Лекция 3

27.02.2018

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$; $R \subseteq A^2$

1) $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_3)\}$

задание перечислением

2) Табличное задание

$D(R) = A$

$D(R)$ \ $R(D(R))$	a_1	a_2	a_3
$R(a_1)$	$\{a_1, a_1\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_3\}$
$R(a_2)$			
$R(a_3)$			

3) Матрица отношений:

$n = |A|$, первые компоненты к строкам, вторые к столбцам

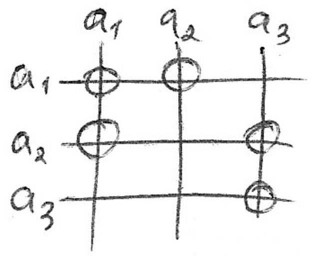
	a_1	a_2	a_3
a_1	1	1	
a_2	1		1
a_3			1

$\|r\|$; $r_{ij} = 1$, $a_i R a_j$

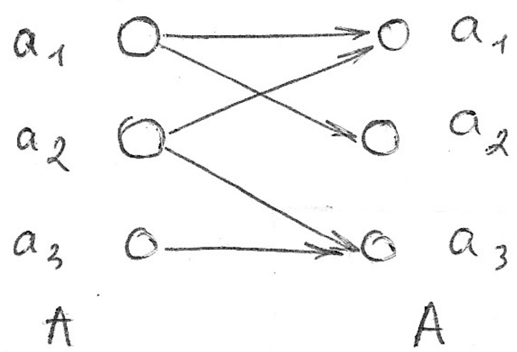
$(a_i, a_j) \in R$;

$r_{ij} = 0$, если иначе

3.1. Сеткой (разновидность матрицы)



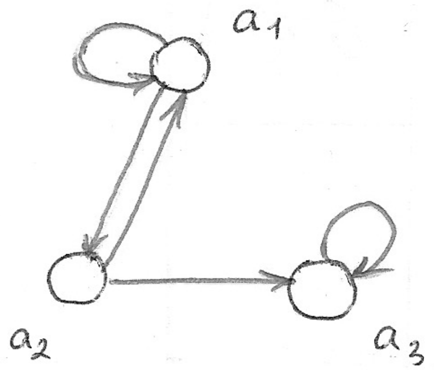
4. Графический (стрелочный)



* кол-во стрелок - мощность отнош.

для первых   для вторых   компонент пары

5. Граф отношений



*кол-во рёбер - мощность отношений

Применим данные способы к более общим случаям (к соответствиям)

$\rho \subseteq A \times B$

$A = \{1, 2\} \quad B = \{a, b, c\}$

1. $\rho = \{(1,a), (1,c), (2,b), (2,c)\}$

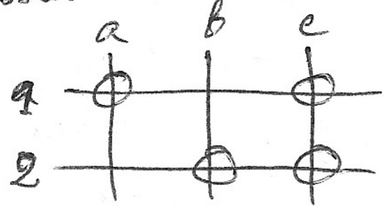
2. Столбцы – $D(\rho)$, единственная строка – сечение $\rho(D(\rho))$

$D(\rho)$	1	2
$\rho(D(\rho))$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$

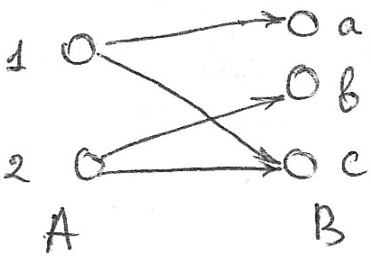
3. $n \times m \Rightarrow 2 \times 3.$

	a	b	c
1	1		1
2		1	1

3.1.



4. Графический



стрелки – эл-ты соответствия

5.

Ор. граф для соответствия задавать не принято.

Свойства бинарных отношений.

Пусть на мн-ве A задано бинарное отношение R
$R \subseteq A^2$

свойство – название:

- Бинарное отн. – <u>рефлексивное</u>, если для $\forall$ эл-та $x \in A$ имеет место xRx, $(x, x) \in R$
  (заполнена гл. диагональ + она $\in$ отношению R
  $id_A \subseteq R$ (не принадлежит, а включается, т.к. id_A – мн-во)

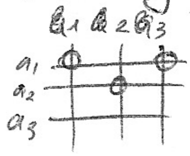
Если ни одна пара $(x, x) \notin R$, такое отнош. называют иррефлексивным (пустая гл. диагональ)
$id_A \cap R = \varnothing$

Если часть эл-тов x дает принадлежность, а для части выполняется, то оно нерефлексивное.
* иррефлексивность – частный случ. нерефлексивности.

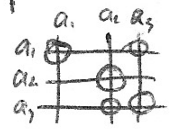
\# На нек. числовом мн-ве A задано отн. равенства. Оно рефлексивно. $x \in A$, $x = x$ (xRx, где $R \to =$)

\# Отн. строгого неравенства на числ. мн-ве.
$R: x < y \Rightarrow \forall x \in R,\ x < x$, – ложно = иррефлексивность.

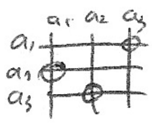
\# Не строгое неравенство на числ. мн-ве.
$R: x \leq y \Rightarrow \forall \in R,\ x \leq x$ – верно.

\# 

– нерефлексивное

\# 

– рефлексивное

\# 

– иррефлексивное.

- <u>Симметричность</u> – отн. R – симметричное, если для $\forall$ пары $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
  <u>или так:</u> $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$: для $\forall$ пар $(x, y) \in R$

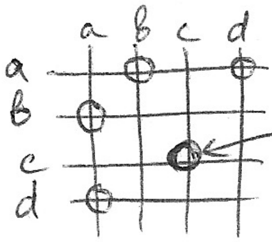
$\Rightarrow$ должны совпасть матрицы $\|r\| = \|r\|^T$

сноска

R^{-1}, если R – рефлексивно / иррефлексивно, то R^{-1} (обратная матрица или обратное отношение) будет также рефлексивно/иррефлексивно

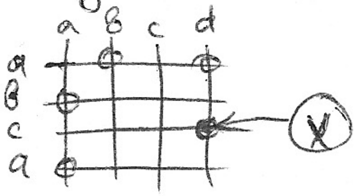
Симметричность

$A = \{a, b, c, d\}$



симметричность не нарушается

Если хотя бы для одной пары условие симметричности нарушено – отношение называется асимметричным

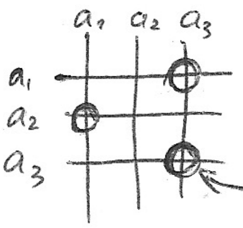


• <u>Антисимметричность</u>

Бинарное отношение на мн-ве A называют , если из принадлежности $(x,y) \in R$ и принадл. пары $(y,x) \in R$ следует, что $x = y$

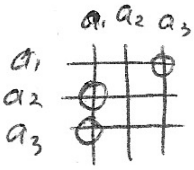
$[(x,y) \in R$ и $(y;x) \in R] \Rightarrow x = y$

Несимметричность допускает наличие симметричных пар, а антисимметричность допускает лишь при присутствии пары на диагонали.

\# 

– антисимм.

остаётся антисимм.

\# 

нет антисимм. → только несимм.

Транзитивность

$x, y, z \in A$ из принадлежности пар (x,y) и (y,z) R следует, что $(x,z) \in R$:

$[(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R$.

Если для $\forall$ пар (x,y) и (y,z) не выполн. условие $\Rightarrow$ не транзитивность.

\# $R: \leq$

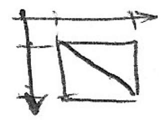
$a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ■

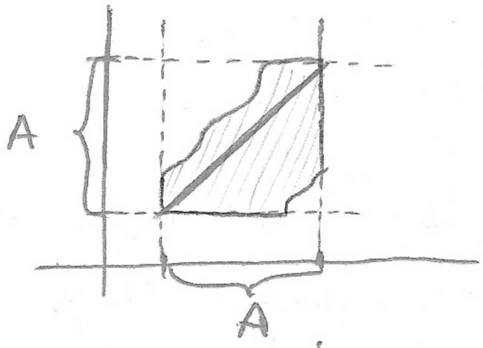
Указанные св-ва можно представить на графиках отношений

$R \subseteq A^2$

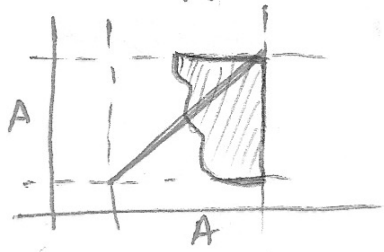
$A \subset \mathbb{R}$

ранее был график, кот. правильнее так:

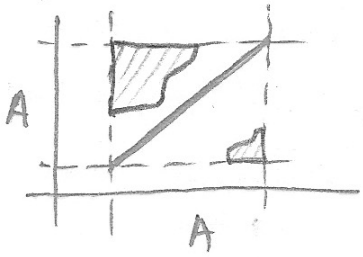




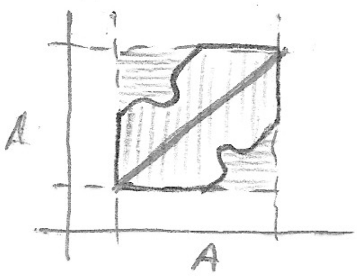
$R = \,||$, R – рефлексивное, несимметричное



R – не рефлексивное

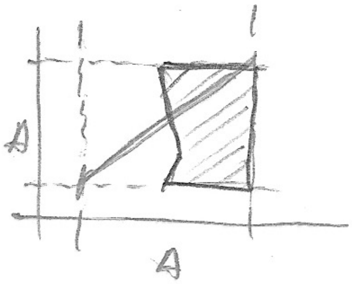


R – иррефлексивное

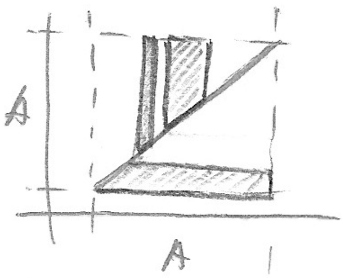


R = |||| симметричное

R = ≡ — " —



R — не симметричное



R — антисимметричное