

## 问题

给定集合 $\Sigma = \{0, 1, c\}$ 上的语言 $L = \{0^i 1^i c 0^k 1^k | k = i + 1\}$ ，试给出生成语言 $L$ 的上下文无关文法。

## 解答

不存在生成语言 $L$ 的上下文无关文法。如果存在上下文无关文法生成语言 $L$ ，则语言 $L$ 是上下文无关语言。可以用泵引理证明语言 $L$ 不是上下文无关语言。

用反证法证明，假设 $L$ 是上下文无关语言，则存在正整数 $m$ ，满足上下文无关语言的泵引理。取符号串

$$w = 0^m 1^m c 0^{m+1} 1^{m+1},$$

其长度大于 $m$ ，从而 $w$ 可以分解为

$$w = uvxyz$$

的形式，其中 $|vxy| \leq m$ ， $|vy| \geq 1$ 。根据泵引理， $w_0 = uxz \in L$ 。

由于 $|vxy| \leq m$ ， $|vxy|$ 有以下情形：

1. 如果 $vxy$ 全在 $0^m$ 中，则 $v$ 和 $y$ 全是0，易知 $w_0 = 0^{m-i-j} 1^m c 0^{m+1} 1^{m+1}$ ，显然有 $w_0$ 不属于语言 $L$ ，与 $w_0 \in L$ 矛盾；
2. 如果 $vxy$ 全在 $1^m$ 或者 $0^{m+1}$ 或者 $1^{m+1}$ 中，类似上面分析，有 $w_0$ 不属于语言 $L$ ，与 $w_0 \in L$ 矛盾；
3. 如果 $vxy$ 一部分在 $0^m$ 中，一部分在 $1^m$ 中，则 $v$ 和 $y$ 含有部分0和部分1，由泵引理，易知 $w_0 = 0^{m-i} 1^{m-j} c 0^{m+1} 1^{m+1} \in L$ ，从而在 $w_0$ 中，前半部分0的个数和后半部分0的个数不是相差1个，前半部分1的个数和后半部分1的个数也不是相差1个，从而有 $w_0$ 不属于语言 $L$ ，与 $w_0 \in L$ 矛盾；
4. 如果 $vxy$ 一部分在 $1^m$ 中，一部分在 $0^{m+1}$ 中，或者一部分在 $0^{m+1}$ 中，一部分在 $1^{m+1}$ 中，类似上面分析，有 $w_0$ 不属于语言 $L$ ，与 $w_0 \in L$ 矛盾。

由上面分析，无论 $vxy$ 如何取值，均与泵引理的结果矛盾，从而语言 $L$ 不是上下文无关语言。