# 问题

假设$x$和$y$是符号串，定义运算

$$S(x,y) = \{w | 存在n \geq 1, 使得w = x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n,$$

$$其中x_i和y_i是符号串，并且x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_n\}。$$

对于语言$L_1$和$L_2$，定义$S(L_1, L_2) = \{S(x,y) : x \in L_1, y \in L_2\}$。证明：如果语言$L_1$和$L_2$是正则语言，则$S(L_1, L_2)$是正则语言。

# 解答

我们假设$L_1$由确定型有穷接受器$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$接受，$L_2$由确定型有穷接受器$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$接受。我们构造有穷接受器

$$M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2),$$

其中转移函数$\delta$如下定义：

$$\delta((q_{1i}, q_{2j}), x) = \{(\delta_1(q_{1i}, x), q_{2j}), (q_{1i}, \delta_2(q_{2j}, x))\}。$$

下面证明$S(L_1, L_2) = L(M)$。对任意$w \in L(M)$，当$M$输入$w$后，状态从$(q_{01}, q_{02})$迁移到$(q_{f1}, q_{f2})$，我们把$w$中会引发第一个状态分量迁移的符号依次连接在一起为$x$，把$w$中会引发第二个状态分量迁移的符号依次连接在一起为$y$，则有$w = S(x,y)$。我们将$x$输入到$M_1$中，状态会由$q_{01}$迁移到$q_{f1}$，从而$x \in L(M_1) = L_1$。同样有$y \in L(M_2) = L_2$，从而有$w \in S(L_1, L_2)$。

反之，对任意$w \in S(L_1, L_2)$，则存在$x \in L_1$，$y \in L_2$，使得$w = S(x,y)$。由于$x \in L_1$，我们将$x$输入到$M_1$中，状态会由$q_{01}$迁移到$q_{f1}$；由于$y \in L_2$，我们将$y$输入到$M_2$中，状态会由$q_{02}$迁移到$q_{f2}$。如果把$w$输入到$M$中，其中属于$x$的部分会使得状态的第一个分量由$q_{01}$迁移到$q_{f1}$，属于$y$的部分会使得状态的第一个分量由$q_{02}$迁移到$q_{f2}$，从而，$M$的状态从$(q_{01}, q_{02})$迁移到$(q_{f1}, q_{f2})$，即$w \in L(M)$。