Hochschule München
Fachbereich 07

WS 2013/14

Prüfung in Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ und Differentialgleichungen

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Alle
Prüfer: Hörwick

1.) Leiten Sie partiell nach x, y und z ab.

$$f(x,y,z) = \sin\left(x \cdot e^y\right) + \sin x \cos z$$

2.) Gegeben sind die zwei Funktionen f und g

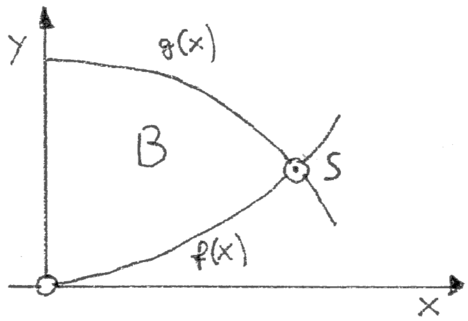
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix} \qquad\qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \cdot y \cdot z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

und damit die Ableitungsmatrix $(g \circ f)'$.

b) Berechnen Sie $(g \circ f)'$ mit Hilfe der Kettenregel !

3.) Gegeben sind die beiden Funktionen f und g .



$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S .

b) Gegeben ist weiter die Funktion

$h: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\quad (x, y) \to x^2$

Berechnen Sie $\int_B h(x, y)$ [*Bereich B siehe Skizze*]

Siehe Seite - 2

4.) Gegeben ist die Differentialgleichung

$y' = x^2 + (x-1)\cdot y$ mit der Bedingung für die Lösung $\varphi :\ \varphi(0) = 1$

a) Berechnen Sie $\varphi(0),\ \varphi'(0),\ \varphi''(0)\ und\ \varphi'''(0)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms vom Grad 3 (Entwicklungspunkt 0) einen Näherungswert für $\varphi(0.1)$.

5.) Gegeben ist die Differentialgleichung

$y' = \left(\sin \dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(1) = 1$

Berechnen Sie die Lösung $\varphi(x)$.

<u>Hinweis:</u> $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \ln \tan \frac{t}{2}$ für $0 < t < \pi$

6.) Beweisen Sie: $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$.

<u>Hinweis:</u> Man verwende die eulersche Formel

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$