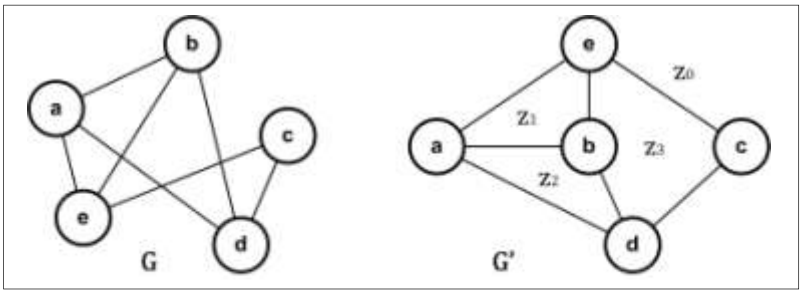
**Опр. 1.** *Укладкой* графа на плоскость называют процесс получения такого изображения графа, что все его вершины становятся точками одной плоскости, а ребра – линиями на той же плоскости без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме вершин, инцидентных им обоим.

**Опр. 2.** Граф называют *планарным*, если можно выполнить его укладку на плоскость (говорят: *уложить на плоскости*).

**Опр. 3.** Граф называют *плоским*, если он уже уложен на плоскости.

Очевидно, что любой граф, изоморфный плоскому, является планарным.

Пример.




Графы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G}'$ изоморфны.
$\boldsymbol{G}$ – планарный граф,
$\boldsymbol{G}'$ – плоский граф.

Планарные графы исследовал Леонард Эйлер, занимаясь укладкой многогранников, в том числе получая их плоскую развертку.

Из определения планарности следуют следующие утверждения:

1) каждый подграф планарного графа планарен;
2) граф планарен, если каждая его компонента связности является планарным графом.

**Опр. 4.** Область плоскости, ограниченная простым циклом плоского графа и не содержащая никакой другой цикл, называется *внутренней гранью* плоского графа. Вся внешняя по отношению к плоскому графу область плоскости называется его *внешней гранью*.

Для графа $G'$ в приведенном выше примере имеем: $z_0$ – внешняя грань, $z_1, z_2, z_3$ – внутренние грани.

**Th (Л. Эйлер). Для связного плоского графа с $\boldsymbol{n}$ вершинами, $\boldsymbol{m}$ ребрами и $\boldsymbol{r}$ гранями справедливо равенство:**

$$\boldsymbol{n - m + r = 2.}$$

Доказательство[*)] данной теоремы может быть проведено, например, индукцией по числу ребер либо по числу граней или иным способом. Примеры доказательств см. в рекомендованной литературе (Кузнецов О.П.: с. 129-130; Новиков Ф.А.: с. 342; Шапорев С.Д.: с. 158).

Для рассмотренного примера теорема Эйлера дает следующий результат: $5 - 7 + 4 = 2$.

Таким образом, теорема Эйлера позволяет вычислить для произвольного планарного графа количество граней изоморфного ему плоского графа.

При решении практических задач также важны следствия из теоремы Эйлера.

**Следствие 1. Если число вершин связного планарного графа больше 3 ($\boldsymbol{n} > 3$), то число его ребер $\boldsymbol{m}$ отвечает неравенству: $\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$** (так называемое "неравенство Эйлера").

В приведенном примере: $7 \leq 3 * 5 - 6$.

**Следствие 2. В каждом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.**

Доказательство (от противного).

Пусть $G(S, U)$ – планарный граф. Пусть для всякой вершины $x_i \in S$ $p(x_i) \geq 6$.

---

[*)] Здесь и далее доказательства, отсутствующие в настоящем тексте, в экзаменационные билеты не входят.

Тогда $\sum_{x_i \in S} p(x_i) \geq 6n$. Согласно «лемме о рукопожатиях» (исторически первая теорема теории графов, доказанная Л. Эйлером), $\sum_{x_i \in S} p(x_i) = 2m$, где $m = |U|$. Следовательно, $2m \geq 6n$ или $m \geq 3n$.

Согласно следствию 1, $m \leq 3n - 6$. Имеем: $3n \leq m \leq 3n - 6$, что невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости доказываемого утверждения. ■

В приведенном выше примере степени всех вершин графа $G$ меньше 5.

В теории планарных графов практический интерес представляет следующая теорема.

**<u>Th</u> (о пяти красках). Всякий планарный граф можно раскрасить 5-ю цветами.**

Иными словами, хроматическое число произвольного планарного графа не превышает 5.

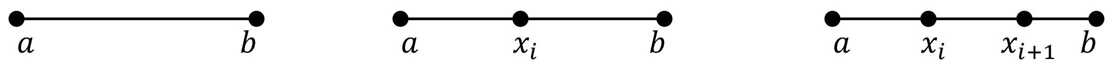
Теорема доказывается индукцией по $n$. Доказательство можно найти, например, в книге Новикова Ф.А., с. 343.

Следующая теорема о планарности имеет фундаментальное значение и по имени авторов называется теоремой Понтрягина–Куратовского[*)].

**Th (Понтрягин–Куратовски). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_5$ и $K_{3,3}$.**

<u>Пояснения.</u> (1) $K_5$ – обозначение полного графа из 5-ти вершин, $K_{3,3}$ – обозначение двудольного графа, каждая из долей которого имеет по 3 вершины.

(2) Понятие гомеоморфизма требует отдельного пояснения. Считают, что два графа гомеоморфны, если оба могут быть получены из одного и того же графа разбиением его ребер и введением дополнительных вершин. На рисунке показаны два различных разбиения ребра (a, b):




Понятно, что можно говорить как о разбиении ребра, так и – обратно – о слиянии ребер. Так, ребро $(a, b)$ получено из двух ребер $(a, x_i)$ и $(x_i, b)$ путем их слияния и удаления инцидентной им обоим вершины $x_i$ степени 2. Поэтому можно дать следующее определение гомеоморфизма графов.

**Опр. 5.** Два графа *гомеоморфны*, если они изоморфны (то есть отличаются только изображениями) или могут быть приведены к изоморфизму путем конечного числа слияний и разбиений их ребер.

Сформулированная выше теорема Понтрягина–Куратовского дает как необходимое, так и достаточное условие планарности графа.

Но что делать, если граф непланарен, а решение прикладной задачи требует достижения планарности? В этом случае из графа удаляют (фактически, переносят на другую плоскость) ребра, препятствующие планарности.

**Опр. 6.** Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарности графа, называют *числом планарности* или *искаженностью* графа.

С числом планарности тесно связан еще один количественный параметр графа.

**Опр. 7.** Наименьшее число планарных подграфов графа $G$, объединение которых дает исходный граф $G$, называют *толщиной графа* и обозначают $t(G)$. Очевидно, толщина планарного графа равна единице: $t(G) = 1$, $G$ – планарный граф.

---

[*)] Понтрягин Лев Семенович (1908 – 1988) – русский математик советского периода, Куратовски Казимеж (1896 – 1980) – польский математик.

Типичным примером может служить многослойная печатная плата: часть схемы, трассированная в одном слое, представляет собой планарный подграф, а число слоев платы равно толщине графа, являющегося моделью полной принципиальной электрической схемы (вершины графа – микросхемы и дискретные электрорадиоэлементы, ребра графа – линии связи). Число планарности графа равно числу отверстий металлизации, соединяющих отдельные слои печатной платы в соответствии со схемой устройства. Аналогичным примером служат топологические слои кристалла интегральной микросхемы, а искаженность графа в этом случае представлена слоями металлизации.

Возможность разбиения графа на планарные подграфы на практике оценивают при помощи эмпирических формул. Две из них приводятся ниже:

$$t(G) \geq \left]\frac{m}{3n-6}\right[\,;\ \mathrm{t(G)} \geq \left[\frac{m+3n-7}{3n-6}\right].$$

Здесь скобки ]…[ означают ближайшее сверху целое число, а скобки […] – целую часть от деления.

Применение критериев планарности в реальных задачах не всегда приводит к достоверному результату за приемлемое время. Разработаны алгоритмы, причем зачастую нетривиальные и нелаконичные, для проверки планарности графа и построения его укладки на плоскость. Один из существующих алгоритмов можно найти в книге Шапорева С.Д., с. 160 – 165.