

Mitschrift
Differentialrechnung in \mathbb{R}^n und
Differentialgleichungen, WS 2015/16
Prof. Dr. Josef Hörwick

M. Zell

21. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Hinweise	8
2	Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	9
2.1	Beispiele	9
2.2	Verallgemeinerung	10
2.3	Beispiele	10
2.4	Linearisierung von Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	10
2.5	Linearisierungsformel	10
2.6	Beispiel	10
2.7	Verallgemeinerung	11
2.8	Beispiel	12
2.9	Anwendung der Linearisierung - Die Fehlerrechnung	12
2.10	Beispiel	12
2.11	Die Richtungsableitung	12
2.12	Beispiel	12
2.13	Definition	14
2.14	Beispiel von oben	14
2.15	Hausaufgabe	14
2.16	Problem	14
2.17	Beispiel	15
2.18	Hausaufgabe	15
3	Integration von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	15
3.1	Annäherung	15
3.2	Annäherung durch Scheiben	16
3.3	Beispiel	17
3.4	Beispiel	19
4	Flächenberechnung und Volumenberechnung	19
4.1	Flächenberechnung	19
4.2	Volumenberechnung	20
4.3	Beispiel Kugelvolumen	20
4.4	Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	20
5	Höhere partielle Ableitungen	21
5.1	Beispiel zur Wiederholung	22
5.2	Allgemein gilt	22
5.3	Test	22
6	Extremwertaufgaben mit zwei Variablen	23
6.1	Beispiel	23
7	Abbildungen des Typs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	24
7.1	Beispiel	24
7.2	Ellipse	25
7.3	Geschwindigkeitsvektor	25
7.4	Beispiele	26
7.5	Der Beschleunigungsvektor	26
7.6	Merke	26

7.7	Beispiele	27
7.8	Linearisierung	29
7.9	Die Zykloide	29
8	Bogenlänge einer Kurve	30
8.1	Beispiel Kreis	31
8.2	Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung	31
8.3	Beispiel Schraubenlinie	31
8.4	Hausaufgabe	31
8.5	Bogenlänge der Zykloide	33
8.6	Die natürliche Parameterdarstellung	33
8.7	Parametertransformation	33
8.8	Beispiel	33
8.9	Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung	34
8.10	Beispiel Zykloide	34
8.11	Die Krümmung einer Kurve	35
8.12	Beispiel Krümmung der Schraublinie	36
8.13	Krümmung einer ebenen Kurve, die als Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben ist	36
8.14	Ein einfaches Beispiel	37
8.15	Krümmung einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung	38
8.16	Beispiel Ellipse	38
9	Kurven in Polarkoordinaten	39
9.1	Beispiel Archimedische Spirale	40
9.2	Sektorflächeninhalt	40
9.3	Bogenlänge in Polarkoordinaten	41
9.4	Beispiel Logarithmische Spirale	41
9.5	Linienintegrale	42
9.5.1	1. Art:	42
9.6	Beispiel	42
9.7	Beispiel	42
9.7.1	2. Art Arbeitsintegral (in der Ebene)	43
9.8	Beispiel Arbeitsintegral	43
9.9	Beispiel	45
10	Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	45
10.1	Linearisierung	45
10.2	Beispiel	45
10.3	Kettenregel	46
10.4	Beispiel	46
10.5	Hausaufgabe	46
10.6	Beispiel	47
11	Parameterdarstellung von Flächen	47
11.1	Beispiel	48
11.2	Parameterdarstellung des Drehellipsoids	48

12 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen	49
12.1 Kurven in \mathbb{R}^2	49
12.2 Lot auf eine Kurve	50
12.3 Ellipse	50
12.3.1 andere Berechnungsmethode	50
12.4 Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3	50
12.5 Beispiel	51
13 Die komplexen Zahlen	51
13.1 Zahlenebene	53
13.2 \sin, \cos, e -Funktion im Komplexen	54
13.3 Die n -ten Wurzeln von 1	54
13.4 Bemerkung	56
13.5 Polynome in \mathbb{C}	56
13.6 Beispiel	56
14 Differentialgleichungen (DGL)	57
14.1 Geometrische Interpretation	58
14.2 Ein System von DGL	60
14.3 DGL n -ter Ordnung	61
14.4 Lippschitzbedingung	62
14.5 Eindeutigkeitssatz	63
14.6 Existenzsatz von Picard-Lindelöf	63
14.7 Beispiel	65
15 DGL n-ter Ordnung	65
15.1 Beispiel DGL 2. Ordnung	66
16 Elementare Lösungsmethoden	67
16.1 Beispiel	67
16.2 Beispiel	67
16.3 Lineare DGL	68
16.4 Beispiel	68
16.5 Inhomogene DGL	68
16.6 Beispiel	70
16.7 DGL vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$	70
16.8 Beispiel	70
16.9 Beispiel	70
16.10 Numerische Lösung von DGL	71
16.10.1 Verbesserung: Mittelpunktsregel	71
16.10.2 Rückwärts	72
16.10.3 Hausaufgabe	72
16.11 Runge-Kutta-Verfahren	73
17 Lineare DGL-Systeme	73
17.1 Beispiel	74
17.2 Beispiel	76

18 Lösung für die Prüfung WS 2013/14	79
18.1 zu 1)	79
18.2 zu 2a)	79
18.3 zu 2b)	79
18.4 zu 3a)	79
18.5 zu 3b)	79
18.6 zu 4a)	79
18.7 zu 4b)	80
18.8 EXTRA zu 4)	80
18.9 zu 5)	80
18.10 zu 6)	81
Stichwortverzeichnis	82

Abbildungsverzeichnis

1	Schnittfunktionen im \mathbb{R}^n	9
2	Tangentialebene anstelle eines Funktionengebirges	11
3	Richtungsableitung im Raum	13
4	Richtungsableitung entlang der Geraden g	13
5	Steilste Richtungsableitung	14
6	Gradient von f	15
7	Volumen eines beliebigen Körpers	16
8	Annäherung Volumen	16
9	Annäherung Volumen durch Scheiben	17
10	Querschnittsfläche bei x	17
11	Beispiel	18
12	Dreiecksfläche	19
13	Berechnung einer Fläche	19
14	Berechnung des Volumens eines dreidimensionalen Körpers	20
15	Berechnung Kugelvolumen	20
16	Beispiel Wahrscheinlichkeitsberechnung	21
17	Beweis $f_{y,x} = f_{x,y}$	22
18	Punktbewegung im Raum	24
19	Ellipse	25
20	Geschwindigkeitsvektoren	25
21	Geschwindigkeitsvektor im Kreis	26
22	Beschleunigungsvektor	27
23	Beschleunigung im Kreis	27
24	Ein Zykloid	29
25	Zykloidbahn	30
26	Bogenlänge einer Kurve	30
27	Bogenlänge einer Kurve	30
28	Beispiel Kreis	31
29	Bogenlänge einer Kurve	31
30	Schraubenlinie	32
31	Abgewinkelte Schraubenlinie	32
32	Parametrisierung nach der Bogenlänge	33
33	Parametertransformation	34
34	Umwandlung einer Parameterdarstellung	34
35	Krümmung einer Kurve	35
36	Krümmung einer ebenen Kurve	36
37	Beispiel Krümmungskreis	37
38	Krümmung einer ebenen Kurve	38
39	Ellipse	38
40	Ellipse	39
41	Kurven in Polarkoordinaten	39
42	Beispiel Archimedische Spirale	40
43	Sektorflächeninhalt	40
44	Bogenlänge in Polarkoordinaten	41
45	Logarithmische Spirale	41
46	Linienintegral	42
47	Bogenlänge	42
48	Beispiel	43

49	Arbeitsintegral (in der Ebene)	43
50	Arbeitsintegral	44
51	Parameterdarstellung von Flächen	47
52	Beispiel Erdkugel	48
53	Parameterdarstellung des Drehellipsoids	48
54	Höhenlinienplan	50
55	Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3	51
56	Komplexen Zahlen	51
57	Zahlenebene	53
58	\sin, \cos, e -Funktion im Komplexen	54
59	Geometrische Interpretation	55
60	Die n -ten Wurzeln von 1	55
61	Bemerkung zu e^z	56
62	Bemerkung 2	56
63	Bemerkung 3	57
64	Differentialgleichungen	57
65	Fläche unterhalb der Funktion	58
66	Geometrische Interpretation von DGL	58
67	System von DGL	60
68	DGL und der Geschwindigkeitsvektor	61
69	Eindimensionales DGL	61
70	Die Lippschitzbedingung	62
71	Eindeutigkeitssatz	63
72	Existenzsatz von Picard-Lindelöf	63
73	Näherung	64
74	Bedeutung des Existenz- und des Eindeutigkeitssatzes	65
75	DGL 2. Ordnung	66
76	Beispiel für verschiedene Werte von c	68
77	Numerische Lösung von DGL	71
78	Verbesserung: Mittelpunktsregel	71
79	Rückwärts	72
80	Beispiel	72
81	Runge-Kutta-Verfahren	73

1 Hinweise

Diese Mitschrift basiert auf der Vorlesung „Differentialrechnung in \mathbb{R}^n und Differentialgleichungen“ von Prof. Dr. Josef Hörwick im WS 2015/16. Du kannst sie gerne benutzen, kopieren und an andere weitergeben. Auch in der Prüfung - soweit zugelassen ¹ - kannst du sie gerne als Hilfsmittel verwenden, wenn das meine Nutzung als Prüfungshilfsmittel nicht in irgendeiner Weise beeinträchtigt.

Natürlich besteht kein Anspruch auf Aktualität, Richtigkeit, Fortsetzung meines Angebots oder dergleichen. Sollten dir Fehler auffallen oder solltest du Verbesserungsvorschläge haben, würde ich mich über eine E-Mail (zell@hm.edu) freuen. Wenn du mir als kleines Dankeschön z.B. ein Club-Mate² ausgeben möchtest, findest du mich meistens hier: <http://fi.cs.hm.edu/fi/rest/public/timetable/group/if3b>. Wenn nicht, ist es auch ok ;-)

Nach der Prüfung werde ich den L^AT_EX-Quelltext veröffentlichen, damit die Mitschrift weitergeführt, korrigiert und ergänzt werden kann.

Viele Grüße

M. Zell

¹http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden_services/fi_pruefungskatalog.de.html

²<http://www.clubmate.de/ueber-club-mate.html>

2 Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases} \quad \text{Zwei Variablen.}$$

„Gebirge über der
x,y-Ebene.“

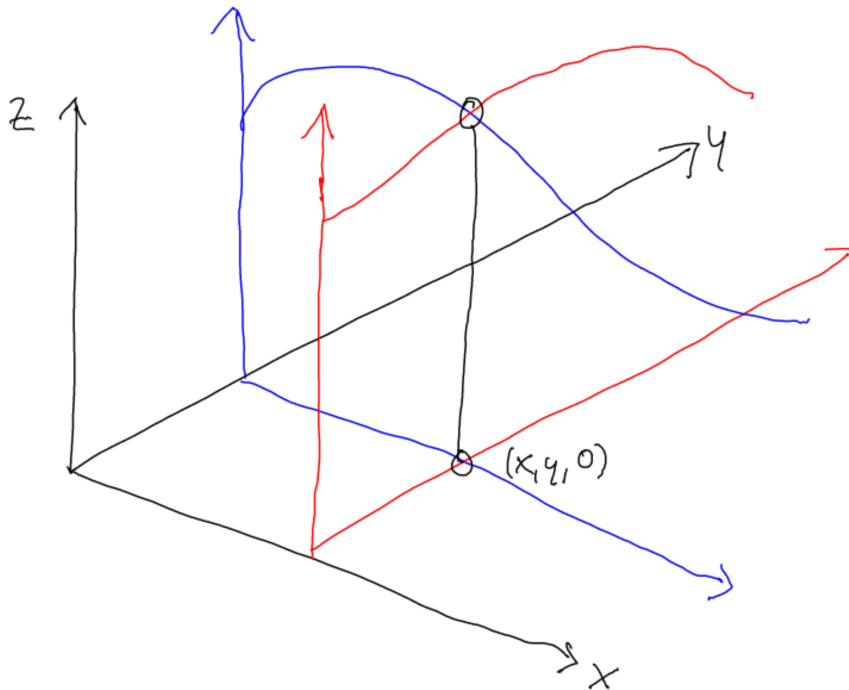


Abbildung 1: Schnittfunktion parallel zur yz-Ebene (rot); Schnittfunktion parallel zur xz-Ebene (blau).

Die Ableitungen der Schnittfunktionen heißen partielle Ableitungen. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ist die Ableitung der blauen Funktion (nur x ist Variable). $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ist die Ableitung der roten Funktion (nur y ist Variable).

2.1 Beispiele

a) $f(x, y) = 2x^3y^2 + x + 2y$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 3x^2 + 1$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 2y + 2$

b) $f(x, y) = \sin(xy^2)$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy^2)y^2$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy^2)x2y$

2.2 Verallgemeinerung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, \dots, x_n) \text{ nur } x_1 \text{ ist Variable.}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, \dots, x_n) \text{ nur } x_n \text{ ist Variable.}$$

Zum Beispiel: $\frac{\delta f}{\delta x_1}$

2.3 Beispiele

a) $f(x, y, z) = x^5 y^2 z^3 + xy + z^2$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 5x^4 y^2 z^3 + y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2yx^5 z^3 + x$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 3z^2 x^5 y^2 + 2z$$

b) $f(x, y, z) = e^{2x} e^y + z^2 \sin(x)$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^{2x} 2e^y + \cos(x) z^2$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = e^{2x} e^y$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 2z \sin(x)$$

c) $f(x, y, z) = e^x \sin(xy) + yze^z$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy) y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = e^x \cos(xy) x + ze^z$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = ye^z + yze^z$$

2.4 Linearisierung von Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Ersetze das Funktionsgebirge im Punkt (x, y, z) durch die Tangentialebene ε . Dieses ε wird aufgespannt durch die beiden Tangenten an die beiden Schnittfunktionen (siehe Abb. 2).

„Heißt nichts anderes als ich ersetze die Funktion durch die Tangente. Dadurch kann man eine schwierige Funktion durch eine einfachere ersetzen.“

2.5 Linearisierungsformel

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) dy$$

„Mit dieser Formel können wir die Funktion im Punkt (x, y) durch die Tangentialebene ersetzen.“

2.6 Beispiel

Linearisiere $f(x, y) = x^2 y^3$ bei $x = 2, y = 1$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2xy^3$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 3y^2 x^2$$

$$f(x + dx, y + dy) \approx x^2 y^3 + 2xy^3 \cdot dx + 3y^2 x^2 \cdot dy$$

$$f(2, 1) = 4$$

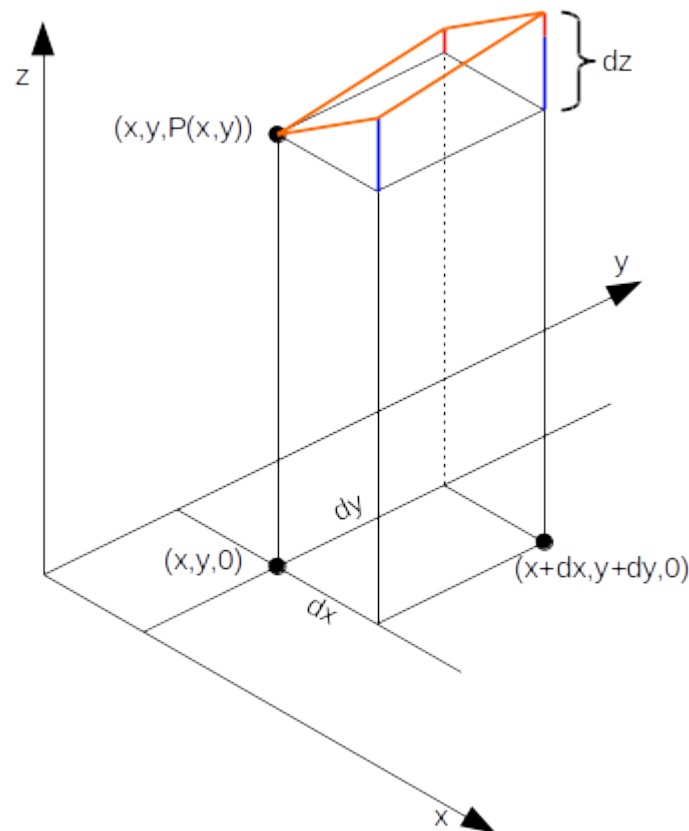


Abbildung 2: Die orangenen Tangenten an die blaue und die rote Schnittfunktion spannen eine Tangentialebene auf. Diese entspricht dem ε . Es gilt: blaue Schnittfunktion: $\frac{\delta f}{\delta x}(x, y)dx$, rote Schnittfunktion: $\frac{\delta f}{\delta y}(x, y)dy$ und $dz = \frac{\delta f}{\delta x}(x, y)dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x, y)dy$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(2, 1) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\Rightarrow f(2 + dx, 1 + dy) \approx 4 + 4 \cdot dx + 12 \cdot dy$$

Test mit $dx = 0.1, dy = -0.1$

$$f(2.1, 0.9) = 2.1^2 \cdot 0.9^3 = \mathbf{3.214...}$$

$$f(2 + 0.1, 1 - 0.1) \approx 4 + 4 \cdot 0.1 - 12 \cdot 0.1 = 4 + 0.4 - 1.2 = \mathbf{3.2} \checkmark$$

2.7 Verallgemeinerung

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n$$

2.8 Beispiel

Linearisiere $f(x, y, z) = x \sin y + y \cos z$ bei $(0.5, 1, 0.9)$

$$f(0.5, 1, 0.9) = 0.5 \sin 1 + 1 \cos 0.9 = 1.042$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) \hat{=} \sin(1) = 0.841$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y) + \cos(z) \hat{=} 0.5 \cos 1 + \cos 0.9 = 0.892$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y \sin z \hat{=} -1 \sin 0.9 = -0.783$$

Test: $f(0.5 + dx, 1 + dy, 0.9 + dz) \approx 1.042 + 0.841dx + 0.892dy - 0.783dz$ z.B.:

$$f(0.5 + 0.1, 1 + 0.1, 0.9 - 0.1) \approx \dots = 1.293. \text{ Der exakte Wert: } f(0.6, 1.1, 0.8) = 1.301\dots$$

„In der Mathematik gilt: Wenn man sich nicht sicher ist, immer den Winkel im Bogenmaß eingeben.“

2.9 Anwendung der Linearisierung - Die Fehlerrechnung

Gegeben ist $f(x_1, \dots, x_n)$. Die Größen x_1, \dots, x_n werden gemessen, wobei $x_1 = \bar{x}_1 + w_1$ (wahrer Wert, Messwert und Fehler), ..., $x_n = \bar{x}_n + w_n$.

Wahres Ergebnis: $e = f(x_1, \dots, x_n)$

Fehlerhaftes Ergebnis: $\bar{e} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$\Rightarrow e = f(\bar{x}_1 + w_1, \dots, \bar{x}_n + w_n)$. Wir linearisieren an der Messstelle: $e = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) +$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)w_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)w_n$. Die Fehler w_1, \dots, w_n kennt man nicht.

Gegeben sind die maximalen Fehler der Messwerte: $x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i$. Der maximale Fehler des Ergebnisses ist:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Delta x_1 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Delta x_n \right|$$

2.10 Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \sin(x_2) + x_3 x_4 \cos x_2$$

$$x_1 = 10m \pm 5cm$$

$$x_2 = 40^\circ \pm 1^\circ \hat{=} 0.01745rad$$

$$x_3 = 12m \pm 6cm$$

$$x_4 = 7m \pm 4cm$$

$$f(10m, 40^\circ, 12m, 7m) = 126.6m^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \sin x_2 \hat{=} 2 \cdot 10 \sin 40^\circ = 12.85$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 \cos x_2 - x_3 x_4 \sin x_2 \hat{=} 22.61$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4 \cos x_2 \hat{=} 5.36$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3 \cos x_2 \hat{=} 9.19$$

$$\text{maximaler Fehler} = |12.85 \cdot 0.05| + |22.61 \cdot 0.01745| + |5.36 \cdot 0.06| + |9.19 \cdot 0.04| =$$

$$0.64 + 0.39 + 0.32 + 0.37 = (\text{von } \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \text{ und } \Delta x_4) = 1.73$$

2.11 Die Richtungsableitung

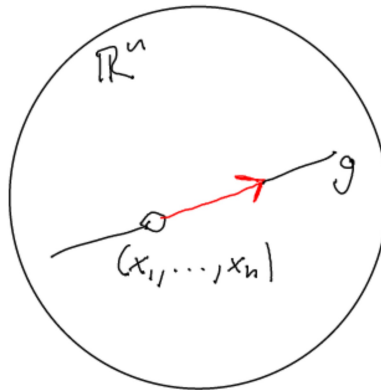
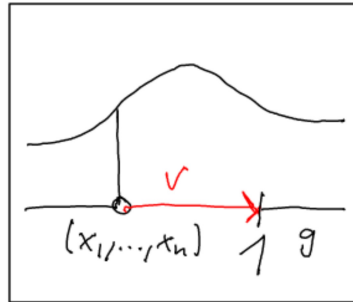
Wir betrachten $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen nun die Richtungsableitung des Vektors $v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ aufstellen (Abb. 3). Dazu betrachten wir die Funktion entlang

der Geraden g (Abb. 4) und erhalten: $f_v(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, \dots, x_n) + h(v_1, \dots, v_n)) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$

2.12 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1 x_2 + 2x_3$$

$$\tilde{v} = (1, 2, 2), |\tilde{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, v = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Abbildung 3: Der rote Vektor v liegt auf der Geraden g und im Raum \mathbb{R}^n Abbildung 4: Wir betrachten die Funktion entlang g .

$$\begin{aligned}
 f_v(x_1, x_2, x_3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, x_2, x_3) + h(v_1, v_2, v_3)) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1 + \frac{1}{3}h, x_2 + \frac{2}{3}h, x_3 + \frac{2}{3}h)) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1 + \frac{1}{3}h, x_2 + \frac{2}{3}h, x_3 + \frac{2}{3}h)) - x_1 x_2 - 2x_3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2 + x_1 \frac{2}{3}h + \frac{1}{3}h x_2 + \frac{2}{9}h^2 + 2x_3 + \frac{4}{3}h - x_1 x_2 - 2x_3}{h} = \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{9}h + \frac{4}{3} &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3} \Rightarrow f_v(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

2.13 Definition

Wiederholung Richtungsableitung: $f_v(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot v) - f(x)}{h}$

Definition 2.1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Der Vektor $(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n})$ heißt der Gradient von f bei x .

Satz 2.1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ mit $|v| = 1$ Dann gilt: $f_v(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n) \cdot (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n})$
 $f_v(x) = v \cdot \text{Gradient von } f \hat{=}$ Skalarprodukt: $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Beweis. $f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n$
 $f(x_1 + hv_1, x_2 + hv_2, \dots, x_n + hv_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot h \cdot v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h \cdot v_n$
 Einsetzen der Grenzwertbildung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hv_1, \dots, x_n + hv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} h v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} h v_n - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta x_1} v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} v_n = \text{Gradient von } f \cdot v \quad \square$$

2.14 Beispiel von oben

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + 2x_3, v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$f_v(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \frac{\delta f}{\delta x_3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (x_2, x_1, 2) = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}$$

2.15 Hausaufgabe

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2 x_3 + x_3^2 x_4$$

Richtung $\tilde{v} = (1, -1, -1, 1)$

Richtungsableitung in: $(1, 0, 2, -1)$

2.16 Problem

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Folgende Fragen stellen wir uns:

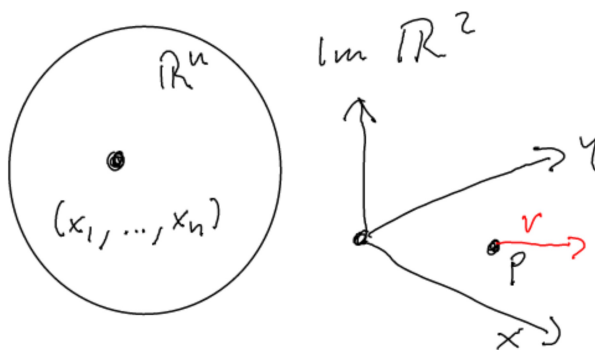


Abbildung 5: In welcher Richtung geht es am steilsten bergauf?

- In welcher Richtung v ist die Richtungsableitung am größten?
- In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten?



Abbildung 6: Gradient von f

- In welcher Richtung geht es am steilsten Bergauf? (Abb. 5)

$\cos = \frac{v \cdot \text{grad} f}{|v| \cdot |\text{grad} f|} = \frac{f_v}{|\text{grad} f|} \Rightarrow f_v = \cos \delta \cdot |\text{grad} f|$ (Abb. 6). f_v ist maximal bei $\cos \delta = 1$, d.h. bei $\delta = 0^\circ$. Die Richtungsableitung ist maximal in Richtung $\text{grad} f$. Die maximale Richtungsableitung ist $|\text{grad} f|$.

2.17 Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 2x_3^2$$

Punkt: (1, 2, -2)

In welcher Richtung wächst f am stärksten?

$$\text{grad} f = (3x_2, 3x_1, 4x_3)$$

$$\text{grad} f(1, 2, -2) = (6, 3, -8) \text{ (gesuchte Richtung)}$$

$$\text{Die maximale Steigung ist } |\text{grad} f| = |(6, 3, -8)| = \sqrt{36 + 9 + 64} = \sqrt{109}$$

$$\text{Steigungswinkel } \alpha = 84,5^\circ$$

2.18 Hausaufgabe

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2 - x_3x_4 + x_2x_3^2$$

Punkt: (2, 1, -3, 2)

In welcher Richtung wächst f am stärksten?

Wie groß ist dort der Steigungswinkel?

Lösung //TODO

3 Integration von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\int_B f$ ist das Volumen des „Zylinders“ über B (von B bis zur Funktion, vgl. Abb. 7).

3.1 Annäherung

Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht (Abb. 8).

Sei $\tilde{f} : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow f(x, y)$ für $(x, y) \in B$, 0 sonst

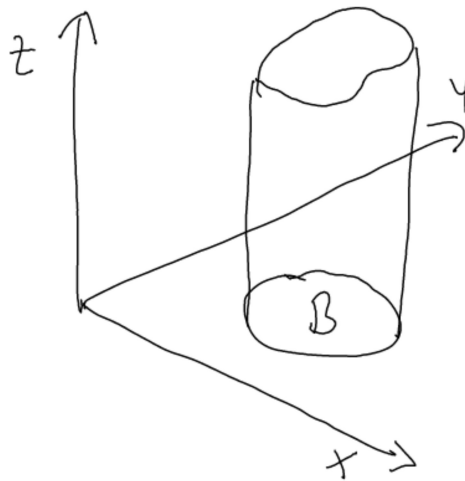


Abbildung 7: Das Volumen soll dem Integral $\int_B f$ entsprechen. Dabei ist die Fläche B beliebig und der obere „Deckel“ des „Zylinders“ entspricht irgendeinem „Funktionsgebirge“

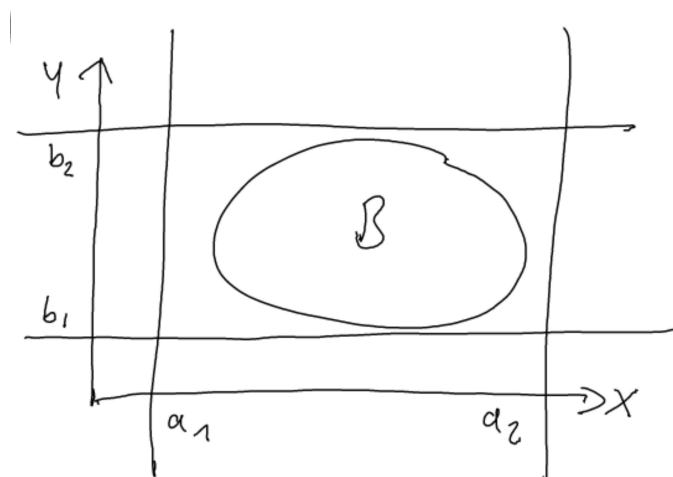


Abbildung 8: Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht $f : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$

3.2 Annäherung durch Scheiben

Nun nähern wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an (Abb. 9).

$$\int_B f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(z_i, y) dy \right) \Delta x}_{\text{Das Volumen als Summe der einzelnen Scheiben}} \rightarrow \sum_{i=1}^n g(z_i) \cdot \Delta x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \quad (\text{für } g(z_i) \text{ vgl. Abb. 10})$$

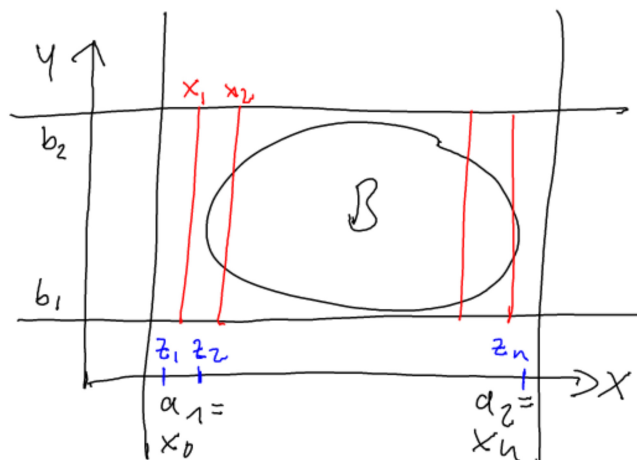


Abbildung 9: Nun nähern wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an.

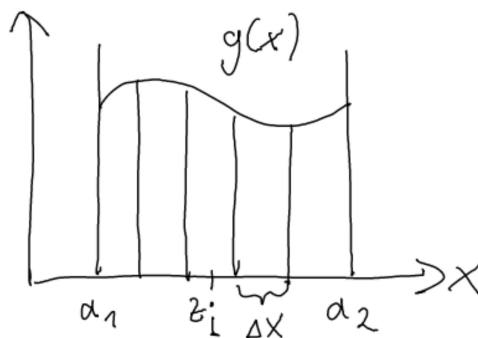


Abbildung 10: Querschnittsfläche bei x . Das Ergebnis ist irgendeine Funktion $g(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy$

also: $\int_B f(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} (\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(x, y) dy) dx$ (Doppelintegral über die gelben Querschnitte)

analog: $\int_B f(x, y) = \int_{b_1}^{b_2} (\int_{a_1}^{a_2} \tilde{f}(x, y) dx) dy$ (Doppelintegral über die roten Querschnitte)

3.3 Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 1 + xy^2$$

$$\int_B f(x, y) \text{ (vgl. Abb. 11)}$$

Als erstes integrieren wir über die gelben Querschnitte:

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) &= \int_0^3 (\int_0^2 (1 + xy^2) dy) dx = \int_0^3 (x + \frac{1}{3}xy^3) \Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^3 (2 + \frac{1}{3}x \cdot 8) dx \\ &= \int_0^3 (2 + \frac{8}{3}x) dx = 2x + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=3} = 2 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 9 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

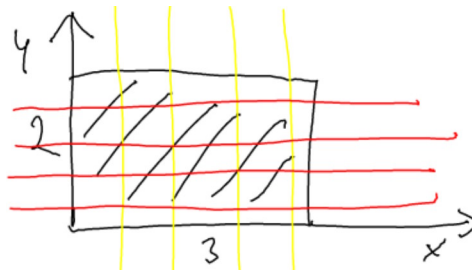


Abbildung 11: Flächenberechnung durch Integration über die gelben oder roten Querschnitte

Nun integrieren wir über die roten Querschnitte. Es muss das gleiche rauskommen:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^3 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^2 \left(\int_0^3 (1 + xy^2) dx \right) dy = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 9y^2 \right) dy \\ &= 3y + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=2} = 3 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 8 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

3.4 Beispiel

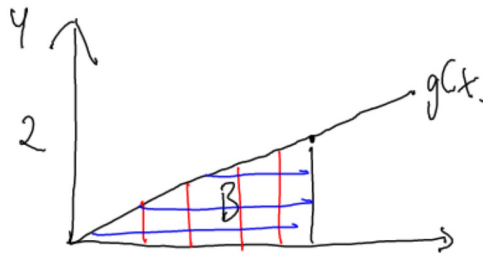


Abbildung 12: Berechnung der Dreiecksfläche unterhalb von $g(x)$ mit Hilfe der Querschnitte.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy^2 \\ \int_B f(x, y) &=? \\ g(x) &= \frac{2}{5}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) &= \int_0^5 \left(\int_0^{g(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^5 \left(\int_0^{\frac{2}{5}x} xy^2 dy \right) dx = \int_0^5 \left(x \cdot \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{2}{5}x} dx \\ &= \int_0^5 \left(x \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right) dx = \int_0^5 \left(x^4 \cdot \frac{8}{375} \right) dx = \frac{8}{375} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^5 = \frac{8}{375 \cdot 5} \cdot 3125 = 13,33... \end{aligned}$$

Andere Reihenfolge (blaue Querschnitte):

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{5}x \\ y &= \frac{2}{5}x \Rightarrow x = \frac{5}{2}y \\ \int_B f &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{5}{2}y}^5 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{5}{2}y}^5 xy^2 dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=\frac{5}{2}y}^{x=5} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \right. \\ &25y^2 - \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{5}{2} y \right)^2 \Big) dy = \int_0^2 \left(\frac{25}{2} y^2 - \frac{25}{8} y^4 \right) dy = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 - \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^2 = \frac{25}{6} \cdot 8 - \frac{5}{8} \cdot 32 = \\ &13,33... \end{aligned}$$

4 Flächenberechnung und Volumenberechnung

4.1 Flächenberechnung

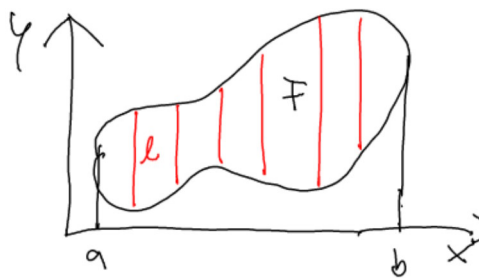


Abbildung 13: Näherungsweise bekommen wir den Flächeninhalt der Fläche F , wenn wir die Summe der Streifen/Rechtecke aus der Länge der Zwischenstellen z_i und der Breite Δx berechnen.

$$F \approx \sum_{i=1}^n l(z_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b l(x) dx$$

4.2 Volumenberechnung

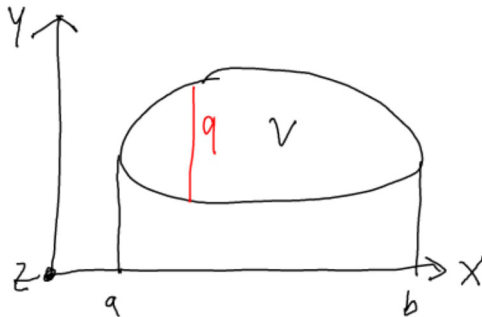


Abbildung 14: Irgendein Körper im \mathbb{R}^3 . Und wir berechnen sein Volumen.

Körper im \mathbb{R}^3 . Wie ist das Volumen?

$$V \approx \sum_{i=1}^n q(z_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b q(x) dx$$

4.3 Beispiel Kugelvolumen

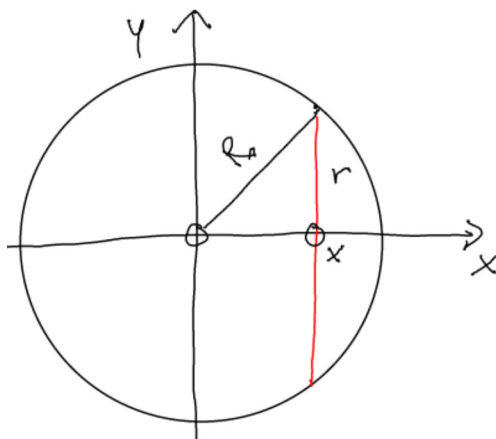


Abbildung 15: Berechnung des Kugelvolumens mit Hilfe der Streifensummen und des dazugehörigen Integrals.

Radius R

$$r^2 + x^2 = R^2$$

$$q(x) = r^2 \pi$$

$$q(x) = (R^2 - x^2) \pi$$

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R ((R^2 - x^2) \pi) dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \pi [R^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{x=0}^R = \pi [R^3 - \frac{1}{3} R^3] = \pi \frac{2}{3} R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

4.4 Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist Dichte, wenn:

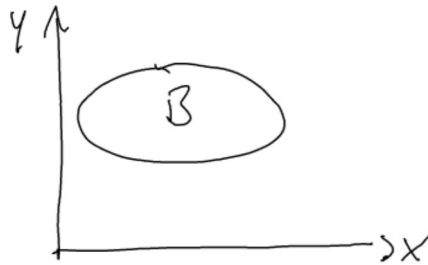


Abbildung 16: Dem Bereich B wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = 1$

Dem Bereich wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet: $P(B) = \int_B f(x, y)$

5 Höhere partielle Ableitungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$$

f_x partielle Ableitung nach x

$f_{x,y}$ erst nach x, dann nach y ableiten.

Die verschiedenen Ableitung der o.g. Funktion:

- $f_x = 2xy + \cos(xy)y$
- $f_y = x^2 + \cos(xy)x$
- $f_{x,x} = 2y - y \sin(xy)y$
- $f_{y,y} = -x \sin(xy)x$
- $f_{x,y} = 2x + [-x \sin(xy)y + \cos(xy)]$
- $f_{y,x} = 2x + [-y \sin(xy)x + \cos(xy)]$

Es fällt auf, dass hier gilt: $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.1 Beispiel zur Wiederholung

$$f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$$

$$f_x = 2xy + \cos(xy) \cdot y$$

$$f_{x,y} = 2x + [-\sin(xy)] \cdot y + \cos(xy)$$

$$f_y = x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

$$f_{y,x} = 2x + [-y \sin(xy) \cdot x + \cos(xy)]$$

Hier $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.2 Allgemein gilt

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Sind $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ stetig, so ist $f_{x,y} = f_{y,x}$

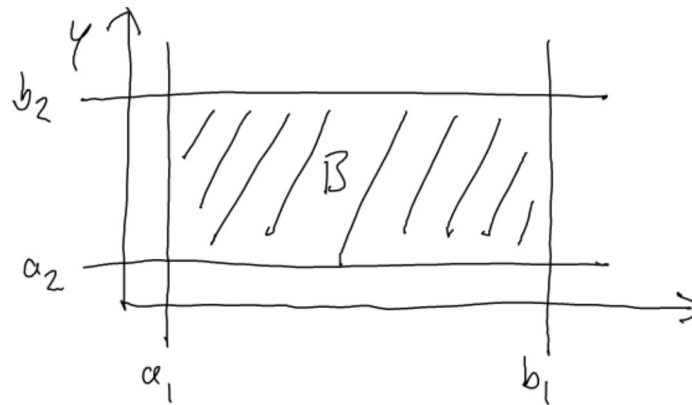


Abbildung 17: Beweis $f_{y,x} = f_{x,y}$

Beweis. Wir berechnen: $\int_B f_{x,y}$ und $\int_B f_{y,x}$

$$\begin{aligned} 1.) \int_B f_{x,y} &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f_{x,y} dy \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(x, y) \Big|_{y=a_2}^{y=b_2} dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(xb_2) - f_x(x, a_2) dx \\ &= f(xb_2) - f(xa_2) \Big|_{x=a_1}^{x=b_1} \\ &= [f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2)] - [f(a_1, b_2) - f(a_1, a_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \int_B f_{y,x} &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_{y,x} dx \right) dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(x, y) \Big|_{x=a_1}^{x=b_1} dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(b_1y) - f_y(a_1y) dy \\ &= f(b_1y) - f(a_1y) \Big|_{y=a_2}^{y=b_2} = [f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2)] - [f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2)] \\ &\Rightarrow \int_B f_{x,y} = \int_B f_{y,x} \text{ für jedes } B \\ &\Rightarrow f_{y,x} = f_{x,y} \text{ (vgl. Abb. 17)} \quad \square \end{aligned}$$

5.3 Test

$$f(x, y) = y \cdot e^x + \sin(xy^2)$$

$$f_x = y \cdot e^x + \cos(xy^2) \cdot y^2$$

$$f_{x,y} = e^x + [-\sin(xy^2) \cdot 2yx \cdot y^2 + \cos(xy^2)2y]$$

$$f_y = e^x + \cos(xy^2) \cdot 2yx$$

$$f_{y,x} = e^x + 2y[-\sin(xy^2) \cdot y^2x + \cos(xy^2)]$$

6 Extremwertaufgaben mit zwei Variablen

$f(x, y)$: Wir suchen ein relatives Maximum oder relatives Minimum. Eine notwendige Bedingung hierfür ist eine horizontale Tangentialebene, d.h. $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$.

Satz 6.1 (Rezept). f hat bei (x_0, y_0) einen relativen Extremwert, wenn:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $\Delta = f_{x,x}(x_0, y_0) \cdot f_{y,y}(x_0, y_0) - (f_{x,y}(x_0, y_0))^2 > 0$
 - $f_{x,x}(x_0, y_0) < 0$ relatives Maximum
 - $f_{x,x}(x_0, y_0) > 0$ relatives Minimum

Ist $\Delta < 0$, so haben wir einen Sattelpunkt.

Ist $\Delta < 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

6.1 Beispiel

$f(x, y) = xy - 27(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = xy - 27x^{-1} + 27y^{-1}$. Gibt es Extremwerte und wenn: Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

$$f_x = y + 27x^{-2}$$

$$f_y = x - 27y^{-2}$$

$$f_{xx} = -54x^{-3}$$

$$f_{yy} = 54y^{-3}$$

$$f_{xy} = 1$$

$$f_{yx} = 1$$

Kritische Punkte: $f_x = 0$ und $f_y = 0$

$$I : y + 27x^{-2} = 0$$

$$II : y - 27x^{-2} = 0 \Rightarrow x = 27y^{-2} \text{ in I}$$

$$I : y + 27(27y^{-2})^{-2} = 0$$

$$y + 27 \cdot 27^{-2}y^4 = 0$$

$$y + 27^{-1}y^4 = 0 \Rightarrow y \neq 0$$

$$1 + 27^{-1}y^3 = 0$$

$$y^3 = (-1)27 \Rightarrow y = -3$$

$$\text{in II: } x - 27(-3)^{-2} = 0$$

$$x - 27(\frac{1}{-3})^{-2} = 0$$

$$x - \frac{27}{9} = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Also } (x_0, y_0) = (3, -3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jetzt müssen wir das Delta } \Delta \text{ ausrechnen: } f_{x,x}(3, -3) \cdot f_{y,y}(3, -3) - (f_{x,y}(3, -3))^2 \\ = (-54 \cdot 3^{-3}) \cdot (54(-3)^{-3}) - 1 = (-\frac{54}{27})(-\frac{54}{27}) - 1 = (-2)(-2) - 1 = 3 > 0 \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir $f_{x,x}$ anschauen: $f_{x,x}(3, -3) = -2 < 0$
 \Rightarrow relatives Maximum bei $(3, -3)$

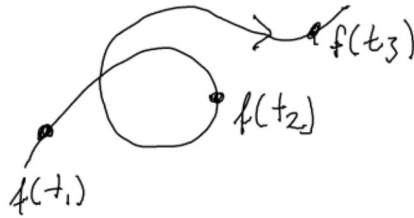


Abbildung 18: Die Bewegung eines Punktes im Raum

7 Abbildungen des Typs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, t als Parameter. Das stellt die Bewegung eines Punktes im Raum dar. Es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Kurve im \mathbb{R}^3 . Es wird nicht nur die Kurve gegeben, sondern wie ein Punkt die Kurve durchläuft (Abb. 18).

7.1 Beispiel

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t^3 \end{pmatrix}$
2. $f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$ t Winkel, R Radius Kreis

7.2 Ellipse

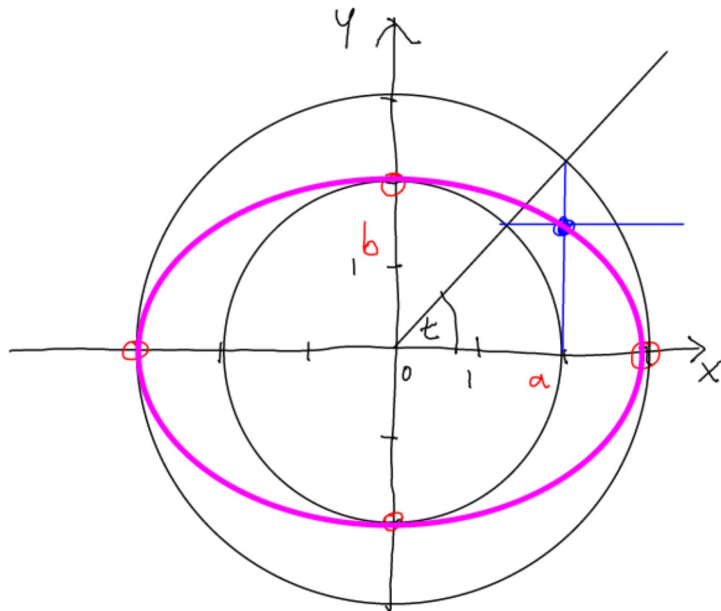


Abbildung 19: Eine Ellipse mit $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, Punktkoordinaten

Mit $f(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$, $a, b > 0$ (Halbachsen) wird eine Ellipse beschrieben (Abb. 19). In unserem Beispiel sind $a = 3$ cm und $b = 2$ cm.

7.3 Geschwindigkeitsvektor

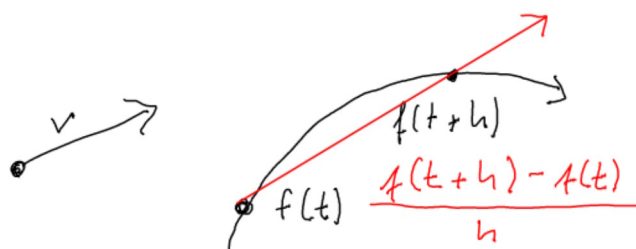


Abbildung 20: Geschwindigkeitsvektor links: Richtung, $|v|$ Betrag der Geschwindigkeit. Rechts: Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor

Wir berechnen den Geschwindigkeitsvektor [$t \hat{=}$ Zeit]. Der Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor berechnet sich durch $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, Test: $f(t) + h \cdot \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t+h)$. (Abb. 20)

Momentangeschwindigkeitsvektor $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \underbrace{=}_{\mathbb{R}^2} \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ mit $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$. Der Ableitungsvektor ist der Geschwindigkeitsvektor. Er ist auch Tangentenvektor an die Kurve.

7.4 Beispiele

$$1. \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Kreis } f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$R = 1 : f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} f'(1) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\text{Skalarprodukt: } \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0 \Rightarrow 90^\circ.$$

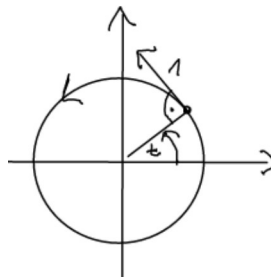


Abbildung 21: Geschwindigkeitsvektor im Kreis

$$\text{Ellipse } f(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

7.5 Der Beschleunigungsvektor

Durchschnittsbeschleunigung (Abb. 22) zwischen t und $t+h$: $\frac{v(t+h) - v(t)}{h}$

$$\text{Test: } v(t) + h \cdot \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v(t+h)$$

$$\text{Momentanbeschleunigung: } b(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t)$$

$$b(t) = f''(t)$$

7.6 Merke

1. Die erste Ableitung $f'(t)$ entspricht dem Geschwindigkeitsvektor $f'(t) = v(t)$.

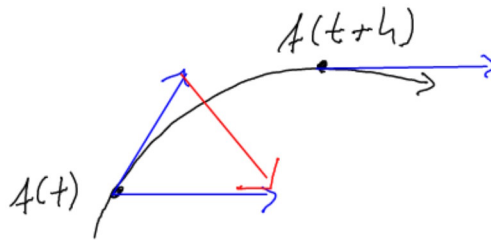


Abbildung 22: Der Beschleunigungsvektor

2. Die zweite Ableitung $f''(t)$ entspricht dem Beschleunigungsvektor $f''(t) = v'(t) = b(t)$.

7.7 Beispiele

1. $f(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, v(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6t \end{pmatrix}$

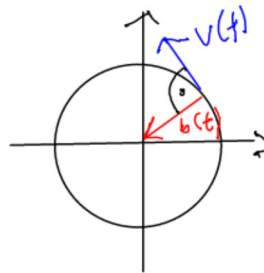


Abbildung 23: Beschleunigung im Kreis

2. **Kreis** Jetzt sehen wir uns die Beschleunigung im Kreis an (Abb. 23).

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$v(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, |v| = 1$$

$$b(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, |b| = 1$$

Zentrifuge: $R = 5$ m, 2 Umdrehungen pro Sekunde, $\varphi = 4\pi t = \varphi(t)$

$$f(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos(4\pi t) \\ 5 \sin(4\pi t) \end{pmatrix}$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -5 \cdot 4\pi \sin(4\pi t) \\ 5 \cdot 4\pi \cos(4\pi t) \end{pmatrix}$$

$$f''(t) = -80\pi^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(4\pi t) \\ \sin(4\pi t) \end{pmatrix}}_{\text{Länge 1}}$$

$$|f''(t)| = 80\pi^2 = 789 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ellipse $f(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \end{pmatrix}$
 $f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix} = v(\varphi)$
 $f''(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = b(\varphi)$

7.8 Linearisierung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t f'(t)$$

$$\text{z.B. } f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix}$$

$$f(t + \Delta t) \approx \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix}$$

Bei $t = 0$:

$$f(\Delta t) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta t = 0.1 : f(0.1) \approx \begin{pmatrix} 0 + 0.1 \\ 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 0.1 \\ \cos 0.1 \\ \sin 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.99 \\ 0.01 \end{pmatrix} \checkmark$$

7.9 Die Zykloide

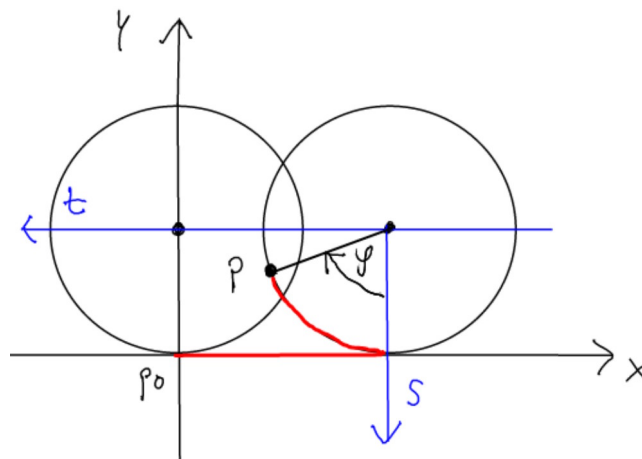


Abbildung 24: Ein Zykloid entsteht durch Abrollen eines Kreispunktes (rote Linie). Radius R , Parameter φ , t - s -Hilfskoordinatensystem (blau)

Ein Kreis rollt auf einer Geraden ab. Bahn des Punktes P . Im s - t -Hilfskoordinatensystem (vgl. Abb. 24): $s(\varphi) = R \cos \varphi$, $t(\varphi) = R \sin \varphi$, im x - y -System: $x(\varphi) = R\varphi - t = R\varphi - R \sin \varphi$, $y(\varphi) = R - s = R - R \cos \varphi$, also:

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi - R \sin \varphi \\ R - R \cos \varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi - \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (Zykloide)}$$

Eine Umdrehung in 2π Sekunden, Radgeschwindigkeit: $\frac{2R\pi}{2\pi} = R$

$$f'(\varphi) = R \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad f'(\pi) = R \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, |f'(\pi)| = 2R \Rightarrow \text{Doppelt so schnell wie Radgeschwindigkeit.}$$

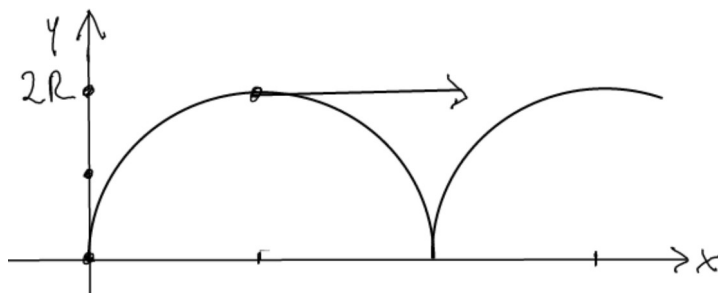


Abbildung 25: Die Bahn eines Zykloids

8 Bogenlänge einer Kurve

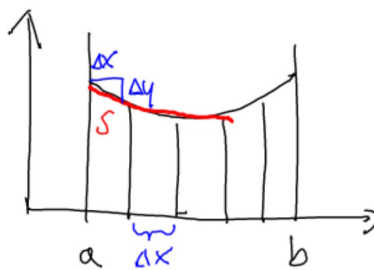


Abbildung 26: Wir wollen die Bogenlänge einer Kurve berechnen (s).

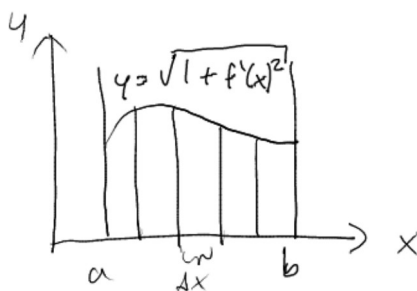


Abbildung 27: Die Bogenlänge für den Abschnitt a bis b.

$$\begin{aligned}
 y &= f(x), s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}, f'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
 s &\approx \sqrt{\Delta x^2 + f'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2} \approx \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \quad (\text{Abb. 26}) \\
 L_{a,b} &\approx \sum_{i=0}^{n-1} s_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (\text{Bogenlänge, vgl. Abb. 27})
 \end{aligned}$$

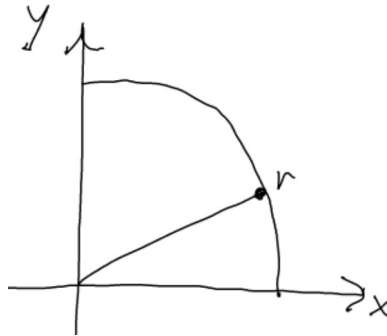


Abbildung 28: Beispiel Kreis

8.1 Beispiel Kreis

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}, f(x) = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L_{0,r} = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{Formelsammlung}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = r\frac{\pi}{2}$$

Formelsammlung

ganzer Kreis: $4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r$

8.2 Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

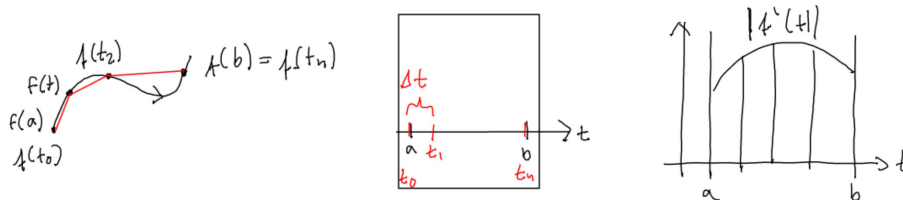


Abbildung 29: Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

$$L_{a,b} \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i)| \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f'(t)| \Delta t, \text{ also:}$$

$$L_{a,b} f(t) = \int_a^b |f'(t)| \Delta t \text{ (Integral über Betrag der Geschwindigkeit).}$$

8.3 Beispiel Schraubenlinie

$f(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, v \cdot \varphi)$, v ist der Vorschub. Die Schraubenlinie befindet sich auf dem Schraubzylinder. Wickelt man den Schraubzylinder entlang der roten Linie (Abb. 30) ab, so entsteht ein Rechteck (Abb. 31). $L^2 = (2R\pi)^2 + (v2\pi)^2 = 4R^2\pi^2 + 4v^2\pi^2 = 4\pi^2(R^2 + v^2) \Rightarrow L = 2\pi\sqrt{R^2 + v^2}$

8.4 Hausaufgabe

$$f(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, v \cdot \varphi), f'(\varphi) = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, v)$$

$$|f'(\varphi)| = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi + v^2} = \sqrt{R^2 + v^2}$$

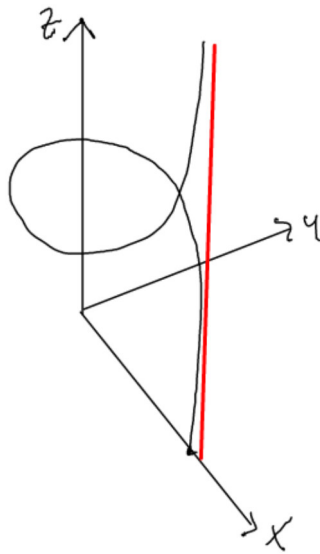


Abbildung 30: Eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 . Sie wird entlang der roten Linie abgewickelt

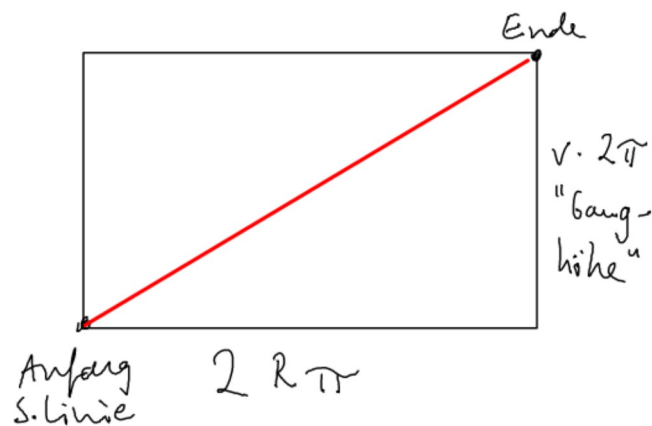


Abbildung 31: Durch das Abwickeln der Schraubenlinie entlang der roten Linie entsteht ein Rechteck. Die abgewickelte Schraubenlinie ist eine Gerade.

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + v^2} dt = \left[\sqrt{R^2 + v^2} t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{R^2 + v^2} 2\pi$$

8.5 Bogenlänge der Zykloide

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= R(\varphi - \sin \varphi, 1 - \cos \varphi), \quad f'(\varphi) = R(1 - \cos \varphi, \sin \varphi) \\
 |f'(\varphi)| &= R\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = R\sqrt{1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi} = R\sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \\
 &= 2R\sqrt{\frac{2 - 2 \cos \varphi}{4}} = 2R\sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Formelsammlung}} \quad 2R \sin \frac{\varphi}{2} \\
 \int_0^{2\pi} |f'(\varphi)| d\varphi &= \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \left[-4R \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = -4R(\cos \pi - \cos 0) = -4R(-1 - 1) \\
 &= 8R \text{ (Länge), Weg: } 2\pi R
 \end{aligned}$$

8.6 Die natürliche Parameterdarstellung

Definition 8.1. Eine Parameterdarstellung $k(t)$ heißt natürlich, wenn $|k'(t)| = 1, \forall t$ (konstante Geschwindigkeit 1).

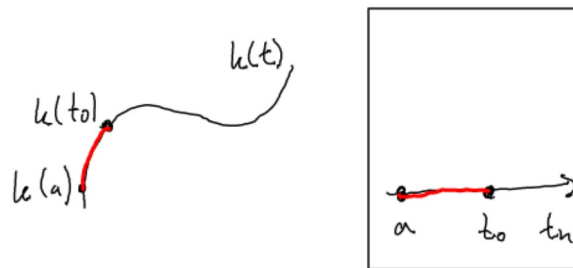


Abbildung 32: Parametrisierung nach der Bogenlänge. Eine Parameterdarstellung ist natürlich, wenn $L_{a,t} = t - a$

$$\text{Sei } k(t) \text{ natürlich: } L_{a,b} = \int_a^{t_0} |f'(t)| dt = \int_a^{t_0} 1 dt = [t]_a^{t_0} = \underline{t_0 - a}$$

8.7 Parametertransformation

Die Funktion $t(\theta)$ sei streng monoton wachsend (in Abb. 33 ist das so!) oder streng monoton fallend. Neue Parameterdarstellung der Kurve: $k(t(\theta)), \theta \in [c, d]$.

$t(\theta)$ streng monoton wachsend: Durchlaufsin bleibt (gestrichelten Linien in Abb. 33).

$t(\theta)$ streng monoton fallend: anderer Durchlaufsin.

8.8 Beispiel

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \sqrt{0, 2\pi} \\
 f(\theta) &= 2\theta + 1 \text{ (monoton steigend)} \\
 k(t(\theta)) &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta + 1) \\ \sin(2\theta + 1) \end{pmatrix} \\
 t(c) &= 0, 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \\
 t(d) &= 2\pi, 2d + 1 = 2\pi \Rightarrow d = \frac{2\pi - 1}{2}
 \end{aligned}$$

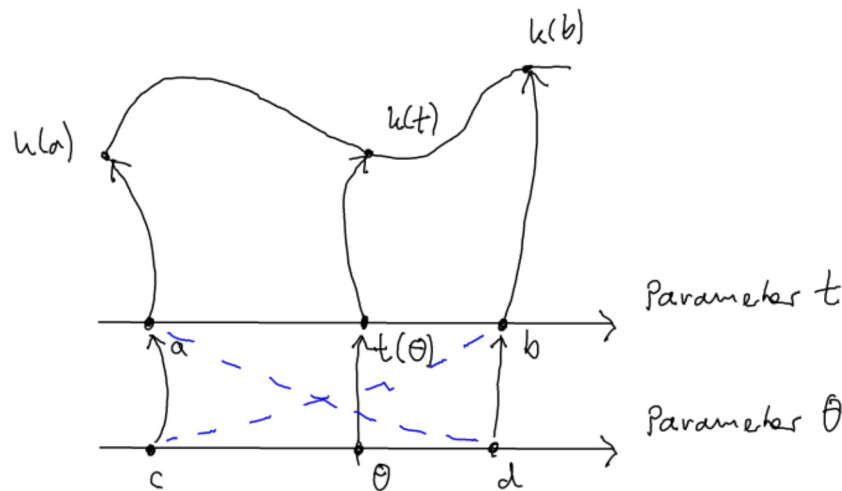


Abbildung 33: Parametertransformation

8.9 Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung

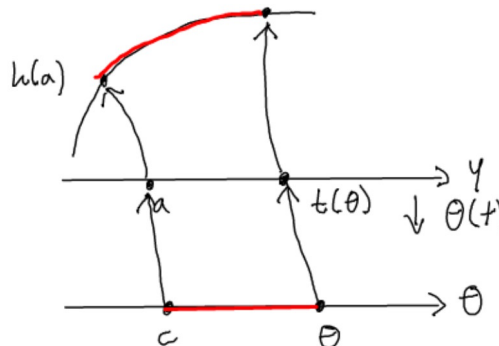


Abbildung 34: Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung. Die Bogenlänge soll so lang sein wie die Zeit (rote Linien).

Wir wollen eine Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung umwandeln (Abb. 34). $\theta(t) - c = \int_a^t |k'(s)| ds$. $t(\theta)$ ist die Umkehrfunktion von $\theta(t)$.

„Wir suchen das $t(\theta)$, haben aber nur $\theta(t)$.“

8.10 Beispiel Zykloide

Wir suchen die natürliche Parameterdarstellung der Zykloide. $R = 1, f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), a = 0 \leq t \leq b = \pi$ (halber Bogen bis 180°). Setze $c = 0 (d = 4), |f'(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}$ (Wir ersetzen im Folgenden t durch s).

$$\theta(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{s}{2} ds = \left[4 \cos \frac{s}{2} \right]_{s=0}^{s=t} = -4 \left(\cos \frac{t}{2} - \cos 0 \right) = -4 \cos \frac{t}{2} + 4$$

$\theta(t) = 4 - 4 \cos \frac{t}{2} = \theta$ Nun suchen wir die Umkehrfunktion $\rightarrow t(\theta)$ nach t

$$\begin{aligned}
&\text{auflösen. } -4 \cos \frac{t}{2} = \theta - 4 \\
&\cos \frac{t}{2} = 1 - \frac{\theta}{4} \\
&\frac{t}{2} = \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \\
&t = 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right), 0 \leq \theta \leq 4 \\
&t(\theta) = 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \\
&f(t(\theta)) = \begin{pmatrix} 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) - \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \right) \\ 1 - \cos \left[2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.11 Die Krümmung einer Kurve

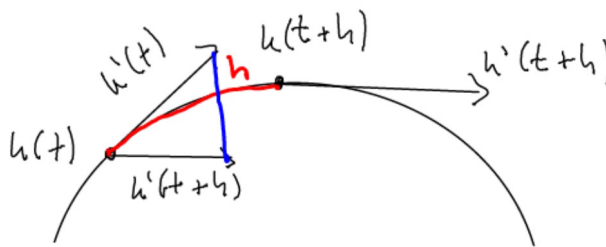


Abbildung 35: Die Krümmung einer Kurve

Die Parameterdarstellung $k(t)$ sei **natürlich**.

Krümmung = $\frac{\text{Winkeländerung des Geschwindigkeitsvektors}}{\text{Bogenlänge}}$

$$\text{Krümmung} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k'(t+h) - k'(t)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h} \right|$$

$$\text{Krümmungsvektor (ohne Betrag): } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h} = k''(t)$$

Krümmung: $|k''(t)|$

Der Krümmungsvektor $k''(t)$ steht senkrecht auf $k'(t)$.

Annäherung durch Kreis Wir nähern die Kurve k im Punkt $k(t)$ durch einen Kreis an (Abb. 35). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h}$ mit $\alpha = \frac{h}{R}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k'(t+h) - k'(t)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha \cdot R} = \frac{1}{R}$. Der Betrag der Krümmung ist somit $\frac{1}{R}$. Also: Der Krümmungsvektor zeigt in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts. Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{\text{Krümmung}}$. Die Ebene des Krümmungskreises wird aufgespannt durch den Geschwindigkeitsvektor und den Krümmungsvektor.

„Zähler \cong blaue Linie in Abb. 35“

8.12 Beispiel Krümmung der Schraublinie

$f(t) = (R \cos t, R \sin t, v \cdot t)$. Wir brauchen die natürliche Parameterdarstellung und müssen daher eine Transformation machen: $\theta(t) - c = \int_a^t |f'(s)| ds$ mit $a = 0, c = 0$. $\theta(t) = \int_0^t |(-R \sin s, R \cos s, v)| ds = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 s + R^2 \cos^2 s + v^2} ds$
 $= \int_0^t \sqrt{R^2 + v^2} ds = [\sqrt{R^2 + v^2} s]_0^t = t \sqrt{R^2 + v^2} = \theta$

Auflösen nach t : $t = \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}$

$$\Rightarrow g(\theta) = \left(R \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, R \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, v \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)$$

$$g'(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)$$

$$g''(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, -\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, 0 \right)$$

$$= -\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \underbrace{\left(\cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)}_{\text{Länge 1}}$$

$$|g''(\theta)| = \frac{R}{R^2 + v^2} \text{ Konstante Krümmung. } R \text{ Radius Schraubzylinder. Krümmungskreisradius} \\ = \frac{1}{\text{Krümmung}} = \frac{R^2 + v^2}{R} = R + \frac{v^2}{R}$$

8.13 Krümmung einer ebenen Kurve, die als Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben ist

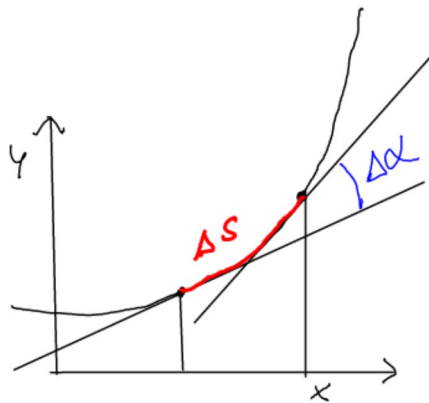


Abbildung 36: $\Delta\alpha$ ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten. s ist die Bogenlänge.

Krümmung von f bei $x \approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$,
 $\alpha_1(x) = \arctan f'(x)$, $\alpha_2(s) = \alpha_1(x(s))$

$$K(x) = \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{d\alpha_1}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{1}{1 + f'(x)^2} \cdot f''(x)$$

Ableitung von x nach s , $x(s)$ ist die Umkehrfunktion von $s(x)$. Dafür gibt es eine

$$\text{Formel: } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

$$\text{Also: } K(x) = \frac{1}{1 + f'(x)^2} \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

„Kettenregel!“

„Ableitung von $\arctan x$ ist $\frac{1}{1+x^2}$ “

Formel für die Krümmung bei x $K(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$

8.14 Ein einfaches Beispiel

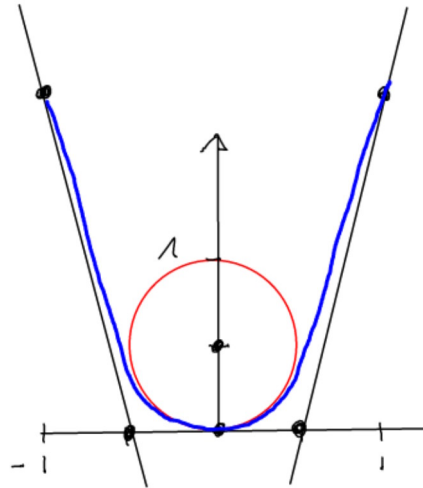


Abbildung 37: Beispiel Krümmungskreis mit dessen Hilfe die Funktion angenähert werden kann. Der Kreisradius beträgt $\frac{1}{2}$ und $f'(1) = 2$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 \Rightarrow K(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}^3}$
 Die Krümmung im Scheitel, also bei 0: $K(0) = \frac{2}{1} = 2$
 Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{\text{Krümmung}}$, also $\frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 37)

8.15 Krümmung einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung

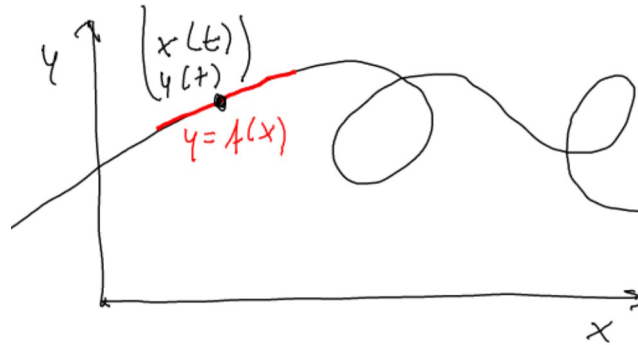


Abbildung 38: Krümmung einer ebenen Kurve

Steigung an der Stelle $x(t), y(t)$: $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = f'(t) = \frac{df}{dx}(x(t))$ (Abb. 38)

Beide Seiten nach t ableiten: $\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2} = \frac{df}{dx \cdot dx} \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow f''(x) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}$

Krümmung beim Parameterwert t $K(t) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3 \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}^3}$

Krümmung bei t $K(t) = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\left(\dot{x}\sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\right)^3}$

8.16 Beispiel Ellipse

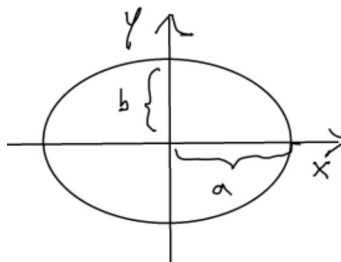


Abbildung 39: So kann eine Ellipse ausschauen ;-)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -a \sin t, \ddot{x} = -a \cos t$$

$$\dot{y} = b \cos t, \ddot{y} = -b \sin t$$

$$K(t) = \frac{b \sin(t) a \sin(t) + b \cos(t) a \cos(t)}{\left(-a \sin t \sqrt{1 + \frac{b \cos^2 t}{a \sin^2 t}}\right)^3} = \frac{ab}{\left(-a \sin t \sqrt{1 + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t}}\right)^3} = \frac{ab}{\left(\pm 1 \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\right)^3}$$

Krümmung an den Scheiteln ($0^\circ, 90^\circ$) $t = 0^\circ : K(0) = \frac{ab}{\sqrt{b^2}^3} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$

\Rightarrow Krümmungskreisradius = $\frac{b^2}{a}$

$t = 90^\circ : K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2}^3} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2} \Rightarrow$ Krümmungskreisradius = $\frac{a^2}{b}$

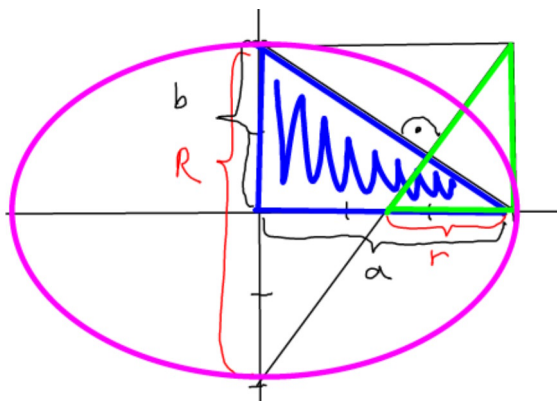


Abbildung 40: Konstruktion einer Ellipse mit $a = 3, b = 2$ mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken. R und r sind die Krümmungskreismittepunkte.

Wir suchen nun ähnliche Dreiecke (Abb. 40), bei denen die Seiten Senkrecht zueinander sind. $\frac{b}{a} = \frac{a}{R} \Rightarrow bR = a^2 \Rightarrow R = \frac{a^2}{b}$
 $\frac{b}{a} = \frac{r}{b} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$

9 Kurven in Polarkoordinaten

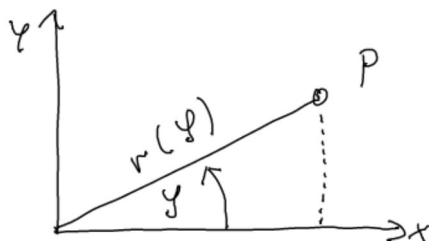


Abbildung 41: Kurven in Polarkoordinaten umrechnen. Gegeben $r(\varphi)$

Gegeben ist $r(\varphi) \Rightarrow$ übliche Parameterdarstellung: $x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$

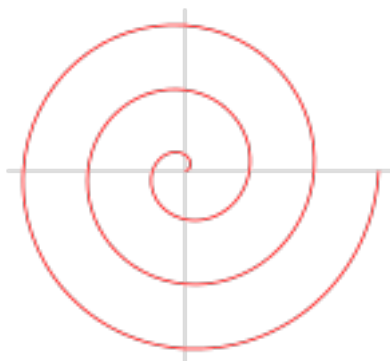


Abbildung 42: Beispiel Archimedische Spirale (Quelle: Wikipedia)

9.1 Beispiel Archimedische Spirale

$r(\varphi) = a \cdot \varphi, a > 0$ $x(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \cos \varphi$, $y(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \sin \varphi$, Tangentenvektor:
 $x'(\varphi) = a(1 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)$, $y'(\varphi) = a(1 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$.

Bei $\varphi = 0^\circ$: $(x'(0), y'(0)) = a(1, 0)$

Bei $\varphi = 2\pi$: $a(\cos 2\pi - 2\pi \sin 2\pi, \sin 2\pi + 2\pi \cos 2\pi) = a(1, 2\pi)$

9.2 Sektorflächeninhalt

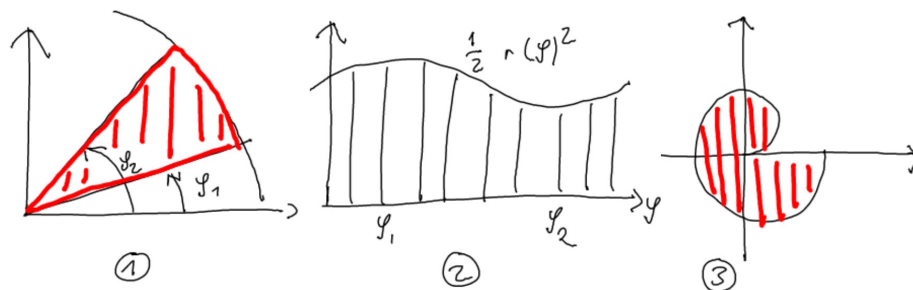


Abbildung 43: Sektorflächeninhalt: Annäherung durch Kreissegment (1), durch eine Funktion (2) und durch die Archimedische Spirale (3).

Annäherung durch Kreissegmente: $\sum_{i=1}^n \frac{r(\varphi_i)^2 \pi}{2\pi} \Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r(\varphi_i)^2 \Delta\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Archimedische Spirale: 2π

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \left[\frac{a^2}{2} \frac{1}{3} \varphi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 \text{ mit } a = 1: \frac{4}{3} \pi^3 = 41.3$$

9.3 Bogenlänge in Polarkoordinaten

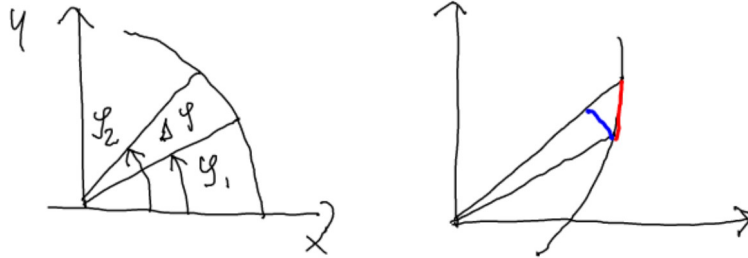


Abbildung 44: Bogenlänge in Polarkoordinaten

$\sum_{i=1}^n \frac{2r(\varphi_i)\pi}{2\pi} \cdot \Delta\varphi, \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)d\varphi$ ist **falsch!**

Formel für die Bogenlänge $\int_{t=a}^{t=b} |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$

Polarkoordinaten: $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$ $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = \dots \\ &= r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \Rightarrow \text{Bogenlänge} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

9.4 Beispiel Logarithmische Spirale

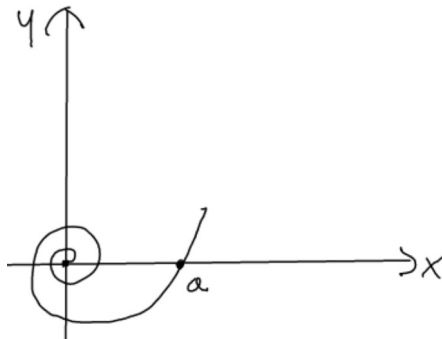


Abbildung 45: Logarithmische Spirale

Wir berechnen die Logarithmische Spirale (Abb. 45): $r(\varphi) = a \cdot e^{b\varphi}$, $a, b > 0$
 $r'(\varphi) = abe^{b\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 b^2 e^{2b\varphi} + a^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ae^{b\varphi} \sqrt{b^2 + 1} d\varphi = a\sqrt{b^2 + 1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{b\varphi} d\varphi$
 $= a\sqrt{b^2 + 1} \left[\frac{1}{b} e^{b\varphi} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} (e^{b\varphi_2} - e^{b\varphi_1})$

$$\text{Berechne: } \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \int_{\varphi}^0 \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} (\underbrace{e^{b \cdot 0}}_1 - \underbrace{e^{b\varphi}}_0) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} \Rightarrow$$

Strecke ist endlich z.B. $a = b = 1 \Rightarrow \text{Länge} = \sqrt{2}$

„Windet sich unendlich am Nullpunkt, aber die Strecke ist dennoch endlich.“

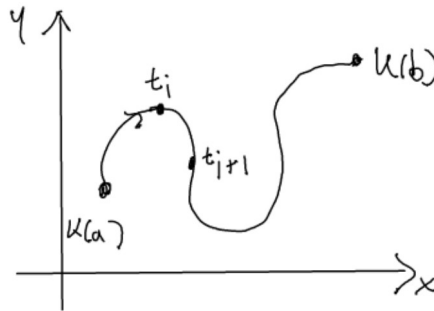


Abbildung 46: Linienintegral

9.5 Linienintegrale

9.5.1 1. Art:

Gegeben ist eine ebene Kurve (Abb. 46) in der xy-Ebene durch Parameterdarstellung $K(t)$ und die Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht wird der Inhalt der abgewickelten Fläche.

$$\sum_{i=1}^n F(K(t_i)) \cdot |K'(t_i)| \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(K(t)) \cdot |K'(t)| dt = \int_a^b F(K_1(t), K_2(t)) \cdot \sqrt{K_1'(t)^2 + K_2'(t)^2} dt$$

9.6 Beispiel

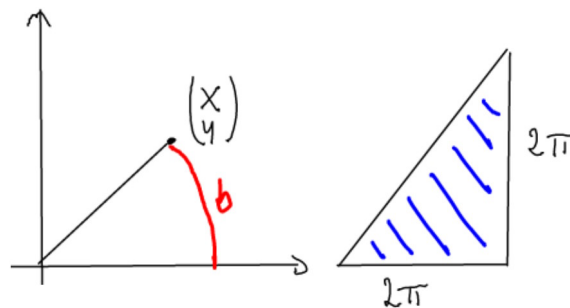


Abbildung 47: $F(x, y) =$ Länge des Bogens b im Einheitskreis und die abgewinkelte Fläche mit $F = 2\pi^2$ (rechts)

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ (Einheitskreis)}$$

$$\int_0^{2\pi} F(K(t)) |K'(t)| dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot |-\sin t, \cos t| dt = \int_0^{2\pi} t \cdot 1 dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} 4\pi^2 = 2\pi^2 \text{ (vgl. Abb. 47)}$$

9.7 Beispiel

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

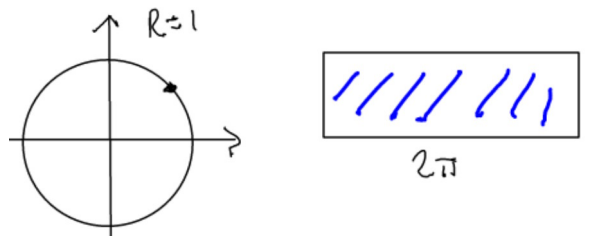


Abbildung 48: Beispiel und die abgewinkelte Fläche (rechts)

$$\int_0^{2\pi} F(K(t)) \cdot |K'(t)| dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot |(-\sin t, \cos t)| dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cdot 1 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \text{ (vgl. Abb. 48)}$$

9.7.1 2. Art Arbeitsintegral (in der Ebene)

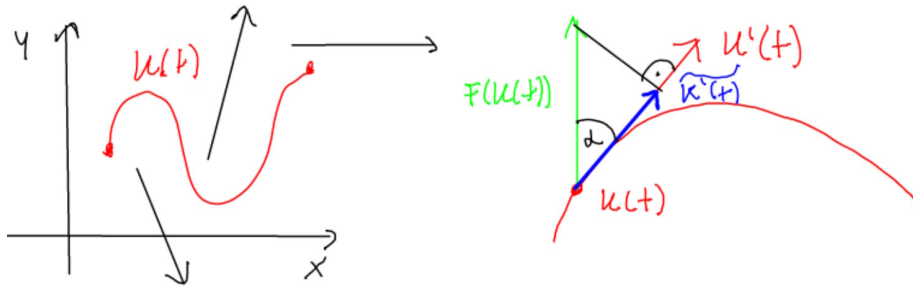


Abbildung 49: Arbeitsintegral und rechts ein Kraftvektor

Gegeben ist eine Kurve $K(t)$, ein Vektorfeld $F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$ und Kraftvektoren (Abb. 49). Arbeit ist Kraft mal Weg.

$$\text{Arbeit} \approx \sum_{i=1}^n |\tilde{K}'(t)| \cdot |K'(t)| \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n |F(K(t_i))| \cdot \cos \alpha \cdot |K'(t_i)| \cdot \Delta t \text{ mit}$$

$$\cos \alpha = \frac{F(K(t_i)) \cdot K'(t_i)}{|F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)|} = \sum_{i=1}^n |F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)| \cdot \frac{F(K(t_i)) \cdot K'(t_i)}{|F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)|} \cdot \Delta t =$$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{F(K(t_i)) \cdot K'(t_i)}_{\text{Skalarprodukt}} \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(K(t)) \cdot K'(t) dt \text{ (Arbeitsintegral)}$$

„NR: $|\tilde{K}'(t)|$
 $= |F(K(t))| \cos \alpha$
 „Wir rechnen mit Vorzeichen“

9.8 Beispiel Arbeitsintegral

Vektorfeld $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$, Kurve $K(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ von $t = 0$ bis $t = 1$ (Abb. 50).

$$K'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(K(t)) = F\left(\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 F(K(t)) \cdot K'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 8t^3 + 2t^3 dt = \int_0^1 10t^3 dt$$

$$= \left[10 \cdot \frac{1}{4} t^4\right]_0^1 = 2.5$$

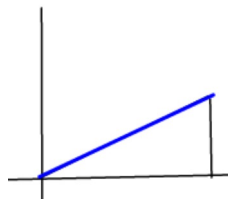


Abbildung 50: Arbeitsintegral: heir Gerade

9.9 Beispiel

Wir rechnen im \mathbb{R}^3 mit dem Vektorfeld $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Kurve

$K(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)$ (Schraubenlinie)

$$\int_0^{2\pi} F(K(\varphi)) \cdot K'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -1 d\varphi = -2\pi$$

„Bei einer Umdrehung geht es 2π nach oben“

10 Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

10.1 Linearisierung

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}, \frac{\delta f_1}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}, \frac{\delta f_m}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

„Linearisierung mittels partieller Ableitung“

„Die mittlere Matrix nennen wir **Ableitungsmatrix**, hier: Ableitung von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ “

10.2 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2^2 \\ x_2 \cdot x_3 \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitungsmatrix: } \begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Linearisierung: } f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} \approx f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

10.3 Kettenregel

$$(g \circ f)(x + \Delta x) = g(f(x + \Delta x)) \approx g(f(x) + f'(x) \cdot \Delta x) \approx g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot [f'(x) \cdot \Delta x] = g(f(x)) + \underbrace{[g'(f(x)) \cdot f'(x)]}_{\text{Die Ableitungsmatrix von } g \circ f} \cdot \Delta x$$

Kettenregel: $(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{Matrix}} \underbrace{\cdot}_{\text{Matrizenmultiplikation}} \underbrace{f'(x)}_{\text{Matrix}}$

10.4 Beispiel

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Direkt: } (g \circ f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ 3x_1^3x_2 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit der Kettenregel: } f' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix}, \quad g' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_2, 3x_1 \end{pmatrix}$$

$$g'(f(x)) = g' \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 3x_1^2x_2 + 6x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$$

10.5 Hausaufgabe

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^y$$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

10.6 Beispiel

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x^y$$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

1) direkt $(g \circ f)(x) = g \left(\begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} \right) = x^{\cos x} = h(x)$
 $h(x) = e^{\ln x \cdot \cos x}, h'(x) = e^{\ln x \cdot \cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right) = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right)$

2) mit der Kettenregel $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix}$
 $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^y \Rightarrow g' \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (y \cdot x^{y-1}, x^y \cdot \ln x)$
 $g'(f(x)) = g' \left(\begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} \right) = (\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x)$
 $g'(f(x)) \cdot f'(x) = (\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix} = \cos x \cdot x^{(\cos x)-1} - x^{\cos x} \ln x \sin x = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right)$

Aus der Formelsammlung:
 $x^n \rightarrow$
 $nx^{n-1}, a^y \rightarrow$
 $a^y \cdot \ln a$

11 Parameterdarstellung von Flächen

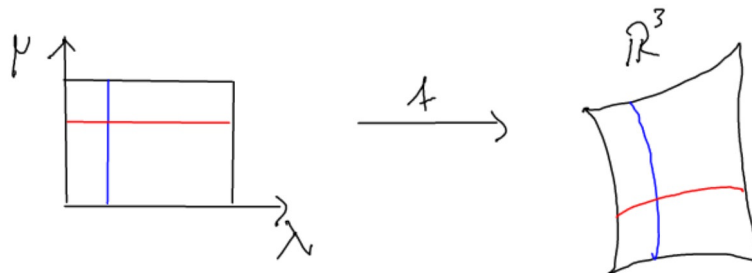


Abbildung 51: Das rote ist die λ -Parameterlinie (Immer die Variable), das blaue die μ -Parameterlinie

$$f: F \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(\lambda, \mu) \\ f_2(\lambda, \mu) \\ f_3(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$$

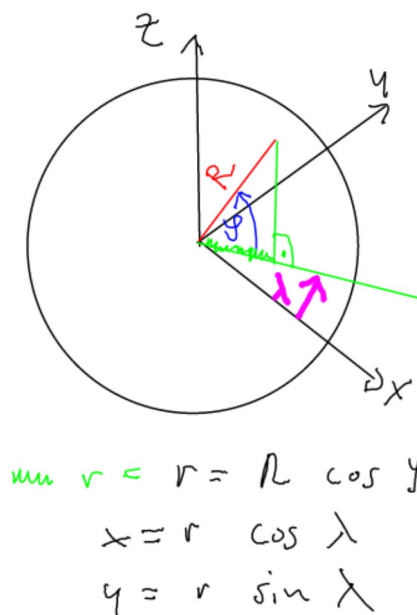


Abbildung 52: Beispiel Erdkugel: Erdachse: $z = R \sin \varphi$, Breite: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, Länge: $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

11.1 Beispiel

Parameterdarstellung: Wir betrachten die Erdkugel um 0 mit Radius R .

$$z = R \cos \varphi$$

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

λ -Parameterlinie ist der Breitenkreis, φ -Parameterlinie der Längenhalkreis.

11.2 Parameterdarstellung des Drehellipsoids

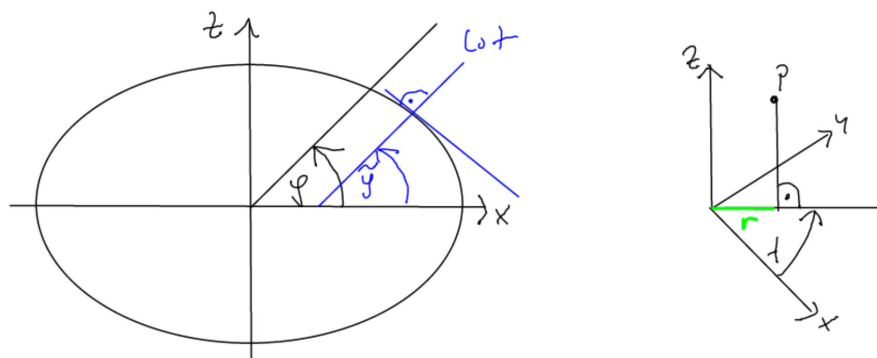


Abbildung 53: Parameterdarstellung des Drehellipsoids: $x = a \cos \varphi$, $z = b \sin \varphi$

Wir lassen eine Ellipse um ihre Nebenachse rotieren (Abb. 53).

$$r = a \cos \varphi$$

$$x = r \cos \lambda$$

$$y = r \sin \lambda$$

\Rightarrow Parameterdarstellung

$$x = a \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = a \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = b \sin \varphi$$

„Wir konstruieren
die Ellipse wie in
Abb. 40“

φ -Parameterlinie: Längenhalbellipse, Länge λ

λ -Parameterlinie: Breitenkreis, die geographische Breite ist nicht φ sondern $\tilde{\varphi}$.

12 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen

12.1 Kurven in \mathbb{R}^2

$f(x, y) = 0$ Kreis um den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit Radius R .

$$\text{Distanz } d \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^2 = R^2$$

$$\left| \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right|^2 = R^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Gerade: $ax + by + c = 0$

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit a, b Halbachsen.

Sonderfall Kreis: $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \checkmark$

12.2 Lot auf eine Kurve

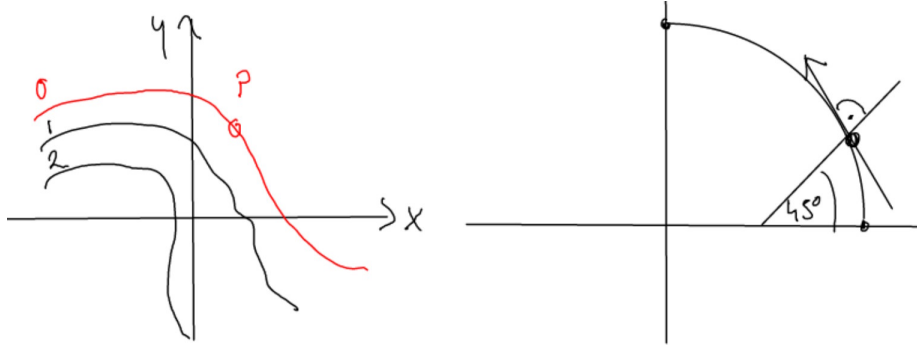


Abbildung 54: Höhenlinienplan: 0-er (rot)

$f(x, y) = 0$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases}$ ist ein „Funktionsgebirge“. Die Kurve $f(x, y) = 0$ ist die 0-er Höhenlinie (Abb. 54). Der Ableitungsvektor in P (Gradient) zeigt in Richtung des steilsten Anstieg. Das ist senkrecht zur Höhenlinie. Das Lot ist also der Gradient. Lot im Punkt (x, y) ist $\left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right)$ (rechts in Abb. 54).

12.3 Ellipse

$$f(x, y) = 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \text{grad } f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

Lot mit 45° : $\frac{2x}{a^2} = \frac{2y}{b^2} \Rightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} = \frac{y^2}{b^4}$ (setzen wir unten ein)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow y^2 \frac{a^2 + b^2}{b^4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}$$

$$\text{z.B.: } a = 3, b = 2, y^2 = \frac{16}{9+4} = \frac{16}{13} \Rightarrow y = 1.1094$$

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^2} \cdot y = \frac{9}{4} \cdot 1.1094 = 2.496$$

„grad ist der Gradient.“

12.3.1 andere Berechnungsmethode

Parameterdarstellung: $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$

Tangentenvektor: $(-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$

Lotvektor: $(b \cos \varphi, a \sin \varphi)$

$$45^\circ: b \cos \varphi = a \sin \varphi \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\text{Für } b = 2, a = 3: \frac{2}{3} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = 33,69^\circ$$

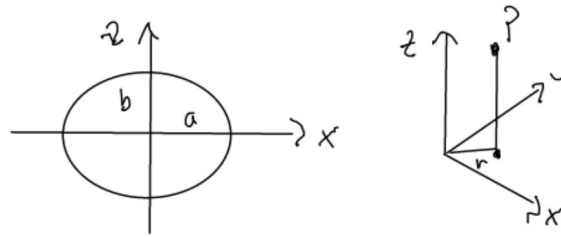
$$\text{einsetzen: } (a \cos \varphi, b \sin \varphi) = (3 \cos 33.69^\circ, 2 \sin 33.69^\circ) = (2.496, 1.109)$$

12.4 Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3

$f(x, y, z) = 0$. Kugel um 0 mit dem Radius R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Drehellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (Abb. 55)

Rotation um Z-Achse: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

Abbildung 55: Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3

Lot in einem Flächenpunkt: $F : f(x, y, z) = 0, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Fläche F ist die „0-er Niveaulfläche“.

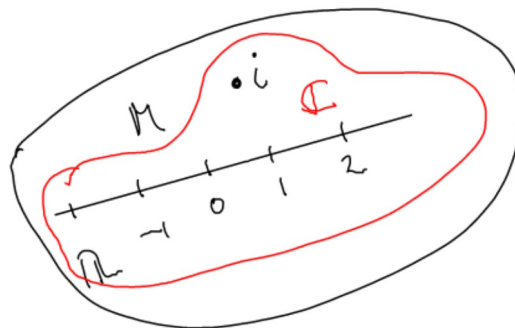
Bewegt man sich im Flächenpunkt P in Richtung $\text{grad}(f)$, so wächst die Funktion am stärksten. Der Gradient in P ist also das Lot auf die Fläche in P (Abb. 55).

12.5 Beispiel

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \text{grad}(f) = (2x, 2y, 2z)$

Drehellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \text{grad}(f) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{b^2}\right)$

13 Die komplexen Zahlen

Abbildung 56: Menge der komplexen Zahlen. Menge M und Menge \mathbb{C} (rot)

Wir starten mit den reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $(M, +, \cdot)$ sei eine Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (vgl. Abb. 56). In $(M, +, \cdot)$ sollen die üblichen Rechenregeln gelten. Das heißt, die Körperaxiome sollen gelten:

„Einschub“

- $(M, +)$ kommutative Gruppe, 0 neutral
- (M^*, \cdot) kommutative Gruppe, 1 neutral
- das Distributivgesetz muss gelten: $a(b + c) = ab + ac$

Wir nehmen an, es gibt ein $i \in M$ mit $i^2 = -1$.

Definition 13.1. Wir definieren.: $\mathbb{C} = \{x \in M : x = a + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$
 $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac + adi + bci - bd) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$
 $\Rightarrow \mathbb{C}$ ist abgeschlossen bezüglich $+$ und \cdot , $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Darstellung $a + bi$ ist
 eindeutig.

„Erinnerung: $i^2 = -1$ “

Beweis. $a + bi = c + di$
 $a - c = di - bi = (d - b)i$
 angenommen: $d - b \neq 0 \Rightarrow i = \frac{a-c}{d-b}$ (!)
 Also: $d = b$ und $a = c$

□

„(!) Da schlägt der Blitz ein.“

Definition 13.2. Wir definieren: $\mathbb{C} = \{x \in M : x = a + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$
 $+: (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
 $\cdot: (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Die reellen Zahlen sind in \mathbb{C} eingebettet. $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$
 $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
 $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0 + 0)$

In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gelten die Körperaxiome:

- assoziativ: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- kommutativ: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- distributiv: $a(b + c) = ab + ac$

$(0, 0)$ ist neutrales Element bezüglich der Addition, $(1, 0)$ bezüglich der Multiplikation. Inverses Element bezüglich der Addition: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.
 Inverses Element bezüglich der Multiplikation: $(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (1, 0)$.
 Schreibweisen: $x + (-y) = x - y$ und $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$

Definition 13.3. $i = (0, 1)$

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \hat{=} -1$$

Die komplexe Zahl $(a, 0)$ bezeichnen wir auch als a . $(a, b) = (a, 0) + \underbrace{(b, 0) \cdot (0, 1)}_{(0, b)}$

$$= a + bi$$

$(a, b) = a + bi$ Darstellung ist eindeutig.

13.1 Zahlenebene

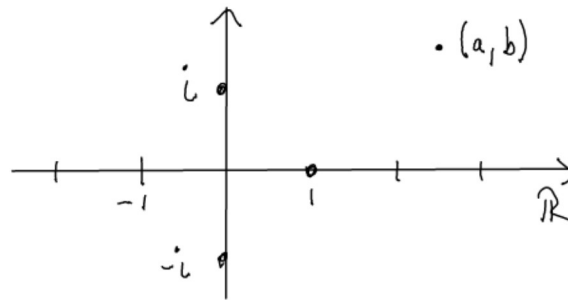


Abbildung 57: Zahlenebene: Addition \Leftrightarrow Vektoraddition und $(-i)^2 = -1 \Leftrightarrow (0, -1)(0, -1) = (-1, 0)$

Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition (Abb. 57). Spiegeln an der x-Achse (**konjugieren**): $(a, b) \rightarrow (a, -b) = (a, b)$ und $a + bi \rightarrow a - bi$. Es gilt also: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

*** ist ein Automorphismus, d.h.

1. *** ist bijektiv

$$2. \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$3. \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\begin{aligned} \text{von 3.) } \overline{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)} &= \overline{x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1} = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \overline{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)} &= (x_1, -x_2)(y_1, -y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad \square$$

Damit gilt z.B.:

$$\overline{x + z^2 y + y^4} = \bar{x} + \bar{z}^2 \bar{y} + \bar{y}^4$$

Polynom mit reellen Koeffizienten: $ax^4 + bx^4 + cx + d$ x Variable, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ist x_0 eine Nullstelle, dann auch \bar{x}_0 : $\overline{ax_0^4 + bx_0^4 + cx_0 + d} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{ax_0^4 + bx_0^4 + cx_0 + d} = 0$

$$1. z + \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$2. z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Beweis. (1) } \overline{z + \bar{z}} = \bar{z} + \bar{\bar{z}} = \bar{z} + z$$

$$(2) \overline{z \cdot \bar{z}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{z}} = \bar{z} \cdot z \quad \square$$

*** ist der Überstrich (vgl. Ziffer 2). Es lässt sich leider derzeit nicht anders darstellen.

„ $(a, b) = z, a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ “

Es gilt: (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(2) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (\bar{z} - z)$

„ $z = z_1 + iz_2$ “

Beweis. (2) $\frac{1}{2} \cdot i \cdot (z_1 - iz_2 - z_1 - iz_2) = \frac{1}{2} \cdot i(-2iz_2) = (-1)(-1)z_2 = z_2 \quad \square$

13.2 sin, cos, e-Funktion im Komplexen

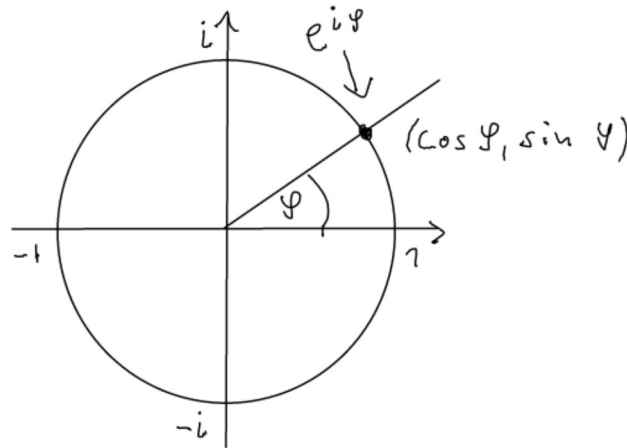


Abbildung 58: sin, cos, e-Funktion im Komplexen am Beispiel des Einheitskreises.

Reihendarstellung: (vgl. Abb. 58) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

„Setze einfach $x \in \mathbb{C}$ “

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln z.B. $e^{x+y} = e^x e^y$.

$$(1) \varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots$$

$$(2) \cos \varphi + i \sin \varphi = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + \left(i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \left(1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots\right)$$

Es gilt (1) = (2), also: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (Eulersche Formel).

$(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ Geometrische Interpretation von + und \cdot (vgl. auch Abb. 59).

+ : Vektoraddition

$\because z \cdot s = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1+i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, also Radien multiplizieren und Winkel addieren.

$|z| = |(z_1, z_2)| = r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist eine Drehstreckung.

13.3 Die n-ten Wurzeln von 1

Für welche komplexen Zahlen gilt $z^n = 1$? Es muss gelten: $|z| = 1$, z auf Einheitskreis. $(e^{i\varphi})^n = 1 \Rightarrow e^{i\varphi n} = 1$

φn Vielfaches von $2\pi \Leftrightarrow \varphi n = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \varphi = k \cdot \frac{2\pi}{n}$

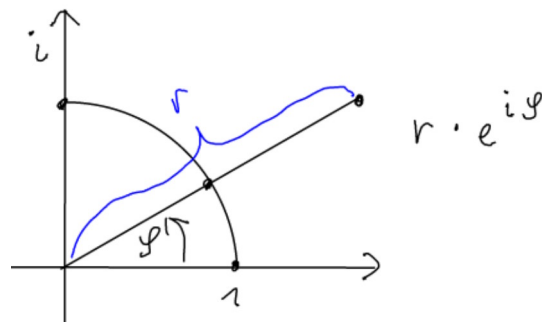


Abbildung 59: Geometrische Interpretation

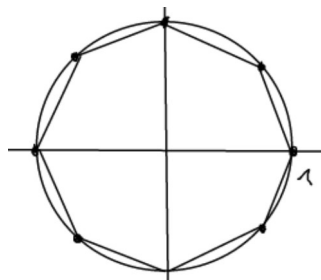


Abbildung 60: Die n-ten Wurzeln von 1 am Beispiel eines Einheitskreises und einem 8-Eck.

$1 \cdot \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ sind alle. Das sind die passenden Winkel. Regelmäßiges 8-Eck auf dem Einheitskreis (Abb. 60).

Allgemein 1 hat genau n n -te Wurzeln, ein regelmäßiges n -Eck auf dem Einheitskreis. Jede komplexe Zahl z hat genau n -te Wurzeln (regelmäßiges n -Eck auf Kreis um 0 mit Radius R , verdreht).

13.4 Bemerkung

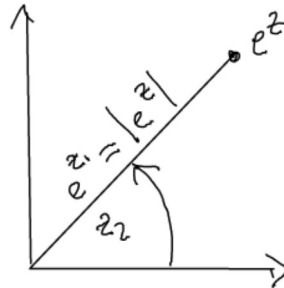


Abbildung 61: Bemerkung: e^z ist periodisch mit Periode 2π

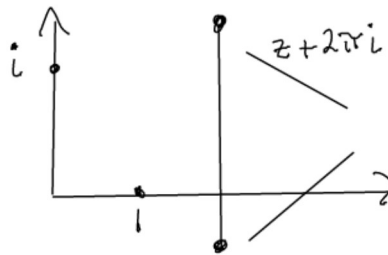


Abbildung 62: Bemerkung 2: $f(z) = e^z$, gleicher Funktionswert

$$z \in \mathbb{C}, z = z_1 + iz_2$$

$$e^z = e^{z_1 + iz_2} = \underbrace{e^{z_1}}_{\text{reelle Zahl (Radius)}} \cdot \underbrace{e^{iz_2}}_{\cos z_2 + i \sin z_2, \text{Einheitskreis zum Winkel } z_2} \quad (\text{Abb. 61 und 62})$$

$$\underline{e^{z_1 + iz_2 + 2\pi i}} = e^{z_1 + i(z_2 + 2\pi)} = e^{z_1} \cdot e^{i(z_2 + 2\pi)} = e^{z_1} \cdot e^{iz_2} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1} = e^{z_1 + iz_2} \quad (\text{Abb. ??})$$

13.5 Polynome in \mathbb{C}

Sei $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ Koeffizienten und x Variable.

In \mathbb{C} hat jedes Polynom von Grad \geq eine Nullstelle. x_0 ist Nullstelle von $P(x)$.

$\underbrace{P(x)}_{\text{Grad } n} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Grad } n-1} \cdot (x - x_0) \Rightarrow$ In \mathbb{C} zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren:

$$P(x) = c \cdot \underbrace{(x - c_1)}_{\text{Grad } 1} \cdot \underbrace{(x - c_2)}_{\text{Grad } 1} \cdot \dots \cdot (x - c_n)$$

Nullstellen c_1, c_2, \dots, c_n , c Koeffizient vor x^n

„Durch die Nullstellen kann man dividieren.“

13.6 Beispiel

$$P(x) = x^2 - 2ix - 5 = 0$$

$$x^2 - 2ix + i^2 = 5 + i^2$$

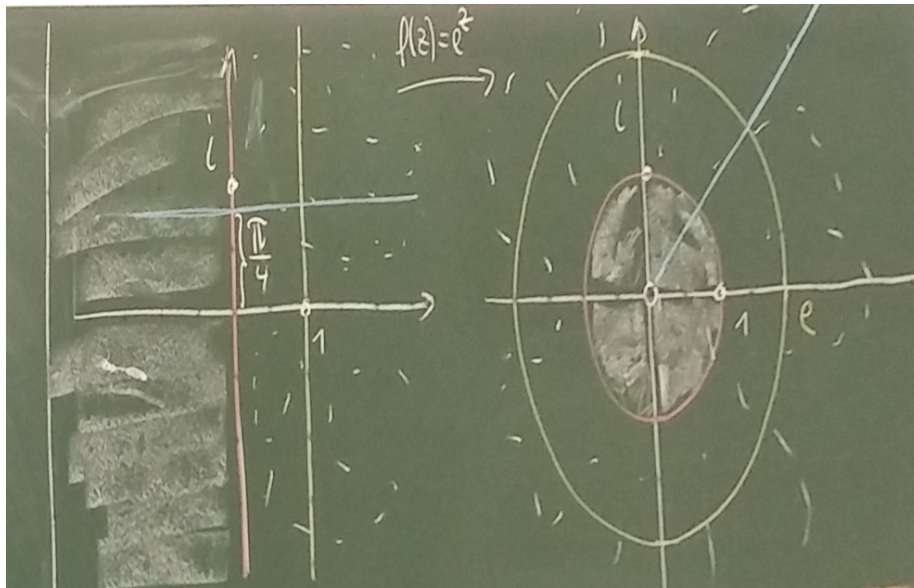


Abbildung 63: Ich habe vergessen, was die Grafik soll.

$$(x-i)^2 = 4$$

$$x-i = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2+i, x_2 = -2+i$$

Probe mit x_1 :

$$1. (2+i)^2 - 2i(2+i) - 5 = 4 + 4i - 1 - 4i + 2 - 5 = 0 \checkmark$$

$$2. (x-x_1)(x-x_2) = (x-2-i)(x+2-i) = x^2 + 2x - ix - 2x - 4 + 2i - ix - 2i - 1 = x^2 - 2ix - 5 \checkmark$$

14 Differentialgleichungen (DGL)

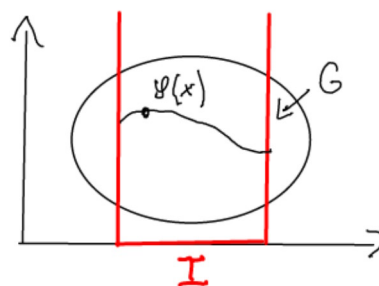


Abbildung 64: Differentialgleichungen (DGL)

Definition 14.1. $G \subset \mathbb{R}^2$

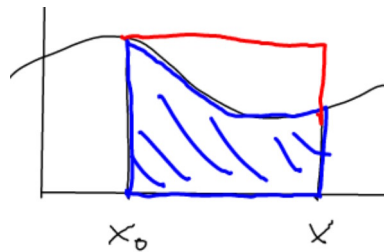
$$f : \begin{cases} G \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases}$$

(Abb. 64)

 $y' = f(x, y)$ heißt Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung. φ : Intervall $I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der DGL, wenn $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in I$ **Sonderfall:** $y' = f(x)$ f nicht abhängig vom y -Wert. $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c$ ist eine Lösung. ($\varphi'(x) = f(x)$). Es gilt auch $\varphi(x_0) = c$ **Allgemein:** Es sei $\varphi(x)$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$, ot $\varphi(x_0) = c$ [$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$].**Es gilt:** $\int_{x_0}^x \varphi'(t) dt + c = \varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=c} + c$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \int_{x_0}^x \varphi'(t) dt + c$$

$$\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$$

Abbildung 65: Gesucht ist die exakte Fläche (blau) - Näherung durch Rechteck (rot) - der Funktion $f(t, \varphi(t))$ unterhalb des Graphen. $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt + c$. Damit kann man aber die gesuchte Funktion $\varphi(x)$ auch nicht ausrechnen! Wenn $|x - x_0|$ klein ist, so kann man $\varphi(x)$ näherungsweise berechnen (Abb. 65).

$$\varphi(x) \approx (x - x_0) \cdot f(x_0, \varphi(x_0)) + c$$

$$\varphi(x) \approx (x - x_0) \cdot f(x_0, c) + c$$

„Jetzt mitschreiben.“ ned

14.1 Geometrische Interpretation

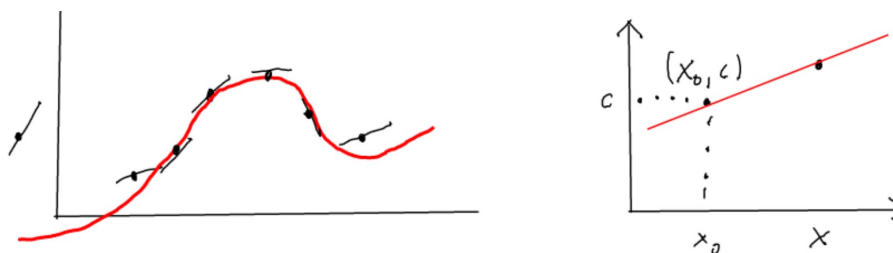


Abbildung 66: In jedem Punkt gibt es Steigungen, die passen müssen (links). Näherungslösung (rechts).

$$y' = f(x, y) \text{ DGL und } \varphi(x) = f(x, \varphi(x))$$

Die DGL gibt in jedem Punkt (x,y) eine Steigung $f(x,y)$ an. Gesucht ist die Funktion $\varphi(x)$, die passt (links in Abb. 66). $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$. Es gelte $\varphi(x_0) = c$ (rechts in Abb. 66).

Näherungslösung für $|x - x_0|$ klein: $\varphi(x) \approx c + (x - x_0) \cdot \varphi'(x_0) = c + f(x_0, \varphi(x_0)) = c + f(x_0, c) \approx \varphi(x)$

14.2 Ein System von DGL

$$y'_1 = f_1(x_1, y_1, y_2), \quad y'_2 = f_2(x_1, y_1, y_2)$$

Lösung: φ_1, φ_2 mit $\varphi'_1(x) = f_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\varphi'_2(x) = f_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$

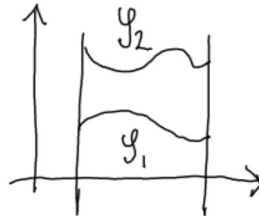


Abbildung 67: System von DGL

Allgemein:

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Lösung: Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (vgl. Abb. 67) mit

$$\varphi'_1(x) = f_1(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi'_n(x))$$

$$\varphi'_2(x) = f_2(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi'_n(x))$$

$$\vdots$$

$$\varphi'_n(x) = f_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi'_n(x))$$

Die fassen wir nun zusammen:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

Das ist die Parameterdarstellung einer Kurve im \mathbb{R}^n . Dabei ist x die Zeit, die Bewegung eines Punktes im \mathbb{R}^n . Also ist

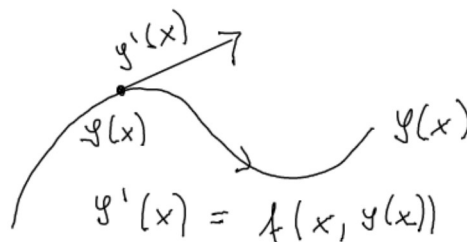
$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \\ \vdots \\ \varphi'_n(x) \end{pmatrix}$$

der Geschwindigkeitsvektor.

$$f\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

f gibt zu jedem Zeitpunkt x und Raumpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ einen Vektor aus \mathbb{R}^n an.

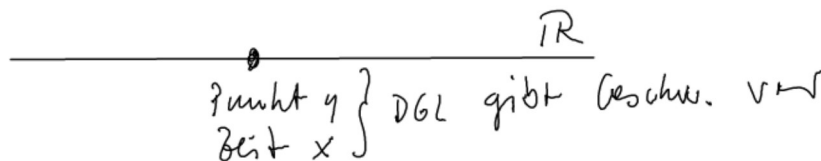
Lösung: $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Abbildung 68: DGL und der Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(x)$

Die DGL gibt zu jedem Zeitpunkt x und Raumpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ einen Geschwindigkeitsvektor an. Gesucht ist die Bewegung im Raum $\varphi(x)$, die dazu passt (Abb. 68).

Gegeben: $\varphi(x_0) = y_0$. Falls $|x - x_0|$ klein \Rightarrow Näherung: $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $\varphi(x_0) + f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot (x - x_0)$

Auch eine *normale* eindimensionale DGL (Abb. 69) kann man so auffassen:
 $y' = f(x, y)$ Lösung $\varphi(x)$

Abbildung 69: Eindimensionales DGL: Der Punkt y zur Zeit $x \Rightarrow$ Die DGL gibt die Geschwindigkeit vor.

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $\varphi(x)$ fassen wir als Bewegung eines Punktes auf der Geraden \mathbb{R} auf. $\varphi'(x)$ ist dabei die Geschwindigkeit (Abb. ??). Lösung: Bewegung eines Punktes, die dazu passt.

14.3 DGL n-ter Ordnung

Definition 14.2. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ heißt DGL n -ter Ordnung. Eine Lösung ist $\varphi(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $* \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$

Das kann man umformen in ein System von DGL (DGL-System):

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} &= f(x, \underbrace{y}_{y_0}, \underbrace{y'}_{y_1}, \dots, \underbrace{y^{(n-1)}}_{y_{n-1}}) \\
 y_0' &= y_1 = f_1(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\
 y_1' &= y_2 = f_2(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\
 &\vdots \\
 y_{n-2}' &= y_{n-1} = f_{n-1}(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})
 \end{aligned}$$

$$y'_{n-1} = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$$

Ist $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems, so ist $\varphi_0(x)$ eine Lösung von * in der Definition 14.2.

14.4 Lippschitzbedingung

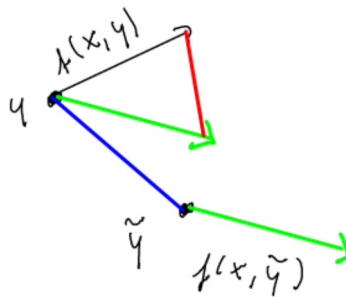


Abbildung 70: Die Lippschitzbedingung

Definition 14.3 (Lippschitzbedingung1). $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ genügt der Lippschitzbedingung mit konstanter $L > 0$, wenn gilt:
 $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ (vgl. Abb. 70)

An dieser Stelle erst einmal einen herzlichen Dank an Marianus für die Bilder vom 03.12.2015!

14.5 Eindeutigkeitsatz

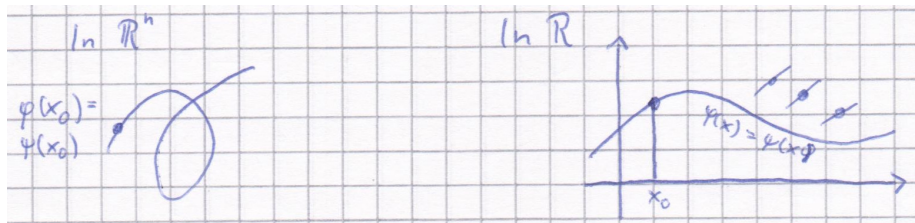


Abbildung 71: Eindeutigkeitsatz: In \mathbb{R}^n links und in \mathbb{R} rechts

Satz 14.1 (Eindeutigkeitsatz). $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \rightarrow f(x, y)$

$$DGL \ y' = f(x, y), \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \vdots \\ \varphi'_n \end{pmatrix} = f \left(\underbrace{x}_{\text{Zeit}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi'_1(n) \\ \vdots \\ \varphi'_n(n) \end{pmatrix}}_{\text{Ort}} \right)$$

Es seien φ, ψ zwei Lösungen, der DGL. $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. gilt $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x), \forall x$ (ohne Beweis, Abb. 71).

14.6 Existenzsatz von Picard-Lindelöf

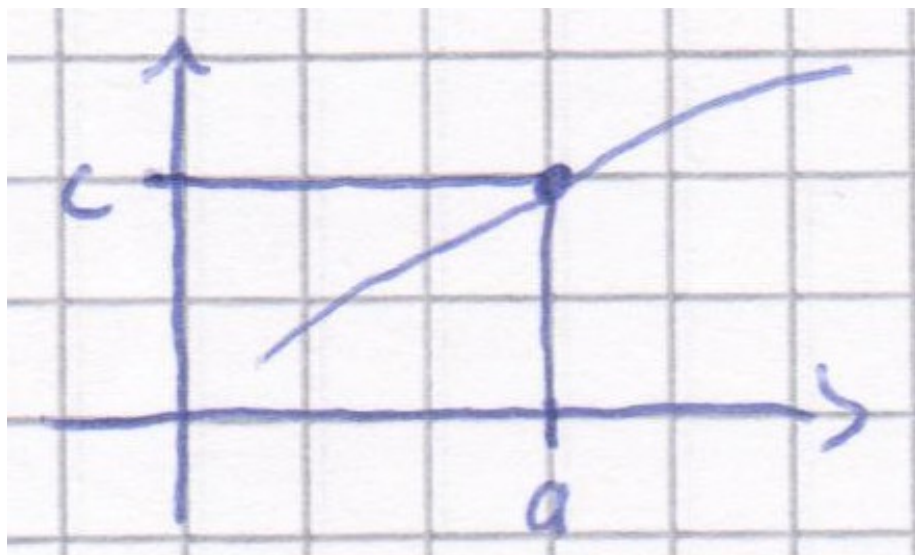


Abbildung 72: Existenzsatz von Picard-Lindelöf: eindimensional

Satz 14.2 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf). $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \rightarrow f(x, y)$, DGL $y' = f(x, y)$

Dann gibt es eine Lösung φ mit $\varphi(\underbrace{a}_{\text{Zeit}}) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \underbrace{c_n}_{\text{Ort}} \end{pmatrix}$. Zur Zeit a den

Raumpunkt c vorschreiben (Abb. 72). Aus dem vorigen Satz folgt die Eindeutigkeit.

Beweisidee. Eindimensionaler Fall: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y), y' = f(x, y)$

1.) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt genau dann die DGL $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = c$, wenn:
 $\varphi(x) = \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt + c$

I) Es gelte $\varphi(x) = \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt + c, \varphi(a) = c, \varphi'(a) = f(a, \varphi(a))$ Hauptsatz (H.S.)

II) Es gelte $\varphi(a) = c$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, also: $c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt = c + \int_a^x \varphi'(t) dt = c + \varphi(x) - \varphi(a) = c + \varphi(x) - c = \varphi(x) \checkmark$

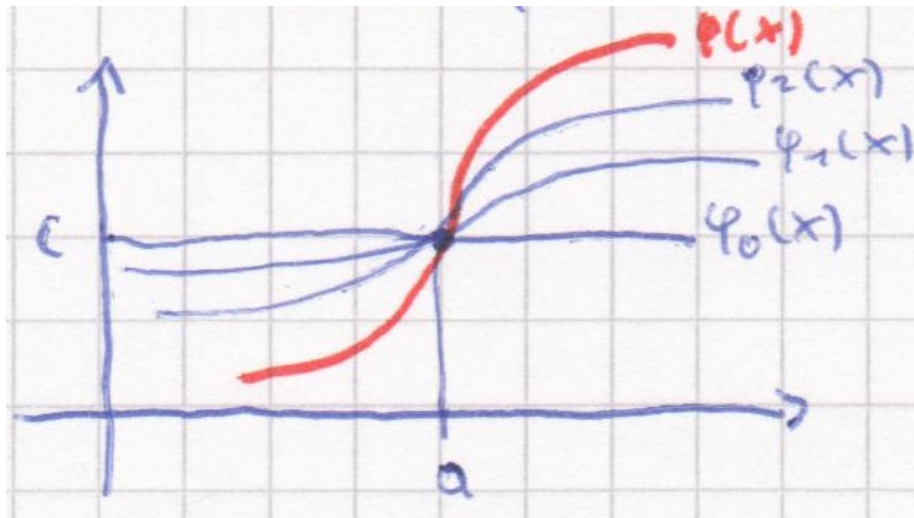


Abbildung 73: Wir versuchen φ näherungsweise zu berechnen.

Wir versuchen φ näherungsweise zu berechnen (Abb. 73).

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= c \\ \varphi_1(x) &= \int_a^x f(t, \varphi_0(t)) dt + c \\ \varphi_2(x) &= \int_a^x f(t, \varphi_1(t)) dt + c \\ &\vdots \\ \varphi_{k+1}(x) &= \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt + c \end{aligned}$$

Man zeigt: Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ konvergieren gegen eine bestimmte Funktion φ . man zeigt dann: $\varphi(x)$ ist eine Lösung der DGL. \square

14.7 Beispiel

DGL: $y' = 2xy = f(x, y)$ mit $\varphi(0) = c$.

$$\varphi_0(x) = c$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^x f(t, \varphi_0(t)) dt + c = \int_0^x 2tc \, dt + c = c + 2c \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x = c + 2c \cdot \frac{1}{2} x^2 = c + cx^2 = c(1 + x^2)$$

$$\varphi_2(x) = c + \int_0^x f(t, \varphi_1(t)) dt = c + \int_0^x f(t, c(1 + t^2)) dt = c + \int_0^x 2t \cdot c(1 + t^2) dt = c + 2c \int_0^x t + t^3 dt = c + 2c \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \right) = c + c \left(x^2 + \frac{x^4}{2} \right) = c \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right)$$

$$\text{Man zeigt: } \varphi_k = c \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} \right)$$

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = c \cdot e^{x^2}$$

$$\text{Test: } \varphi(x) = c \cdot e^{x^2}$$

$$\varphi_0 = c \cdot c^0 = c$$

$$\varphi'(x) = c \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \varphi(x) \cdot 2x \checkmark$$

Was bedeutet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz?

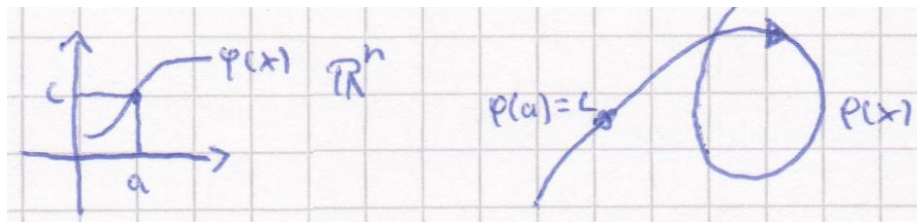


Abbildung 74: Bedeutung des Existenz- und des Eindeutigkeitssatzes

1. normale DGL $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases}$ und $y' = f(x, y)$. Bei a darf man den Funktionswert c vorschreiben (links in Abb. 74).
2. Zu einem Zeitpunkt a darf man den Raumpunkt a vorschreiben (rechts in Abb. 74).

15 DGL n-ter Ordnung

$$\varphi^{(n)} = f \left(\underbrace{x}_{\text{Zeitpunkt}}, \underbrace{y}_{\varphi_0}, \underbrace{y'}_{\varphi_1}, \dots, \underbrace{y^{(n-1)}}_{\varphi_{n-1}} \right)$$

Raumpunkt

Ableitungen darf man vorschreiben. An einer Stelle $x = a$ darf man vorschreiben:

$$\varphi(a) \text{ Dann gibt es genau eine passende Lösung.}$$

$$\varphi'(a)$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(n-1)}(a)$$

15.1 Beispiel DGL 2. Ordnung

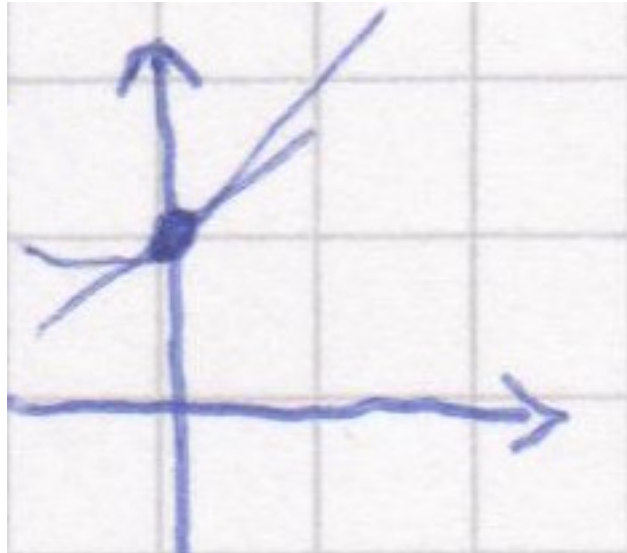


Abbildung 75: DGL 2. Ordnung. Man darf die Stelle und die Ableitung vorgeben.

$y'' = f(x, y, y'), y'' = -\varphi = f(x, y, y')$. Lösungen sind z.B.:

$$\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x$$

$$\varphi_1'(x) = \cos x, \varphi_2'(x) = -\sin x$$

$$\varphi_1''(x) = -\sin x, \varphi_2''(x) = -\cos x \checkmark$$

Kombinationen:

$$\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$\varphi'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

$$\varphi''(x) = -c_1 \sin x - c_2 \cos x \checkmark$$

Viele Lösungen:

$$\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(0) = c_2, \varphi'(0) = c_1$$

An der Stelle 0 darf man $\varphi(0)$ und $\varphi'(0)$ vorschreiben. Alle Lösungen: $[c_1 \sin x + c_2 \cos x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}]$ (Abb. 75).

16 Elementare Lösungsmethoden

Satz 16.1. $y' = f(x) \cdot g(y)$ $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \text{ und } G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$$

Es sei $\varphi(x)$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = (y_0)$. Dann gilt:

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Beweis. $\varphi(x_0) = y_0$

$$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{g(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) dt \underset{\text{Subst.}}{=} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} dt \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} dt$$

□

16.1 Beispiel

$$y' = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} \text{ Anfangsbedingung: } \underbrace{\varphi(1)}_{x_0} = \underbrace{1}_{y_0}$$

$$\int_1^{\varphi(x)} \frac{1}{t} dt = \int_1^x t^2 dt$$

$$= [\ln t]_1^{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^x$$

$$\ln \varphi(x) - \underbrace{\ln 1}_0 = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}$$

$$\varphi(x) = e^{\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}}$$

Test:

$$\varphi(1) = e^0 = 1 \checkmark$$

$$\varphi'(x) = e^{\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}} \cdot x^2 = \varphi(x) \cdot x^2 \checkmark$$

16.2 Beispiel

$$y' = y^2 \Rightarrow y' = \underbrace{1}_{f(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{g(y)} \text{ Anfangsbedingung: } \varphi(0) = c$$

1. Fall $c = 0$ (vgl. rote Linie in Abb. 76)

In diesem Fall erraten wir eine Lösung. An der Stelle 0 soll 0 rauskommen ($\varphi(0) = 0$). Deswegen machen wir einfach die Nullfunktion ($\varphi(x) = 0$).

2. Fall $c > 0$ (vgl. grüne Linie in Abb. 76)

$\varphi(x)$ muss in diesem Fall größer als Null sein ($\varphi(x) > 0$).

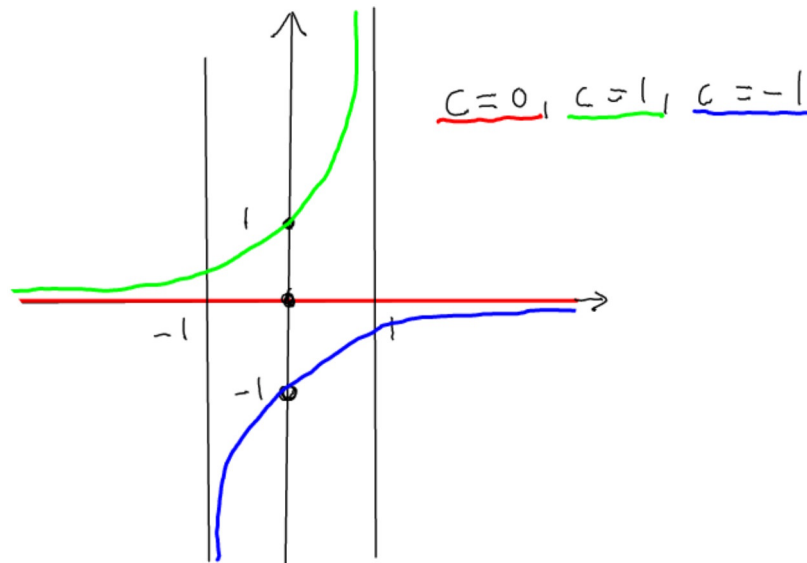
$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} dt$$

$$\int_0^x 1 dt = \int_c^{\varphi(x)} \frac{1}{t^2} dt = \int_c^{\varphi(x)} t^{-2} dt$$

$$x = [(-t^{-1})]_c^{\varphi(x)} = \left(-\frac{1}{\varphi(x)} - \left(-\frac{1}{c}\right)\right) = \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} \text{ wird aufgelöst nach } \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{c} - x = \frac{1-cx}{c} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$$

$$\boxed{\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{1-cx} > 0, c > 0 \Leftrightarrow 1-cx > 0 \Leftrightarrow 1 > cx \Leftrightarrow \frac{1}{c} > x \Rightarrow x < \frac{1}{c}} \Rightarrow \text{Funktion ist nur definiert für } x < \frac{1}{c}.$$

Abbildung 76: Beispiel für verschiedene Werte von c

3. Fall $c < 0$ (vgl. blaue Linie in Abb. 76)

$$\varphi(x) < 0, \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$$

$$\frac{c}{1-cx} < 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x > \frac{1}{c}$$

16.3 Lineare DGL

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$ homogen, falls $b(x) = 0$

Satz 16.2. $y' = a(x) \cdot y$. Die Lösung $\varphi(x)$ mit $\varphi(x_0) = c$ ist:

$$\varphi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

„Ich schreibe jetzt $\exp(a)$ statt e^a “

Beweis. Durch Einsetzen beweisen wir: $\varphi(x_0) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x_0} a(t) dt\right) = c$

$$\varphi'(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \cdot a(x) = \varphi(x) \cdot a(x)$$

□

16.4 Beispiel

$$y' = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot y, \varphi(x_0) = c$$

$$\varphi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t^2 dt\right) = c \cdot \exp\left(\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{x_0}^x\right) = c \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x_0^3\right) = \varphi(x)$$

16.5 Inhomogene DGL

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Sei $\varphi(x)$ eine Lösung der homogenen DGL: $y' = a(x) \cdot y$ und $\psi(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

Ansatz:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi(x) = u(x) \Rightarrow \psi'(x) = \varphi' \cdot u + \varphi \cdot u' \\ \psi'(x) &= a \cdot \psi + b = \underbrace{a \cdot \varphi}_{\varphi'} \cdot u + b = \underline{\varphi' \cdot a + b}\end{aligned}$$

„Wir lassen jetzt
(x) weg. Also φ
statt $\varphi(x)$ “

$$\Rightarrow \varphi \cdot u' = b$$

$$\Rightarrow u' = \frac{b}{\varphi}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + c$$

Satz 16.3. Die DGL sieht so aus: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$.

Die Lösung $\psi(x)$ mit $\psi(x_0) = c$ ist:

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(c + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) \text{ mit } \varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

$$\text{Beweis. } \psi(x_0) = \varphi(x_0) \cdot \left(c + \int_{x_0}^{x_0} \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) = \varphi(x_0) \cdot c = c \checkmark$$

□

16.6 Beispiel

$y' = 2xy + x^3$ mit $\psi(0) = c$

Zuerst lösen wir den vorderen Teil: $\varphi(x) = \exp(\int_{x_0}^x 2tdt) = \exp([t^2]_0^x) = \exp(x^2)$

$$\Rightarrow \psi(x) = \exp(x^2) \cdot (c + \int_0^x \frac{t^3}{e^{(t^2)}} dt)$$

Jetzt versuchen wir das Integral auszurechnen: $\int_0^x \frac{t^3}{e^{(t^2)}} dt = \int_0^x t^3 \cdot e^{-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot 2tdt$

$$\underbrace{=}_{\text{Subst. } s=t^2} \int_0^{x^2} \frac{1}{2} s \cdot e^{-s} ds = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \underbrace{s}_f \cdot \underbrace{e^{-s}}_{g'} ds$$

$$\underbrace{=}_{\text{Produktregel}} \frac{1}{2} ([-se^{-s}]_0^{x^2} - \int_0^{x^2} -e^{-s} ds) = \frac{1}{2} (-x^2 \cdot e^{-x^2} - (e^{-x^2} - 1)) = \frac{1}{2} (-x^2 \cdot e^{-x^2} - e^{-x^2} + 1)$$

$$e^{-x^2} - e^{-x^2} + 1) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + \frac{1}{2}$$

Das ausgerechnete Integral setzen wir jetzt ein:

$$\Rightarrow \psi(x) = e^{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \right) = e^{x^2} (c + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

„Substitutionsregel:
 $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ “
 „NR:
 $f(s) = s, f'(s) = 1, g(s) = e^{-s}, g'(s) = -e^{-s}$ “

16.7 DGL vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

Substituiere: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow y' = z' \cdot x + z \Rightarrow z' \cdot x + z = f(z)$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{[f(z) - z]}$$

„Typ getrennte Variable“

Satz 16.4 (Genauer Satz). $y' = f(\frac{y}{x})$ *

$$z' = \frac{1}{x} (f(z) - z) **$$

φ ist genau dann Lösung von * mit $\varphi(x_0) = y_0$, wenn $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ Lösung von ** mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ ist.

16.8 Beispiel

$y' = 1 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$, Bedingung: $\varphi(x_0) = y_0$

$$z = \frac{y}{x}, z' = \frac{1}{x} (f(z) - z) = \frac{1}{x} (1 + z + z^2 - z) = \frac{1}{x} \underbrace{(1 + z^2)}_{\text{(getrennte Variable)}}$$

Bedingung: $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$

$$\int_{\frac{y_0}{x_0}}^{\psi(x)} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt = [\arctan]_{\frac{y_0}{x_0}}^{\psi(x)} = [\ln |t|]_{x_0}^x = \arctan \psi(x) - \arctan \frac{y_0}{x_0}$$

$$= \ln |x| - \ln |x_0|$$

$$\arctan \psi(x) = \arctan \frac{y_0}{x_0} + \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|$$

$$\psi(x) = \tan \left[\arctan \frac{y_0}{x_0} + \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| \right]$$

$$\varphi(x) = x \cdot \psi(x) = x \cdot \tan \left[\arctan \frac{y_0}{x_0} + \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| \right]$$

16.9 Beispiel

$y' = (x + y)^2$ Substituiere $z = x + y, z' = 1 + y', y' = z' - 1$

$$z' - 1 = z^2$$

$$z' = \underbrace{(z^2 + 1)} \cdot \underbrace{1}$$

„getrennte Variable“

$$\int_{x_0}^x 1 dt = \int_{z_0}^{\psi(x)} \frac{1}{t^2 + 1} dt = [t]_{x_0}^x = [\arctan t]_{z_0}^{\psi(x)}$$

$x - x_0 = \arctan \psi(x) + \alpha$
 $\arctan \psi(x) = x + \beta$
 $\psi(x) = \tan(x + \beta)$
 $\psi(x) = x + \varphi(x)$
 $\varphi(x) = \psi(x) - x = \tan(x + \beta) - x$. Aus der Bedingung folgt β bzw. kann ausgerechnet werden.

16.10 Numerische Lösung von DGL

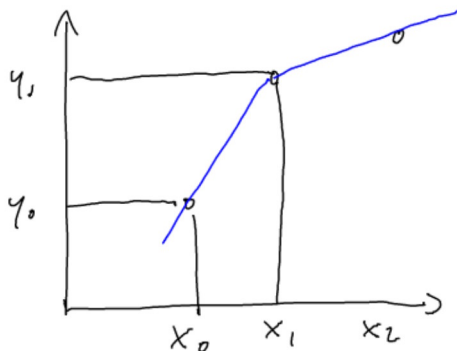


Abbildung 77: Statt der Funktion, die wir nicht haben, nehmen wir die Tangente, die wir kennen.

$y' = f(x, y)$ (Abb. 77) $\varphi(x_0) = y_0$

x_0, y_0 Start

$x_1 = x_0 + h$

$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

allgemein:

$x_{n+1} = x_n + h$ $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

16.10.1 Verbesserung: Mittelpunktsregel

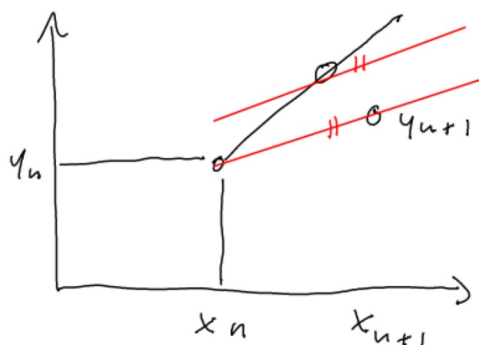


Abbildung 78: Numerische Lösung von DGL, Verbesserung: Mittelpunktsregel

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n) \quad (\text{Abb. 78})$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

16.10.2 Rückwärts

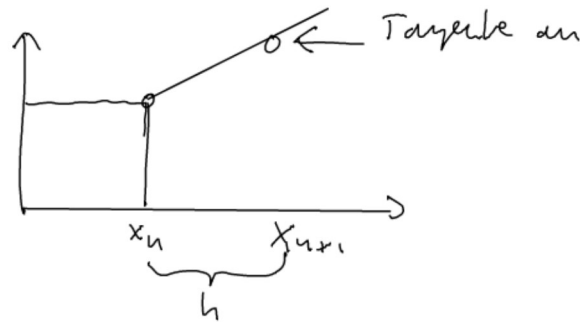


Abbildung 79: Numerische Lösung von DGL, Rückwärts

$$y' = f(x, y)$$

$$y_n = y_{n+1} - h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}). \text{ Nach } y_{n+1} \text{ auflösen. (Abb. 79)}$$

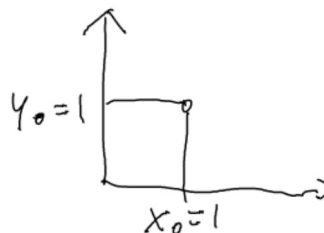


Abbildung 80: Beispiel

Beispiel $y' = f(x, y) = x + y$, Schrittweite $h: 0.1$

Vorwärts: $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1(1 + 1) = 1.2$ (Abb. 80)

Rückwärts $y_0 = y_1 - hf(x_1, y_1)$

$$1 = y_1 - 0.1(1.1 + y_1)$$

$$1 = 0.9y_1 - 0.11$$

$$0.9y_1 = 1.11$$

$$y_1 = 1.23$$

16.10.3 Hausaufgabe

Das letzte Beispiel mit der Mittelpunktsregel rechnen.

Satz 17.1. $y' = ay$ sei ein homogenes DGL-System. L_h sei die Menge aller Lösungen. $L_h = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi' = A\varphi\}$
 L_h ist ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} .
 Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ Lösungen, so sind äquivalent:

1. $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind linear unabhängig.
2. Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0)$ sind linear unabhängig ($\varphi_1(x_0)$ sind k Vektoren aus \mathbb{R}^n).
3. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$

ohne Beweis.

Definition 17.1. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängige Lösungen (\Rightarrow Alle Lösungen, weil es eine Basis ist: $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n, c_i \in \mathbb{R}$). $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ heißt Lösungsfundamentalsystem.

Lösungsmatrix:

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

alle Lösungen:

$$\Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$$

$$\Phi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)$$

$$\Phi' = A\Phi$$

17.1 Beispiel

$$y'_1 = -\omega y_2, \omega \in \mathbb{R}$$

$$y'_2 = \omega y_1$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y' = A \cdot y$$

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin \omega x \\ \cos \omega x \end{pmatrix} \text{ sind 2 linear unabhängige Lösungen.}$$

Test:

$$\varphi'_1(x) = \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega x \\ \omega \cos \omega x \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega x \\ \omega \cos \omega x \end{pmatrix} \checkmark$$

analog φ_2

Sind φ_1, φ_2 linear unabhängig?

Setze ein x ein, z.B. $x = 0$

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig.}$$

Alle Lösungen:

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Satz 17.2. $y' = Ay + b$ sei ein inhomogenes DGL-System.

Sei L_h die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems und L_I die Lösungsmenge des inhomogenen Systems. Für beliebiges $\psi_0 \in L_I$ gilt: $L_I = \psi_0 + L_h$

ohne Beweis

Satz 17.3. $y' = Ay + b$ Sei Φ ein Lösungsfundamentalsystem für $y' = ay$. Man erhält eine Lösung $\psi(x)$ von $y' = Ay + b$ durch den Ansatz $\psi(x) = \Phi \cdot u(x)$. Dieser Ansatz bzw. dieses Verfahren heißt Variation der Konstanten. $\Phi \cdot c$ ist die Gesamtlösung des homogenen Systems.

Damit ergibt sich:

$$\Phi(x) \cdot u'(x) = b(x)$$

$$u'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot b(x)$$

$$u(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1} \cdot b(t) dt + \text{konstanter Vektor.}$$

Beweis. $\psi = \Phi \cdot u$

$$\psi' = \Phi' \cdot u + \underbrace{\Phi \cdot u'}_{\Phi'} \text{ auch: } \psi' = A\psi + b = \underbrace{A\Phi}_{\Phi'} u + b = \Phi' u + \underline{b}$$

$$\Rightarrow \Phi u' = b \Rightarrow u' = \Phi^{-1} b \Rightarrow u = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) dt + \text{konstanter Vektor.} \quad \square$$

„Das von x lassen wir im beweis weg.“

17.2 Beispiel

$$y_1' = -y_2$$

$$y_2' = y_1 + x$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$y' = A \cdot y + b$$

Lösungen des homogenen Systems:

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Test mit φ_1 :

$$\varphi_1'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, A\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

φ_1, φ_2 sind linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x, -\sin x \\ \sin x, \cos x \end{pmatrix}. \text{ Was ist } \Phi^{-1}? \Phi \text{ ist orthogonal!} \Rightarrow \Phi^{-1} = \Phi^t =$$

$$\begin{pmatrix} \cos x, \sin x \\ -\sin x, \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} \cos t, \sin t \\ -\sin t, \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^x t \sin t dt + c_1 \\ \int_{x_0}^x t \cos t dt + c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x + d_1 \\ \cos x + x \sin x + d_2 \end{pmatrix}$$

„Die beiden Konstanten fassen wir zusammen: d_1, d_2 “

$$\text{Wähle ohne die Konstanten } u(x) = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi(x) = \Phi \cdot u =$$

$$\begin{pmatrix} \cos x, -\sin x \\ \sin x, \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} = \Psi(x)$$

Alle Lösungen:

$$\Psi(x) + L_h = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Prüfung in Differentialrechnung im \mathbb{R}^n und Differentialgleichungen

Arbeitszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Alle

Prüfer: Hörwick

1.) Leiten Sie partiell nach x, y und z ab.

$$f(x, y, z) = \sin(x \cdot e^y) + \sin x \cos z$$

2.) Gegeben sind die zwei Funktionen f und g

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix}$$

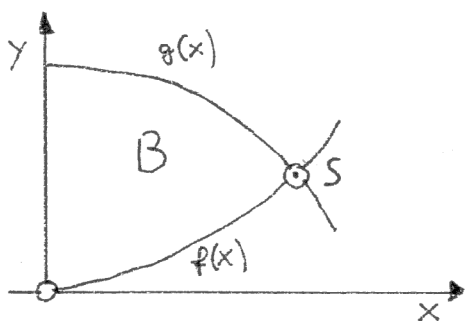
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \cdot y \cdot z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \left(f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

und damit die Ableitungsmatrix $(g \circ f)'$.

b) Berechnen Sie $(g \circ f)'$ mit Hilfe der Kettenregel!

3.) Gegeben sind die beiden Funktionen f und g .



$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S .

b) Gegeben ist weiter die Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x^2$$

Berechnen Sie $\int_B h(x, y)$ [Bereich B siehe Skizze]

4.) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + (x - 1) \cdot y \quad \text{mit der Bedingung für die Lösung } \varphi: \varphi(0) = 1$$

a) Berechnen Sie $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ und $\varphi'''(0)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms vom Grad 3 (Entwicklungspunkt 0) einen Näherungswert für $\varphi(0.1)$.

5.) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \left(\sin \frac{y}{x} \right) + \frac{y}{x} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } \varphi(1) = 1$$

Berechnen Sie die Lösung $\varphi(x)$.

Hinweis: $\int \frac{1}{\sin t} dt = \ln \tan \frac{t}{2} \quad \text{für } 0 < t < \pi$

6.) Beweisen Sie: $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$.

Hinweis: Man verwende die eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

18 Lösung für die Prüfung WS 2013/14

18.1 zu 1)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sin(x \cdot e^y) + \sin x \cos z \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x \cdot e^y) e^y + \cos x \cos z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x \cdot e^y) x e^y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\sin x \sin z \end{aligned}$$

18.2 zu 2a)

$$(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)xy2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3y + 2x^2y^2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Ableitungsmatrix: $(g \circ f)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6yx^2 + 4xy^2, 2x^3 + 4x^2y \\ 2, 0 \end{pmatrix}$

18.3 zu 2b)

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ y, x \\ 2, 0 \end{pmatrix}$$

$$g' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz, xz, xy \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= g' \left(f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \cdot f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g' \begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, 1 \\ y, x \\ 2, 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x^2y, 2x^2 + 2xy, x^2y + y^2x \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, 1 \\ y, x \\ 2, 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 6yx^2 + 4xy^2, 2x^3 + 4x^2y \\ 2, 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

„Matrizenmultiplikation: Zeile mal Spalte!“

18.4 zu 3a)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{1}{3}x^2 &= -\frac{1}{4}x^2 + 2 \\ x = 1.85 &\Rightarrow y = f(1.85) = 1.14 \Rightarrow S(1.85, 1.14) \end{aligned}$$

18.5 zu 3b)

$$\begin{aligned} \int_B h(x, y) &= \int_0^{1.85} \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx = \int_0^{1.85} \left(\int_{\frac{1}{3}x^2}^{-\frac{1}{4}x^2+2} x^2 dy \right) dx = \int_0^{1.85} [yx^2]_{y=\frac{1}{3}x^2}^{y=-\frac{1}{4}x^2+2} dx = \\ &= \int_0^{1.85} \left(\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) x^2 - \frac{1}{3}x^2 x^2 \right) dx = \int_0^{1.85} -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^4 dx = \int_0^{1.85} -\frac{7}{12}x^4 + \\ &2x^2 dx = \left[-\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{5}x^5 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{1.85} = -\frac{7}{60} \cdot 1.85^5 + \frac{2}{3} \cdot 1.85^3 = 1.69 \end{aligned}$$

18.6 zu 4a)

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi'(x) &= x^2 + (x-1) \cdot \varphi(x) \\ \varphi'(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) &= 2x + 1 \cdot \varphi(x) + (x-1) \cdot \varphi'(x) \\
\varphi''(0) &= 1 + (-1) \cdot (-1) = 2 \\
\varphi'''(x) &= 2 + \varphi'(x) + \varphi'(x) + (x-1) \cdot \varphi''(x) \\
\varphi'''(0) &= 2 - 1 - 1 + (-1) \cdot 2 = -2
\end{aligned}$$

„Produktregel!“

18.7 zu 4b)

$$\begin{aligned}
\varphi(h) &\approx \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot h + \frac{\varphi''(0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!} \cdot h^3 \\
\varphi(h) &\approx 1 + (-1) \cdot h + \frac{2}{2} \cdot h^2 + \frac{-2}{6} \cdot h^3 \\
\varphi(0.1) &\approx 1 - 0.1 + 0.1^2 - \frac{1}{3} \cdot 0.1^3 \\
\varphi(0.1) &\approx 0.9097
\end{aligned}$$

18.8 EXTRA zu 4)

Löse $y' = \underbrace{(x-1)}_a \cdot y + \underbrace{x^2}_b$, $\varphi(0) = 1$. Ist vom Typ lineare DGL.

Lösungsweg:

„Aus dem Skript“

$$\begin{aligned}
1. \quad \varphi(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \\
2. \quad \psi(x) &= \varphi(x) \cdot \left[c + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt\right]
\end{aligned}$$

Lösung

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_0^x t - 1 dt\right) = \exp\left(\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_0^x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \cdot \left[1 + \underbrace{\int_0^x \frac{t^2}{\exp\left(\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)}\right)}_{f(t)} dt\right] \cdot \varphi(x) \text{ ist die Lösung. Näherung}$$

für das Integral von 0 bis 0.1:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, f(0.1) = \frac{0.1^2}{\exp\left(\frac{1}{2} \cdot 0.1^2 - 0.1\right)} = 0.011 \Rightarrow \int_0^{0.1} \dots dt = 0.1 \cdot \frac{1}{2}(0 + 0.011) = \\
0.00055 &\Rightarrow \psi(0.1) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 0.1^2 - 0.1\right) [1 + 0.00055] = 0.90987
\end{aligned}$$

18.9 zu 5)Substituiere: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz, y' = 1 \cdot z + x \cdot z'$

$$\Rightarrow z + x \cdot z' = \sin z + z \Leftrightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin z}_{g(z)} \text{ (Typ getrennte Variable).}$$

$$\psi(1) = \frac{\varphi(1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\int_{y_0}^{\psi(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$\text{Einsetzen der Funktionen: } \int_1^{\psi(x)} \frac{1}{\sin t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\left[\ln \tan \frac{t}{2}\right]_1^{\psi(x)} = \left[\ln t\right]_1^x$$

$$\ln \tan \frac{\psi(x)}{2} - \ln \tan \frac{1}{2} = \ln x - \ln 1$$

$$\ln \tan \frac{\psi(x)}{2} - \ln x = \ln \tan \frac{1}{2}$$

$$\ln \tan \frac{\psi(x)}{2} - \ln x = \ln 0.546$$

$$\ln \frac{\tan \frac{\psi(x)}{2}}{x} = \ln 0.546$$

„beide Seiten e“

$$\begin{aligned}\tan \frac{\psi(x)}{2} &= 0.546x \\ \frac{\psi(x)}{2} &= \arctan 0.546x \\ \psi(x) &= 2 \arctan 0.546x\end{aligned}$$

$$\varphi(x) = x \cdot \psi(x) = 2x \cdot \arctan 0.546x$$

18.10 zu 6)

$$\begin{aligned}e^{i2\varphi} &= \cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi \\ e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos^2 \varphi + i \cos \varphi \sin \varphi + i \sin \cos \varphi - \\ \sin^2 \varphi &= \underline{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + i(2 \cos \varphi \sin \varphi)} \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

1. $\cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$
2. $\sin^2 \varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi \checkmark$

Stichwortverzeichnis

DGL, 57

System, 61

Differenzialgleichung, 57

Eindeutigkeitssatz, 63

Eulersche Formel, 54

Formel

Eulersche, 54

Fundamentalsystem, 73

Sätze

Eindeutigkeitssatz, 63