Кур. 5
Боер. 3
Рам. 2
Век. 4
Бурл.

из 7

Семинар 5

13.03.2018

Для макс. нужно объяснение! (8 баллов)

$$R = \{ (x,y) : x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \leq y \leq x^2 \}$$

{бинарное отношение : отношение на мн-ве целых чисел. $R \subseteq Z^2$}

1) <u>Рефлексивность</u> $\forall x \in \mathbb{Z} : xRx$, $x \leq x \leq x^2$,
так как двойное неравенство в формуле отн. нестрогое, то выполняется равенство для $\forall$ цел. x.
$\Rightarrow$ R - рефлексивное.

2) <u>Симметричность</u> $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Rightarrow yRx$,

$x \leq y \leq x^2 \Rightarrow y \leq x \leq y^2$, это очевидно выполняется не всегда, например возьмем

$x=2$, $y=3$ $\Rightarrow$ $2 \leq 3 \leq 4$ верно, однако

$3 \leq 2 \leq 9$ не верно.

$\Rightarrow$ R - несимметричное

3) <u>Ассиметричность</u> $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Rightarrow yRx$, $x=y$

$x \leq y \leq x^2$ и $y \leq x \leq y^2$

Предположим, что оба неравенства верны, а $x \neq y$, тогда $x > y$ или $x < y$, проверим а) $x < y$

левое неравенство может быть верным, но правое неверно никогда $\Rightarrow$

<u>невозможная сит.</u>

б) $x > y$

правое неравенство может быть верно, но левое никогда не выполнится $\Rightarrow$

<u>невозможно никогда</u>

$\Rightarrow$ Предположение не верно и условие выполнится только при $x = y$ $\Rightarrow$

R – антисимметричность.

3) <u>Транзитивность</u> $\forall x, y, z$ $\quad xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz$.

Пусть $x = 3$, тогда $\cancel{3} \leq y \leq \cancel{9}$

Пусть $y = 7$, тогда $7 \leq z \leq 49$ $\Rightarrow$

при $z \in [10, 49]$ $\quad x \leq \cancel{z} \leq x^2$

не выполняется $\Rightarrow$

R – не транзитивное

Отнести отношение к какому-либо классу. (см. таблицу) или невозможно отнести ни к какому классу.

#2. $R = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ 2x^2 - 3x + 1 \geq y^2\}$

1) Рефлексивность. ......

$$2x^2 - 3x - \cancel{3x} + 1 \geq x^2$$

$$x^2 - 3x + 1 \geq 0.$$

Ур. имеет корни ⇒ на отрезке

$$x_{1,2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

условие не выполняется, # при $x = 2$ не выполн.

⇒ R – не рефлексивное

2) Симметричность. ....

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq y^2 \\ 2y^2 - 3y + 1 \geq x^2 \end{cases}$$

При $x = 2$, а при $y = 0$ получим

что $3 \geq 0$, а $1 \geq 4$ ⇒ не верно.

⇒ R – не симметричность.

3) Антисимметричность.

$$\underbrace{2x^2 - 3x + 1 \geq y^2}_{\text{ист.}} \text{ и } \underbrace{2y^2 - 3y + 1 \geq x^2}_{\text{ист.}} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{?}$$

Пусть $x = 0$, то.

$$1 \geq y^2 \quad \text{и} \quad 2y^2 - 3y + 1 \geq 0$$

Тогда при $y = 1$ оба нер. верны, а

, а $x=y$ условие не верно $\Rightarrow$

R- не антисимметричное.

4) Транзитивность ....

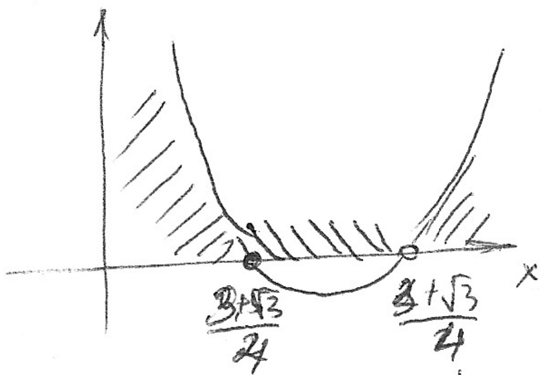
$2x^2-3x+1 \geq y^2$ и $2y^2-3y+1 \geq z^2 \Rightarrow 2x^2-3x+1 \geq z^2$

Пусть $y=0$ $\Rightarrow$

$\underset{1}{2x^2-3x+1 \geq 0}$ и $\underset{2}{1 \geq z^2}$; $\underset{3}{2x^2-3x+1 \geq z^2}$

Например $z=0,5$ удовл. неравенству 2

$\Rightarrow$ 3 $2x^2-3x+1 \geq 0,25$



$\Rightarrow$ при $x \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ нарушается $\Rightarrow$

Для примера возьмем $x=1$ $\Rightarrow$

при $y=0$, $z=0,5$ и $x=1$ нарушается $\Rightarrow$

R- не транзитивное

5) не принадлежит ни одному классу.

19

#3. $R = \{ (x,y) : x,y \in \mathbb{N}, \quad x \vdots y \}$

$\uparrow$ кратно

1) Рефлексивность ...

Посмр. любое натур. число делится само на себя нацело $\Rightarrow$

R – рефлексивное

2) Симм. ....

$x \vdots y \Rightarrow y \vdots x$ логически пример не симметричен, для этого приведем пример

$x = 2, \quad y = 4$ ... $\Rightarrow$

R – не симметричное

3) Антисимм. ...

$x \vdots y \Rightarrow y \vdots x, \quad x = y$ очевидно, что это верно, обоснуем так:

Если $x \vdots y$, то $x = k_1 \cdot y$, где $k_1 \in \mathbb{N}$, и

если $y \vdots x$, то $y = k_2 \cdot x$, где $k_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y = k_1 \cdot k_2 \cdot y$, а это верно $\Leftrightarrow$ когда

$k_1 = 1, \; k_2 = 1$, то $y = 1y \Rightarrow x = y \cdot 1, y = 1 \cdot x$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow$

R – антисимм.

4) Транзитивность . . .

$x \vdots y,\ y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$ — это очевидно, обоснуем тем:

Если $x \vdots y$, то $x = k_1 \cdot y$, а т.к. $y \vdots z$, то $y = k_2 \cdot z$, где k_1 и $k_2 \in N \Rightarrow$

$x = k_1 \cdot k_2 \cdot z \Rightarrow$ произв. двух нат. чисел - нат. число $\Rightarrow k_1 \cdot k_2 \in N \Rightarrow$

$x = k \cdot z \Rightarrow x \vdots z \Rightarrow$

R - Транзитивное

5) Рефл. + Антисим + Транзит

Частич. порядок или просто порядок

$(A, \leq) \equiv N$

Домой:

$R \in \{(x,y): x,y \in \mathbb{R},\ (x-y)^2 \leq x+y\}$

$R = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R},\ \frac{|x-y|}{y^2} > 1\}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -y \\ y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ x > -y \end{cases} \end{array}\right.$