★ Гуренко Владимир Викторович ★ ①

Дискретная математика

1 Д/З по теории графов, 8-9н.

3 модуля:

1. теория множеств, 4н. РК, 5н.
2. теория графов, 11н. РК, 12н.
3. теория булевых функций, 15н. РК, 16н.

Лекция 1

12.02.2018

литература:

1. Белоусов, Ткачёв: Дискретная математика, 15г.
2. Плотников АД: Дискретная математика,
3. Новиков ФА: Дискретная математика, 13г. (для бакалавров и магистров).
4. Кузнецов О.П.: Дискретная математика для инженеров
5. Харари Ф.: Теория графов, 15г.

тема: Теория множеств.

Базовые понятия:

Множество - неопределяемое, ~~не требует~~ опр.

Множество - не требует однородности эл-тов, но требует наличия общего свойства.

\# $x \in A$ (принадлежность)

Если:

$x \in A$, $y \in A$; x и y - переменные, пробегающие по эл-там множества A,

то:

$x = y \Rightarrow x$ и y принимают значение одного эл-та (константа)

\# $A = B$ (равенство множеств)

Θ Два множества равны, если любой элемент множества A, принадлежит и множеству B и наоборот.

$$A = \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_3, a_1, a_2\}$$

$a_1 \in A$

Θ Принцип включения различных элементов в множество обычно зависит от харак-ра решаемой задачи, от класса задачи.

Способы задания множеств

1. Перечислением эл-тов
   возможно, когда кол-во небольшое и конечное
2. Указание общего свойства эл-тов множества
   $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } \sqrt{x^2 - 1} < 3\}$
   $A = \{x : P(x)\}$
   характеристический предикат
   → используем другое множество, заранее известное, например:
   $\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$ – только чётные
   → используем процедуру (рекурсивную), порождающие эл-ты множества
   например:
   $\begin{cases} 1.\ 0! = 1 \in F \\ 2.\ \text{Если } (n-1)! \in F, \text{ то } (n-1)! \cdot n \in F \end{cases}$

числа Фибоначчи.

Определение:

⊖ Множество, состоящие из конечного числа эл-тов называется **конечным**; множество, состоящее из бесконечного числа эл-тов называется **бесконечным**

⊖ Множество не содержащее ни одного эл-та называется **пустым** $\varnothing$

⊖ Множество B называют **подмножеством** множества A, если каждый эл-т B является эл-том A. (B включено в A) $B \subseteq A$

$B \subset A$ - строгое

Следствие:

. $\varnothing \subset A$ - любое, аналогично: $\varnothing \subseteq A$ - любое.

⊖ Фиксировано U - универсальное множество для этого класса задач, что любое $A \subset U$ A - принадлежит этому классу задач.

⊖ $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

⊖ Если $B \subseteq A$, но $B \neq A \Rightarrow B \subset A$

⊖ Множество всех подмножеств A называют булеаном множества A и обозначают как 2^A.

Свойства включений (подмножеств)

1) $A \subseteq A$, множество A является собственным включением.
2) Если: $A \subseteq B$; $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ транзитивность.

• Для наглядного представления использ. диаграмма ~~Вен~~ Эйлера-Венна см. Семинар 1.

Дадим словесные комментарии:

1. $A \cup B$ - объединение:
   Множество всех таких x, что x есть эл-т A или эл-т B, то есть эл-т хотя бы одного из множеств A и B.
2. $A \cap B$ - пересечение:
   Множество всех таких x, что x есть одновременно эл-т A и эл-т B.
3. $A \setminus B$ - разность.
   Множество всех таких x, что x есть эл-т A и не является эл-том B
4. $A \oplus B$ - сим. разность XOR
   Множество всех таких x, что x есть эл-т A и не эл-т B или x не эл-т B и эл-т B.
5. $\bar{A}$ - дополнение множества
   Множество всех тех эл-тов множества U, кот. не принадлежат множеству A.

Мощность множеств
(непрерывное понятие)

Θ Мощность множества — количество его эл-тов, обозначается: $|A|$

- Если между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то эти множества содержат одинаковое количество эл-тов. Такие множества — равномощные.
- Если у множества A равномощного собственного подмножества нет, то множество A — конечное
- Для конечного множества A, его $|A| < \infty$, а все остальные множества являются бесконечными и их мощность $= \infty$.
-

Теорема

Множество имеющие бесконечные подмножества само бесконечно

Следствие

все подмножества конечного множества конечны

\# Считаем мощности:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$|\varnothing| = 0$$

Декартово (прямое) произведение множеств

Декартовым или прямым произведением множеств называют множество упорядоченных кортежей...

$\{a, b\} = \{b, a\}$ – неупорядоченная пара

$(a, b) \neq (b, a)$ – кортеж, упорядоченная пара.

Обобщением упорядоченной пары называется упорядоченный кортеж или просто кортеж.

⊖ Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1 \dots A_n$ называют декартовым или прямым произведением $A_1 \dots A_n$: $A_1 * A_2 * \dots * A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots x_n \in A_n\}$

$$\underbrace{A * A * \dots * A}_{n} = A^n$$ – n-ая декартова степень A.

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$$

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

$$|A^n| = |A|^n$$

Пример:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$