

## 问题

给定语言

$$L = \{a^n b^m c^k : k, m, n \geq 0, n = m \text{ 或者 } k = m\},$$

1. 试构造一个上下文无关文法 $G$ ，使得文法 $G$ 生成语言 $L$ 。
2. 依据文法 $G$ ，给出生成语言 $L' = L - \{\varepsilon\}$ 的上下文无关文法 $G'$ ，使其具有乔姆斯基范式形式。
3. 依据文法 $G'$ ，使用CYK算法给出符号串 $aabbcc$ 的分析，并列出所有可能的推导树。

## 解答

- 1、构造文法 $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, S, P)$ ，其中产生式 $P$ 包括：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B, \\ A &\rightarrow C|Ac, & C &\rightarrow \varepsilon|aCb, \\ B &\rightarrow D|aB, & D &\rightarrow \varepsilon|bDc. \end{aligned}$$

- 2、去 $\varepsilon$ 产生式：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B, \\ A &\rightarrow C|Ac|c, & C &\rightarrow ab|aCb, \\ B &\rightarrow D|aB|a, & D &\rightarrow bc|bDc. \end{aligned}$$

去单位产生式：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ab|aCb|Ac|c|bc|bDc|aB|a, \\ A &\rightarrow ab|aCb|Ac|c, & C &\rightarrow ab|aCb, \\ B &\rightarrow bc|bDc|aB|a, & D &\rightarrow bc|bDc. \end{aligned}$$

转化为乔姆斯基范式形式：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY|EY|AZ|c|YZ|FZ|XB|a, \\ A &\rightarrow XY|EY|AZ|c, & C &\rightarrow XY|EY, \\ B &\rightarrow YZ|FZ|XB|a, & D &\rightarrow YZ|FZ, \\ X &\rightarrow a, & Y &\rightarrow b, \\ Z &\rightarrow c, & F &\rightarrow YD. \\ E &\rightarrow XC, \end{aligned}$$

- 3、使用CYK算法分析符号串 $aabbcc$ ，第一步可得：

$$V_{11} = V_{22} = \{X, S, B\}, \quad V_{33} = V_{44} = \{Y\}, \quad V_{11} = V_{22} = \{Z, S, A\},$$

第二步可得：

$$V_{12} = \{S, B\}, V_{23} = \{S, C, A\}, V_{34} = \emptyset, V_{45} = \{S, B, D\}, V_{56} = \{S, A\},$$

第三步可得：

$$V_{13} = \{E\}, V_{24} = \emptyset, V_{35} = \{F\}, V_{46} = \emptyset,$$

第四步可得：

$$V_{14} = \{S, C, A\}, V_{25} = \emptyset, V_{36} = \{S, B, D\},$$

第五步可得：

$$V_{15} = \{S, A\}, V_{26} = \{S, B\},$$

最后可得：

$$V_{16} = \{S, A, B\}.$$

因此，可得符号串 $aabbcc$ 的推导过程为：

$$S \Rightarrow AZ \Rightarrow AZZ \Rightarrow EYZZ \Rightarrow XCYZZ \Rightarrow XXYYZZ \Rightarrow \cdots \Rightarrow aabbcc,$$

和

$$S \Rightarrow XB \Rightarrow XXB \Rightarrow XXFZ \Rightarrow XXYDZ \Rightarrow XXYYZZ \Rightarrow \cdots \Rightarrow aabbcc.$$

推导所对应的推导树分别为：

