



# 数学建模 (Mathematic Modeling)

国防科技大学

## 第二讲



## 第二讲

- ▶ 主要内容：介绍以下几个初等模型，椅子问题、席位分配问题、行走步长问题、实物交换模型。

## 第二讲

- ▶ 主要内容：介绍以下几个初等模型，椅子问题、席位分配问题、行走步长问题、实物交换模型。
- ▶ 主要目的：体会数学建模的形式多样性与方法多样性，了解建模思想，着重理解由现实问题向数学问题的转化过程。

## 椅子问题

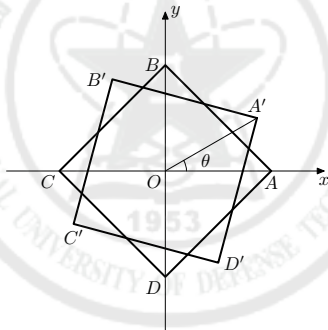


## 椅子问题

问题 四条腿长度相等的方椅子放在不平的地面上，四条腿能否同时着地？



设椅子中心不动，四条腿的下端用  $A, B, C, D$  表示，中心点为  $O$ 。用对角线  $AC$  与  $x$  轴的夹角  $\theta$  来表示椅子的位置。 $A, B, C, D$  四点距地面的距离分别设为  $a, b, c, d$ ，它们都是旋转角  $\theta$  的函数。



## 问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。





## 问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。  
在此假设下， $a, b, c, d$  均为  $\theta$  的连续函数，且

$$(a + b)(c + d) = 0$$

## 问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。  
在此假设下， $a, b, c, d$  均为  $\theta$  的连续函数，且

$$(a + b)(c + d) = 0$$

令  $f(\theta) = a + b$ ,  $g(\theta) = c + d$ ，且  $\theta = 0$  时，不妨  
设  $g(0) = 0$ ,  $f(0) > 0$ ，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：

## 问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。  
在此假设下， $a, b, c, d$  均为  $\theta$  的连续函数，且

$$(a + b)(c + d) = 0$$

令  $f(\theta) = a + b$ ,  $g(\theta) = c + d$ ，且  $\theta = 0$  时，不妨  
设  $g(0) = 0$ ,  $f(0) > 0$ ，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：  
已知： $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  连续， $g(0) = 0$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f(\theta)g(\theta) \equiv 0$   
求证： $\exists \theta_0 \in (0, 2\pi)$ , s.t.  $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$

## 问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。  
在此假设下， $a, b, c, d$  均为  $\theta$  的连续函数，且

$$(a + b)(c + d) = 0$$

令  $f(\theta) = a + b$ ,  $g(\theta) = c + d$ ，且  $\theta = 0$  时，不妨  
设  $g(0) = 0$ ,  $f(0) > 0$ ，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：  
已知： $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  连续， $g(0) = 0$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f(\theta)g(\theta) \equiv 0$   
求证： $\exists \theta_0 \in (0, 2\pi)$ , s.t.  $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$

★ 完美的抽象！

结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。



结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。

思考：

1. 方椅子改为长方形椅子，结论如何？

结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。

思考：

1. 方椅子改为长方形椅子，结论如何？
2. 地面为球面一部分时，结论如何？

椅子问题的解决关键是引入变量  $\theta$ ，一是可以用  $\theta$  表示椅子的位置，二是椅子腿与地面的距离可以表示为  $\theta$  的连续函数，再利用函数的介值定理使这一问题解决得非常巧妙而简单。



## 席位分配问题



## 席位分配问题

某学校有 200 名学生，甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名，若学生会设 20 个代表席位，公平而又简单的分配方法是三个系分别为 10，6，4 名代表。但若三个系的人数分别为：103 人，63 人，34 人，仍按比例分配席位，则出现小数。在整数部分 19 席分配完后，剩下的一席按惯例分给余数最大的丙系，于是三个系仍分别有 10，6，4 个代表席位。

## 席位分配问题

某学校有 200 名学生，甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名，若学生会设 20 个代表席位，公平而又简单的分配方法是三个系分别为 10，6，4 名代表。但若三个系的人数分别为：103 人，63 人，34 人，仍按比例分配席位，则出现小数。在整数部分 19 席分配完后，剩下的一席按惯例分给余数最大的丙系，于是三个系仍分别有 10，6，4 个代表席位。

席位分配表 (20 个席位)

系	学生人数	所占比例 (%)	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.3	10
乙	63	31.5	6.3	6
丙	34	17.0	3.4	4

为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。



为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。

席位分配表 (21 个席位)

系	学生人数	所占比例 (%)	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.815	11
乙	63	31.5	6.615	7
丙	34	17.0	3.570	3

为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。

席位分配表 (21 个席位)

系	学生人数	所占比例 (%)	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.815	11
乙	63	31.5	6.615	7
丙	34	17.0	3.570	3

令人吃惊的是增加了一个席位，丙系反而少了一席，产生了矛盾，因此丙系提出异议，认为按惯例方法分配席位不“公平”，应加以修改。

$$r_B(n_1 + 1, n_2) < r_A(n_1, n_2 + 1) \quad (1)$$

$$r_B(n_1 + 1, n_2) < r_A(n_1, n_2 + 1) \quad (1)$$

上式等价于

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2 + 1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1 + 1)} \quad (2)$$



$$r_B(n_1 + 1, n_2) < r_A(n_1, n_2 + 1) \quad (1)$$

上式等价于

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2 + 1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1 + 1)} \quad (2)$$

**结论** 当 (2) 式成立时, 新增的 1 个席位应当分给 A 方; 反之, 应分配给 B 方。

将上述方法推广到  $m$  方分配席位的情况。记

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i + 1)} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

当增加一个席位时，这一席位应分配给  $Q_i$  值最大的一方，然后重新计算  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )，直到所有席位分配完为止。此方法称为  $Q$  值方法。

$Q$  值方法

$n$	甲系	乙系	丙系
1	5304.5 (4)	1984.5 (5)	578.0 (9)
2	1768.2 (6)	661.5 (8)	192.7 (15)
3	884.1 (7)	330.8 (12)	96.3
4	530.5 (10)	198.5 (14)	
5	353.6 (11)	132.3 (18)	
6	252.6 (13)	94.5	
7	180.4 (16)		
8	147.3 (17)		
9	117.9 (19)		
10	96.4 (20)		
11	80.4		
	共 11 席	共 6 席	共 4 席

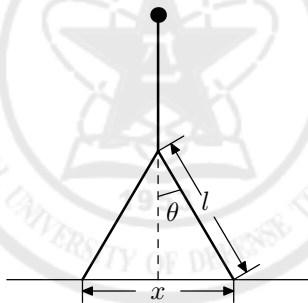
## 行走步长问题



## 行走步长问题

问题 人在匀速行走时步长多大最省劲?

设人的体重为  $M$ ，腿重为  $m$ ，腿长为  $l$ ，速度为  $v$ ，单位时间步数为  $n$ ，步长为  $x$ 。（ $v = nx$ ）



人行走时所做的功可以认为转化成两部分：一部分抬高人体重心，转化为势能，另一部分转化为两腿运动的动能（上身运动的动能是常数，与步长无关，故不考虑）。下面分别计算之。

## 1. 重心升高所需的能量

记一步中重心升高为  $\delta$ , 则

$$\begin{aligned}\delta &= l - l \cos \theta \\&= l - l(1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \\&= l - l\left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)^{1/2} \\&\approx l - l\left(1 - \frac{x^2}{8l^2}\right) \\&= \frac{x^2}{8l}\end{aligned}$$

于是, 单位时间重心升高所需做功为

$$W_{\text{势}} = nMg\delta = \frac{nMgx^2}{8l} = \frac{Mgv}{8l} x$$

## 2. 腿运动所需的能量

将人行走视为均匀直杆（腿）绕腰部的转动，则在单位时间内所需动能为

$$W_{\text{动}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \cdot n$$

其中转动惯量  $I = \frac{1}{3} m l^2$ ,  $\omega = \frac{v}{l}$ , 故

$$W_{\text{动}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \left( \frac{v}{l} \right)^2 n = \frac{n}{6} m v^2 = \frac{m v^3}{6x}$$



∴ 单位时间所做的功为

$$W = W_{\text{势}} + W_{\text{动}} = \frac{mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x}$$

令  $\frac{dW}{dx} = 0$ , 解得

$$x = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{mlv^2}{Mg}} \quad n = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Mg}{ml}}$$

∴ 单位时间所做的功为

$$W = W_{\text{势}} + W_{\text{动}} = \frac{mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x}$$

令  $\frac{dW}{dx} = 0$ , 解得

$$x = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{mlv^2}{Mg}} \quad n = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Mg}{ml}}$$

最佳步长与  $v$  有关, 最佳步数与  $v$  无关。(如何解释?)

## 实物交换模型



## 实物交换模型

实物交换的原则是：互通有无，等价交换。根据双方的需要的迫切程度，“等价”的概念可以不同。

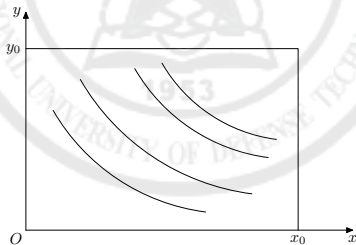
设交换前甲有物品  $X$  的数量为  $x_0$ ，乙有物品  $Y$  的数量为  $y_0$ ，交换后甲有物品  $X$  和  $Y$  的数量分别为  $x$  和  $y$ 。于是矩形  $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0$  内任一点的坐标  $(x, y)$  都代表了一种交换方案。

## 实物交换模型

实物交换的原则是：互通有无，等价交换。根据双方的需要的迫切程度，“等价”的概念可以不同。

设交换前甲有物品  $X$  的数量为  $x_0$ ，乙有物品  $Y$  的数量为  $y_0$ ，交换后甲有物品  $X$  和  $Y$  的数量分别为  $x$  和  $y$ 。于是矩形  $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0$  内任一点的坐标  $(x, y)$  都代表了一种交换方案。

用无差别曲线描述甲对  $X$ 、 $Y$  的偏爱程度



甲有无数条无差别曲线，记作

$$f(x, y) = C_1$$

$C_1$  称为满意度，该曲线应满足（按常识）：

1. 单调减的
2. 下凸的
3. 互不相交的

甲有无数条无差别曲线，记作

$$f(x, y) = C_1$$

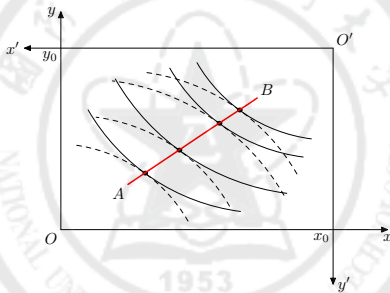
$C_1$  称为满意度，该曲线应满足（按常识）：

1. 单调减的
2. 下凸的
3. 互不相交的

同样，乙的无差别曲线记作

$$g(x, y) = C_2$$

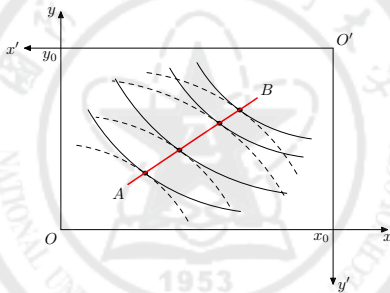
为了得到双方满意的交换方案，将双方的无差别曲线画在一起。



$\widehat{AB}$  表示两族无差别曲线的切点连成的曲线。



为了得到双方满意的交换方案，将双方的无差别曲线画在一起。



$\widehat{AB}$  表示两族无差别曲线的切点连成的曲线。

结论 双方满意的交换方案在曲线  $AB$  上。