数学建模
(Mathematic Modeling)

国防科技大学

第九讲

第九讲

- 主要内容：介绍随机决策模型和随机服务模型。

1、风险决策问题

1、风险决策问题

例 1　某公司为了扩大市场，要举办一个产品展销会，会址打算选择甲、乙、丙三地。获利情况与会址及天气有关。据气象台预报，估计三种天气（晴、阴、雨）可能发生的概率为 0.3, 0.5, 0.2, 其收益情况见表 1。现要确定会址，使收益最大。

天气 概率	N_1(晴) $p_1 = 0.3$	N_2(阴) $p_2 = 0.5$	N_3(雨) $p_3 = 0.2$
A_1(甲地)	4	5	1
A_2(乙地)	6	4	1.5
A_3(丙地)	7	2	1.2

当各状态出现的概率可以通过某种途径得到时，称为风险决策问题。对这类决策问题，介绍两种决策准则及方法。

(1) 最大可能准则

（1） 最大可能准则

选择一种发生概率最大的状态作为决策依据，其余状态不考虑，称为最大可能准则。

（1） 最大可能准则

选择一种发生概率最大的状态作为决策依据，其余状态不考虑，称为最大可能准则。

按此准则，选择 A_1（甲地）

（2） 期望值准则

(2) 期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。

(2)　期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。

$$
\begin{aligned}
E(A_1) &= 4 \times 0.3 + 5 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 4.0 \\
E(A_2) &= 6 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.3 = 4.25 \\
E(A_3) &= 7 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.3 = 3.46
\end{aligned}
$$

（2） 期望值准则

依各个方案的收益值的期望值作为决策依据，称为期望值准则。

$$E(A_1) = 4 \times 0.3 + 5 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 4.0$$
$$E(A_2) = 6 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.3 = 4.25$$
$$E(A_3) = 7 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.3 = 3.46$$

依期望值准则，选择 A_2（乙地）

一次性决策，以最大可能准则为先，长期多次决策，以期望值准则为先。如报童售报问题。

期望值准则应用的比较广泛，但也不一定合理，例如某人花 20 万元买了一辆汽车。汽车发生事故的可能性为 0.1%. 若投保，每年要交保险费 300 元。

$$\text{投保时损失值期望} = 300 \times \frac{99.9}{100} \approx 300 \text{ 元}$$

$$\text{不投保时损失值期望} = 200000 \times \frac{0.1}{100} = 200 \text{ 元}$$

故按照期望值准则，应取“不投保”决策，但事实上，多数车主会投保。

例 2　12 月 23 日 L 先生想购买一件圣诞节礼物，有两种类型供选择，普通型 27.95$，高级型 39.95$。按经验估计，24 日普通型有 50% 的可能性会削价为 25.95$，然而也可能 24 日普通型售完了，那么他就必须买高级型的，他估计这种可能性有 20%，请问 L 先生该如何决策?

两种方案，分别计算费用期望值。
24 日购买，他将支付

$$D = \begin{cases} 25.95 & p = 0.5 \\ 27.95 & p = 0.3 \\ 39.95 & p = 0.2 \end{cases}$$

$$D_0 - D = \begin{cases} 2.00 & p = 0.5 \\ 0.00 & p = 0.3 \\ -12.00 & p = 0.2 \end{cases}$$

$$E(D_0 - D) = 2 \times 0.5 + 0 \times 0.3 - 12 \times 0.2 = -1.4(\$)$$

$\therefore$ 最好立即购买。

2、不确定型决策

2、不确定型决策

当状态 $N_1, N_2, \ldots, N_n$ 发生的概率无法估计时，称为不确定型决策问题。

设 a_{ij} 表示在状态 N_j 下采取方案 A_i 的收益值。

几种决策准则

几种决策准则

（1）乐观决策准则（极大极大准则，Hurwicz criterion）

几种决策准则

（1）乐观决策准则（极大极大准则，Hurwicz criterion）

着眼于获取最大利润，基于对自然状态作最乐观的估计之上，以 $\max_i \max_j a_{ij}$ 所对应的行动方案作为决策。

例 3 某电视机公司为明年广告方面的投资考虑了三种方案:

S_1: 维持今年水平; S_2: 增加 500 万; S_3: 增加 2000 万

但电视机的销售量依赖于经济形势，明年的经济形势也有三种可能：好、平、差。 市场调研人员对三种经济形势下三种投资方案的利润作了预测

增投资	利润（百万元）			纯利润（百万元）		
	好	平	差	好	平	差
$S_1(0)$	10	0	-5	10	0	-5
$S_2(5)$	25	10	5	20	5	-0
$S_3(20)$	50	30	14	30	10	-6

例 3 某电视机公司为明年广告方面的投资考虑了三种方案:

S_1：维持今年水平；S_2：增加 500 万；S_3：增加 2000 万

但电视机的销售量依赖于经济形势，明年的经济形势也有三种可能：好、平、差。 市场调研人员对三种经济形势下三种投资方案的利润作了预测

增投资	利润（百万元）			纯利润（百万元）		
	好	平	差	好	平	差
$S_1(0)$	10	0	-5	10	0	-5
$S_2(5)$	25	10	5	20	5	-0
$S_3(20)$	50	30	14	30	10	-6

按照极大极大准则，选择方案 S_3.

（2）悲观准则（极大极小准则，Wald criterion）

（2）悲观准则（极大极小准则，Wald criterion）

着眼于在最坏的情况下获得最大的利润，基于对自然状态作最悲观的估计之上，以 $\max_i \min_j a_{ij}$ 所对应的行动方案为决策。

S_1, S_2, S_3 的最小利润分别为 -5,0,-6，按照极大极小准则，选择方案 S_2.

（3）极小极大准则（Savage criterion）

（3）极小极大准则（Savage criterion）

着眼于最大后悔指数最小的准则。

经济形势	好	平	差
S_1	20	10	5
S_2	10	5	0
S_3	0	0	6

表: 后悔指数表

（3）极小极大准则（Savage criterion）

着眼于最大后悔指数最小的准则。

经济形势	好	平	差
S_1	20	10	5
S_2	10	5	0
S_3	0	0	6

表: 后悔指数表

按照极小极大准则，选择方案 S_3.

与极大极大准则未必相同，例如，利润表为

$$\begin{array}{ccc} 10 & 0 & -5 \\ 20 & 5 & 0 \\ 30 & 10 & -11 \end{array} \Rightarrow \text{后悔指数} \begin{array}{ccc} 20 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{array} \Rightarrow \text{选择} S_2$$

与极大极大准则未必相同，例如，利润表为

$$\begin{matrix} 10 & 0 & -5 \\ 20 & 5 & 0 \\ 30 & 10 & -11 \end{matrix} \Rightarrow \text{后悔指数} \begin{matrix} 20 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{matrix} \Rightarrow \text{选择}S_2$$

适用于风险很大的情形。

（4）等可能准则（Laplace criterion）

（4）等可能准则（Laplace criterion）

基于各个状态等概率出现的假设，用期望值决策。

$$\begin{array}{ll} S_1 & \frac{1}{3}(10+0-5)=\frac{5}{3} \\ S_2 & \frac{1}{3}(20+5+0)=\frac{25}{3} \\ S_3 & \frac{1}{3}(30+10-6)=\frac{34}{3} \end{array}$$

（4）等可能准则（Laplace criterion）

基于各个状态等概率出现的假设，用期望值决策。

$$
\begin{array}{ll}
S_1 & \frac{1}{3}(10+0-5)=\frac{5}{3} \\
S_2 & \frac{1}{3}(20+5+0)=\frac{25}{3} \\
S_3 & \frac{1}{3}(30+10-6)=\frac{34}{3}
\end{array}
$$

故在此准则下取 S_3.

显然，在作重大决策时，不可能不对未来的自然状态作出一定的估计。因此，在大部分情况下以下准则是比较合理的。

（5）具备状态信息的决策准则（期望值准则）

（5）具备状态信息的决策准则（期望值准则）

当具备状态出现的概率信息时，问题即化为了风险决策问题，一般按期望值准则决策。

随机服务系统

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

服务时间通常假设为指数分布。

随机服务系统

几个因素：顾客数、服务员人数、等待时间、服务时间、排队规则。

顾客流通常假设为 Poisson 过程，即在长为 t 的段内到达的人数

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

其中 λ 为单位时间内到达人数的平均值。

服务时间通常假设为指数分布。

排队规则

- 先到先服务（FIFO）
- 优先权服务
- 多服务系统服务方式
- 电梯规则

排队系统的符号表示:

来到过程（M） / 服务分布（M） / 服务员个数（D） / 系统容量（K）

M——Poisson 过程及指数分布
D——服务时间长度或到来间隔是常数

例：

一条电话线路的问询服务	$M/M/1$
四条电话线路的电话交换台	$M/M/4$
充分大的停车场	$M/M/\infty$
一个医生的诊所	$M/M/1/4$
加油站	$M/D/1/5$

例：

一条电话线路的问询服务	$M/M/1$
四条电话线路的电话交换台	$M/M/4$
充分大的停车场	$M/M/\infty$
一个医生的诊所	$M/M/1/4$
加油站	$M/D/1/5$

主要关心以下几个数字：

- 队伍长度
- 顾客等待时间
- 忙期和闲期
- 利用率

1、$M/M/1$ 系统

1、$M/M/1$ 系统

设 λ 为来到率（单位时间内来到的平均人数），μ 为服务率（单位时间内接受服务的平均人数）， 则相应的来到间隔的平均值为 $\frac{1}{\lambda}$，服务时间的平均值 $\frac{1}{\mu}$.

$$\frac{\lambda}{\mu} \triangleq \rho \qquad\qquad \rho \text{ 称为服务强度}$$

不妨设 $\rho<1$（即服务快于来到），否则系统中的顾客数将趋于无穷大。

记 N 为平稳状态下系统中的顾客数，W 为等待时间，S 为服务时间，则

$$E(N)=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$E(W)=\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$E(W+S)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

例 1　某医院某科室有一位医生值班，每小时平均有 4 个病人，医生每小时平均可诊 5 个病人。如要满足 99% 以上的病人有座位，至少应设多少个座位？如果每小时可诊 6 个病人，可减小多少个座位？病人平均等待时间是多少？

解 设病人到来服从 Poisson 分布，医生诊断时间服从指数分布（$M/M/1$ 系统），则 $\lambda = 4, \mu = 5, \rho = 4/5 = 0.8 < 1.$

$$L_1 = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4(\text{人})$$

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{4}{4} = 1(\text{小时})$$

为满足 99% 以上的病人有座，设应设 m 个座位，则

$$P\{\text{候诊病人数} \leqslant m\} \geqslant 0.99$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{m} \rho^n(1-\rho) = 1-\rho^{m+1} \geqslant 0.99 \qquad \rho_n = \rho^n(1-\rho)$$

$$\Rightarrow \rho^{m+1} \leqslant 0.01 \Rightarrow m \geqslant \frac{\ln 0.01}{\ln \rho} - 1 \approx 20(\text{个})$$

$\therefore$ 至少应设 20 个座位。

若 $\lambda = 4, \mu = 6$，则 $\rho = 4/6 = 2/3 < 1$

$$m \geqslant \frac{\ln 0.01}{\ln 2/3} - 1 = 11(\text{个})$$

$\therefore$ 可减少 9 个座位。

$$W_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2/3}{1-2/3} = \frac{1}{2}(\text{小时})$$

例 2　某工厂平均每天有一台机器发生故障而需要修理，机器的故障数服从 Poisson 分布。每台机器每停工一天损失 20 元。现有 2 个修理工 A 和 B，A 每天平均能修理 1.2 台机器，工资为 3 元； B 每天平均能修理 1.5 台机器，工资为 10 元。两个工人修理机器的时间设为指数分布，问工厂应录用哪位工人?

解 用 N 表示一天中等待修理的机器数，即 $N = L_1$，则工厂每天的损失为

$$R = N \cdot 20 + C \qquad\qquad (C\text{为修理工工资})$$

若录用工人 A，$\lambda = 1$，$\mu = 1.2$

$$\rho = 1/1.2 = 5/6$$

$$N = L_1 = \frac{\rho}{1-\rho} = 5(\text{台})$$

$$R = 5 \times 20 + 3 = 103\ (\text{元})$$

若录用 B，$\lambda = 1$，$\mu = 1.5$

$$\rho = 1/1.5 = 2/3$$

$$N = L_1 = \frac{\rho}{1-\rho} = 2(\text{台})$$

$$R = 2 \times 20 + 10 = 50\ (\text{元})$$

故录用 B 更合算。

2、$M/M/S$ 系统

2、$M/M/S$ 系统

以 $S=2$ 为例，设两个服务员的平均服务时间同为 μ. 有两种服务方式。

(1) $M/M/2$ 系统

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$$

$$L_2 = \frac{2\rho_2}{1-\rho_2^2}$$

$$W_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{2\rho_2}{\lambda(1-\rho_2^2)}$$

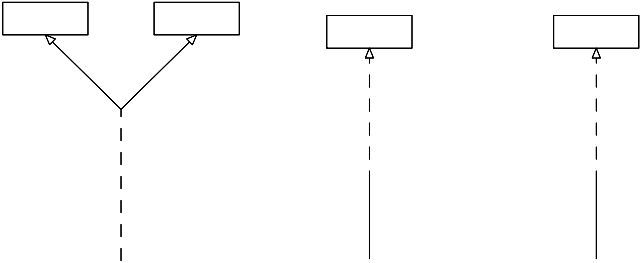
（2）两个 $M/M/1$ 系统

$$\rho = \frac{\lambda/2}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu} = \rho_2$$

$$L_1' = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

$$\therefore \quad 2L_1' = \frac{2\rho_2}{1-\rho_2} > L_2$$

$$W_1' = \frac{L_1'}{\lambda_1'} = \frac{2\rho_2}{\lambda(1-\rho_2)} > W_2$$



$M/M/S$ 系统的平均队长与平均逗留时间：

$$L_S = S\rho + \frac{(S\rho)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} P_0$$

$$W_S = \frac{1}{\lambda} L_S$$

其中：$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{S-1} \frac{(S\rho)^k}{k!} + \frac{(S\rho)^S}{S!(1-\rho)} \right]^{-1}$

快餐店的承诺

快餐店的承诺

有人向某快餐店老板建议，为了在“快”字上下功夫，吸引更多的顾客，可以采取承诺制：如果哪位顾客等待超过一定时间， 那么他可以免费享用所订的饭菜。老板希望对于由此承诺带来的利弊作一个定量分析，告诉他在什么条件下作这种承诺才不会亏本， 更进一步，他希望知道具体应该作几分钟的承诺，利润能增加多少?

快餐店的承诺

有人向某快餐店老板建议，为了在“快”字上下功夫，吸引更多的顾客，可以采取承诺制：如果哪位顾客等待超过一定时间， 那么他可以免费享用所订的饭菜。老板希望对于由此承诺带来的利弊作一个定量分析，告诉他在什么条件下作这种承诺才不会亏本， 更进一步，他希望知道具体应该作几分钟的承诺，利润能增加多少?

该快餐店服务过程是：首先顾客在订餐处订餐、交款，服务员开具订单与收据，上面均标明了订餐时刻， 这个时刻为这位顾客等待时间的起始时刻。订单立即送往厨房，厨房只有一位厨师，按订单到达的顺序配餐， 配一份立即送往顾客手中，并核对收据，若发现顾客等待时间超过店方的承诺时间，则退还所收款项。

模型假设：

模型假设:

(1) $M/M/1$ 系统; 顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔, 无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间, 并且 $d < C_0$.

模型假设:

（1）$M/M/1$ 系统；顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔，无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间，并且 $d < C_0$.

（2）店方承诺时间 u. 在一定范围内 C 与 u 成正比，并且存在 u_0，当 $u \geqslant u_0$ 时承诺将对顾客失去吸引力。

模型假设:

(1) $M/M/1$ 系统; 顾客平均到达率为 $\lambda = \frac{1}{C}$, C 为平均到达时间间隔, 无承诺时 $C = C_0$; 平均服务率 $\mu = 1/d$, d 为平均服务时间, 并且 $d < C_0$.

(2) 店方承诺时间 u. 在一定范围内 C 与 u 成正比, 并且存在 u_0, 当 $u \geqslant u_0$ 时承诺将对顾客失去吸引力。

(3) 对每位顾客的收费与成本之比为 p/q, 近似为常数 $r(> 1)$.

模型建立:

模型建立:
根据假设可设

$$C(u) = \begin{cases} \frac{C_0}{u_0} u, & \frac{d u_0}{C_0} < u < u_0 \\ C_0 & u \geqslant u_0 \end{cases}$$

对 $M/M/1$ 系统，顾客等待时间 w 服从参数为 $\mu-\lambda$ 的指数分布，即

$$P\{W>t\}=\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t}=\mathrm{e}^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{C})t}$$

店方在一名顾客处获得的利润为

$$Q(w)=\begin{cases} p-q & w\leqslant u \\ -q & w>u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EQ &= (p-q)\cdot P(w\leqslant u)-q\cdot P(w>u) \\ &= p-q-p\cdot P(w>u) \\ &= p-q-p\,\mathrm{e}^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{C})u} \end{aligned}$$

单位时间的平均利润为

$$\frac{1}{C}EQ = \frac{1}{C}[p - q - p\,\mathrm{e}^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{C})u}] = \frac{1}{qC}[r - 1 - r\mathrm{e}^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{C})u}]$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{C}[r - 1 - r\mathrm{e}^{-(\frac{1}{d}-\frac{1}{C})u}] \to \max$$

其中

$$C(u) = \begin{cases} \frac{C_0}{u_0}u, & \frac{\mathrm{d}u_0}{C_0} < u < u_0 \\ C_0 & u \geqslant u_0 \end{cases}$$

模型求解：略