

问题

类似图灵机的编码过程，可以对下推自动机进行编码，并且对于任给的一个下推自动机的编码，可以按照唯一的方式解码。用 $\langle M \rangle$ 表示下推自动机 M 的编码，并给定自然数 n ，记语言 $L = \{\langle M \rangle : M \text{ 是下推自动机，并且 } L(M) \text{ 至少包含一个长度不大于 } n \text{ 的符号串}\}$ ，证明语言 L 是递归语言。

解答

为了证明语言 L 是递归语言，需要给出 L 的成员资格判定算法。

对于 $\{0, 1\}^+$ 上的符号串 w ，先检查该编码是否定义了一个下推自动机，如果不是输出一个“否”。

如果该编码定义了一个下推自动机，记为 M 。构造确定型有穷接受器 M' ，其接受的语言为字母表上长度不大于 n 的所有符号串。

我们构造一个下推自动机 M_1 ，其接受的语言为 $L(M) \cap L(M')$ 。这样， $L(M)$ 至少包含一个长度不大于 n 的符号串当且仅当 $L(M_1)$ 非空。

将 M_1 转化为一个上下文无关文法 G 。存在一个算法，可以判定该上下文无关文法生成的语言是否为空。如果为空，输出一个“否”；如果不为空，输出一个“是”。

由上面的算法可知，语言 L 存在一个成员资格判定算法，从而语言 L 是递归语言。