

## 问题

设语言 $L_1$ 和 $L_2$ 是递归可枚举语言，语言 $L_1 \cap L_2$ 和 $L_1 \cup L_2$ 是递归语言。证明：语言 $L_1$ 和 $L_2$ 是递归语言。

## 解答

我们给出语言 $L_1$ 的成员资格判定算法，根据对称性，可以给出语言 $L_2$ 的成员资格判定算法。

语言 $L_1 \cap L_2$ 和 $L_1 \cup L_2$ 是递归语言，这两个语言存在成员资格判定算法。对于字母表上的任意符号串 $x$ ，我们用如下算法判定它是否属于语言 $L_1$ ：

1、将符号串 $x$ 输入语言 $L_1 \cup L_2$ 的成员资格判定算法，查看它是否属于语言 $L_1 \cup L_2$ 。

- 如果符号串 $x$ 不属于语言 $L_1 \cup L_2$ ，算法输出“拒绝”并停止；
- 如果符号串 $x$ 属于语言 $L_1 \cup L_2$ ，算法进入下一步。

2、将符号串 $x$ 输入语言 $L_1 \cap L_2$ 的成员资格判定算法，查看它是否属于语言 $L_1 \cap L_2$ 。

- 如果符号串 $x$ 属于语言 $L_1 \cap L_2$ ，算法输出“接受”并停止；
- 如果符号串 $x$ 不属于语言 $L_1 \cap L_2$ ，算法进入下一步。

3、此时，我们知道符号串 $x$ 要么属于语言 $L_1$ ，要么属于语言 $L_2$ ，但不会同时属于这两个语言。我们需要判定符号串 $x$ 具体属于哪一个语言。

语言 $L_1$ 是递归可枚举语言，存在图灵机 $M_1$ 接受语言 $L_1$ ；语言 $L_2$ 是递归可枚举语言，存在图灵机 $M_2$ 接受语言 $L_2$ 。将符号串 $x$ 分别输入到图灵机 $M_1$ 和图灵机 $M_2$ 中，并执行 $i$ 步迁移， $i = 1, 2, 3, \dots$ ，直到其中一个图灵机接受符号串 $x$ 。(由于符号串 $x$ 要么属于语言 $L_1$ ，要么属于语言 $L_2$ ，这个事件一定会在某个时刻发生。)

- 如果图灵机 $M_1$ 接受了符号串 $x$ ，算法输出“接受”并停止；
- 如果图灵机 $M_2$ 接受了符号串 $x$ ，算法输出“拒绝”并停止。

这样，我们给出了语言 $L_1$ 的成员资格判定算法，因此，语言 $L_1$ 是递归语言。

同样，我们可以给出语言 $L_2$ 的成员资格判定算法，因此，语言 $L_2$ 是递归语言。