Лекция 4

06.03.2018

Свойство плотности.

Бинарное отношение R на мн-ве A называется плотным, если для $\forall\ x, y \in A$: $x \neq y$ и $(x, y) \in R$ найдется такой $z \in A$, $z \neq x$, $z \neq y$ и $(z, x) \in R$, $(z, y) \in R$.

В зависимости от сочетания св-в бинарные отношения разделяют на:

свойство / Отношение	Иррефлекс.	рефлекс.	Симметр.	Антисимм.	Транзитив.
1. Эквивалентность		+	+		+
2. Толерантность		+	+		
3. Порядок (частичн. порядок)		+		+	+
4. Предпорядок		+			+
5. Строгий порядок	+			+	+
6. Строгий предпорядок	+				+

Отношение эквивалентности.

Пусть A - нек. мн-во, семейство попарно не пересекающ. мн-в B_i $(i = \overline{1, n})$, называют разбиением мн-ва A, если их объединение дает A: $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = A$ или $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A$.

Сами мн-ва B_i - разбиение

Пусть R - отношение эквивалентности мн-ва A. $R \subseteq A^2$. Пусть нек. эл-т $x \in A$. Классом эк-ти x по R (пишется: $[x]_R$) называется мн-во всех вторых компонентов пар, первой компонентой кот. явл. x.

$[x]_R = \{y : xRy$ и R - эквивалентность$\}$

В силу эк-ти R, $[x]_R = \varnothing$

Можно сказать, что $[x]_R$ это сечение R по эл-ту x, но при условии, что R - экв-ть

Теорема

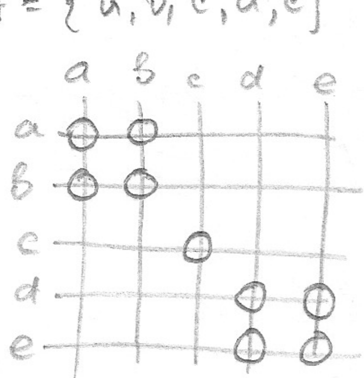
Для любого отношения эк-ти на мн-ве A мн-во классов эк-ти образ. разбиение мн-ва A.

обр. Теорема

Любое разбиение на мн-ве A задаёт на нем отнош. экв-ти для кот. классы эк-ти совпадают с эл-ти разбиения

Θ. Мн-во всех классов эк-ти по заданному отнош. эк-ти R на мн-ве A называют фактор-мн-во A/R

\# $A = \{a, b, c, d, e\}$



$[a]_R = \{a, b\}$ $[d]_R = \{d, e\}$

$[b]_R = \{a, b\}$ $[e]_R = \{d, e\}$

$[c]_R = \{c\}$

3 класса:

$C_1 = \{a, b\}$

$C_2 = \{c\}$

$C_3 = \{d, e\}$

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A$!

$A/R = \{C_1, C_2, C_3\}$

На одном и том-же мн-ве A можно задать несколько отношений R и каждое будет однозначно определять разбиение, то есть образовывать своё фактор-мн-во.

Для ∀ экв. $R \subseteq A$ можно задать отображение из A в фактор-мн-во A, если положить что $f(x) = [x]_R$, то получим, что этот x класс эк-ти. Данное отображение сюръективно т.к. для каждого $[x]_R$ из A фактор-мн-ва

Пусть $f: A \to B$ – произвольное отображение. $R \subseteq A^2$, для которого принадлежность пары xRy возможно $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(y)$ явл. отнош. экв-ти, при чём ∃ биекция фактор-мн-ва $A \setminus R$ на $f(A)$

$A/R \leftrightarrow f(A)$

Из теоремы не следует, что

А именно: два разных отображение могут задавать одно и тоже разбиение A.

\# A - мн-во жителей города
B_1 - мн-во поликлиник
B_2 - мн-во магазинов

Отношение порядка.

Мн-во вместе с заданным на нём отнош. порядка называют упорядоченным.

обознач. порядка: $\leqslant$

$(A, \leq)$, если $(x,y) \in A$, то $x \leq y$, что

x не выше / больше y не взирая на вид. мн-ва A.

Каждому отнош. порядка можно сопоставить:

- отн. строгого порядка $<$
  (образуется из отн. порядка удалением всех эл-тов диагонали A)
  $x < y \iff x \leq y$ и $x \neq y$.
- отн. двойственного порядка. $\geqslant$
  $\forall x, y \in A: \; x \geqslant y \equiv y \leq x$
- строгий порядок больше. $>$
  $x > y \iff x \geq y \;\; x \neq y$
- отн. доминирования. $\lessdot$
  $x \lessdot y$, если $x < y$ и $\nexists z \in A$, такого что

$x < z < y$, тогда в случае плотного бинарного отн. на мн. A. отн. доминир. будет пустым.
Доминир: Иррефлекс., антисимм., не транзитив