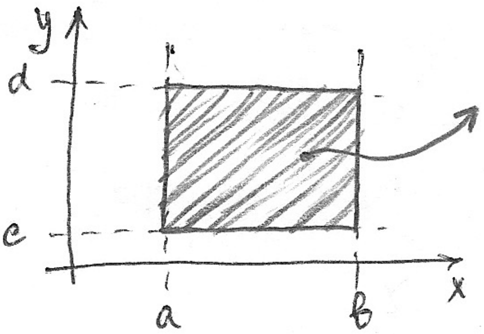
Лекция 2

20.02.2018

$A = \{x : a \le x \le b;\ x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{y : c \le y \le d;\ y \in \mathbb{R}\}$



$A \times B$

$B \times A$ (встанет на малое ребро)

#. $A = \{a, b\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$

$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

Свойства декартовых произведений (для 3-ех мн-в)

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

* $A \times U$ - особых свойств не имеет.

Понятие отображения и соответствия

Θ. Отображение f из мн-ва A в мн-во B задано, если каждому эл-ту $x \in A$ сопоставлен $!\, y \in B$

$f : A \to B$

Каждое отображение однозначно задаёт множество однородных пар $\{(x,y) : x \in A,\ y \in f(x)\} \subseteq A \times B$. Такое мн-во пар называют графиком отображения f. В общем случае для отображение f

может $\exists$ несколько различных эл-тов из мн-ва A, которым соответствует один и тот же эл-т из мн-ва B

$B: y_0 \in B$

Θ. Множество всех эл-тов x, для которых $f(x) = y_0$ называется прообразом эл-та y_0 при отображении f. Сам эл-т y_0, также, как и все эл-ты мн-ва B называют образами, при отображении f.

#. Рассмотрим зависимость.

$y = \cos x$: $y \in B$, $x \in A$.

Пусть $\cos x = y_0$, $|y_0| \leq 1$

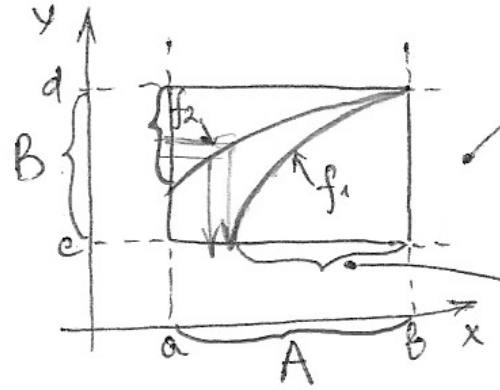
$\{x = \arccos y_0 \pm 2\pi n, n \in N\}$

Θ. Областью значений отображения f называется мн-во всех таких $y \in B$, для которых найдётся $x \in A$, удовлетворяющих равенству $y = f(x)$

Виды отображений. Свойства отображений

1. Отображение $f: A \to B$ называют инъективным (от слова инъекция), если для каждого y из области значений отображения f $\exists!$ прообраз, то есть:

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, * если окажется, что $y_1 = y_2$, то $x_1 = x_2$ (следствие)*

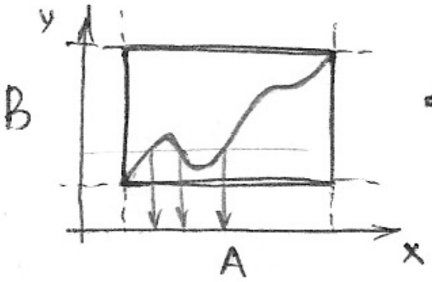


инъекция (каждому соответствует !)

область отображения.

② Отображение $f: A \to B$ называется сюръективным, если область значений отображения f, полностью совпадает с мн-вом B.

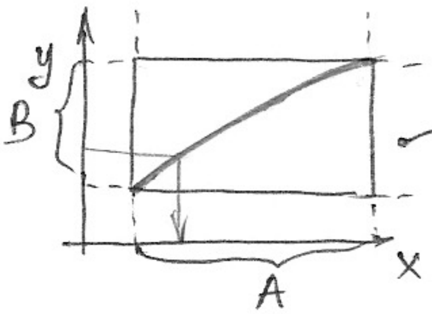
(* в этом случае говорят:
НЕ отображение из A в B,
A отображение A на B)



сюръекция

(соответствует не !)

③ Отображение $f: A \to B$ называется биективным, если оно инъективно и сюръективно одновременно



биективность. / биекция

$B \to y = p^{x \leftarrow A}$, $p>0$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow y>0$ биекция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, отображение мн-ва всех действит. чисел на множество положит. чисел.

$y = \operatorname{arctg} x$, $x \in R$

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ биекция

имеет место отображение всех действит. чисел на определ. интервал.

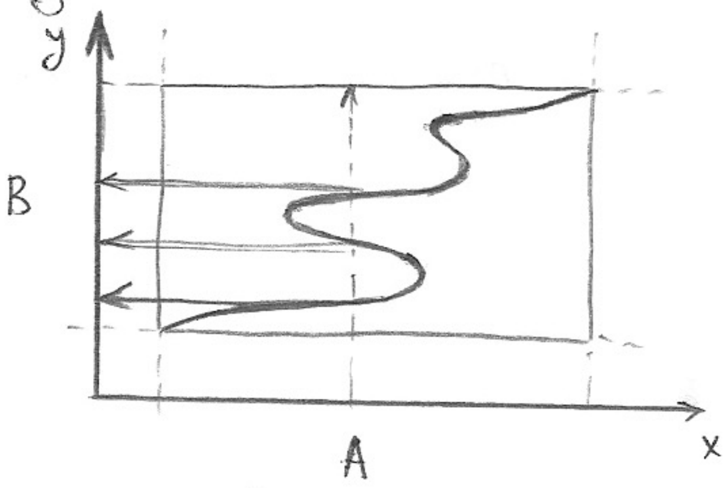
#

(автоморфизм)

Имеет место биекция мн-ва точки ок-ти на себя.

Обобщение понятия отображения

1. Если образ $y \in B$ определён не для каждого эл-та $x \in A$, получаем частичное отображение, но при этом для каждого прообраза образ $\exists$.
2. Если отображение неоднозначное, т.е. хотя бы некоторым эл-там x из мн-ва A сопоставлено не по одному, а по несколько образов $y \in B$, то говорят, что имеет место соответствие из мн-ва A в мн-во B.



При этом, если на декартовом $\times$ зафиксировать подмн-во $A \times B \subseteq C$, то задаётся соответствие ρ

$$\rho(x) = \{y : y \in B, (x, y) \in C\}$$

можно отождествить соответствие ρ и C, и считать, что соотв. $A \to B$ есть подмн-во в декартовом $\times$: $\rho \subseteq A \times B$.

$\rho \subseteq A \times B$ → а) $\rho = \varnothing$ пустое соответствие
б) $\rho = A \times B$ - универсальное соответствие

Фактор принадлежности пары соответственно записывают $a \in A$, $b \in B$.

1. Область определения $\rho \subseteq A \times B$ (соответствия) это мн-во всех первых компонентов упорядоченных пар, составляющих ρ.

$$D(y) = \{x : (\exists y \in B), (x, y) \in \rho\}$$

частн. случ. : $D(\rho) = A$ (всюду определённое)

2. Область значений $V(\rho)$ - мн-во всех вторых компонентов упорядоченных пар, составляющих ρ.

$$V(\rho) = \{y : (\exists x \in A), (x, y) \in \rho\}$$

3. Сечением соответствия ρ по эл-ту x_0 называют мн-во :

$$\underset{(x_0 \in A)}{\rho(x_0)} = \{y : (x_0, y_0) \in \rho\}$$

4. (дополнит.) Сечением соответствия ρ по мн-ву C ($C \subseteq A$) называют мн-во таких эл-тов y, что

$$\rho(C) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in C\}$$

<u>Обратное соответствие</u>

Соответствием обратным соответствию ρ называют ρ^{-1}, кот. определено по:

$\rho^{-1} \subseteq B \times A$, или по другому:

$$\rho^{-1} = \{(y, x), : (x, y) \in \rho\}$$

$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

* Если отображение $f: A \to B$ является соответствием
лучше так:

Если $f: A \to B$ является отображением, то оно является и соответствием, однако $f^{-1}: B \to A$ - будет или не будет отображением - не известно, оно будет соответствием.

Бинарное отношение

Соответствие $R \subseteq A \times A$ из множества A в себя, называют бинарным отношением на мн-ве A. (R - relation (отношение)).

Примером бинарного отношения явл. любое не строгое неравенство.

$x, y \in \mathbb{N}$

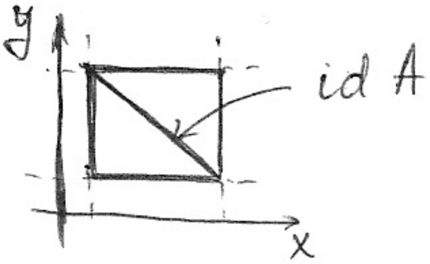
$\forall x \in \mathbb{N} : y \geq x$, $\mathbb{N}^2 \supseteq R$ ($R \subseteq \mathbb{N}^2$) можно по любому

Для записи факта принадлежности пары бинарном отношении можно использовать инфексную запись:

$(a, b) \in R$, но также используют aRb

Если $R \subseteq A^2$, то его обратное

О. Бинарное отношение R, в каждой паре которого компоненты совпадают называют диагональю мн-ва (квадрата) A. $\boxed{id_A}$



Способы задания бинарных отношений

① Перечислением пар, входящих в отношение.

* Применим только для небольших мн-тв или подмножеств мн-тв не большой мощности.

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$R_1 \in A^2$;

$R_1 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_3)$

② напомнить на след. лекции.