Лекция 6

20.03.2018

Ⓓ Мн-во A <u>равномощно</u> мн-ву B, если ∃ биекция $f: A \longleftrightarrow B$, где f – соответствие.

Из этого опр. ⇒ что ∃ обратное соответствие f^{-1} $B \leftrightarrow A$, и в этом случае тоже можно говорить о равномощности.

$A \sim B$ (равномощность)

1. ↳ из этого следует, что соответствие равномощности обладают симметричностью.
2. Из опр. биекции и опр. равномощности ⇒ что для всякого мн-ва A ∃ $f: A \leftrightarrow A$. (рефлексивность)
3. Из опр. равномощности ⇒ $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность)

Равномощность обл. след. св-вами:

1. Симметричность
2. Рефлексивность
3. Транзитивности

⇒ <u>отношение</u> равномощности есть эквивалентность.

Данная эквивалентность задана на мн-ве всех подмн-в опр. U мн-ва.

Если обозначить $|A|$ класс эквивалентности A по отношен. равномощности, то тогда в этом случ. можно записать равномощ вот так:

$|A| = |B|$, как равенство классов эквивалентности

Значит понятие относится и к бесконечным мн-вам. Этот самый класс эквивалентности A $|A|$ – мощность мн-ва A

Никакое конечное мн-во не равномощно ~ никакому его под мн-ву.

Теорема

Если A - конечное мн-во и отображ. $f: A \to A$ явл. инъекцией, то эта инъекция является сюръекцией, а следоват. биекцией.

Мощность бесконечных мн-в.

Θ Любое мн-во ~ мн-ву всех натур. чисел называют счётное.

Мощность счётного мн-ва обозначают как алеф-ноль вот так: $\aleph_0$

Θ Любую биекцию мн-ва натур. чисел на некотр. мн-во M называют нумерацией счётного мн-ва M. Если обозначить f, как φ, тогда $\varphi(n) \in M$, $n \in N$, n - номер конкретного эл-та M в нумерации φ. Можно этот опр. эл-т мн-ва M записать: $a_n = \varphi(n)$

* см. тему вычислимости и разрешимости в теор. алгор.

Таким образом эл-ты счётного мн-ва можно перенумеровать, записав в виде последов. $\{a_n\}_{n \in N}$

Счётное мн-во обл. значений нек. функции. натур. аргумента.

#1. Мн-во всех нечётных нат. чисел — счётное.

$\varphi(n) = 2n - 1$

#2. мн-во всех нат. чисел тоже счётное $N \Leftrightarrow N$

#3. мн-во всех нат. чисел делящихся на заданное число k, $k>2$, тогда

$\varphi(n) = kn$

Рассмотрим свойства счётных мн-в.:

1. Теорема

Любое бесконечное мн-во содержит счётное подмн-во.

$N \subset R$

2. Теорема

В любом бесконеч. мн-ве можно выделить два не пересекающихся между собой счётных подмн-ва.

$\blacksquare$

Разобьем мн-во натур. множество на два подмн-ве

$N1 = \{n : n = 2k, k \in N$

$N2 = \{n : n = 2k1, k \in N$

Каждое подмн-во яв. нумерацией

Следуя из теоремы 1 $\Rightarrow$, каждое бесконечное мн-во содержит в себе счетное подмн-во.

Разобьём это подмн-ва на 2 и уст. их нумерации: все эл-ты с чётными, все эл-ты с нечетными номерами.

Дописать!!!

③ Теорема

Любое подмн-во счётного мн-ва конечно либо счётно.

④ Теорема

Объединение любого числа конечных или счётных мн-в. счётно.
(Если берем объед. семейство конечных → получаем конечное
Если есть хотя одно счётное → получаем счётное).

⑤ Теорема

Объединение конечного и счётного мн-ва счётно (как следствие из 4.)

Θ Обозначим: 2^N - мн-во всех подмн-в. натур чисел. $|2^N| = c$ (continuum) → мощность continuum'a.

Θ Любое мн-во равномощное continuum'y называют мн-во мощности continuum

⑥ ~~Теорема~~ серия утверждений

Следующий мн-ва равномощны:
- мн-во действ. чисел отрезка $[0;1]$.
- мн-во действ. чисел интервала $(0;1)$
- мн-во действ чисел отрезка $[a,b]$; $a,b \in R$
- мн-во действ. чисел интервала $(a;b)$
- мн-во действ. чисел R
- continuum. 2^N

и так далее.

Считают, что мощность мн-ва A не превосходит мощности мн-ва B, если A равномощно некоторому собств. подмножеству мн-ва B.

(Если будет именно собств. подмн-во, то строго меньше мн-ва B)

$$|A| \leq |B|$$

Если рассмотреть случай $|A| = |B|$, что из опр. $\Rightarrow$ что B содержит подмн-во $\sim A$ и совпадающ. с B.

Мощность мн-ва A $|A| < |B|$, если мн-ва A и B не равномощны $(A \nsim B)$ и $\exists$ $C < B$: $|C| = |A|$, т.е. $C \sim A$.

\# $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$

(транзитивность)

Т.о. все классы эквивалентности по отнош. равномощности образуют отнош. порядка.

Из опр. $\Rightarrow$ что мощность любого конеч. мн-ва строго меньше алефноль.

$$(|A| < \aleph_0).$$

Более того мощность $\aleph_0$ „наименьш" из всех бесконеч. мощностей $\Rightarrow$ любое бесконечное мн-во не менее чем счётно

Теорема Кантора – Бернштейна

Для двух любых мн-в A и B имеет место в точности одно из трех условий:

- $|A| < |B|$
- $|A| > |B|$
- $|A| = |B|$

Таким образом для любых двух мн-в можно говорить о сравнимости их по мощности, а другими словами: измерение мощностей мн-в образует линейный порядок.

(8) Теорема (для ∅ ∄):

Для любого мн-ва A верно: мощность его булеана строго больше мощности A.

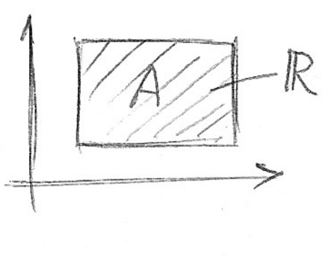
$|2^A| > |A|$

Св-во (8) говорит о том, что нет „наибольшей" мощности, т.к. для всякого мн-ва A ∃ мн-во большей мощности – его булеан.

(9) Теорема о квадрате

Для любого бесконеч. мн-ва A его декартов квадрат равномощен самому мн-ву A.

$|A| = |A^2|$



В квадрате столько же точек, сколько и в его стороне

Следствие

Мн-во $\mathbb{Q}$ счётно.

$\mathbb{Q}$ - рациональные числа.

$\square$ Каждому рац. числу можно сопоставить упорядочен. пару целых чисел:

$a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$

$(a, b) : \frac{a}{b} = q = \mathbb{Q}$

(объяснение ?)

Таким образом a и b взаимно простые числа.

Наоборот любая пара любых взаимно простых чисел ~~без~~ опред. рац. число.

Так как мн-во $\mathbb{Z}^2$ счетное (легко построить нумерацию), что мн-во $\mathbb{Q}$ - счетное $\blacksquare$

- Метод характеристических ф-ий (Белоусов-Ткачёв)
- Обратные отношения соответствие и их св-ва.