



用 LINDO、LINGO 解运筹学问题（数学规划方面）

<http://www.lindo.com/>

一、 软件简介

LINDO 是一种专门用于求解数学规划问题的软件包。由于 LINDO 执行速度很快、易于方便输入、求解和分析数学规划问题。因此在数学、科研和工业界得到广泛应用。LINDO 主要用于解线性规划、非线性规划、二次规划和整数规划等问题。也可以用于一些非线性和线性方程组的求解以及代数方程求根等。LINDO 中包含了一种建模语言和许多常用的数学函数（包括大量概论函数），可供使用者建立规划问题时调用。

一般用 LINDO (Linear Interactive and Discrete Optimizer) 解决线性规划 (LP—Linear Programming)。整数规划 (IP—Integer Programming) 问题。其中 LINDO 6.1 学生版至多可求解多达 300 个变量和 150 个约束的规划问题。其正式版（标准版）则可求解的变量和约束在 1 量级以上。

LINDO 则用于求解非线性规划 (NLP—NON—LINEAR PROGRAMMING) 和二次规则 (QP—QUADRATIC PROGRAMMING) 其中 LINGO 6.0 学生版最多可版最长达 300 个变量和 150 个约束的规则问题，其标准版的求解能力亦再 10^4 量级以上。虽然 LINDO 和 LINGO 不能直接求解目标规划问题，但用序贯式算法可分解成一个个 LINDO 和 LINGO 能解决的规划问题。

要学好用这两个软件最好的办法就是学习他们自带的 HELP 文件。

下面拟举数例以说明这两个软件的最基本用法。（例子均选自张莹《运筹学基础》）

例 1.（选自《运筹学基础》P 54. 汽油混合问题，线性规划问题）

一种汽油的特性可用两个指标描述：其点火性用“辛烷数”描述，其挥发性用“蒸汽压力”描述。某炼油厂有四种标准汽油，设其标号分别为 1，2，3，4，其特性及库存量列于下表 1 中，将上述标准汽油适量混合，可得两种飞机汽油，某标号为 1，2，这两种飞机汽油的性能指标及产量需求列于表 2 中。

问应如何根据库存情况适量混合各种标准汽油，使既满足飞机汽油的性能指标，而产量又为最高。

表 1

| 标准汽油 | 辛烷数 | 蒸汽压力 (g/cm ²) | 库存量 |
|------|-------|---------------------------|--------|
| 1 | 107.5 | 7.11×10^{-2} | 380000 |
| 2 | 93.0 | 11.38×10^{-2} | 262200 |
| 3 | 87.0 | 5.69×10^{-2} | 408100 |
| 4 | 108.0 | 28.45×10^{-2} | 130100 |

(1 g/cm²=98Pa)

表 2

| 飞机汽油 | 辛烷数 | 蒸汽压力 (g/cm ²) | 产量需求 (L) |
|------|------------|----------------------------|---------------|
| 1 | ≥ 91 | $\leq 9.96 \times 10^{-2}$ | 越多越好 |
| 2 | ≥ 100 | $\leq 9.96 \times 10^{-2}$ | ≥ 250000 |

建模过程 略 (详见《运筹学基础》P 54—55)

目标函数： $\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

约束条件： $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 250000$

$x_1 + x_5 \leq 380000$

$x_2 + x_6 \leq 265200$

$x_3 + x_7 \leq 408100$

$x_4 + x_8 \leq 130100$

$2.85x_1 - 1.42x_2 + 4.27x_3 - 18.49x_4 \geq 0$

$2.85x_5 - 1.42x_6 + 4.27x_7 - 18.49x_8 \geq 0$

$16.5x_1 + 2.0x_2 - 4.0x_3 + 17x_4 \geq 0$

$7.5x_5 - 7.0x_6 - 13.0x_7 + 8.0x_8 \geq 0$

$x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, 8)$

下面我们就用 LINDO 来解这一优化问题。

输入语句：

max(不区分大小写) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

ST(大写或写 subject to)

$$x_5+x_6+x_7+x_8 \geq 250000$$

$$x_1+x_5 \leq 380000$$

$$x_2+x_6 \leq 265200$$

$$x_3+x_7 \leq 408100$$

$$x_4+x_8 \leq 130100$$

$$2.85x_1 - 1.42x_2 + 4.27x_3 - 18.49x_4 \geq 0$$

$$2.85x_5 - 1.42x_6 + 4.27x_7 - 18.49x_8 \geq 0$$

$$16.5x_1 + 2.0x_2 - 4.0x_3 + 17x_4 \geq 0$$

$$7.5x_5 - 7.0x_6 - 13.0x_7 + 8.0x_8 \geq 0$$

end

然后再按运算符键即可得结果。

LINDO 是规定 x_j 非负的，我们可发现输入方式与我们的数学书写的形式基本一致，运算后，计算机问您是否需要灵敏度分析，我们选择是，结果如下：

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 933400.0

| VARIABLE | VALUE | REDUCED COST |
|----------|---------------|--------------|
| X1 | 161351.734375 | 0.000000 |
| X2 | 265200.000000 | 0.000000 |
| X3 | 408100.000000 | 0.000000 |
| X4 | 98748.265625 | 0.000000 |
| X5 | 218648.265625 | 0.000000 |
| X6 | 0.000000 | 0.000000 |
| X7 | 0.000000 | 0.000000 |

| | | |
|-----|------------------|-------------|
| X8 | 31351.734375 | 0.000000 |
| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
| 2) | 0.000000 | -1.000000 |
| 3) | 0.000000 | 1.000000 |
| 4) | 0.000000 | 1.000000 |
| 5) | 0.000000 | 1.000000 |
| 6) | 0.000000 | 1.000000 |
| 7) | 0.000000 | 0.000000 |
| 8) | 43454.000000 | 0.000000 |
| 9) | 3239024.250000 | 0.000000 |
| 10) | 1890675.875000 | 0.000000 |

NO. ITERATIONS= 6

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

| OBJ COEFFICIENT RANGES | | | |
|------------------------|----------|-----------|-----------|
| VARIABLE | CURRENT | ALLOWABLE | ALLOWABLE |
| | COEF | INCREASE | DECREASE |
| X1 | 1.000000 | 0.000000 | 1.154137 |
| X2 | 1.000000 | INFINITY | 0.000000 |
| X3 | 1.000000 | INFINITY | 0.000000 |
| X4 | 1.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| X5 | 0.000000 | 1.154137 | 0.000000 |
| X6 | 0.000000 | 0.000000 | INFINITY |
| X7 | 0.000000 | 0.000000 | INFINITY |
| X8 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT | ALLOWABLE | ALLOWABLE |
|-----|---------------|----------------|---------------|
| | RHS | INCREASE | DECREASE |
| 2 | 250000.000000 | 186222.062500 | 234752.984375 |
| 3 | 380000.000000 | 234752.984375 | 15247.017578 |
| 4 | 265200.000000 | 30601.410156 | 265200.000000 |
| 5 | 408100.000000 | 156685.250000 | 10176.581055 |
| 6 | 130100.000000 | 2350.135254 | 36184.207031 |
| 7 | 0.000000 | 43454.000000 | 669046.000000 |
| 8 | 0.000000 | 43454.000000 | INFINITY |
| 9 | 0.000000 | 3239024.250000 | INFINITY |
| 10 | 0.000000 | 1890675.875000 | INFINITY |

下面给出其结果的一般解释：

“ LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6 ” 表示 LINDO 在（用单纯形法）6 次迭代或旋转后得到最优解。

“ OBJECTIVE FUNCTION VALUE 1)933400.0 ” 表示最优目标值为 933400。

“ VALUE ” 给出最优解中各变量的值。

“ SLACK OR SURPLUS ” 给出松弛变量的值。上例中 SLK 2= 第二行松弛变量 = 0（模型第一行表示目标函数，所以第二行对应第一个约束）

“ REDUCE COST ” 列出最优单纯形表中判别数所在行的变量的系数，表示当变量有微小变动时，目标函数的变化率，其中基变量的 reduce cost 值应为 0，对于非基变量 X_j 相应的 reduce cost 值表示 X_j 增加一个单位（此时假定其他非基变量保持不变）时目标函数减小的量（max 型问题）。上例中 X_1 对应的 reduce cost 值为 0，表示当 $X_1=1$ 时，目标函数值不变。

“ DUAL PRICE ”（对偶价格）列出最优单纯形表中判别数所在行的松弛变量的系数，表示当对应约束有微小变动时，目标函数的变化率，输出结果中对应每一个约束有一个对偶价格。若其数值为 X ，表示对应约束中不等式右端项若增加一个单位，目标函数将增加 X 个单位（max 型问题）。上例中：第二行对应的对偶价

格值应为-1 表示当约束 2) $X_5 + X_6 + X_7 + X_8 > 250000$ 变为 2) $X_5 + X_6 + X_7 + X_8 > 250001$ 时 ,

目标函数值 = $933400 - 1 = 933399$

当 REDUCE COST 或 DUAL PRICE 的值为 0 。表示当微小扰动不影响目标函数。有时 , 通过分析 DUAL PRICE , 也可对产生不可行问题的原因有所了解。

灵敏度分析 : 如果做敏感性分析 , 则系统报告当目标函数的费用系数和约束右端项在什么范围变化 (此时假定其他系数保持不变) 时 , 最优基保持不变。报告中 INFINITY 表示正无穷 , 如上例 : 目标函数中 X_1 的变量系数为 1 , 当它在 $[1 - 1.154137, 1 - 0] =$

$[-0.154137, 1]$ 变化时 , 最优基保持不变 。

第一个约束右端项为 250000 , 当它在 $[250000 - 234752.984375, 250000 + 186222.0625] = [15247.015625, 436222.0625]$ 范围变化时 , 最优基保持不变 。

当您要判断表达式输入是否有错误时 , 也可以使用菜单 “ Reports “ 的 ” Picture “ 选项。

若想获得灵敏度分析 , 可用 “ Reports “ 的 ” Rang “ 选项。

若需显示单纯形表 , 可执行 “ Reports “ 的 ” Tab lean “ 选项。

注意事项 :

- 1) 目标函数及各约束条件之间一定要有 “ Subject to (ST) ” 分开。
- 2) 变量名不能超过 8 个字符。
- 3) 变量与其系数间可以有空格 , 但不能有任何运算符号 (如乘号 “ * ” 等)。
- 4) 要输入 \leq 或 \geq 约束 , 相应以 $<$ 或 $>$ 代替即可。
- 5) 一般 LINDO 中不能接受括号 “ () “ 和逗号 “ , “ , 例 : $400(X_1 + X_2)$ 需写成 $400X_1 + 400X_2$; 10,000 需写成 10000。
- 6) 表达式应当已经过简化。不能出现 $2X_1 + 3X_2 - 4X_1$, 而应写成 $-2X_1 + 3X_2$ 。

例 2 . (选自 《运》 P94 习题 2.4 ; 整数规则)

有四个工人 , 要分别指派他们完成四项不同的工作 , 每个人做各项工作所消耗的时间如表。问应该如何指派 , 才能使总的消耗时间为最小 ?

| 工作 所耗 时间 工人 | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 甲 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| 乙 | 19 | 23 | 22 | 18 |
| 丙 | 26 | 17 | 16 | 19 |
| 丁 | 19 | 21 | 23 | 17 |

这是一道典型的整数规则问题。

我们记派第 I 去做工作记为 x_{ij}

注意到每人只能做一项工作。每项工作一人做。我们得到目标函数为约束条件：

min
 $15x_{11}+19x_{21}+26x_{31}+19x_{41}+18x_{12}+23x_{22}+17x_{32}+21x_{42}+24x_{13}+22x_{23}+16x_{33}+23x_{43}+24x_{14}+18x_{24}+19x_{34}+17x_{44}$

ST

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$

end

int 16

运行后我们可得到最优目标值为 70

当 $x_1 = 10, x_2 = 0$ 时。（具体的 Reports 我们略去）

在用 LINDO 解整数规划（IP）问题时，只要在 END 后加上标识即可，其中解 0/1 规划的用命令。

INT name 或 INT n (n 指前 n 个变量标识为 0/1 型)解混合型整数规划则用 GIN 来标识。

LINDO 解整数规划对变量的限制为 50 个。（指 LINDO 6.1 学生版）。所以说，尽管 LINDO 对整数规划问题是很有威力。要有效地使用还是需要一定技术的。这是因为，人们很容易将一个本质上很简单的问题列成一个输入模型。从而有可能会导致一个冗长的分支定界计算。

例 3 用 LINDO 解目标规划

由于 LINDO 不能直接求解目标规划问题，这是否就意味着 LINDO 失去了效力呢？不是的。

由求解目标规划问题的有效算法——序贯式算法可知其实目标规划我们常采取分解成前面二种办法而已。

例如算： $\min a = ((d1_ + d1), (2d2 + d3))$

G1: $x1 - 10x2 + d1_ - d1 = 50$

G2: $3x1 + 5x2 + d2_ - d2 = 20$

G3: $8x1 + 6x2 + d3_ - d3 = 100$

$x_i (i=1, 2), d_j_ , d_j (j=1, 2, 3) \geq 0$

先求目标函数的最优值

$\min d1_ + d1$

ST

$x1 - 10x2 + d1_ - d1 = 50$

$3x1 + 5x2 + d2_ - d2 = 20$

end

求得 $D1_ + D1$ 的最优值为 0

然后再求

$\min 2d_2+d_3$

ST

$x_1-10x_2+d_1-d_1=50$

$3x_1+5x_2+d_2-d_2=20$

$8x_1+6x_2+d_3-d_3=100$

$d_1+d_1=0$

end

即可算得第二级最优值 $2d_2+d_3$

例 4 LINDO 虽亦可求解二次规划问题。（但我认为它在输入对不如用 LINGO 方便 ,用 LINDO 输入时要先作偏导数计算不如 LINGO 哪样可直接输入。（选自《运筹学基础》P 190. 习题 4. 10

$\min f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$

$x_2-x_1=1$

$x_1+x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

先来说一说如何使用 LINGO

一般来说 LINGO 多用于解决大规模数学规划。

用时要注意以下几点：

（1）每条语句后必须使用分号“；”结束。问题模型必须由 MODEL 命令开始，END 结束。

（2）用 MODEL 命令来作为输入问题模型的开始，格式为 MODEL :statement（语句）。

（3）目标函数必须由“min =”或“max =”开头。

则上面的例子的输入就为

```
modul:  
  
min=(x1-1)^2+(x2-2)^2;  
  
x2-1=1;  
  
x1+x2<=2;  
  
end
```

我们即可得到最优值 0.5。当 $X_1=0.5$, $X_2=1.5$, 及灵敏度分析。我们还可得作图分析。

对于大规模规划求解请参见 LINGO 的 HELP 文件。

一.计算机代数系统 <http://www.fosu.edu.cn/li/math/SXRJ/QITA/DSXT.htm>

二.Matlab <http://www.fosu.edu.cn/li/math/SXRJ/QITA/LINDOLINGO.htm>

三.Mathematica <http://www.fosu.edu.cn/li/math/SXRJ/QITA/LINDOLINGO.htm>

四.统计软件 SAS

五.运筹学软件及教程 (LINDO,LINGO)