# Лекция 8

03.04.2018

## Способы задания графов

• **Матричный.**

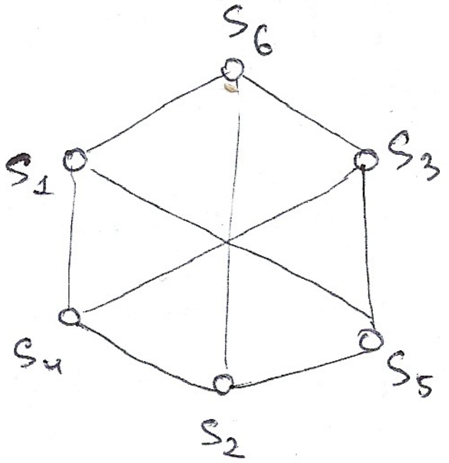
1. Матрицы смежности – однородные
2. Матрицы инциденций – разнородные

1. – Квадрат. матрица порядка n, где n – порядок графа. Матрица булева (двоичная)

$M_{ij} = 1$, если вершины $s_i$ и $s_j$ смежны.

$= 0$, если иначе

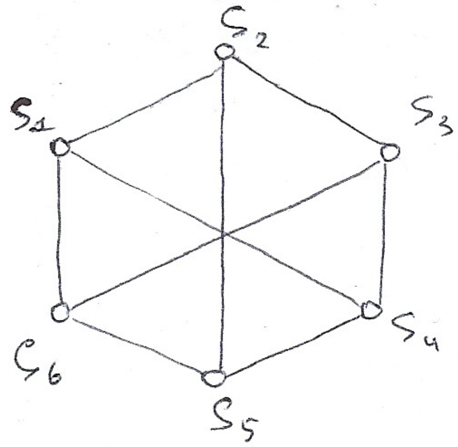
#




| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | | | | 1 | 1 | 1 |
| $s_2$ | | | | 1 | 1 | 1 |
| $s_3$ | | | | 1 | 1 | 1 |
| $s_4$ | 1 | 1 | 1 | | | |
| $s_5$ | 1 | 1 | 1 | | | |
| $s_6$ | 1 | 1 | 1 | | | |

Замечание: в случ. неографа матрица всегда симметричная отн. главн. диагон. => можно рассматр. только Δ матрицу

Замечание: матрицы смежностей изоморфных графов либо совпадают поскольку имеют место взаимн. однознач. соответствие между мн-вами вершин / мн-вами ребер, либо совпадают с точностью до перестановки одновременной строк и столбцов




| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | | 1 | | 1 | | 1 |
| $S_2$ | 1 | | 1 | | 1 | |
| $S_3$ | | 1 | | 1 | | 1 |
| $S_4$ | 1 | | 1 | | 1 | |
| $S_5$ | | 1 | | 1 | | 1 |
| $S_6$ | 1 | | 1 | | 1 | |

(иллюстрация к прошлому замечанию №2)

<u>Замечание:</u> в случае неографа $\Sigma$ 1 $\Delta$ матрицы смежности = числу ребер графа

в случае орграфа $\Sigma$ един. эл. равна числу дуг графа.

• если граф взвешенный, т.е. каждому ребру сопоставлено некоторое число (вес ребра): тогда матрица смежности становится матриц. весов. то есть для каждой пары смежных вершин указывают вес ребера, их соединяющ.

Аналогично строится матрица для ребер.

2 - отражает отношение инцидентности между эл-тами графа.

прямоугольная матрица размерности $n \times m$, где $m$ - число дуг, $n = |S|$

$H_{ij} = 1$, если вершина $s_i$ инциден. $v_j$ ребру.

$= 0$, если иначе

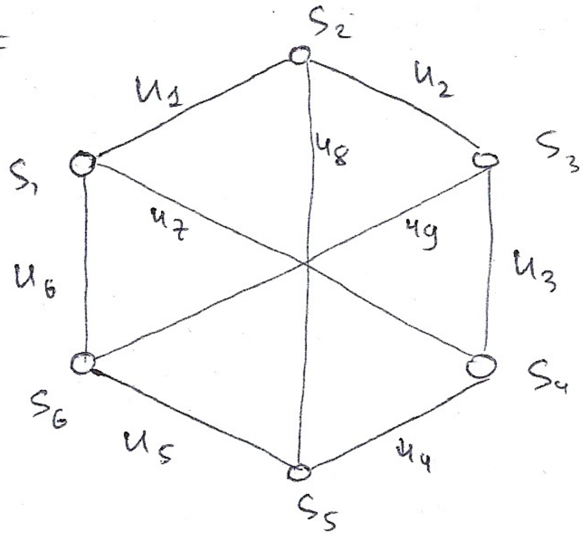
(для неографа)

$H_{ij}$ = 1, если $S_i$ инцидентно $U_j$ и явл. для него конечной ($S_i$ - конечн. для $U_j$)

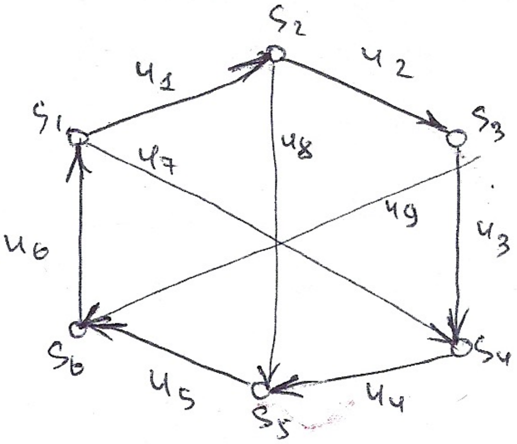
0, если $S_i$ и $U_j$ не инцидентны.

-1, если $S_i$ инцидентно $U_j$ и является для него начальной ($S_i$ - начальн. для $U_j$)

(для орграфа)

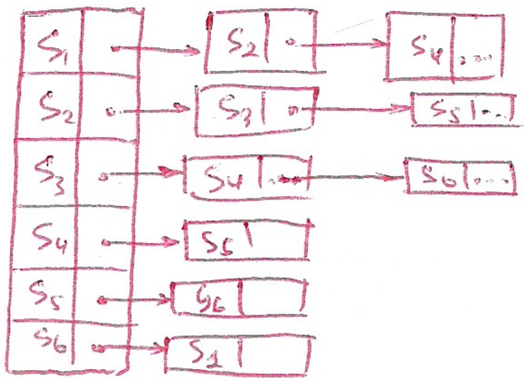



| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | | | | | 1 | 1 | | |
| $s_2$ | 1 | 1 | | | | | | 1 | |
| $s_3$ | | 1 | 1 | | | | | | 1 |
| $s_4$ | | | 1 | 1 | | | 1 | | |
| $s_5$ | | | | 1 | 1 | | | 1 | |
| $s_6$ | | | | | 1 | 1 | | | 1 |




| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | -1 | | | | | 1 | -1 | | |
| $s_2$ | 1 | -1 | | | | | | -1 | |
| $s_3$ | | 1 | -1 | | | | | | -1 |
| $s_4$ | | | 1 | -1 | | | 1 | | |
| $s_5$ | | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| $s_6$ | | | | | 1 | -1 | | | 1 |

Вектор Айлифа




~~Примечание~~ Замечание: в случае неграфа по каждой строке легко определить каким ребрам инцидентна данная вершина а по столбцу — каким вершинам инцидент данное ребро.

Замечание: $\Sigma$ эл-тов каждого столбца $= 0$ (в случае орграфа). По каждой строке опр. какие дуги для данной вершины — входящие (1), а какие исходящими (−1) $\Rightarrow$ легко определяются полустепени каждой вершины.

$p^{+}_{s_i}$ = числу единиц (1) в строке

$p^{-}_{s_i}$ = числу −единиц (−1) в строке.

Замечание: помимо двух указанных матриц указывают матрицы: Кирхгофа, достижимости, связности и целый ряд других

• **Аналитический**

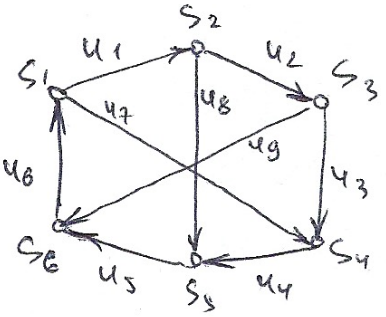
Основан на понятии отображений.

⊖ Отображение : (понятие и всё ост. для орграфа)

$\Gamma_{S_i}$ Прямым отображением вершины $S_i$ орграфа — мн-во вершин смежных $S_i$ по исходящим дугам.

$\Gamma^{-1}_{S_i}$ Обратным отображением вершины $S_i$ — // — по входящим дугам

#




$\Gamma_{S_1} = \{S_2; S_4\}$;

$\Gamma_{S_2} = \{S_3; S_5\}$;

$\Gamma_{S_3} = \{S_4; S_6\}$;

$\Gamma_{S_4} = \{S_5\}$; $\Gamma_{S_5} = \{S_6\}$; $\Gamma_{S_6} = \{S_1\}$.

Аналогично для $\Gamma^{-1}_{S_i}$.

## Части графа

1. Граф $G_1(S_1; U_1)$ называют частью графа $G(S; U)$, если он находится в отношении включения графа $G$: $G_1 \subseteq G$. Это значит, что: $S_1 \subseteq S$; $U_1 \subseteq U$

2. Часть графа – подграф, если включение строгое, т.е. имеет место: $G_1 \subset G$ и $S_1 \subset S$; $U_1 \subset U$.

3. Часть графа – суграф, если $S_1 = S$ и $U_1 \subset U$.

---

След. тема – материал присланный Гуренко.

Теоретико мн-ные операц. теории над графами.

---

## Маршруты и обходы графов

### 1. Маршруты

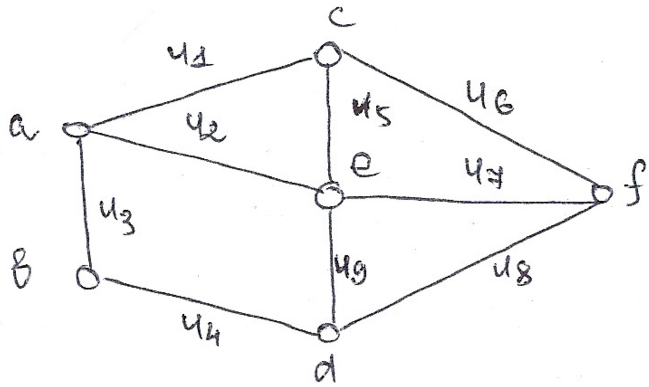
θ. Маршрут соедин. $S_1$ и $S_k$ графа – послед. вершин и ребер. след. вида: $S_1, u_1, S_2, u_2, \ldots, S_{k-1}, u_{k-1}, S_k$. В которой любые два соседних эл-та связаны отн. инцидентности, а любые два через один отн. смежности относит. эл-та располож. между ними.

Вершины $S_1$ и $S_k$ – начальная и конечная вершина маршрута

При построении маршрута в орграфе учитываются направления дуг, однако могут включаться дуги как прямого, так и обратного направления.

Для задания маршрута можно ограничиться только послед. входящих в него вершин / посл. его рёбер.

#




$s_1 = a$ ; $s_k = f$.

$\underbrace{a, u_1, c, u_5, e, u_7, f.}_{а}$ / $\underbrace{a, c, e, f}_{б}$ / $\underbrace{u_1, u_5, u_7}_{в}$

$a, u_1, c, u_6, f.$

а, б, в - одинаковые маршруты (один и тот же)

Замечание: в маршрутах рёбра и вершины могут повторяться.

2. Θ Маршрут, в кот. нет повтор. рёбер - **цепь**. (a, c, f)

3. Θ Цепь, все вершины кот. различны - **простая**. (a, c, f)

4. Θ. Простая цепь, нач. и конеч. вершины которой совпадают - **цикл**.
c, e, f, ~~c~~ - не считая.

2-4 - неорграф

5. Ⓞ Цикл в орграфе – контур.

6. Ⓞ Цепь в орграфе – путь

7. Ⓞ Число ребер цепи – длина цепи
дуг пути – длина пути.

## Связь между понятием маршрута и связности графа.

Ⓞ Граф – связный ⟺ две любые различные его вершины соединены маршрутом.
(см. семинар.)

орграф:

Ⓞ Построение маршрута должно учитывать направление дуг для сильной связности
(обратные дуги не включаются

Если в орграфе маршрут есть обратные дуги, то он просто связный.

Сильно связный орграф ⟺ $\forall S_i \in S$, $\hat{\Gamma}_{S_i} = S$

Ⓞ Отношение связности на мн-ве вершин графа явл. эквивалентностью