Минимизация булевых функций

Каждая булева функция, представленная в произвольном базисе, может быть задана бесконечным числом различных формул, логически эквивалентных друг другу. Широко востребованной на практике оказалась задача отыскания минимальной формулы, реализующей заданную булеву функцию.

Например, пусть булева функция задана следующей таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	**f**
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

В СДНФ функция f имеет вид:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \ldots \vee x_1x_2\bar{x}_3.$$

Та же функция f, записанная в СКНФ, выглядит намного короче:

$$(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3) \wedge (\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3).$$

Однако утверждать, что формула в СКНФ минимальна для данной булевой функции, нельзя.

Задачу отыскания минимальной формулы, задающей булеву функцию, можно понимать в различных вариантах:

1) найти формулу, содержащую наименьшее суммарное число литер в записи;
2) найти формулу с наименьшим количеством определенных операций;
3) найти формулу с наименьшим количеством подформул заданного вида

и т.д.

Помимо того, нередко накладываются ограничения на состав базиса F, над которым реализуется формула.

Наиболее изученной является задача отыскания ДНФ булевой функции, минимальной по количеству входящих в нее литер. Такую ДНФ называют *минимальной*. Задача в такой постановке легко сводится к отысканию минимальной КНФ, т.е. методы, разработанные для дизъюнктивных нормальных форм, легко переносятся на КНФ. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением задачи и, впоследствии, методов минимизации булевых функций в классе ДНФ.

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ задана в ДНФ:

$$\bigvee_{i=1}^{m} k_i,$$

где k_i есть i-я элементарная конъюнкция, т.е.

$$k_i = \bigwedge_{j=1}^{r_i} x_j^{\alpha_j}.$$

Число m называют *длиной ДНФ*. Количество литер r_i в записи элементарной конъюнкции $k_i = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{r_i}^{\alpha_{r_i}}$ называют ее *рангом* (в записи k_i верхние индексы $\alpha_j, j = \overline{1, r_i}$, следует понимать как наличие или отсутствие отрицания). Очевидно, $1 \le r_i \le n$.

Длина ДНФ может быть также охарактеризована числом $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$, где r_i, $i = \overline{1, m}$, – ранг i-й элементарной конъюнкции. R называют *суммарным рангом* ДНФ.

<u>Определение</u>. ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называют *минимальной*, если ее суммарный ранг наименьший среди всех ДНФ этой функции.

Задача отыскания минимальной ДНФ и есть задача *минимизации булевой функции* в классе ДНФ.

Существующие методы минимизации основаны на двух эквивалентных преобразованиях:

а) склеивание: $x\wedge\varphi \vee \bar{x}\wedge\phi = \varphi$;

б) поглощение: $\varphi \vee \varphi\wedge\alpha = \varphi$, где φ, α – некоторые формулы (в частности, элементарные конъюнкции).

Определение. Булева функция $f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется *импликантой* булевой функции $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, если f_1 принимает значение 0 на тех же (но не обязательно только тех) наборах, что и f.

Например, пусть функции $f_1(x_1, x_2, x_3)$ и $f_2(x_1, x_2, x_3)$ принимают следующие значения (в арифметическом порядке следования наборов):

$f_1 = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$; $f_2 = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$.

Тогда и f_1, и f_2 являются импликантами функции f, таблица истинности которой приведена выше.

Если импликанта функции f равна 1 на том же наборе, на котором равна 1 и сама функция f, то говорят, что импликанта *покрывает единицу* функции f. Импликанта может покрывать несколько единиц данной функции. В приведенном примере импликанта f_2 покрывает единицу функции f на наборах 000, 001, 101, 110.

Определение. Элементарная конъюнкция $k_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{r_i}^{\alpha_{r_i}}$ называется простой импликантой функции $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, если k_i – импликанта функции f, и никакая часть k_i не является импликантой функции f.

В том же примере: конъюнкции $k_1 = \overline{x_1} x_2 x_3$ и $k_2 = \overline{x_1} x_3$ – импликанты функции f, т.к. обращаются в 0 на тех же наборах, что и f. Однако простой импликантой из них является только k_2, т.к. k_2 есть часть k_1, и поэтому k_1 не может быть простой импликантой, а, в свою очередь, никакая часть k_2 импликантой функции f не является. Действительно, $\overline{x_1}$ – не импликанта, т.к. на наборе 010 f обращается в 0, а $\overline{x_1}$ при этом равна 1. Аналогично, f равна 0 на наборе 111, а x_3 при этом равна 1.

Имеет место следующая теорема.

Th. Всякая булева функция может быть представлена в ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой является простой импликантой.

Иначе говоря, на всех наборах, на которых булева функция равна 1, будет равна 1 и дизъюнкция *всех* ее простых импликант, т.к. каждая импликанта покрывает одну или несколько единиц булевой функции.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции f называется *сокращенной ДНФ* функции f.

Наименование «сокращенная» объясняется тем, что простые импликанты – наиболее короткие элементарные конъюнкции по числу входящих литер.

С развитием теории булевых функций выяснилось, что число простых импликант в сокращенной ДНФ оценивается величиной, достигающей $3^n/\sqrt{n}$, что превышает число двоичных наборов 2^n. Не все так просто!

Если из сокращенной ДНФ удалить одну или несколько простых импликант, то полученная ДНФ либо будет эквивалентна исходной функции, либо нет.

Пример. Булева функция f задана таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	**f**	f_a	f_b	f_c
0	0	0	**0**	0	0	0
0	0	1	**1**	1	1	1
0	1	0	**1**	1	1	1
0	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	**1**	1	1	1
1	0	1	**1**	1	1	1
1	1	0	**1**	1	1	0
1	1	1	**0**	0	0	0

Один из возможных вариантов дизъюнкции простых импликант для функции f следующий:

$$f_a = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3$$

Легко убедиться в том, что каждая элементарная конъюнкция, входящая в f_a, является импликантой функции f, причем простой (проверьте!). Формула f_a – не обязательно сокращенная ДНФ функции f, т.к. неизвестно, все ли простые импликанты f включены в f_a. Однако $f_a \equiv f$, как видно из таблицы истинности, т.е. при сохранении эквивалентности исходной функции, по числу импликант f_a «меньше либо равна» сокращенной ДНФ данной функции f.

Если из записи f_a исключить, например, импликанту $\overline{x_1} x_3$, то полученная ДНФ

$$f_b = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3$$

останется эквивалентной исходной функции f, т.к. входящие в f_b импликанты покрывают все единицы функции f (см. таблицу истинности). Однако неизвестно, является ли f_b минимальной ДНФ функции f. Из приведенных рассуждений ясно, что сокращенная ДНФ – это, вообще говоря, не минимальная ДНФ.

Очередное удаление некоторой импликанты может привести к потере эквивалентности полученной ДНФ исходной функции. Например, формула f_c получена из f_a удалением импликанты $x_1\overline{x}_3$:

$$f_c = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2$$

Видно, что f_c выражает функцию, неэквивалентную f (см. таблицу истинности): на наборе 110 $f_c = 0$.

Определение. Дизъюнкция простых импликант булевой функции – такая, что удаление из нее любой импликанты приводит к потере покрытия всех единиц функции оставшимися импликантами, называется *тупиковой ДНФ (ТДНФ)*.

Th. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Обратное, вообще говоря, неверно.

В нашем примере можно предложить такую ТДНФ функции f:

$$f_т = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2$$

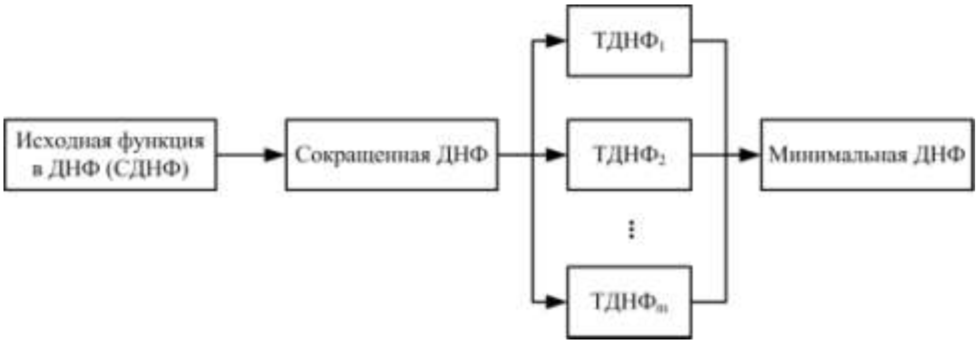
В данном случае именно $f_т$ и будет минимальной ДНФ.

Показано, что число ТДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ меньше либо равно величине

$$2^{2^{n} \cdot c},$$

где $c \to log_2 3$ при $n \to \infty$ (например, см. учебник из списка литературы по дисциплине: Плотников А.Д. Дискретная математика. М.: ООО «Новое знание», 2006. – с. 148).

Таким образом, процесс минимизации булевой функции в классе ДНФ можно представить в виде следующей диаграммы:



Критерием выбора минимальной ДНФ из множества тупиковых ДНФ, как правило, является минимальное количество литер в ее записи. Этот критерий не единственный. Может быть наложено требование, например, минимизировать количество переменных, входящих с отрицанием или минимизировать число вхождений определенных переменных и т.п. В общем случае выбор минимальной ДНФ – задача нетривиальная.

Геометрическая интерпретация задачи минимизации булевой функции

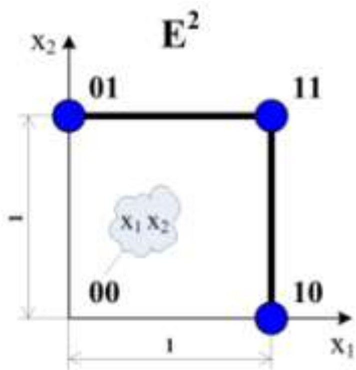
Пусть булева функция n переменных $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ задана в ДНФ. Каждому двоичному набору ранга n ставится в соответствие одна и только одна вершина n-мерного единичного гиперкуба E^n. Каждой элементарной конъюнкции соответствует либо одна вершина гиперкуба, если ранг конъюнкции равен n, либо несколько его вершин, если ранг конъюнкции меньше n.

Рассмотрим примеры.

1. **n = 2**. E^n – квадрат. Пусть $f(x_1, x_2)$ задана таблицей истинности.

x_1	x_2	**f**
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

На рисунке (справа) единичные наборы выделены синими кружками, что соответствует СДНФ заданной функции. Ребро, соединяющее вершины единичных наборов, означает возможность их склеивания. Так, на наборах 01 и 11 переменная x_1 подвергается склеиванию, переменная x_2 остается. На наборах 10 и 11 ситуация обратная, остается переменная x_1. Т.к. и x_1, и x_2 являются импликантами исходной функции, причем простыми, то сокращенная ДНФ имеет вид $x_1 \vee x_2$.



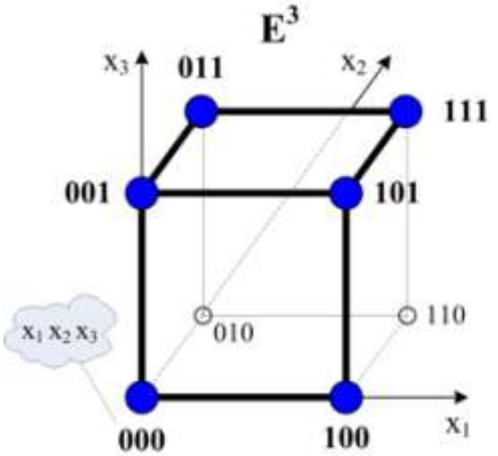
Эта же ДНФ является и единственной тупиковой, т.к. ни одну из импликант невозможно удалить без потери эквивалентности исходной функции. Итак, минимальная ДНФ заданной функции $f(x_1, x_2)$ есть $x_1 \vee x_2$.

2. **n = 3**. E^n – куб. Пусть дана таблица истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	**f**
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Как и в случае n = 2, единичные наборы показаны синими кружками, а соединяющие их ребра выделены. В итоге склеивания имеем *грань* x_3 (наборы 001, 011, 101 и 111) и грань x_2 (наборы 000, 001, 100, 101). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем минимальную ДНФ:

$$\overline{x}_2 \vee x_3.$$



В общем случае импликанта ранга k образует $(n-k)$-мерную грань гиперкуба.

Геометрический смысл задачи минимизации булевой функции в классе ДНФ формулируется следующим образом.

Дано подмножество N вершин единичного гиперкуба E^n, то есть N единичных наборов функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Найти такой набор граней гиперкуба, чтобы они в совокупности давали покрытие всех N единичных наборов функции f и сумма рангов импликант покрытия была минимальной.

Заметим, что вершина или ребро гиперкуба – частные случаи его грани.