Лекция 7 — 27.03.2018 — 39

Теория Графов

Граф - топологический объект.

⇒ граф остаётся сам собою при изм

⇒ граф - дискретный объект, может быть задан двумя мн-вами: мн-вом вершин и мн-вом ребер их соедин.

\# $G(S, U)$

S — вершины (либо X); U — ребра (либо E)

Θ Графом $G(S,U)$ - называют математ. объект, заданный двумя мн-вами: мн-во $S = \{S_1, S_2 \ldots S_n\}$, $|S| = n$ и мн-во $U = \{U_1, U_2 \ldots U_m\}$, $|U| = m$.

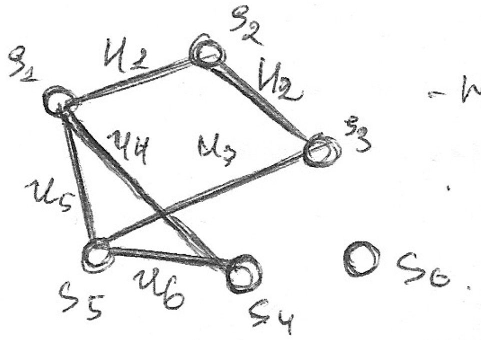
$S \ni (S_i$ и $S_j)$ могут быть связаны / нет ⇒ на мн-ве S граф задает бин. отн.
Эл-тами этого отн. явл. пары: (S_i, S_j)

Если каждая пара (S_i, S_j) упоряд., то граф - ориентир или орграф
Если порядок несущественный - неориентиров. граф или неограф.

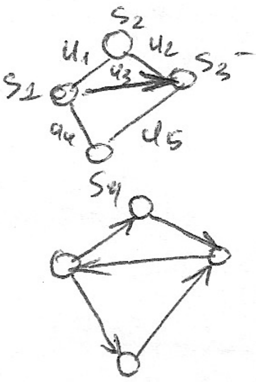
Пара вершин, котор. соотв. ребро: ребро. (чаще в неографе), а в орграфе (пары упорядочены), то ребро называют дугой. ⇒
U орграфа - дуги этого графа.

Граф с неориентир. и с ориентир. графом называют **смешанным** или **частично ориентир.**

Если в графе хотя бы одну пару вершин связывают 2 и больше ребер: **мультиграф**, а сами ребра называют **кратными**.



– неограф



– смешанный

– орграф

Вершины опр. ребро – **концевые**.
если концевые вершины совпадают, тогда ребро – **петля**

Два ребра/дуги, назыв. **смежными**, если они имеют общую концевую вершину

Две вершины, назыв **смежными**, если они соединены ребром/дугой

Между вершинами и ребрами отношение **инцидентности**:
Вершина S_i **инцидентна** U_e если S_i – одна из концевых вершин U_e.
Обратно* Всякое ребро **инцидентно** своим концевым вершинам.
* Смежность: отнош. между однород. компонентами графа, а ~~разнородность~~ инцидентность между разнородными

⊖ Число вершин графа: порядок

Число ребер инцидент. верш. S_i – степень вершины S_i

Если для S_k число ребер $=0$ $(p(S_k)=0)$ – изолированная (добавь петлю: всё равно изолир.)

Если $p(S_v)=1$ – висячая вершина

⊖ В случае орграфа распадается на два понятия:

1) Полустепень захода.
обознач: $p^+(S_i)$: число дуг, заходящ. в данную вершину S_i

2) Полустепень исхода
обознач. $p^-(S_i)$ —//— выходящ. =//=

⊖ Если $p^+(S_k)=0$ – источник
Если $p^-(S_k)=0$ – приёмник (сток)

⊖ Для произвольн. графа G: $\sum\limits_{i=1}^{n} p(S_i)=2|V|$
(Лемма о рукопожатии)

Некоторые виды графов

⊖ Граф называют простым, если в нем нет петель и кратных рёбер.

⊖ Граф – полный, если он простой и две любые его вершины смежны

⊖ Двудольный (граф Кёнига); множество его вершин можно разбить на два подмн-ва, так, что для кажд. ребра будет верно: один из его концевых в одном подмн-ве, а другой в другом.

$S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

$\forall u_e \in V: u_e = (s_i, s_j)$, $s_i \in S_1$; $s_j \in S_2$

подмн-ва S_1 и S_2 - доли графа Кёнига.

Θ Если в двудольном графе 2 ∀ две вершины из разных долей смежны то граф: полный двудольный

Θ Отн. смежности в графе явл. эквивалентностью с поправкой на транзитивность.

Изоморфизм графов

Даны два графа $G_1(S_1, V_1)$ и $G_2(S_2, V_2)$

Θ Графы G_1 и G_2 - изоморфны, если между мн-вами S_1 и S_2 уст. взаимно-однознач. соответст.

ρ - соотв. : $\rho \subseteq S_1 \times S_2$

ρ : между V_1 и V_2 уст. также уст. вз-одн. соответст.

σ : $\sigma \subseteq V_1 \times V_2$, а именно каждое ребро из мн-ва V_2 инцидентно (2-ум) S_2 <=> соотв. им вершины из S_1 инцидентны ребру из мн-ва V_1

В одном из графов две вершины соедин. ребром тогда и только тогда, когда соедин. соотв. вершины в другом графе

→ ∃ биекция: $f_1: S_1 \leftrightarrow S_2$; $f_2: V_1 \leftrightarrow V_2$.

Теорема

~~Отнош~~. Изоморфизм графов явл. отнош. эквивалентности.

Пояснение:

~~Рефлексивн~~.

1) $f: G \leftrightarrow G$ (биекция)

2) Симм.: если имеет место $f_1: G_1 \leftrightarrow G_2 \Rightarrow$
$\exists f_1^{-1}: G_2 \leftrightarrow G_1$.

3) Транзит. $f_1: G_1 \leftrightarrow G_2$; $f_2: G_2 \leftrightarrow G_3 \Rightarrow$
$\exists f_3: G_1 \leftrightarrow G_3$, $f_3 = f_1 \circ f_2$ (композиция f_1 и f_2)

Следствие:

Мн-во всех графов разбивается на классы экв-ти, так что $\forall$ два граф из одного класса изоморфны, а $\forall$ два графа из разн. классов попарно не изоморфны, т.е. графы можно рассматр. с точностью до изоморфизма

Друг. опред. изоморфизма:

Два графа изоморфны, если отличаются <u>только</u> изображением и обозначением ребер и вершин.

Способы задания графов

- Матричный;
- Аналитический; (по памяти отображение)
- Списковый (вектор Айлифа)
- Массивом (пар вершин / множ. ребер)