

数学建模 (Mathematic Modeling)

国防科技大学

第七讲

第七讲

- ▶ 主要内容：介绍军事模型。

核武器竞赛模型

核武器竞赛模型

超级大国进行核武器军备竞赛时，都宣称是为了保卫自己的安全，即要保证在遭到第一次攻击后，能有足够的核武器保存下来，以便给予对方以致命的还击。

核武器竞赛模型

超级大国进行核武器军备竞赛时，都宣称是为了保卫自己的安全，即要保证在遭到第一次攻击后，能有足够的核武器保存下来，以便给予对方以致命的还击。

为此双方展开了一场竞争，方法有：

1. 努力增加自己的核武器，从数量上压倒对方；
2. 引进反弹道导弹和多弹头导弹；
3. 加固核基地，发展核潜艇。

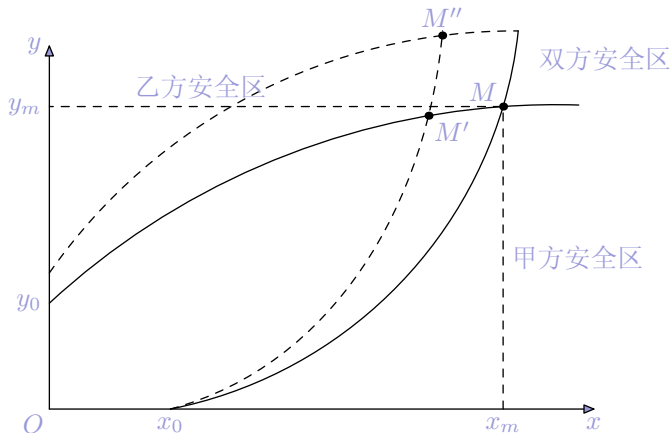
那么在这场竞赛中，是否有稳定区域呢？所谓稳定是指，双方都认为自己拥有的核武器数目可以保证自己的安全。有人做了一个定性模型，说明在一次打击不可能毁灭对方全部核武器的前提下，这种稳定区域是存在的。

设甲、乙双方的核武器数目分别是 x 和 y 。

设甲、乙双方的核武器数目分别是 x 和 y 。

甲方为了安全，其拥有的核武器数 x 要随乙方的弹头数 y 的增长而增长，可以假设存在增函数 f ，当 $x > f(y)$ 时甲方才感到安全， $x = f(y)$ 称为甲方的安全线。它的右面是甲方安全区。曲线与 x 轴交点 x_0 表示，在乙方的全部核武器用完时，甲方只要有 x_0 ，就能给乙方以致命性打击。

同样， $y = g(x)$ 是乙方安全线，上方是乙方安全区。两条安全线的交点 M 为平衡点， x_m 与 y_m 是双方都感到安全时，分别拥有的最少的核武器的数目。

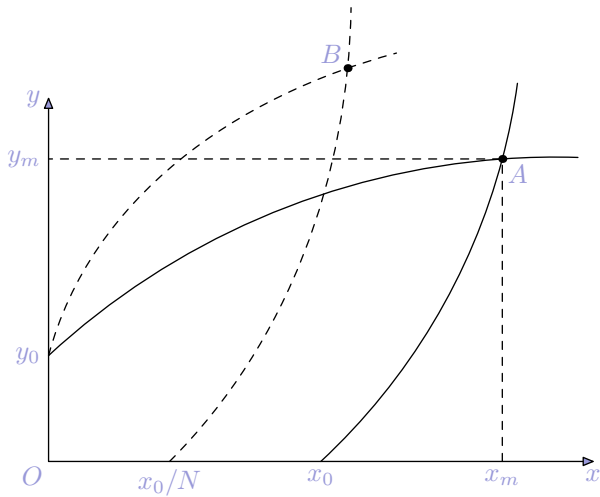


问题是双方安全线是否一定有交点，可以证明，在一次打击不能毁灭对方全部核武器的条件下，两条单调曲线 $x = f(y)$ 与 $y = g(x)$ 必定相交。

设乙方的核武器是甲方的 r 倍，即 $y = rx$ 。根据假设，当乙方以全部核武器 y 袭击甲方时，甲方的核武器不会全部被摧毁。设甲方每枚核武器在一次打击后保存下来的概率是 $p(r)$ ，则不论 r 多大，总有 $p(r) > 0$ ，于是甲方平均能保存 $xp(r)$ 枚，从而只要 $xp(r) \geq x_0$ ，甲方就认为自己是安全的。设 x_r 是满足 $xp(r) \geq x_0$ 的最小的 x ，则在乙方拥有 r 倍于甲方拥有的核武器的情况下，甲方只需要有 x_r 枚，就是安全的，从而 x_r 是 $x = f(y)$ 与直线 $y = rx$ 的交点的横坐标， \Rightarrow 不论 r 多大， $x = f(y)$ 都必定与 $y = rx$ 相交，同理不论 r 多大， $y = g(x)$ 都必定与 $x = ry$ 相交。所以 $x = f(y)$ 与 $y = g(x)$ 必然相交。

如果甲方由于使用加固核设施，反弹道导弹或其他一些手段，则它的导弹更不容易遭受突然袭击，这使得 $p(r)$ 增大，所以 $f(y)$ 向左移动，用虚线表示。 x_0 点不变。为了保持稳定，双方只需要更少的导弹，稳定点为 M' 。但由于甲方对其自身城市的防卫能力增加了，乙方要对甲方进行致命的打击，就需要比 y_0 更多的导弹，于是 $g(x)$ 向上移动，要保持稳定，双方都需要更多的导弹。军备竞赛进一步升级。

如果使用多弹头导弹，例如，甲方将它的每枚导弹的单弹头改装为 N 个弹头，那么它在受打击后需要保留的导弹数可以更少些 (x_0/N)，于是 $x = f(y)$ 向左移动。乙方在一次被偷袭中将面临 N 倍之多的弹头。于是曲线 $g(x)$ 将向上变动。



Lanchester 战争模型

Lanchester 提出的模型非常简单，他只考虑双方兵力的多少和战斗力的强弱，兵力因战斗减员和非战斗减员而减少，又由后备力量的增援而增加；战斗力即杀伤对方的能力，则与射击率（单位时间的射击次数）、射击命中率以及战争的类型（正规战、游击战）等有关。这些模型当然没有考虑交战双方的政治、经济、社会等因素。而仅靠战场上兵力的优劣是很难估计战争胜负的，所以我们认为用这些模型判断整个战争的结局是不可能的，但是对于局部战役来说或许还有参考价值。更重要的是，建模的思路和方法为我们借助数学模型讨论社会科学领域中的实际问题提供了可以借鉴的示例。

一般战争模型

用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示甲乙交战双方时刻 t 的兵力，不妨视为双方的士兵人数。假设

1. 每一方的战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力，用 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 表示。
2. 每一方的非战斗减员率（由疾病、逃跑等因素引起）与本方的兵力成正比。
3. 每一方的增援率是给定的函数，用 $u(t)$ 和 $v(t)$ 表示。

由此可以写出关于 $x(t), y(t)$ 的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -f(x, y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) &= -g(x, y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

由此可以写出关于 $x(t), y(t)$ 的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -f(x, y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) &= -g(x, y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

下面针对不同的战争类型讨论战斗减员率 f 、 g 的具体表示形式，并分析影响战争结局的因素。

正规战争模型

甲乙双方都用正规部队作战。我们只须分析甲方的战斗减员率 $f(x, y)$.

正规战争模型

甲乙双方都用正规部队作战。我们只须分析甲方的战斗减员率 $f(x, y)$ 。

甲方士兵公开活动，处于乙方每一个士兵的监视和杀伤范围之内，一旦甲方某个士兵被杀伤，乙方的火力立即集中在其余士兵身上，所以甲方的战斗减员率只与乙方兵力有关，可以简单地设 f 与 y 成正比，即 $f = ay$ 。 a 表示乙方平均每个士兵对甲方士兵的杀伤率（单位时间的杀伤数），称乙方的战斗有效系数。 a 可以进一步分解为 $a = r_y p_y$ ，其中 r_y 是乙方的射击率（每个士兵单位时间的射击次数）， p_y 是每次射击的命中率。

类似地有 $g = bx$ ，且甲方的战斗有效系数 $b = r_x p_x$ ， r_x 和 p_x 是甲方的射击率和命中率。于是在这个模型中方程(1)化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y}(t) &= -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \quad (2)$$

在分析战争结局时忽略非战斗减员一项（与战斗减员相比，这项很小），并且假设双方都没有增援。记双方的初始兵力分别是 x_0 和 y_0 ，方程(2)简化为

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ay \\ \dot{y} &= -bx \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

不直接求解方程(3)，而在相平面上讨论相轨线的变化规律更容易判断双方的胜负。由方程(3)可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \quad (4)$$

不直接求解方程(3)，而在相平面上讨论相轨线的变化规律更容易判断双方的胜负。由方程(3)可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \quad (4)$$

其解为

$$ay^2 - bx^2 = k \quad (5)$$

不直接求解方程(3)，而在相平面上讨论相轨线的变化规律更容易判断双方的胜负。由方程(3)可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \quad (4)$$

其解为

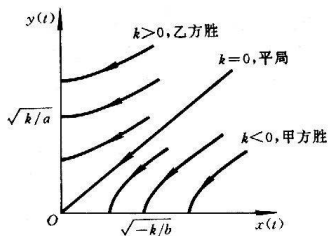
$$ay^2 - bx^2 = k \quad (5)$$

注意到方程(3)的初始条件，有

$$k = ay_0^2 - bx_0^2 \quad (6)$$

由(5)式确定的相轨线是双曲线族, 如图。箭头表示随时间 t 的增加, $x(t)$ 、 $y(t)$ 的变化趋势。可以看出, 如果 $k > 0$, 轨线将与 y 轴相交。这就是说存在 t_1 , 使 $x(t_1) = 0, y(t_1) = \sqrt{\frac{k}{a}} > 0$, 即当甲方兵力为零时乙方兵力为正值, 表明乙方获胜, 同理可知, $k < 0$ 时甲方获胜, 而当 $k = 0$ 时双方战平。

由(5)式确定的相轨线是双曲线族，如图。箭头表示随时间 t 的增加， $x(t)$ 、 $y(t)$ 的变化趋势。可以看出，如果 $k > 0$ ，轨线将与 y 轴相交。这就是说存在 t_1 ，使 $x(t_1) = 0, y(t_1) = \sqrt{\frac{k}{a}} > 0$ ，即当甲方兵力为零时乙方兵力为正值，表明乙方获胜，同理可知， $k < 0$ 时甲方获胜，而当 $k = 0$ 时双方战平。



图：正规战争模型的相轨线

进一步分析某一方譬如乙方取胜的条件。由(6)式并注意
到 a 、 b 的含义，乙方获胜的条件可表为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y} \quad (7)$$

(7)式说明双方初始兵力之比 y_0/x_0 以平方关系影响着战争的结局。例如若乙方兵力增加到原来的 2 倍（甲方不变），则影响战争结局的能力增加到 4 倍。或者说，若甲方的战斗力譬如射击率 r_x 增加到原来的 4 倍（ p_x 、 r_y 、 p_y 均不变），那么为了与此相抗衡，乙方只须将初始兵力 y_0 增加到原来的 2 倍。由于这个原因正规战争模型称为平方律模型。

游击战争模型

双方都用游击部队作战。

游击战争模型

双方都用游击部队作战。

甲方士兵在乙方士兵看不到的某个面积为 s_x 的隐蔽区域内活动，乙方士兵不是向甲方士兵开火，而是向这个隐蔽区域射击，并且不知道杀伤情况。这时甲方战斗减员率不仅与乙方兵力有关，而且随着甲方兵力的增加而增加。因为在一个有限区域内，士兵越多，被杀伤的就越多。这样可以简单地假设 $f = cxy$ ，且乙方战斗有效系数 c 可表为 $c = r_y p_y = r_y \frac{s_{ry}}{s_x}$ ，其中 r_y 仍为射击率，而命中率 p_y 等于乙方一次射击的有效面积 s_{ry} 与甲方活动面积 s_x 之比。

类似地有 $g = dxy$, $d = r_x p_x = r_x \frac{s_{rx}}{s_y}$. 于是在这个模型中方程(1)化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -cxy - \alpha x + u(t) \\ \dot{y}(t) &= -dxy - \beta y + v(t) \end{cases} \quad (8)$$

忽略 αx 和 βy 并设 $u = v = 0$, 在初始条件下(8)式为

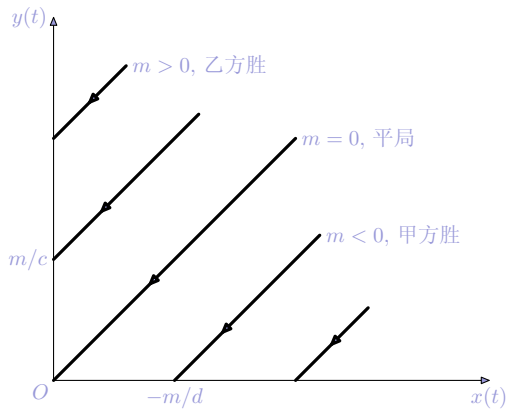
$$\begin{cases} \dot{x} &= -cxy \\ \dot{y} &= -dxy \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

与正规战争模型中方程(3)的解法类似，方程(9)的解为

$$cy - dx = m \quad (10)$$

$$m = cy_0 - dx_0 \quad (11)$$

(10)式确定的相轨线是直线族，如图。像分析正规战争模型一样，可知 $m > 0$ 时乙方胜， $m < 0$ 时甲方胜， $m = 0$ 时战平。



图：游击战争模型的相轨线

乙方获胜的条件还可以表为

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y} \quad (12)$$

即初始兵力之比 y_0/x_0 以线性关系影响战争结局，并且当射击率和射击有效面积一定时，增加活动面积 s 与增加初始兵力 y_0 起着同样的作用。这个模型又称线性律模型。

混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队。

混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队。

根据对正规战争和游击战争模型的分析 and 假设， $f = cxy$ ， $g = bx$ ，在同样的忽略和假设下，方程为

$$\begin{cases} \dot{x} &= -cxy \\ \dot{y} &= -bx \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (13)$$

它的相轨线

$$cy^2 - 2bx = n \quad (14)$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0 \quad (15)$$

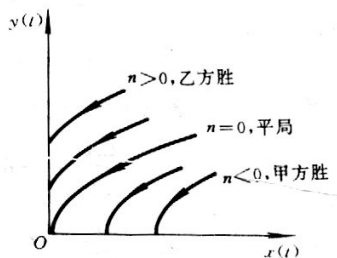
是抛物线，如图。

它的相轨线

$$cy^2 - 2bx = n \quad (14)$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0 \quad (15)$$

是抛物线，如图。



图：混合战争模型的相轨线

可以知道 $n > 0$ 时乙方胜, $n < 0$ 甲方胜, $n = 0$ 时双方战平。并且乙方 (正规部队一方) 取胜的条件可表为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2b}{cx_0} \quad (16)$$

以 $b = r_x p_x$, $c = r_y \frac{s_{ry}}{s_x}$ 代入得

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0} \quad (17)$$

假定以正规部队作战的乙方火力较强，以游击部队作战的甲方虽火力较弱，但活动范围较大。利用(17)式可以估计出乙方取胜需投入多大的初始兵力。为确定起见不妨设甲方兵力 $x_0 = 100$ ，命中率 $p_x = 0.1$ ，火力 r_x 是乙方火力 r_y 的一半，活动区域面积 $s_x = 0.1$ 平方千米，乙方每次射击的有效面积 $s_{ry} = 1$ 平方米，那么由(17)式乙方取胜的条件为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \times 10^6}{2 \cdot 1 \cdot 100} = 100 \quad (18)$$

即 $y_0/x_0 > 10$ ，乙方必须 10 倍于甲方的兵力。

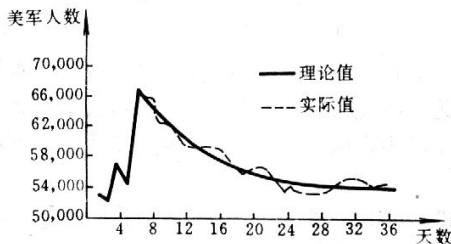
美国人曾用这个模型分析越南战争（甲方为越南，乙方为美国）。根据类似于上面的计算以及四五十年代发生在马来亚、菲律宾、印尼、老挝等地的混合战争的实际情况估计出，正规部队一方要想取胜必须至少投入 8 倍于游击部队一方的兵力，而美国最多只能派出 6 倍于越南的兵力。越南战争的结局是美国不得不接受和谈并撤军，越南人民取得最后胜利。

硫黄岛战役

J. H. Engel 用二次大战末期美日硫黄岛战役中的美军战地记录，对正规战争模型进行了验证，发现模型结果与实际数据吻合得很好。

硫黄岛战役

J. H. Engel 用二次大战末期美日硫黄岛战役中的美军战地记录，对正规战争模型进行了验证，发现模型结果与实际数据吻合得很好。



图：美军兵力实际数据与理论结果的对比

军备竞赛模型

Richardson, 1939 年, 军备竞赛理论模型。

军备竞赛模型

Richardson, 1939 年, 军备竞赛理论模型。

假设每一方军备的增加都取决于下列三个因素:

1. 对方军备的大小, 由于相互不信任, 一方军备越大, 另一方军备增加得越快;
2. 自己军备的大小, 由于经济的限制, 军备越大, 就增加得越慢;
3. 双方固有的敌视程度, 即使一方没有军备, 由于存在敌视, 另一方也会增加军备。

设甲、乙双方的军备分别 $x(t), y(t)$, 根据上述三个假设可以作出进一步的简化假设:

1. $x(t)$ 的增加率与 $y(t)$ 成正比;
2. $x(t)$ 的减少率与 $x(t)$ 成正比;
3. 由于固有敌视程度导致的 $x(t)$ 的增加率设为常数。

设甲、乙双方的军备分别 $x(t), y(t)$, 根据上述三个假设可以作出进一步的简化假设:

1. $x(t)$ 的增加率与 $y(t)$ 成正比;
2. $x(t)$ 的减少率与 $x(t)$ 成正比;
3. 由于固有敌视程度导致的 $x(t)$ 的增加率设为常数。

则有

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\alpha x + ky + g \\ \dot{y} &= lx - \beta y + h \end{cases} \quad (19)$$

$$(k, l, \alpha, \beta, g, h \geq 0)$$

$$\begin{cases} -\alpha x + ky + g & = 0 \\ lx - \beta y + h & = 0 \end{cases} \quad (20)$$

利用此模型可以解释几个重要现象：

利用此模型可以解释几个重要现象：

1、引起战争的原因很多，有一种论点偏重于“军备引起战争”，另一种论点偏重于“领土冲突”或“历史恩怨”，两种论点都可以从方程组(19)得到解释。持第一种观点的人可以在(19)中把 k 与 l 取得大一些，把 g 和 h 取得小一些；持后一种观点的人可把 g, h 取得大一些，而把 k, l 取得小一些。

2、相互和解，双方裁军可达持久和平。

设 $g = h = 0$ ，即双方没有仇恨，没有领土要求，那么 $x(t) = y(t) = 0$ 是(19)的平衡解。如果某个时刻 $x(t), y(t)$ 为零，就将永远保持为零。

2、相互和解，双方裁军可达持久和平。

设 $g = h = 0$ ，即双方没有仇恨，没有领土要求，那么 $x(t) = y(t) = 0$ 是(19)的平衡解。如果某个时刻 $x(t), y(t)$ 为零，就将永远保持为零。

3、未消除敌视的双方裁军是不会持久的。

$g, h \neq 0$ ，即使某个时刻 $x(t), y(t)$ 为零，由于这时， $\dot{x} = g$, $\dot{y} = h$, $x(t), y(t)$ 仍将增加。

2、相互和解，双方裁军可达持久和平。

设 $g = h = 0$ ，即双方没有仇恨，没有领土要求，那么 $x(t) = y(t) = 0$ 是(19)的平衡解。如果某个时刻 $x(t), y(t)$ 为零，就将永远保持为零。

3、未消除敌视的双方裁军是不会持久的。

$g, h \neq 0$ ，即使某个时刻 $x(t), y(t)$ 为零，由于这时， $\dot{x} = g$, $\dot{y} = h$, $x(t), y(t)$ 仍将增加。

4、单方面裁军不会持久。

如果在某个时刻 $x(t) = 0$ ，并且 $g = 0$ ，但由于 $\dot{x} = ky$, $x(t)$ 也不会保持为零。

下面在一般情况下讨论方程(19)的平衡点的稳定性。

下面在一般情况下讨论方程(19)的平衡点的稳定性。

线性常系数微分方程组 $\dot{X} = AX + R$ 的平衡点是稳定的 \Leftrightarrow A 的所有特征根都具有负实部。

当 $\alpha\beta - kl \neq 0$ 时, 方程组(19)的系数矩阵的特征根为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm [(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - kl)]^{1/2}}{2} \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm [(\alpha - \beta)^2 + 4kl]^{1/2}}{2}\end{aligned}$$

当 $\alpha\beta - kl \neq 0$ 时, 方程组(19)的系数矩阵的特征根为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm [(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - kl)]^{1/2}}{2} \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm [(\alpha - \beta)^2 + 4kl]^{1/2}}{2}\end{aligned}$$

由此可知, 两个根都是实数且不等于零, 当 $\alpha\beta - kl > 0$ 时, 两个特征根均是负的, 此时平衡点 (x_0, y_0) 是稳定的。

当 $\alpha\beta - kl < 0$ 时, 一个特征根是正的, 从而此时平衡解 (x_0, y_0) 是不稳定的。

所以当且仅当 $\alpha\beta - kl > 0$ 时, (x_0, y_0) 是稳定的。或即

$$\alpha\beta > kl \quad (21)$$

(21)式表明, 当约束增长程度 $>$ 刺激增长程度时, 军备竞赛能够稳定在某一点上, 否则, 竞赛将无限制地进行下去。

所以当且仅当 $\alpha\beta - kl > 0$ 时, (x_0, y_0) 是稳定的。或即

$$\alpha\beta > kl \quad (21)$$

(21)式表明, 当约束增长程度 $>$ 刺激增长程度时, 军备竞赛能够稳定在某一点上, 否则, 竞赛将无限制地进行下去。

为了利用(21)判断平衡点的稳定性, 要估计 α, β, k, l 。下面是 Richardson 提出的估计方法。

设 $g = 0, y = y_1$ (乙方军备为常数), $x = 0$ 时

$$\dot{x} = ky_1 \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{y_1}{\dot{x}} \quad (22)$$

(22)式表示不存在敌视时, $\frac{1}{k}$ 是甲方军备从零赶上乙方军备 y_1 所需要的时间。

一战结束后，根据凡尔赛条约，战败国德国的军队减到了十几万人，而在二战前夕，1933~1936 年，德国重整军备用三年时间赶上了它的邻国，假设减缓效应 α 被强烈仇恨所抵消。于是对于德国而言，可以认为 $\frac{1}{k} = 3$ （年），即 $k \doteq 0.3$ 。

再来看 α . 设 $g = 0, y = 0$, 由方程(19)得 $\dot{x} = -\alpha x$, 解得

$$x(t) = x(t_0) \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}$$

即

$$x(t_0 + \frac{1}{\alpha}) = x(t_0) \cdot e^{-1} \quad (23)$$

(23)式表示在不存在敌视且乙方无军备时, $\frac{1}{\alpha}$ 是军备减少到原来的 $\frac{1}{e}$ 所需要的时间。 α 称为松驰时间, Richardson 认为 $\frac{1}{\alpha}$ 是一个国家议会的任期, 例如对于美国来说, $\alpha = 0.2$, 美国议会的任期是五年。