Лекция 5

13.03.2018

О. Два эл-та x, y упоряд. мн-ва A называют <u>сравнимыми</u>, по отн. порядка не больше $(A, \leq)$ если x не больше y или y не больше x ($x \leq y$ или $y \leq x$), в противном случае они - <u>несравнимые</u>.

О. Упоряд. мн-во A, все эл-ты кот. попарно сравнимы называют <u>линейно-упорядоченным</u>, а соотв. отнош. - <u>линейным порядком</u>

<u>Замеч.</u> Порядок, введенный на мн-ве A может быть перенесен на его непустое подмн-во.

\# т.е. если $B \subseteq A$, $B \neq \varnothing$ и $(A, \leq)$, то на B имеет место порядок индуцированный исходн. порядком на A.
Если на A введем лин. порядок, и индуц. пор. на B тоже лин., то така лин. упор. подмн-ва B - называ. <u>цепью</u> (в теор. графов)
Любое подмн-во попарно несравнимых эл-тов упор. мн-ва A $(A, \leq)$ называют <u>анти-цепью</u>

О. Пусть A - упор. мн-во. Эл-т $a \in A$ называют <u>наибольшим эл-том мн-ва A</u>, если для $\forall x \in A$ верно, что $x \leq a$.

О. Эл-т b мн-ва A - <u>максимальный эл-т мн-ва A</u>, если $\forall x \in A$ верно что $x \leq b$ или (x, b) несравнимы.

\# Аналогично можно дать опр. <u>наименьшего</u> и <u>минимального</u> эл-та

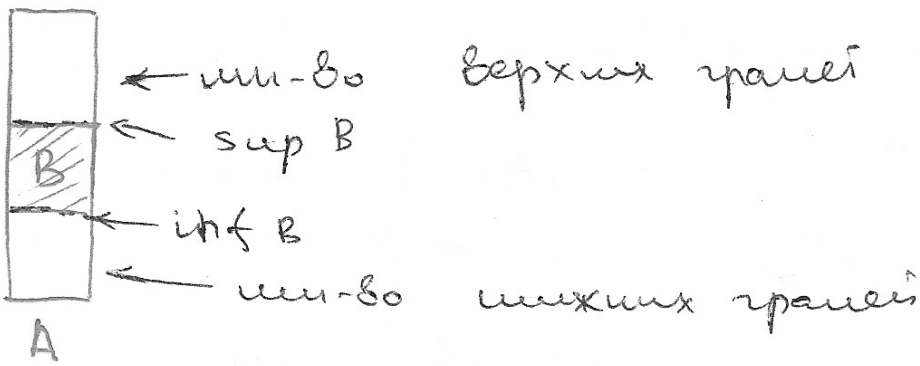
<u>Замечание:</u> Если наибольш (наименьш.) эл-т $\exists$, то он $!$.

$\square$ Пусть ~~$(\leq, A)$~~ $(A, \leq)$ имеет 2 наиб. a_1 и a_2, то для $\forall x \in A$: $x \leq a_1$, $x \leq a_2$, однако $\Rightarrow$

$a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$.

(Поскольку любое отн. порядка по опр. обладает антисимметричностью) $\blacksquare$.

Θ Пусть $(A, \leq)$ и $B \subseteq A$, эл-т $a \in A$ называют <u>верхней (нижней) гранью</u> мн-ва B, если для $\forall x \in B$: $x \leq a$ $(x \geq a)$



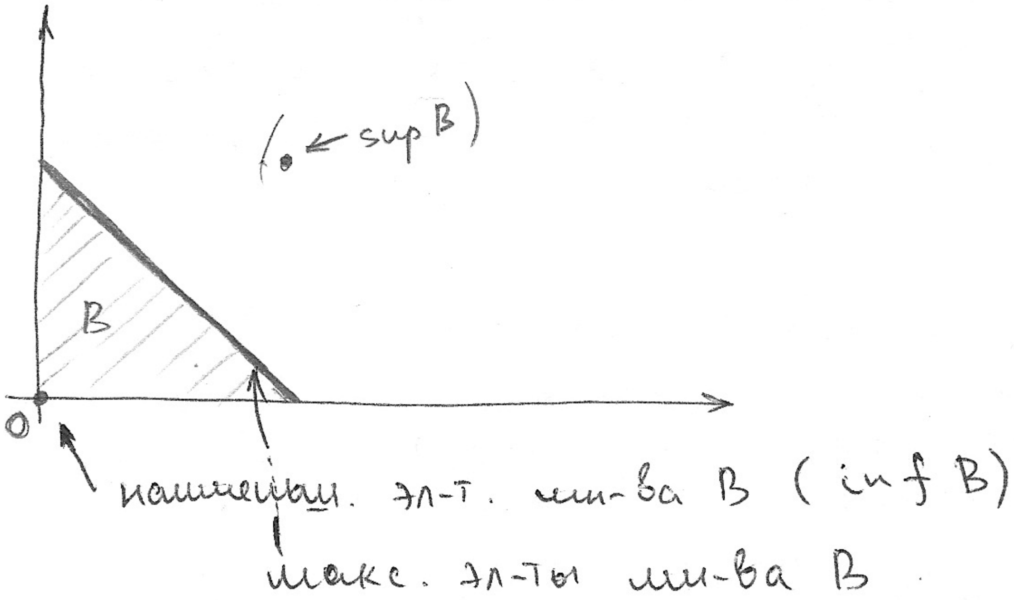
Θ Наименьш. эл-т всех верх граней мн-ва B назыв. его <u>точной верхней гранью</u> мн-ва B и обознач. $\sup B$ (supremum)

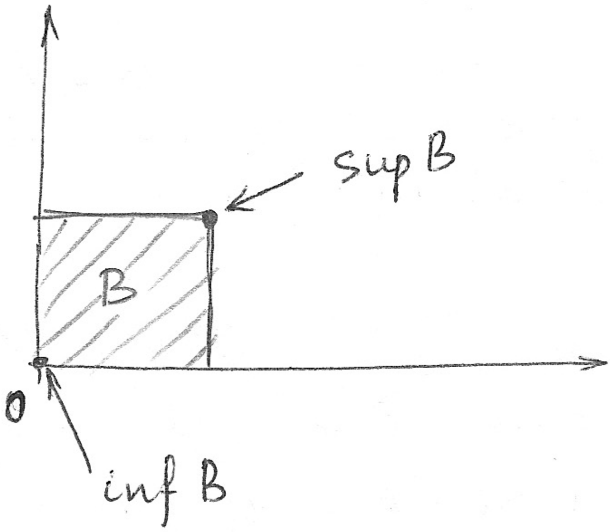
Θ Наибольш. эл-т всех нижн. граней мн-ва B назыв его <u>точной нижней гранью</u> мн-ва B и обознач. $\inf B$ (infimum)

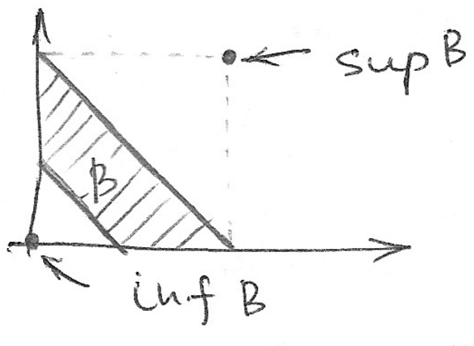
В отл. от наиб. (наим) эл-та мн-ва B, $\sup B$ ($\inf B$) могут B не принадлежать и существуют не всегда.

\# $(a, b) \leq (c, d)$ е. и т. е. $(a \leq c)$ и $(b \leq d)$

Тогда:







Θ Упор. мн-во A называют <u>вполне-упорядоченным</u>, если $\forall$ его непустое подмн-во имеет наименьш. эл-т.

Θ. Можно считать, что для упор. мн-в. работает принцип ~~двойственности~~ двойственности. Возьмем $(A, \leq)$, тогда $\forall$ св-во, доказанное для порядка $\leq$ может быть доказано (очевидно явл. справедл.) для порядка $\geq$, если:

1. Порядок заменить: $\leq \to \geq$
2. ~~Наибольш. (м~~ Наименьш. (миним) эл-ты заменить наибольш. (макс.)
3. $\inf B \to \sup B$,

либо наоборот.

Θ Конечные упор. мн-ва малой мощности можно изображать графически с помощью диаграммы Хассе. (~~Е~~Хассе)

Θ Последовательность $\{x_i\}_{i \in N}$ эл-тов упор. мн-ва назыв. неубывающей, если для всякого $i \in N$ выполняется $x_i \leq x_{i+1}$ $(\forall i \in N: x_i \leq x_{i+1})$,

Θ Эл-т. a упор. мн-ва A $(A, \leq)$ назыв. точной верхней гранью последовательности $\{x_i\}_{i \in N}$, если он явл. точной верхн. гранью мн-ва всех членов (эл-тов) последовательности.

Θ Упор. мн-во A $(A, \leq)$ называют индуктивным если выполн. два условия:
1) Оно содержит наименьший эл-т.
2) Всякая неубывающ. послед. эл-тов этого мн-ва имеет точную верхнюю грань.

\# на $\mathbb{R}$: $[0, 1]$, вводим естеств. числ. порядок $\leq$
$\uparrow$
наим. эл-т

$\Rightarrow$ 1 – верхн. граница, либо одно из чисел от 0 до 1

$\Rightarrow$ индуктивное

Θ Два упор. индуктивных мн-ва [обозначим так: $(A_1, \leq)$ и $(A_2, \leq)$] можно связать понятием отображения. Введем отображение из A_1 в A_2 $(f: A_1 \to A_2)$. Это отображение называют

непрерывным если для любой неубыв. послед. эл.-тов мн-ва A_1 : $a_1, a_2, a_3 \ldots$ образ её точной верхней грани равен точной верхней грани последов. образов $f(a_1), f(a_2), f(a_3) \ldots f(a_n) \ldots$ т.е. справедливо $\equiv$

$f(\sup a_n) = \sup f(a_n)$

Θ. Отображение f из A_1 в A_2 $(f: A_1 \to A_2)$ упор. мн-в. A_1 и A_2 $((A_1, \leq)$ и $(A_2, \leq))$ называют монотонным, если для любых $x, y \in A_1$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Теорема (о неподвижной точке)

Теорема

Всякое непрерывное отображение одного индуктивного упорядоченного мн-ва в другое – монотонно.

Θ Эл-т. $a \in A$ называют неподвижной точкой отображения $f: A \to A$ (из A в A), если $f(a) = a$.

Сама теорема

Любое непрерывное отображение f индуктивного упорядоченного мн-ва A $(A, \leq)$ в себя имеет наименьшую неподвижную точку

$\square$ На самост. изучение (Самосова - Ткачева стр. 86-87) $\blacksquare$

\# (для этой теоремы) (поиск наим. неподвиж. точки)

Пусть на мн-ве A, $A = [0, 1] \in \mathbb{R}$, $\leq$ задан естеств. числовой порядок

рассмотрим конкретное уравнение (не алгебраич.)

$\left(x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \leftarrow f$

Наим. эл-том данной послед явл. 0 $(x_0 = 0)$ ~~не от~~

не по уравнению, а по опред. $f(x_0) = 0$ $(f^0(0) = 0)$

(продолжение на след. стр)

$$\left.\begin{aligned} f^0(0) &= 0 \\ f^1(0) &= \frac{1}{4} \\ f^2(0) &= \frac{3}{8} \\ f^3(0) &= \frac{7}{16} \\ f^4(0) &= \frac{15}{32} \\ f^5(0) &= \frac{31}{64} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{4} \le \frac{3}{8} \le \frac{7}{16} \le \frac{15}{32} \le \frac{31}{64} \dots$$

$$f^n(0) = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \leftarrow$$ наименьшая точка отображения A в себя

Логично, что оно !, для проверки $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Мощность множеств
(более строгое введение)

Понятие мощности мн-ва основ. на понятии соответствия, и применяется и к конечным и к бесконечным.

Мощность конечного мн-ва, как число его эл-тов — частный случай общего понятия ~~мн-ва~~ мощности