

第6章 线性规划

6.1 线性规划模型

6.1.1 模型

例1 生产计划问题

用 3 种原料混合配制 2 种清洁剂

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂 A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂 B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

例1(续)

设清洁剂 A 和 B 分别配制 x 和 y

$$\max z = 12x + 15y$$

目标函数

$$\text{s.t. } 0.25x + 0.50y \leq 120$$

$$0.50x + 0.50y \leq 150$$

约束条件

$$0.25x \leq 50$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

投资组合问题

例6.2 10亿元投资 5 个项目, 其中项目1和项目2是高新技术产业的企业债, 项目3和项目4是基础工业的企业债, 项目5是国债和地方政府债.

预测它们的年收益率(%)分别为 8.1, 10.5, 6.4, 7.5 和 5.0.

基于风险的考虑, 要求投资组合满足下述条件:

- (1) 每个项目不超过 3 亿元.
- (2) 高新技术产业的投资不超过总投资的一半, 即 5 亿元, 其中项目2又不超过高新技术产业投资的一半.
- (3) 国债和地方政府债不少于基础工业项目投资的 40%.

试确定投资组合中各项目的投资额, 使年收益率最大.

例6.2 (续)

设项目 i 的投资额为 x_i 亿元, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\max z = 8.1x_1 + 10.5x_2 + 6.4x_3 + 7.5x_4 + 5.0x_5$$

$$\text{s.t. } x_1 \leq 3, \quad x_2 \leq 3$$

$$x_3 \leq 3, \quad x_4 \leq 3$$

$$x_5 \leq 3$$

每个项目不超过3亿元

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

高新技术产业的投资不超过总投资的一半, 即5亿

$$x_2 \leq 0.5(x_1 + x_2), \text{ 即 } x_1 - x_2 \geq 0$$

项目2又不超过高新技术产业投资的一半

$$x_5 \geq 0.4(x_3 + x_4), \text{ 即 } 0.4x_3 + 0.4x_4 - x_5 \leq 0$$

国债和地方政府不少于基础工业项目投资的 40%

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

总投资为 10 亿

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

运输问题

例6.3

	分销中心1	分销中心2	分销中心3	产量
工厂1	3	2	7	5000
工厂2	7	5	2	6000
需求量	6000	4000	1000	11000

产销平衡. 试制定供销方案, 使总运费最小.

设工厂 i 供应分销中心 j 的数量为 x_{ij} , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$.

$$\min z = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23}$$

$$\text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 6000$$

$$x_{11} + x_{21} = 6000, \quad x_{12} + x_{22} = 4000$$

$$x_{13} + x_{23} = 1000, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

饲料配方问题

例6.4 每头每天至少需要 b_i 个单位的营养素 i , $1 \leq i \leq n$. 有 n 种饲料, 饲料 j 每千克含有 a_{ij} 个单位的营养素 i , 售价 c_j 元, $1 \leq j \leq m$. 要保证动物有足够营养且饲料成本最低, 应如何配方?

设每头每天的饲料中含 x_j 千克饲料 j , $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ &x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

线性规划的一般形式

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

目标函数

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

约束条件

$$x_j \geq 0, \quad j \in J \subseteq \{1,2,\dots,n\}$$

非负条件

$$x_j \text{ 任意}, \quad j \in \{1,2,\dots,n\} - J$$

自由变量

可行解 满足约束条件和非负条件的变量

可行域 全体可行解

最优解 目标函数值最小(最大)的可行解

最优值 最优解的目标函数值

6.1.2 二维线性规划的图解法

例6.1 (续)

$$\max z = 12x + 15y$$

$$\text{s.t. } 0.25x + 0.50y \leq 120$$

$$0.50x + 0.50y \leq 150$$

$$0.25x \leq 50$$

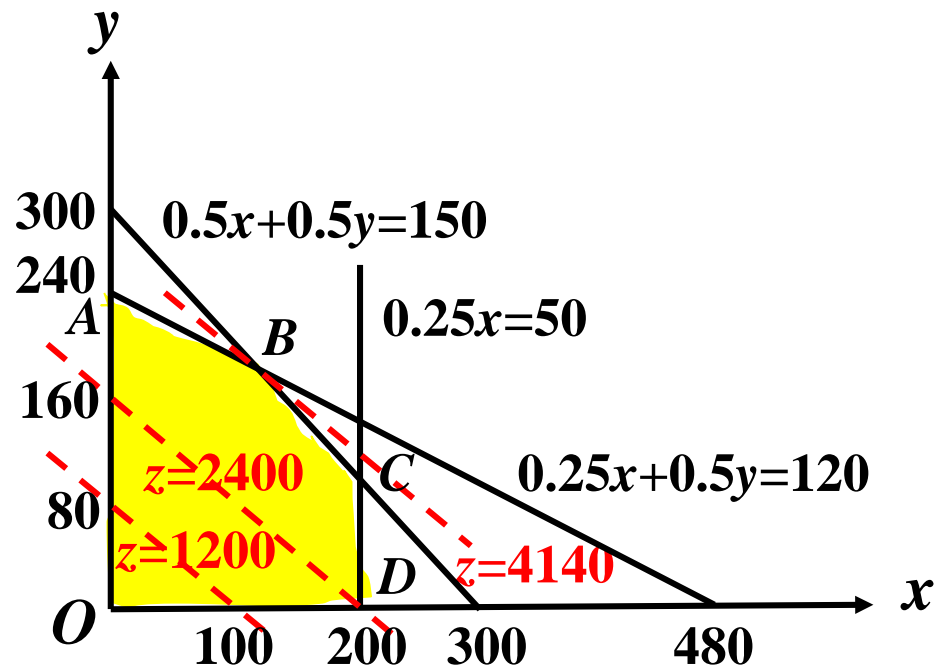
$$x \geq 0, y \geq 0$$

$O(0,0)$, $A(0,240)$,

$B(120,180)$, $C(200,100)$,

$D(200)$

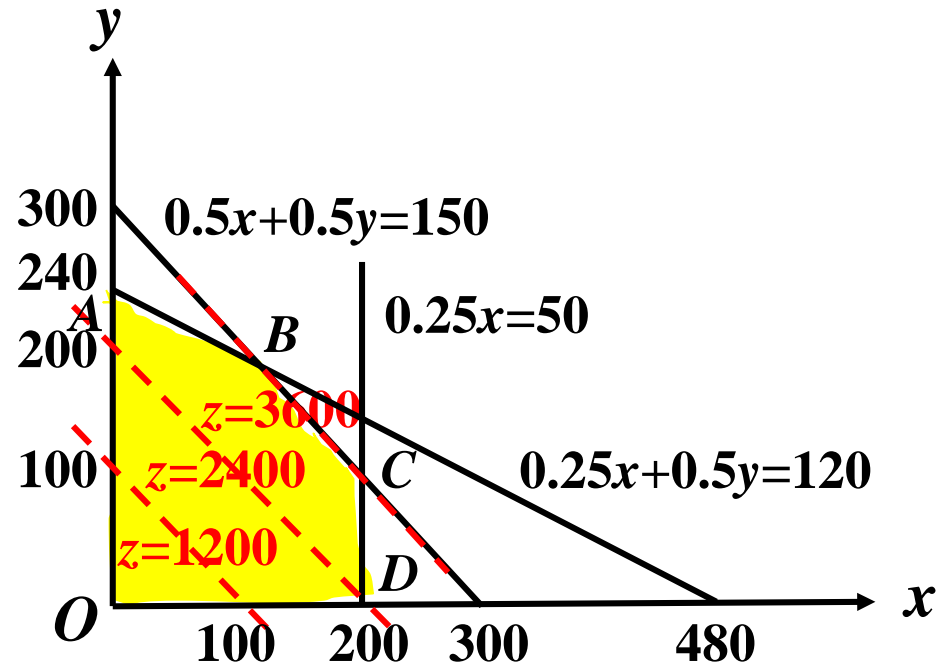
最优解 $x^*=120$, $y^*=180$ (点 B) 最优值 $z^*=4140$.



例6.5

例6.1中的目标函数改为

$$\max z = 12x + 12y$$



最优解 $x^* = 120t + 200(1-t) = 200 - 80t$

$y^* = 180t + 100(1-t) = 100 + 80t, \quad 0 \leq t \leq 1$ 线段 BC

最优值 $z^* = 3600$.

例6.6

$$\min z=x-2y$$

$$\text{s.t. } 2x+y \geq 2$$

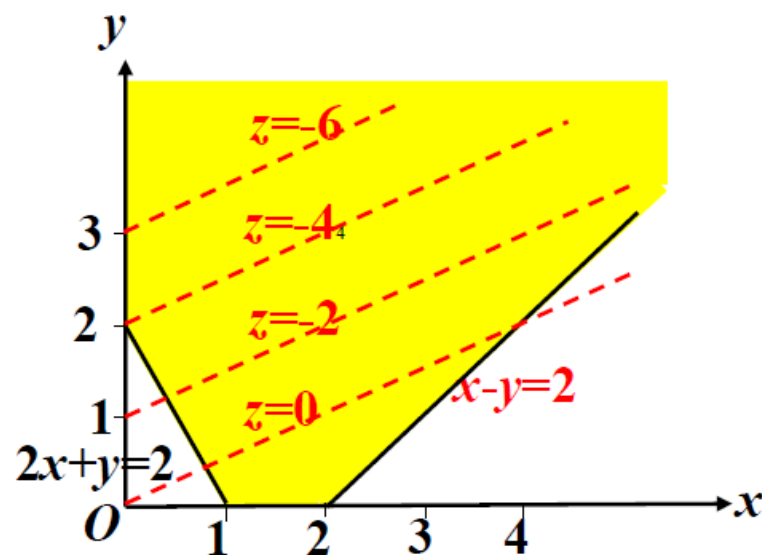
$$x-y \leq 2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

有可行解

目标函数值可以任意小

无最优解.



$2x+y \geq 2$ 改为 $2x+y \leq 2$,

$x-y \leq 2$ 改为 $x-y \geq 2$

可行域为空集, 无可行解

性质

(1) 解有4种可能

(a) 有唯一的最优解.

(b) 有无穷多个最优解.

(c) 有可行解, 但无最优解 (目标函数值无界).

(d) 无可行解, 更无最优解.

(2) 可行域是一个凸多边形 (可能无界, 也可能是空集).

如果有最优解, 则一定可以在凸多边形的顶点取到.

一般的 n 维线性规划也是如此.

6.2 标准形

6.2.1 标准形

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

化成标准形

(1) 把 $\max z$ 替换成 $\min z' = -z$, 即取 $c_j' = -c_j$.

(2) $b_i < 0$. 两边同时变号, \leq 改变成 \geq , \geq 改变成 \leq .

(3) $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$. 引入松弛变量 $y_i \geq 0$, 替换成

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i$$

(4) $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$. 引入剩余变量 $y_i \geq 0$, 替换成

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i = b_i$$

(5) 自由变量 x_j 替换成 $x_j' - x_j''$, $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$.

例6.7

写出下述线性规划的标准形

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 10$$

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 \leq -30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 任意}$$

解

$$\min z' = -3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3''$$

$$\text{s.t. } x_1 + 3x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + x_4 = 10$$

$$-4x_1 + x_2 + 5x_3' - 5x_3'' - x_5 = 30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$$

松弛变量

剩余变量

标准形

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

向量形式

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n P_j x_j &= b \\ x_j &\geq 0, j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

标准形的可行解的性质

定义 设 A 的秩为 m , A 的 m 个线性无关的列向量称作标准形的**基**. 给定基 $B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$, 对应基中列向量的变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ 称作**基变量**, 其余的变量称作**非基变量**.

基变量构成的向量记作 x_B , 非基变量构成的向量记作 x_N . 令 $x_N=0$, 等式约束变成

$$Bx_B=b$$

解得 $x_B=B^{-1}b$. 这个向量 x 满足约束 $Ax=b$ 且非基变量全为0, 称作关于基 B 的**基本解**. 如果 x 是一个基本解且 $x \geq 0$, 则称 x 是一个**基本可行解**, 对应的基 B 为**可行基**.

例6.8

$$\min z = -12x_1 - 15x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 &= 120 \\ 0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 &= 150 \\ 0.25x_1 + x_5 &= 50 \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 1 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.50 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

取基 $B_1=(P_1, P_2, P_3)$. 基变量 x_1, x_2, x_3 , 非基变量 x_4, x_5 . 令 $x_4=0, x_5=0$, 得

$$0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 = 120$$

$$0.50x_1 + 0.50x_2 = 150$$

$$0.25x_1 = 50$$

解得 $x_1=200, x_2=100, x_3=20$.

$x^{(1)}=(200, 100, 20, 0, 0)^T$ 是基本可行解, B_1 是可行基.

例6.8 (续)

取基 $B_2=(P_1, P_2, P_4)$. 基变量 x_1, x_2, x_4 ,
非基变量 x_3, x_5 . 令 $x_3=0, x_5=0$, 由

$$0.25x_1 + 0.50x_2 = 120$$

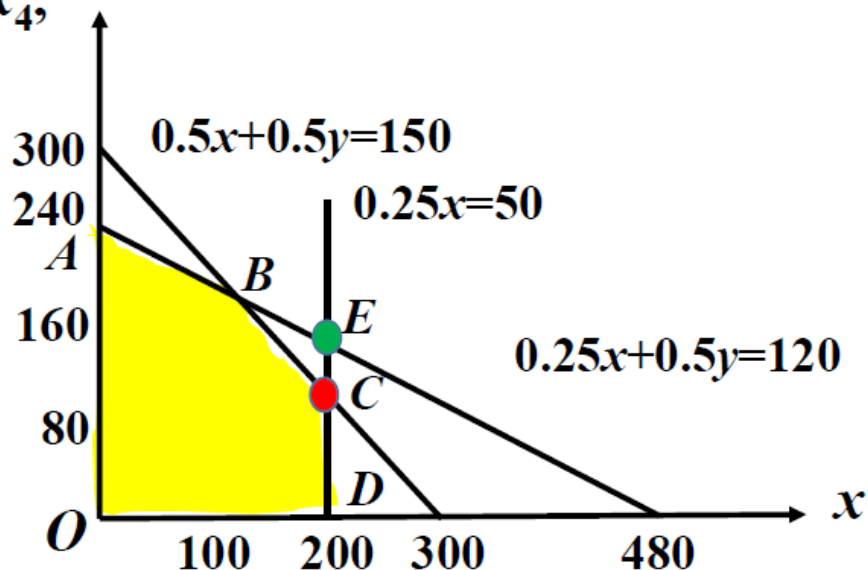
$$0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 = 150$$

$$0.25x_1 = 50$$

解得 $x_1=200, x_2=140, x_4=-20$.

$x^{(2)}=(200, 140, 0, -20, 0)^T$ 是基本解, 但
不是基本可行解.

B_2 不是可行基.



这个线性规划是例1中的标准形, $x^{(1)}$ 是例1图中的
顶点C. $x^{(2)}$ 是直线 $0.25x + 0.5y = 120$ 与 $0.25x = 50$ 的交
点, 不在可行域内.

基本可行解的性质

引理1 $Ax=b$ 的解 α 是基本解 $\Leftrightarrow \alpha$ 中非零分量对应的列向量线性无关.

证 必要性 根据基本解的定义, 这是显然的.

充分性 设 α 的非零分量为 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$, 对应的列向量

$P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_r}$ 线性无关. A 的秩为 m , 必存在 $P_{j_{r+1}}, \dots, P_{j_m}$

使得 $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_m}$ 线性无关, 构成一个基, 记作 B . α 是方程 $Bx_B=b$ 的解, 而这个方程的解是惟一的, 故 α 是关于 B 的基本解.

基本可行解的性质

定理6.1 如果标准形有可行解, 则必有基本可行解.

证 设 α 是一个可行解, 从 α 开始, 构造出一个基本可行解.
设 α 的非零分量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, r \leq n$. 如果对应的列向量 P_1, P_2, \dots, P_r 线性无关, 则 α 是一个基本可行解.

否则, 存在不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 使

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_r P_r = 0$$

取 $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$, 有

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_r P_r = 0$$

于是, 对任意的 δ 有

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \delta \lambda_j) P_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j + \delta \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j = b$$

定理6.1 (续)

记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, 为使 $\alpha + \delta\lambda$ 成为一个可行解, 要求所有 $\alpha_j + \delta\lambda_j \geq 0$.

当 $\lambda_j = 0$ 时, 不等式自然成立.

当 $\lambda_j > 0$ 时, 要求 $\delta \geq -\alpha_j / \lambda_j$; 当 $\lambda_j < 0$ 时, 要求 $\delta \leq -\alpha_j / \lambda_j$.

综上所述, 要求当 $\lambda_j \neq 0$ 时, $\delta \leq |\alpha_j / \lambda_j|$.

设 $|\alpha_{j_0} / \lambda_{j_0}| = \min \{ \alpha_j / \lambda_j : \lambda_j \neq 0 \}, \quad 1 \leq j_0 \leq r$

取 $\delta^* = -\alpha_{j_0} / \lambda_{j_0}$, 令 $\beta_j = \alpha_j + \delta^* \lambda_j \ (j = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$\beta_1 P_1 + \dots + \beta_n P_n = b$$

且 $\beta_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n)$, $\beta_{j_0} = 0, \beta_{r+1} = \dots = \beta_n = 0$.

从而, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 是可行解且比 α 至少少一个非零分量. 上述过程至多进行 $r-1$ 次一定可以得到一个基本可行解.

基本可行解的性质

定理6.2 如果标准形有最优解, 则必存在一个基本可行解是最优解.

证 补充证明: 在定理1证明中, 当 α 是最优解时, β 也是最优解. 由 $\alpha_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$, 对足够小的 $\delta > 0$, $\alpha + \delta\lambda$ 和 $\alpha - \delta\lambda$ 都是可行解. 从而

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j \leq \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_j + \delta \lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j + \delta \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j \leq \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_j - \delta \lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j - \delta \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j$$

得
$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j = 0$$

定理6.2 (续)

于是

$$\sum_{j=1}^n c_j \beta_j \leq \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_j + \delta^* \lambda_j) = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j + \delta^* \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j$$

得证 $\beta = \alpha + \delta^* \lambda$ 也是最优解.

根据定理2, 解线性规划问题只需考虑标准形的基本可行解. A 有 m 行 n 列, 至多有 C_n^m 个基, 故至多有 C_n^m 个基本解. 从而, 线性规划成为一个组合优化问题.

6.3 单纯形法

基本步骤

(1) 确定初始基本可行解.

(2) 检查当前的基本可行解.

若是最优解或无最优解, 计算结束;

否则作基变换, 用一个非基变量替换一个基变量, 得到一个新的可行基和对应的基本可行解, 且使目标函数值下降(至少不升).

(3) 重复(2).

6.3.1 确定初始基本可行解

暂时只考虑最简单的情况, 设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中 $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

引入 m 个松弛变量 $x_{n+i} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$),

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

取 x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, m$) 作为基变量, 初始基本可行解为

$$x^{(0)} = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

例

例6.1 (续)

$$\max z = 12x + 15y$$

$$\text{s.t. } 0.25x + 0.50y \leq 120$$

$$0.50x + 0.50y \leq 150$$

$$0.25x \leq 50$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

标准形

$$\min z' = -12x_1 - 15x_2$$

$$\text{s.t. } 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 = 120$$

$$0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 = 150$$

$$0.25x_1 + x_5 = 50$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

取 x_3, x_4, x_5 作为基变量

$$x^{(0)} = (0, 0, 120, 150, 50)^T$$

6.3.2 最优性检验

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, $Ax=b$ 两边同乘 B^{-1} , 得 $B^{-1}Ax=B^{-1}b$. 记 A 中对应非基变量的列构成的矩阵为 N ,

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

解得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

代入目标函数

$$z = c^T x$$

$$= c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$$

基本可行解 $x_B^{(0)}=B^{-1}b$, $x_N^{(0)}=0$, 目标函数值 $z_0 = c_B^T B^{-1}b$

最优性检验

$$\begin{aligned} z &= c^T x \\ &= z_0 + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\ &= z_0 + (c_B^T - c_B^T B^{-1} B) x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\ &= z_0 + (c^T - c_B^T B^{-1} A) x \end{aligned}$$

记 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$ 检验数

$z = z_0 + \lambda^T x$ 简化的目标函数

最优性检验

记 $B^{-1}A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$, $P'_j = B^{-1}P_j$ ($1 \leq j \leq n$), $\beta = B^{-1}b$.

定理6.3 给定基本可行解 $x^{(0)}$, 若所有检验数大于等于0, 则 $x^{(0)}$ 是最优解. 若存在检验数 $\lambda_k < 0$ 且所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 则无最优解.

证 如果 $\lambda \geq 0$, 则对任意可行解 $x \geq 0, z \geq z_0$, 故 $x^{(0)}$ 是最优解. 如果存在检验数 $\lambda_k < 0$ (λ_k 必对应非基变量) 且所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 取 $x_k = M > 0$, 其余非基变量 $x_j = 0$, 代入

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

解得 $x_{\pi(i)} = \beta_i - \alpha_{ik} M \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m$

这是一个可行解, 其目标函数值为

$$z = z_0 + \lambda_k M$$

当 $M \rightarrow +\infty$ 时, $z \rightarrow -\infty$. 得证无最优解.

6.3.3 基变换

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, 设 $\lambda_k < 0$ 且 $\alpha_{lk} > 0$, x_k 必是非基变量.

基变换: 用非基变量 x_k 替换基变量 $x_{\pi(l)}$, 用 P_k 替换 B 中的 $P_{\pi(l)}$, 新的基为 $B' = (P_{\pi(1)}, \dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)}, \dots, P_{\pi(m)})$.

称 x_k 为**换入变量**, $x_{\pi(l)}$ 为**换出变量**.

(1) 要证 B' 是一个基, 即 $P_{\pi(1)}, \dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)}, \dots, P_{\pi(m)}$ 是线性无关的. 由于 $P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)}$ 是线性无关的, 只需证 $P_{\pi(l)}$ 可表成 $P_{\pi(1)}, \dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)}, \dots, P_{\pi(m)}$ 的线性组合. 由于 $(P'_{\pi(1)}, P'_{\pi(2)}, \dots, P'_{\pi(m)}) = B^{-1}B = E$,

$$P'_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} P'_{\pi(i)} \quad \text{两边同乘 } B \quad \Rightarrow \quad P_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} P_{\pi(i)}$$

基变换（续）

解得

$$P_{\pi(l)} = \frac{1}{\alpha_{lk}} P_k - \sum_{\substack{i=1 \\ \text{且} \neq l}}^m \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} P_{\pi(i)}$$

得证 B' 是一个基.

(2) 要保证 B' 是可行基.

$$Ax = b$$

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b = \beta$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = \beta$$

$B^{-1}A=(P_1',P_2',\dots,P_m')$ 中对应 x_B 的列 (第 $\pi(1),\dots,\pi(n)$ 列) 构成单位矩阵. 用 P_k 替换 $P_{\pi(l)}$ 得到 B' , 将 x_B 中的 $x_{\pi(l)}$ 替换成 x_k , 即解出第 l 个方程中的 x_k . 这只需 用 α_{lk} 除第 l 个方程, 再用第 l 个方程消去其它方程中的 x_k

基变换（续）

$$H = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha_{1k} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{l-1,k} \\ & & & \alpha_{lk} \\ & & & \alpha_{l+1,k} & 1 \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & \alpha_{mk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

第 l 列

H 是把单位矩阵的第 l 列换成 P'_k . 由上面 P_k 的表达式, 有 $B' = BH$. 于是,

$$B'^{-1}Ax = B'^{-1}b$$

可写成

$$H^{-1}B^{-1}Ax = H^{-1}B^{-1}b = H^{-1}\beta$$

基变换（续）

即,把基变量 $x_{\pi(l)}$ 换成非基变量 x_k 相当于用 H^{-1} 乘式(6.5)的两边. 而

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & -\alpha_{1k}/\alpha_{lk} & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & -\alpha_{l-1,k}/\alpha_{lk} & & \\ & & & 1/\alpha_{lk} & & \\ & & & -\alpha_{l+1,k}/\alpha_{lk} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & -\alpha_{mk}/\alpha_{lk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

第 l 列

故用 H^{-1} 乘式(6.5)的两边就是将式(6.5)中的第 l 个方程除以 α_{lk} , 第 i 个方程减第 l 个方程的 α_{ik}/α_{lk} 倍 ($1 \leq i \leq m$ 且 $i \neq l$). 这样做的结果是把式(6.5)中第 l 个方程中 x_l 的系数变成 1, 再消去其他方程中的 x_l . 计算公式如下,

基变换（续）

计算公式

$$\alpha_{lj}' = \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq j \leq n$$
$$\alpha_{ij}' = \alpha_{ij} - \alpha_{ik} \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l, 1 \leq j \leq n$$
$$\beta_l' = \beta_l / \alpha_{lk}$$
$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik} \beta_l / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l$$

要保证 B' 是可行的, 只需

$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik} \beta_l / \alpha_{lk} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l$$

注意到 $\beta_i \geq 0, \beta_l \geq 0, \alpha_{lk} > 0$, 当 $\alpha_{ik} \leq 0$ 时不等式自然成立.
于是, 只需当 $\alpha_{ik} > 0$ 时有 $\beta_l / \alpha_{lk} \leq \beta_i / \alpha_{ik}$

应取 l 使得 $\beta_l / \alpha_{lk} = \min\{ \beta_i / \alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m \}$

用第 l 个方程消去简化的目标函数中的 x_k ,

$$\lambda_j' = \lambda_j - \lambda_k \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$z_0' = z_0 + \lambda_k \beta_l / \alpha_{lk}$$

单纯形法

算法 单纯形法 (针对最小化)

1. 设初始可行基 $B = (P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, $\alpha = B^{-1}A$,
 $\beta = B^{-1}b$, $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1}A$, $z_0 = c_B^T B^{-1}b$.
2. 若所有 $\lambda_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$), 则 $x_B = \beta$, $x_N = 0$ 是最优解, 计算结束
3. 取 $\lambda_k < 0$. 若所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 则无最优解, 计算结束.
4. 取 l 使得
$$\beta_l / \alpha_{lk} = \min \{ \beta_i / \alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m \}$$
5. 以 x_k 为换入变量、 $x_{\pi(l)}$ 为换出变量做基变换.
6. 转2.

对最大化, 2中 $\lambda_j \geq 0$ 改为 $\lambda_j \leq 0$, 3中 $\lambda_k < 0$ 改为 $\lambda_k > 0$.

标准形

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

向量形式

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n P_j x_j &= b \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

单纯形表

			c_1	c_2	\dots	c_n	θ
c_B	x_B	b	x_1	x_2	\dots	x_n	
$c_{\pi(1)}$	$x_{\pi(1)}$	β_1	α_{11}	α_{12}	\dots	α_{1n}	$\theta_i = \beta_i / \alpha_{ik}$
$c_{\pi(2)}$	$x_{\pi(2)}$	β_2	α_{21}	α_{22}	\dots	α_{2n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	
$c_{\pi(m)}$	$x_{\pi(m)}$	β_m	α_{m1}	α_{m2}	\dots	α_{mn}	
		$-z$	λ_1	λ_2	\dots	λ_n	

$$-z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = -z_0$$

例6.1

$$\min z' = -12x_1 - 15x_2$$

$$\text{s.t. } 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 = 120$$

$$0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 = 150$$

$$0.25x_1 + x_5 = 50$$

$$x_j \geq 0, \quad i=1,2,\dots,5$$

			-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	

例6.1 (续)

			-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	240
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	300
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	

1. 若所有的检验数非负，则当前的基本可行解是最优解
2. 若存在检验数 $\lambda_k < 0$ 且所有 $\alpha_{ik} \leq 0 (1 \leq i \leq m)$ ，则无最优解
3. 否则，取某个 $\lambda_k < 0$ 且不是所有 $\alpha_{ik} \leq 0$
4. 对每一个 $\alpha_{ik} > 0$ ，计算相应 θ ；当 $\alpha_{ik} \leq 0$ ， θ 为空
5. 设 θ_l 最小，则在 α_{lk} 上加圈，取 x_k 为换入变量， $x_{\pi(l)}$ 为换出变量
6. 第 l 行（不含 $c_{\pi(l)}$ 和 $x_{\pi(l)}$ ，以下相同）除以 α_{lk} ，第 i 行减第 l 行的 α_{ik} 倍，把 α_{ik} 消成0（ $1 \leq i \leq m$ 且 $i \neq l$ ）
7. 最下面的一行减第 l 行的 λ_k 倍，把 λ_k 消成0
8. 最后把 x_B 列的 $x_{\pi(l)}$ 换成 x_k ，把 c_B 列的 $c_{\pi(l)}$ 换成 c_k

例6.1 (续)

			-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	240
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	300
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	
-15	x_2	240	0.50	1	2	0	0	480
0	x_4	30	0.25	0	-1	1	0	120
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	200
	$-z$	3600	-4.5	0	30	0	0	
-15	x_2	180	0	1	4	-2	0	
-12	x_1	120	1	0	-4	4	0	
0	x_5	20	0	0	1	-1	1	
	$-z$	4140	0	0	12	18	0	

例6.9

用单纯形法解下述线性规划

$$\begin{aligned}\min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

解 引入2个松弛变量 x_3, x_4 , 得到标准形

$$\begin{aligned}\min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

例6.9 (续)

			1	-2	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	1	1	-1	1	0	
0	x_4	4	-2	1	0	1	4
	-z	0	1	-2	0	0	
0	x_3	5	-1	0	1	1	
-2	x_2	4	-2	1	0	1	
	-z	8	-3	0	0	2	

目标函数值没有下界, 无最优解

6.3.5 人工变量和两阶段法

现考虑剩余的两种情况:

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$(2) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

其中 $b_i \geq 0$. 对于(1), 引入剩余变量转化成(2).

对(2)引入 **人工变量** $y_j \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_j = b_i$$

取所有松弛变量和人工变量作为基变量, 得到初始可行基.

例6.10

$$\begin{array}{ll}\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3\end{array}$$

引入松弛变量 x_4 , 剩余变量 x_5 ,
标准形为

$$\begin{array}{ll}\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, 1 \leq j \leq 5\end{array}$$

例6.10 (续)

再引入人工变量 x_6, x_7

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3$$

$$-2x_1 + x_3 + x_7 = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 7$$

取基变量 x_4, x_6, x_7 , $x^{(0)} = (0, 0, 0, 11, 0, 3, 1)^T$

问题: $x^{(0)}$ 不对应标准形的可行解.

只有当所有人工变量等于0时, 才能舍去人工变量得到标准形的可行解.

两阶段法

设问题

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

其中 $b_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m$

引入人工变量 y_1, y_2, \dots, y_m

辅助问题

$$\min w = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

两阶段法（续）

由于 $w \geq 0$, 辅助问题必有最优解. 设最优值为 w^* . 有3种可能:

(1) $w^* > 0$. 原问题无可行解.

假如不然, 设 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 是原问题的可行解, 则 $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)^T$ 是辅助问题的可行解, 对应的 $w = 0$. 与 $w^* > 0$ 矛盾.

(2) 在最优解中所有的人工变量都是非基变量. 此时, 人工变量都等于0, $w^* = 0$, 删去人工变量得到是原问题的基本可行解.

(3) $w^* = 0$, 但基变量中含有人工变量. 这种情况可以进一步转化成情况(2).

两阶段法（续）

此时, 所有人工变量都等于0. 设 y_k 是基变量,

由 $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$, 得

$$y_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \sum_{\substack{t=1 \\ \text{且} \neq k}}^m \alpha'_{it} y_t = 0$$

且 y_k 不出现在其它约束等式中.

(a) 若所有 $\alpha_{ij} = 0$ ($1 \leq j \leq n$), 则原问题中 m 个约束等式不是线性无关的, 可以把这个等式删去, 从而删去了 y_k .

(b) 存在某个 $\alpha_{il} \neq 0$ (可正可负). 用 x_l 作换入变量, y_k 作换出变量, 做基变换. 由于 $\beta_i = 0$, 经过基变换, β 的所有值均不改变, 从而新的基本解是可行解且 $w = 0$ 不变.

总之, 可以使基变量中的人工变量少一个, 且保持 $w = 0$. 重复进行, 最终总能变成情况(2).

两阶段法（续）

阶段一 引入人工变量, 写出辅助问题, 用单纯形法求解. 若为情况(1), 则原问题无可行解, 计算结束. 若为情况(2), 则进入阶段二.

阶段二 删去人工变量, 得到原问题的一个基本可行解. 以这个解为初始基本可行解, 用单纯形法解原问题.

例10 (续) 用两阶段法. 阶段一 辅助问题为

$$\begin{aligned} \min w &= x_6 + x_7 \\ \text{s.t. } x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

例6.10(续)

			0	0	0	0	0	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	1.5
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
	-w	-4	6	-1	-3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	—
1	x_6	1	0	1	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	—
	-w	-1	0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
	-w	0	0	0	0	0	0	0	1	

例6.10(续)

阶段二

			-3	1	1	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	—
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	—
	-z	-2	-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
	-z	2	0	0	0	1/3	1/3	

最优解 $x_1^*=4, x_2^*=1, x_3^*=9$, 最优值 $z^*=-2$

例6.11

$$\min z = 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

标准形

$$\min z = 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4$$

阶段一 辅助问题

$$\min w = x_5$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 3$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 5$$

例6.11 (续)

			0	0	0	0	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	4	2	1	1	0	0	2
1	x_5	3	1	-1	0	-1	1	3
	$-w$	-3	-1	1	0	1	0	
0	x_1	2	1	1/2	1/2	0	0	
1	x_5	1	0	-3/2	-1/2	-1	1	
	$-w$	-1	0	3/2	1/2	1	0	

$w^*=1 > 0$, 原问题没有可行解.

例6.12

$$\begin{aligned}\min z &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t. } 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &= 12 \\ 2x_1 \quad \quad + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_j &\geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4\end{aligned}$$

阶段一 辅助问题

$$\begin{aligned}\min w &= x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{s.t. } 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 12 \\ 2x_1 \quad \quad + x_3 \quad \quad + x_6 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 \quad \quad + x_7 &= 0 \\ x_j &\geq 0, \quad 1 \leq j \leq 7\end{aligned}$$

例6.12 (续)

			0	0	0	0	1	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_5	12	3	6	2	-1	1	0	0	4
1	x_6	4	2	0	1	0	0	1	0	2
1	x_7	0	3	-6	1	1	0	0	1	0
	$-w$	-16	-8	0	-4	0	0	0	0	
1	x_5	12	0	12	1	-2	1	0	-1	1
1	x_6	4	0	4	1/3	-2/3	0	1	-2/3	1
0	x_1	0	1	-2	1/3	1/3	0	0	1/3	—
	$-w$	-16	0	-16	-4/3	8/3	0	0	8/3	
1	x_5	0	0	0	0	0	1	-3	1	
0	x_2	1	0	1	1/12	-1/6	0	1/4	-1/6	
0	x_1	2	1	0	1/2	0	0	1/2	0	
	$-w$	0	0	0	0	0	0	4	0	

例6.12 (续)

$w^*=0$, 人工变量 x_5 是基变量且 $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=0$, β_1 必为 0.
原规划中第1个约束等式是另两个的线性组合, 可以删去.

阶段二

			1	3	-2	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
3	x_2	1	0	1	1/12	-1/16	12
1	x_1	2	1	0	1/2	0	4
	$-z$	-5	0	0	-11/4	1/2	
3	x_2	2/3	-1/6	1	0	-1/6	
-2	x_3	4	2	0	1	0	
	$-z$	6	11/2	0	0	1/2	

最优解 $x_1^*=0$, $x_2^*=2/3$, $x_3^*=4$, $x_4^*=0$, 最优值 $z^*=-6$.

例6.13

求解线性规划：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

$$\text{s.t. } 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 12$$

$$-x_2 + 3x_4 = 6$$

$$-6x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4$$

例6.13 (续)

阶段一 引入人工变量 x_5, x_6, x_7 .

			0	0	0	0	1	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_5	12	6	3	-4	3	1	0	0	4
1	x_6	6	0	-1	0	3	0	1	0	2
1	x_7	0	-6	0	4	3	0	0	1	0
	$-w$	-18	0	-2	0	-9	0	0	0	
1	x_5	12	12	3	-8	0	1	0	-1	1
1	x_6	6	6	-1	-4	0	0	1	-1	1
0	x_4	0	-2	0	4/3	1	0	0	1/3	—
	$-w$	-18	-18	-2	12	0	0	0	3	

例6.13 (续)

c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_1	1	1	1/4	-2/3	0	1/12	0	-1/12	
1	x_6	0	0	-5/2	0	0	-1/2	1	-1/2	
0	x_4	2	0	1/2	0	1	1/6	0	1/6	
	$-w$	0	0	5/2	0	0	3/2	0	3/2	
0	x_1	1	1	0	-2/3	0	1/30	1/10	-2/15	
0	x_2	0	0	1	0	0	1/5	-2/5	1/5	
0	x_4	2	0	0	0	1	1/15	1/5	1/15	
	$-w$	0	0	0	0	0	1	1	1	

在倒数第2个表中, $w = 0$, 但 x_6 是基变量且 $\alpha_{22} \neq 0$, 取 x_6 为换出变量、 x_2 为换入变量作基变量.

例6.13 (续)

阶段二

			1	1	1	-1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
1	x_1	1	1	0	-2/3	0	
1	x_2	0	0	1	0	0	
-1	x_4	2	0	0	0	1	
	-z	1	0	0	2/3	0	

最优解 $x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 2$, 最优值 $z^* = -1$.

6.3.6 单纯形法的有限终止

定义 如果基本可行解中基变量的值都大于0, 则称这个基本可行解是**非退化的**, 否则称作**退化的**.

如果线性规划的所有基本可行解都是非退化的, 则称这个线性规划是**非退化的**.

如果线性规划有可行解并且是非退化的, 则在计算的每一步

$$z_0' = z_0 + \lambda_k \beta_l / \alpha_{lk} < z_0,$$

可行基不会重复出现, 因此单纯形法在有限步内终止.

如果不是非退化的, 当 $\beta_l = 0$ 且取 $x_{\pi(l)}$ 为换出变量时, 基变换不改变目标函数值. 这就可能使计算出现循环, 计算永不终止.

单纯形法出现循环的例子

一个例子

$$\min z = -0.75x_1 + 20x_2 - 0.5x_3 + 6x_4$$

$$\text{s.t. } 0.25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$0.5x_1 - 12x_2 - 0.5x_3 + 3x_4 + x_6 = 0$$

$$x_3 + x_7 = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 7$$

取 x_5, x_6, x_7 作为初始基变量, 并规定: 当有多个 $\lambda_j < 0$ 时, 设 $|\lambda_k| = \max \{ |\lambda_j| : \lambda_j < 0 \}$, 取 x_k 作为换入变量; 当有多个 θ_i 同时取到最小值时, 取对应的下标最小的基变量作为换出变量. 计算经过 6 次基变换回到初始可行基, 从而计算出现循环, 永不终止.

避免循环的方法

Bland规则

规则1. 当有多个 $\lambda_j < 0$ 时, 取对应的非基变量中下标最小的作为换入变量.

规则2. 当有多个 $\theta_i = \beta_i / \alpha_{ik}$ ($\alpha_{ik} > 0$) 同时取到最小值时, 取对应的基变量中下标最小的作为换出变量.

6.4 对偶性

6.4.1 对偶线性规划

再看例6.1 公司甲用 3 种原料混合成 2 种清洁剂.
这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

公司乙急需这 3 种原料, 打算向公司甲购买, 应出什么价钱?

实例

设清洁剂 A 和 B 分别
配制 x 和 y

$$\max z = 12x + 15y$$

$$\text{s.t. } 0.25x + 0.50y \leq 120$$

$$0.50x + 0.50y \leq 150$$

$$0.25x \leq 50$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

设公司乙出价原料每吨分别为 y_1 ,
 y_2, y_3 万元. 希望总价尽可能小, 但
又不低于公司甲用这些原料生
产清洁剂所产生的价值

$$\min w = 120y_1 + 150y_2 + 50y_3$$

$$\text{s.t. } 0.25y_1 + 0.50y_2 + 0.25y_3 \geq 12$$

$$0.50y_1 + 0.50y_2 \geq 15$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

对偶线性规划

定义 原始线性规划 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划(D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

定理4 对偶的对偶是原始线性规划.

证 (D) 可改写成 (D')

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y \\ \text{s.t.} \quad & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(D') 的对偶为

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T)^T x \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

例6.14

写出下述线性规划的对偶

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{任意} \end{aligned}$$

对偶规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & 5y_1 + 8y_2' - 8y_2'' \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - y_2' + y_2'' \geq 2 \\ & 3y_1 - 2y_2' + 2y_2'' \geq -1 \\ & -2y_1 + y_2' - y_2'' \geq 3 \\ & 2y_1 - y_2' + y_2'' \geq -3 \\ & y_1 \geq 0, y_2' \geq 0, y_2'' \geq 0 \end{aligned}$$

令 $x_3 = x_3' - x_3''$,

$A=B$ 等价于 $A \leq B$ 和 $-A \leq -B$,

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \leq 5 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3'' \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' \leq -8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

令 $y_2 = y_2' - y_2''$, 合并后2个不等式

$$\begin{aligned} \min \quad & 5y_1 + 8y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & 3y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ & -2y_1 + y_2 = 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \text{任意} \end{aligned}$$

对偶规划的一般形式

原始规划

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad s+1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq t$$

$$x_j \text{ 任意}, \quad t+1 \leq j \leq n$$

对偶规划

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq s$$

$$y_i \text{ 任意}, \quad s+1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad 1 \leq j \leq t$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \quad t+1 \leq j \leq n$$

性质

定理6.5 设 x 是原始规划 (P) 的可行解, y 是对偶规划 (D) 的可行解, 则恒有

$$c^T x \leq b^T y$$

证 $c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T (Ax) \leq y^T b = b^T y$

定理6.6 如果 x 和 y 分别是原始规划 (P) 和对偶规划 (D) 的可行解, 且 $c^T x = b^T y$, 则 x 和 y 分别是它们的最优解.

定理6.7 如果原始规划 (P) 有最优解, 则对偶规划 (D) 也有最优解, 且它们的最优值相等. 反之亦然.

定理6.7证明

证 引入松弛变量 u , 将 (P) 写成

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax + Eu = b$$

$$x \geq 0, u \geq 0$$

A 是 $m \times n$ 矩阵

E 是 $m \times m$ 单位矩阵

u 是 m 维向量

设最优解基为 B , 基变量 $x_B = B^{-1}b$, 检验数 $\lambda \leq 0$ (最大化问题). λ 分成两部分, 对应 x 的 λ_1 和对应 u 的 λ_2 . u 在目标函数中的系数都为 0, 有

$$\lambda_1^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \leq 0$$

$$\lambda_2^T = -c_B^T B^{-1} E = -c_B^T B^{-1} \leq 0$$

令 $y^T = c_B^T B^{-1}$, 有 $y \geq 0$, $c^T - y^T A \leq 0$, 即 $A^T y \geq c$

从而 y 是 (D) 的可行解. 又

$$w = b^T y = y^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = z$$

得证 y 是 (D) 的最优解.

原始规划和对偶规划解的可能情况

- (1) 都有最优解, 且最优值相等.
- (2) 一个有可行解且目标函数值无界, 而另一个无可行解.
- (3) 都没有可行解.

对偶规划 原始规划	有最优解	有可行解 且无界	无可行解
有最优解	(1)	×	×
有可行解 且无界	×	×	(2)
无可行解	×	(2)	(3)

互补松弛性

定理6.8 设 x 和 y 分别是原始规划 (P) 和对偶规划 (D) 的可行解, 则 x 和 y 分别是它们的最优解当且仅当

$$(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m \quad (*)$$

$$x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n \quad (**)$$

证 $u_i = (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) y_i \geq 0, \quad v_j = x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j) \geq 0$

$$(*) \text{ 和 } (**) \text{ 成立} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = 0$$

定理6.8证明(续)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n u_j &= \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) y_i + \sum_{j=1}^n x_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j) \\ &= \sum_{i=1}^m b_i y_i - \sum_{j=1}^n c_j x_j\end{aligned}$$

得证

$$(*) \text{和} (**) \text{成立} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$\Leftrightarrow x$ 是 (P) 的最优解, y 是 (D) 的最优解.

6.4.2 对偶单纯形法

原始规划 (P)

$$\min z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

对偶规划 (D)

$$\max w = b^T y$$

$$\text{s.t. } A^T y \leq c$$

y 任意

设 B 是 (P) 的一个可行基, 对应的可行解 $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$, $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1}A$, $z_0 = c_B^T B^{-1}b$. 令 $y^T = c_B^T B^{-1}$, 恒有

$$w_0 = b^T y = y^T b = c_B^T B^{-1}b = z_0$$

只要 y 是 (D) 的可行解, 则 x 和 y 分别是 (P) 和 (D) 的最优解.

由 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1}A = c^T - y^T A$, 有

$$y \text{ 是 (D) 的可行解} \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

对偶单纯形法

定义 设 B 是一个基, 如果 $\lambda \geq 0$, 则称 B 是**正则的**.

如果 B 是正则的, 那么 y 是 (D) 的可行解, 从而只要 x 是 (P) 的可行解, 亦即 $x_B = B^{-1}b \geq 0$, 则 x 和 y 分别是 (P) 和 (D) 的最优解.

单纯形法 保持 x 是 (P) 的可行解 (保持 B 是可行基), 即保持 $B^{-1}b \geq 0$, 通过基变换使 y 逐步成为 (D) 的可行解 (B 变成正则基), 即逐步使 $\lambda \geq 0$.

对偶单纯形法 保持 y 是 (D) 的可行解 (保持 B 是正则基), 即保持 $\lambda \geq 0$, 通过基变换使 x 逐步成为 (P) 的可行解 (B 变成可行基), 即逐步使 $B^{-1}b \geq 0$.

对偶单纯形法

设 $\lambda \geq 0$, $\beta_l < 0$, 若所有 $\alpha_{lj} \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$), 则不存在 $x \geq 0$ 使得 $\sum_{j=1}^n \alpha_{lj} x_j = \beta_l$, (P) 无可行解. 若存在 $\alpha_{lk} < 0$, 则以 $x_{\pi(l)}$ 为换出变量、 x_k 为换入变量做基变换, 必须保证

$$\lambda_j' = \lambda_j - \lambda_k \alpha_{lj} / \alpha_{lk} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

注意到 $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_k \geq 0$, $\alpha_{lk} < 0$, 当 $\alpha_{lj} \geq 0$ 时, 不等式自然成立. 于是, 只要当 $\alpha_{lj} < 0$ 时,

$$\lambda_j / \alpha_{lj} \leq \lambda_k / \alpha_{lk}$$

故应取 k 使得

$$|\lambda_k / \alpha_{lk}| = \min\{ |\lambda_j / \alpha_{lj}| : \alpha_{lj} < 0 \}$$

对偶单纯形法

算法6.2 对偶单纯形法

1. 取正则基 B .
2. 如果 $\beta \geq 0$, 则 x 是最优解, 计算结束.
3. 取 $\beta_l < 0$. 若所有 $\alpha_{lj} \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$), 则无可行解, 计算结束.
4. 取 k 使得
$$|\lambda_k / \alpha_{lk}| = \min\{ |\lambda_j / \alpha_{lj}| : \alpha_{lj} < 0 \}$$
5. 以 $x_{\pi(l)}$ 为换出变量、 x_k 为换入变量做基变换.
6. 转2.

6.5 整数线性规划的分支限界算法

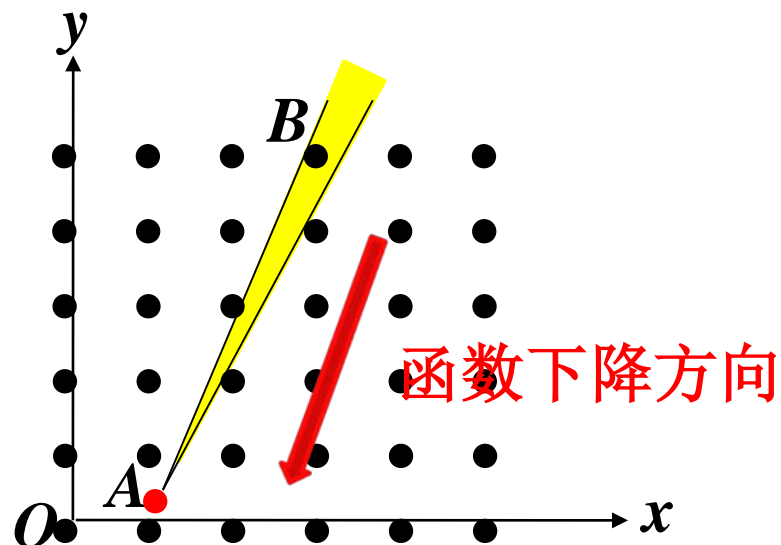
整数线性规划 在线性规划上对变量增添整数的要求

纯整数线性规划 (全整数线性规划) 要求所有变量是整数

混合整数线性规划 只要求部分变量是整数

0-1型整数线性规划 要求所有变量是 0 或 1

松弛规划 (简称松弛) 删去整数要求后得到的线性规划
松弛规划的最优值是原整数规划的最优值的界限(最小化的下界,最大化的上界),但通常不是原整数规划的最优解



分支限界法

记整数线性规划为 **ILP**, 其松弛为 **LP**.

如果 **LP** 的最优解 α 满足整数要求, 则 α 是 **ILP** 的最优解.

否则, 设 α_1 不满足整数要求, 在 **LP** 上分别添加 $x_1 \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor$ 和 $x_1 \geq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$, 记作 **LP**₁ 和 **LP**₂. 如果 **LP**₁ 或 **LP**₂ 的最优解符合整数要求, 那么这个解也是 **ILP** 的可行解, 得到 **ILP** 的最优值的一个界限 (最小化的上界, 最大化的下界), 该子问题的计算结束.

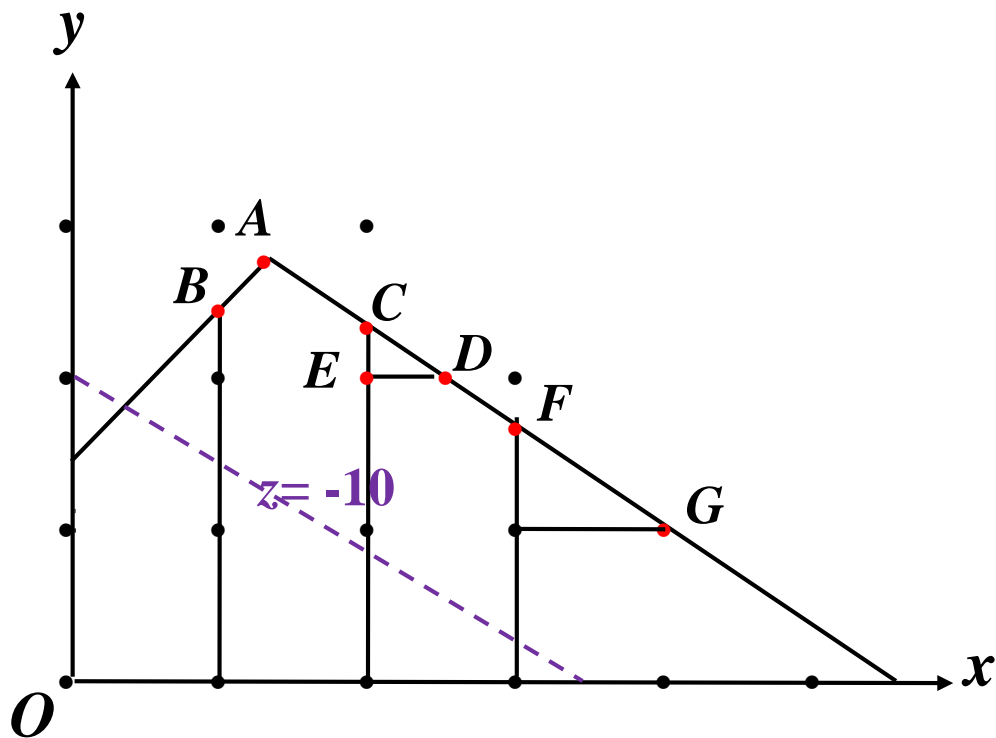
如果子问题的最优解不满足整数要求, 则继续分支计算.

如果子问题的最优值超过界限 (最小化大于界限, 最大化小于界限), 则往下计算不可能得到 **ILP** 的最优解, 计算结束.

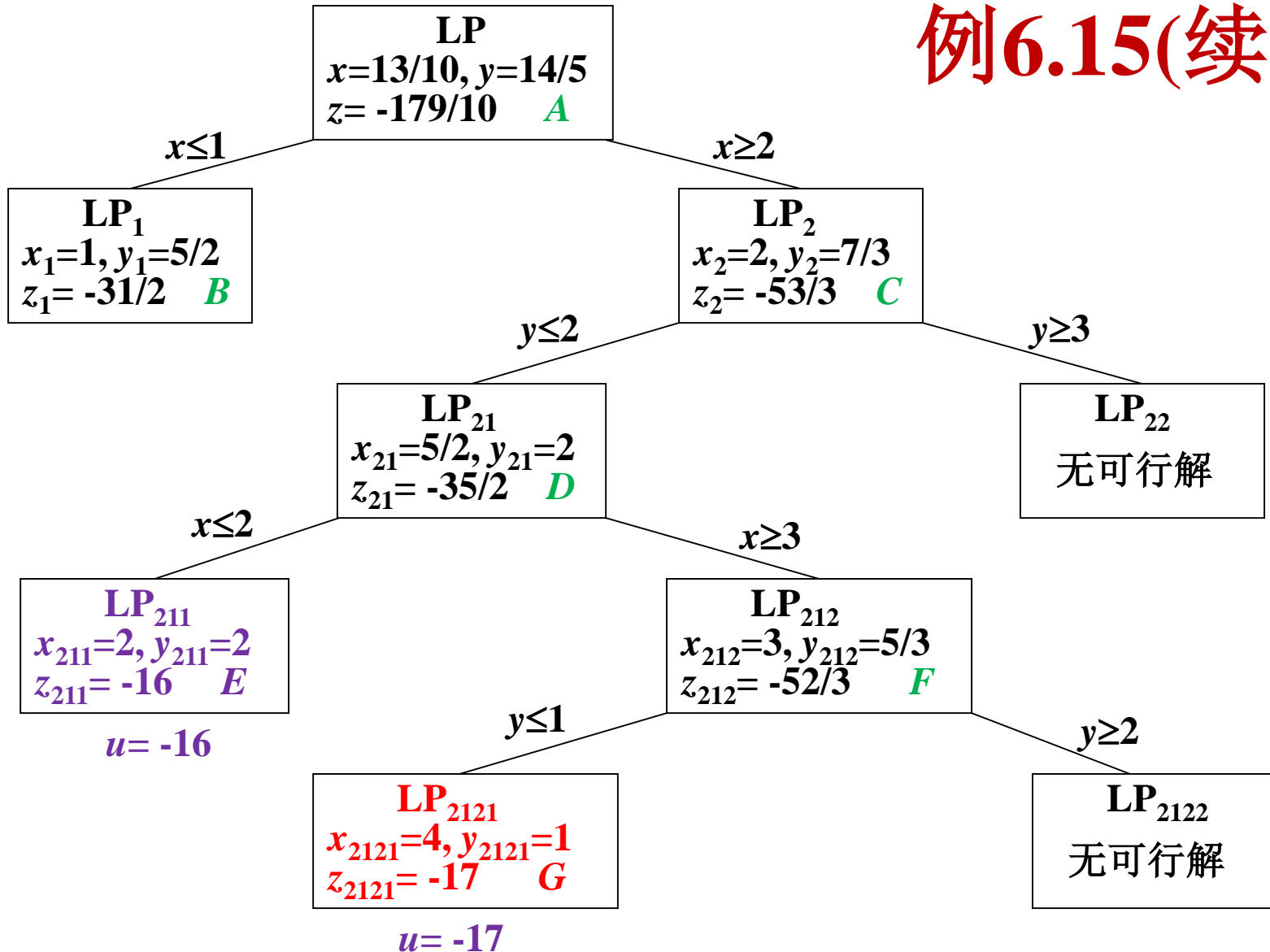
当没有待计算的子问题时, 所有可行解中最好的是 **ILP** 的最优解.

例6.15

$$\begin{aligned} \min z &= -3x - 5y \\ \text{s.t. } &-x + y \leq 3/2 \\ &2x + 3y \leq 11 \\ &x, y \geq 0, \text{ 整数} \end{aligned}$$



例6.15(续)



LP 的计算

			-3	-5	0	0	
c_B	x_B	b	x	y	u_1	u_2	θ
0	u_1	1.5	-1	1	1	0	1.5
0	u_2	11	2	3	0	1	11/3
	-z	0	-3	-5	0	0	
-5	y	1.5	-1	1	1	0	-
0	u_2	6.5	5	0	-3	1	1.3
	-z	7.5	-8	0	5	0	
-5	y	2.8	0	1	0.4	0.2	
-3	x	1.3	1	0	-0.6	0.2	
	-z	17.9	0	0	0.2	1.6	

LP₁ 的计算

			-3	-5	0	0	0
c_B	x_B	b	x	y	u_1	u_2	v_1
-5	y	2.8	0	1	0.4	0.2	0
-3	x	1.3	1	0	-0.6	0.2	0
		1	1	0	0	0	1
	-z	17.9	0	0	0.2	1.6	0
-5	y	2.8	0	1	0.4	0.2	0
-3	x	1.3	1	0	-0.6	0.2	0
0	v_1	-0.3	0	0	0.6	-0.2	1
	-z	17.9	0	0	0.2	1.6	0
	θ		-	-	-	-8	-
-5	y	2.5	0	1	1	0	1
-3	x	1	1	0	0	0	1
0	u_2	1.5	0	0	-3	1	-5
	-z	15.5	0	0	5	0	8

对 $x \leq 1$ 引入松弛变量 v_1 ,

$$x + v_1 = 1$$

第3行减第2行, 消去 x (x 是基变量), 取 v_1 作为基变量.

用对偶单纯形法求解.

LP₂ 的计算

			-3	-5	0	0	0
c_B	x_B	b	x	y	u_1	u_2	v_2
-5	y	2.8	0	1	0.4	0.2	0
-3	x	1.3	1	0	-0.6	0.2	0
		-2	-1	0	0	0	1
	-z	17.9	0	0	0.2	1.6	0
-5	y	2.8	0	1	0.4	0.2	0
-3	x	1.3	1	0	-0.6	0.2	0
0	v_2	-0.7	0	0	-0.6	0.2	1
	-z	17.9	0	0	0.2	1.6	0
	θ		-	-	-1/3	-	-
-5	y	7/3	0	1	0	1/3	2/3
-3	x	2	1	0	0	0	-1
0	u_1	7/6	0	0	1	-1/3	-1/6
	-z	53/3	0	0	0	5/3	1/3

对 $x \geq 2$ 引入剩
余变量 v_2 ,

$$-x + v_2 = -2$$

第 3 行加第 2
行, 消去 x , 取
 v_2 作为基变量.

用对偶单纯形
法求解.

LP₂₂的计算

			-3	-5	0	0	0	0
c_B	x_B	b	x	y	u_1	u_2	v_2	v_{22}
-5	y	7/3	0	1	0	1/3	2/3	0
-3	x	2	1	0	0	0	-1	0
0	u_1	7/6	0	0	0	-1/3	-1/6	0
		-3	0	-1	0	0	0	1
	-z	53/3	0	0	0	5/3	1/3	0
-5	y	7/3	0	1	0	1/3	2/3	0
-3	x	2	1	0	0	0	-1	0
0	u_1	7/6	0	0	0	-1/3	-1/6	0
0	v_{22}	-2/3	0	0	0	1/3	2/3	1
	-z	53/3	0	0	0	5/3	1/3	0

无可行解

应用：最小顶点覆盖

- 顶点覆盖问题

给定图 $G=(V,E)$ ， G 的顶点覆盖是顶点子集 $S\subseteq V$ ，使得每条边至少有一个端点属于 S 。求 G 的最小的顶点覆盖。

- 转化为线性规划问题

令 $V=\{1, 2, \dots, n\}$ ， $\forall e\in E$ ，存在 $i, j\in V$ ，使得 $e=(i, j)$

$\forall i\in V$ ，定义变量 $x_i=0,1$ ，且 $x_i=1\iff i\in S$

$\forall e=(i, j)\in E$ ， $x_i+x_j\geq 1$

$$\min \sum_{i\in V} x_i$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.t. } x_i+x_j\geq 1 & (i, j)\in E \\ x_i=0,1 & i\in V \end{array}$$

设计算法

- 顶点覆盖是整数规划问题，属于NP难问题.
- 近似算法的设计思想：
 1. 放松 $x_i = 0, 1$ 的约束条件，令 x_i 为 $[0, 1]$ 区间的任意实数，转化为线性规划问题.
 2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0, 1]$, $i=1, 2, \dots, n$, 使得其和达到最小.
 3. 令 $S = \{ i \mid x_i \geq 1/2 \}$.
- 算法分析

可以证明上述 S 是 G 的顶点覆盖，且 $|S| \leq 2|S^*|$ ，其中 S^* 为最优解.

应用：负载均衡问题

- 负载均衡问题

给定作业集合 $J=\{1, 2, \dots, n\}$, 作业 j 加工时间为 t_j , $j=1, 2, \dots, n$. 机器集合 $M=\{1, 2, \dots, m\}$, 对每个作业分配一台机器, 作业 j 可分配的机器集合为 M_j . J_i 是分配到机器 i 上的作业集合. 机器 i 的负载是 L_i . 设分配方案的负载为 L , 其中

$$L = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} L_i, \quad L_i = \sum_{j \in J_i} t_j$$

问题：求分配方案 使得 L 达到最小。

转变为线性规划

$\min L$

$$\sum_i x_{ij} = t_j \quad \forall j \in J$$

任务 j 在分配机器的负载之和
等于加工时间

$$\sum_j x_{ij} \leq L \quad \forall i \in M$$

任何机器的负载总量不超过 L

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J, i \in M_j$$

- 如果上述线性规划有值不超过 L 的解，那么最优负载的值至少是 L .
- 线性规划的最优解有可能把一个作业分配到多台机器上，即负载是分数。需要调整这个解，以满足原问题的需求：每个作业只能分配到一台机器上。