Mitschrift
Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$ und Differentialgleichungen, WS 2015/16
Prof. Dr. Josef Hörwick

M. Zell

17. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Hinweise

Diese Mitschrift basiert auf der Vorlesung „Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$ und Differentialgleichungen" von Prof. Dr. Josef Hörwick im WS 2015/16. Du kannst sie gerne benutzen, kopieren und an andere weitergeben. Auch in der Prüfung - soweit zugelassen [1] - kannst du sie gerne als Hilfsmittel verwenden, wenn das meine Nutzung als Prüfungshilfsmittel nicht in irgendeiner Weise beeinträchtigt.

Natürlich besteht kein Anspruch auf Aktualität, Richtigkeit, Fortsetzung meines Angebots oder dergleichen. Sollten dir Fehler auffallen oder solltest du Verbesserungsvorschläge haben, würde ich mich über eine E-Mail (zell@hm.edu) freuen. Wenn du mir als kleines Dankeschön z.B. ein Club-Mate[2] ausgeben möchtest, findest du mich meistens hier: `http://fi.cs.hm.edu/fi/rest/public/timetable/group/if3b`. Wenn nicht, ist es auch ok ;-)

Nach der Prüfung werde ich den LaTeX-Quelltext veröffentlichen, damit die Mitschrift weitergeführt, korrigiert und ergänzt werden kann.

Viele Grüße
M. Zell

[1] `http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden_services/fi_pruefungskatalog.de.html`
[2] `http://www.clubmate.de/ueber-club-mate.html`

2 Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{cases} \quad \text{Zwei Variablen.}$$

„Gebirge über der x,y-Ebene.“

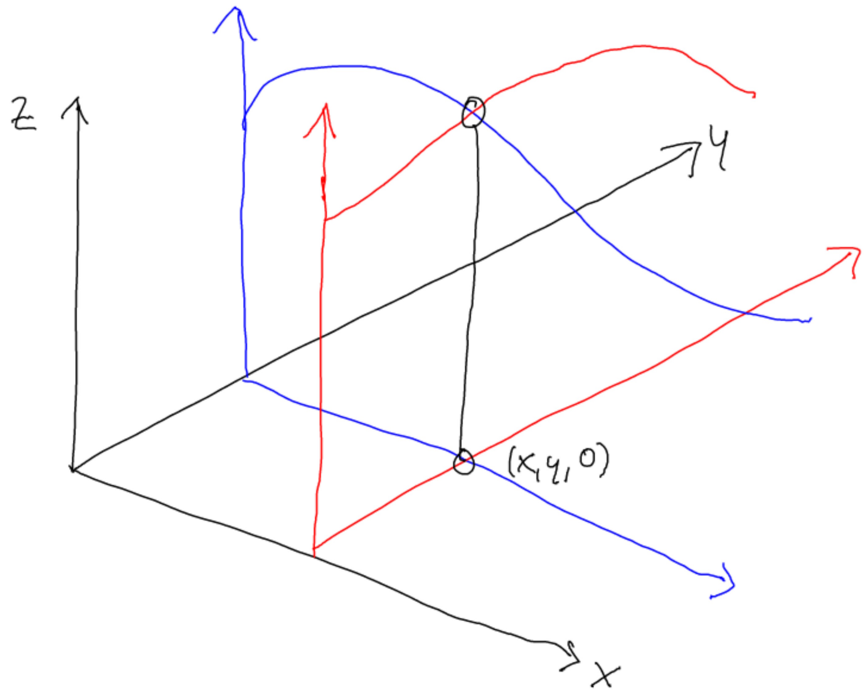


Abbildung 1: Schnittfunktion parallel zur yz-Ebene (rot); Schnittfunktion parallel zur xz-Ebene (blau).

Die Ableitungen der Schnittfunktionen heißen partielle Ableitungen. $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)$ ist die Ableitung der blauen Funktion (nur x ist Variable). $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)$ ist die Ableitung der roten Funktion (nur y ist Variable).

2.1 Beispiele

a) $f(x,y) = 2x^3y^2 + x + 2y$
$\frac{\delta f}{\delta x} = 2y^2 3x^2 + 1$
$\frac{\delta f}{\delta y} = 2x^3 2y + 2$

b) $f(x,y) = \sin(xy^2)$
$\frac{\delta f}{\delta x} = \cos(xy^2)y^2$
$\frac{\delta f}{\delta y} = \cos(xy^2)x2y$

2.2 Verallgemeinerung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \to f(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

$\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, ..., x_n)$ nur x_1 ist Variable.

$\vdots$

$\frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, ..., x_n)$ nur x_n ist Variable.
Zum Beispiel: $\frac{\delta f}{\delta x_1}$

2.3 Beispiele

a) $f(x, y, z) = x^5y^2z^3 + xy + z^2$
$\frac{\delta f}{\delta x} = 5x^4y^2z^3 + y$
$\frac{\delta f}{\delta y} = 2yx^5z^3 + x$
$\frac{\delta f}{\delta z} = 3z^2x^5y^2 + 2z$

b) $f(x, y, z) = e^{2x}e^y + z^2 \sin(x)$
$\frac{\delta f}{\delta x} = e^{2x}2e^y + \cos(x)z^2$
$\frac{\delta f}{\delta y} = e^{2x}e^y$
$\frac{\delta f}{\delta z} = 2z \sin(x)$

c) $f(x, y, z) = e^x \sin(xy) + yze^z$
$\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy)y$
$\frac{\delta f}{\delta y} = e^x \cos(xy)x + ze^z$
$\frac{\delta f}{\delta z} = ye^z + yze^z$

2.4 Linearisierung von Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ersetze das Funktionsgebirge im Punkt (x,y,z) durch die Tangentialebene ε. Dieses ε wird aufgespannt durch die beiden Tangenten an die beiden Schnittfunktionen (siehe Abb. 2).

„Heißt nichts anderes als ich ersetze die Funktion durch die Tangente. Dadurch kann man eine schwierige Funktion durch eine einfachere ersetzen.“

2.5 Linearisierungsformel

$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + \frac{\delta f}{\delta x}(x, y)dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x, y)dy$

„Mit dieser Formel können wir die Funktion im Punkt (x,y) durch die Tangentialebene ersetzen.“

2.6 Beispiel

Linearisiere $f(x, y) = x^2y^3$ bei $x = 2, y = 1$
$\frac{\delta f}{\delta x} = 2xy^3$
$\frac{\delta f}{\delta y} = 3y^2x^2$
$f(x + dx, y + dy) \approx x^2y^3 + 2xy^3 \cdot dx + 3y^2x^2 \cdot dy$
$f(2, 1) = 4$

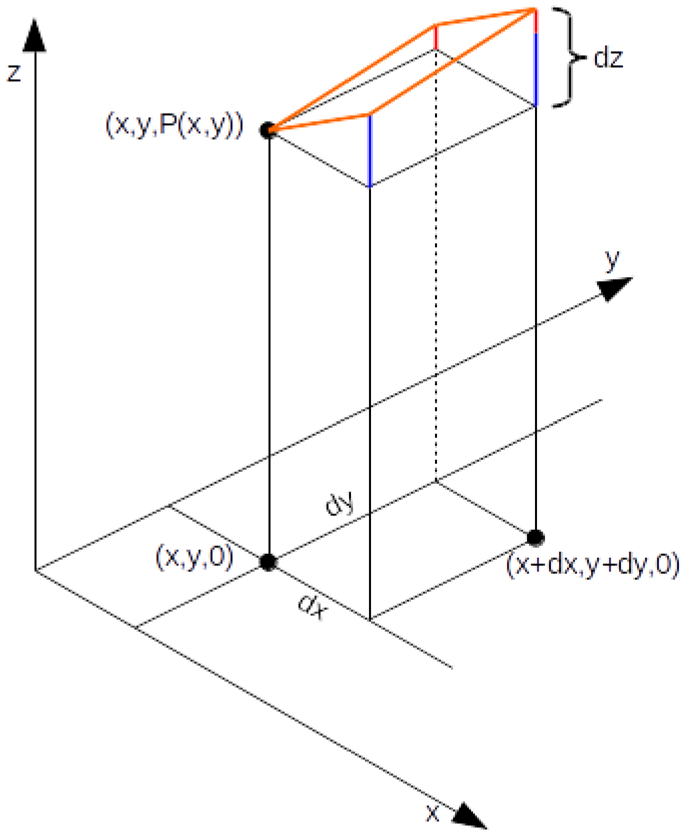


Abbildung 2: Die orangenen Tangenten an die blaue und die rote Schnittfunktion spannen eine Tangentialebene auf. Diese entspricht dem ε. Es gilt: blaue Schnittfunktion: $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)dx$, rote Schnittfunktion: $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)dy$ und dz $= \frac{\delta f}{\delta x}(x,y)dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)dy$

$\frac{\delta f}{\delta x}(2,1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$
$\frac{\delta f}{\delta y}(2,1) = 3 \cdot 4 = 12$
$\Rightarrow f(2+dx, 1+dy) \approx 4 + 4 \cdot dx + 12 \cdot dy$
Test mit $dx = 0.1, dy = -0.1$
$f(2.1, 0.9) = 2.1^2 0.9^3 = \mathbf{3.214...}$
$f(2+0.1, 1-0.1) \approx 4 + 4 \cdot 0.1 - 12 \cdot 0.1 = 4 + 0.4 - 1.2 = \mathbf{3.2}\checkmark$

2.7 Verallgemeinerung

$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, ..., x_n + dx_n) \approx f(x_1, ..., x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n$

2.8 Beispiel

Linearisiere $f(x,y,z) = x\sin y + y\cos z$ bei (0.5, 1, 0.9)
$f(0.5,1,0.9) = 0.5\sin 1 + 1\cos 0.9 = 1.042$
$\frac{\delta f}{\delta x} = \sin(y) \widehat{=} \sin(1) = 0.841$
$\frac{\delta f}{\delta y} = x\cos(y) + \cos(z) \widehat{=} 0.5\cos 1 + \cos 0.9 = 0.892$
$\frac{\delta f}{\delta z} = -y\sin z \widehat{=} -1\sin 0.9 = -0.783$
Test: $f(0.5+dx, 1+dy, 0.9+dz) \approx 1.042 + 0.841dx + 0.892dy - 0.783dz$ z.B.: $f(0.5+0.1, 1+0.1, 0.9-0.1) \approx ... = 1.293$. Der exakte Wert: $f(0.6, 1.1, 0.8) = 1.301...$

„In der Mathematik gilt: Wenn man sich nicht sicher ist, immer den Winkel im Bogenmaß eingeben.“

2.9 Anwendung der Linearisierung - Die Fehlerrechnung

Gegeben ist $f(x_1,...,x_n)$. Die Größen $x_1,...,x_n$ werden gemessen, wobei $x_1 = \overline{x_1} + w_1$ (wahrer Wert, Messwert und Fehler), ..., $x_n = \overline{x_n} + w_n$.
Wahres Ergebnis: $e = f(x_1,...,x_n)$
Fehlerhaftes Ergebnis: $\overline{e} = f(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$
$\Rightarrow e = f(\overline{x_1}+w_1,...,\overline{x_n}+w_n)$. Wir linearisieren an der Messstelle: $e = f(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) + \frac{\delta f}{\delta x_1}(\overline{x_1},...,\overline{x_n})w_1 + ... + (\overline{x_1},...,\overline{x_n})w_n$. Die Fehler $w_1,...,w_n$ kennt man nicht. Gegeben sind die maximalen Fehler der Messwerte: $x_i = \overline{x_i} \pm \Delta x_i$. Der maximale Fehler des Ergebnisses ist:

$$\left|\frac{\delta f}{\delta x_1}(\overline{x_1},...,\overline{x_n})\Delta x_1\right| + ... + \left|\frac{\delta f}{\delta x_n}(\overline{x_1},...,\overline{x_n})\Delta x_n\right|$$

2.10 Beispiel

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2\sin(x_2) + x_3x_4\cos x_2$
$x_1 = 10m \pm 5cm$
$x_2 = 40° \pm 1° \widehat{=} 0.01745rad$
$x_3 = 12m \pm 6cm$
$x_4 = 7m \pm 4cm$
$f(10m, 40°, 12m, 7m) = 126.6m^2$
$\frac{\delta f}{\delta x_1} = 2x_1\sin x_2 \widehat{=} 2\cdot 10\sin 40° = 12.85$
$\frac{\delta f}{\delta x_2} = x_1^2\cos x_2 - x_3x_4\sin x_2 \widehat{=} 22.61$
$\frac{\delta f}{\delta x_3} = x_4\cos x_2 \widehat{=} 5.36$
$\frac{\delta f}{\delta x_4} = x_3\cos x_2 \widehat{=} 9.19$
maximaler Fehler $= |12.85\cdot 0.05| + |22.61\cdot 0.01745| + |5.36\cdot 0.06| + |9.19\cdot 0.04| = 0.64 + 0.39 + 0.32 + 0.37 =$ (von $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ und Δx_4) $= 1.73$

2.11 Die Richtungsableitung

Wir betrachten $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun die Richtungsableitung des Vektors $v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ aufstellen (Abb. 3). Dazu betrachten wir die Funktion entlang der Geraden g (Abb. 4) und erhalten: $f_v(x_1,...,x_n) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x_1,...,x_n)+h(v_1,...,v_n)) - f(x_1,...,x_n)}{h}$

2.12 Beispiel

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2,x_3) \to x_1x_2 + 2x_3$
$\tilde{v} = (1,2,2), |v| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3, v = \frac{1}{3}(1,2,2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

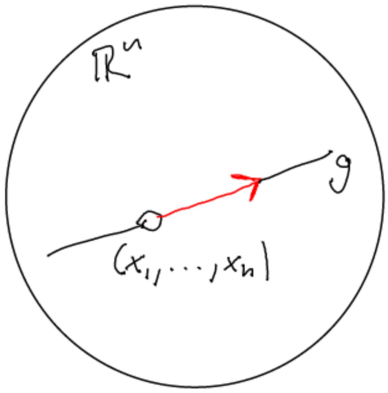


Abbildung 3: Der rote Vektor v liegt auf der Geraden g und im Raum $\mathbb{R}^n$

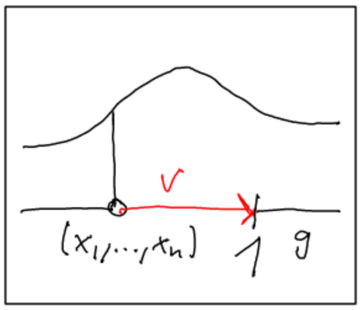


Abbildung 4: Wir betrachten die Funktion entlang g.

$f_v(x_1,x_2,x_3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x_1,x_2,x_3)+h(v_1,v_2,v_3))-f(x_1,x_2,x_3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x_1+\frac{1}{3}h,x_2+\frac{2}{3}h,x_3+\frac{2}{3}h))-f(x_1,x_2,x_3)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x_1+\frac{1}{3}h,x_2+\frac{2}{3}h,x_3+\frac{2}{3}h))-x_1x_2-2x_3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x_1x_2+x_1\frac{2}{3}h+\frac{1}{3}hx_2+\frac{2}{9}h^2+2x_3+\frac{4}{3}h-x_1x_2-2x_3}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{9}h + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3} \Rightarrow f_v(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}$

2.13 Definition

Wiederholung Richtungsableitung: $f_v(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h\cdot v)-f(x)}{h}$

Definition 2.1. $f : \mathbb{R}^n \to R$
Der Vektor $(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n})$ *heißt der Gradient von* f *bei* x.

Satz 2.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$v = (v_1, ..., v_n) mit |v| = 1$ *Dann gilt:* $f_v(x_1, ..., x_n) = (v_1, ..., v_n) \cdot \frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}$
$f_v(x) = v \cdot$ *Gradient von* f($\widehat{=}$ *Skalarprodukt:* $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_2 + y_2$)

Beweis. $f(x_1 + dx_1, ..., x_n + dx_n) \approx f(x_1, ..., x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n$
$f(x_1 + hv_1, x_2 + hv_2, ..., x_n + hv_n) \approx f(x_1, ..., x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot h \cdot v_1 + ... + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h \cdot v_n$
Einsetzen der Grenzwertbildung:
$\lim\limits_{h\to 0} = \frac{f(x_1+hv_1,...,x_n+hv_n)-f(x_1,...,x_n)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1,...x_n)+\frac{\delta f}{\delta x_1}hv_1+...+\frac{\delta f}{\delta x_n}hv_n - f(x_1,...,x_n)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} = \frac{\delta f}{\delta x_1}v_1 + ... + \frac{\delta f}{\delta x_n}v_n =$ Gradient von f $\cdot\, v$ □

2.14 Beispiel von oben

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_3, v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$f_v(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \frac{\delta f}{\delta x_3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (x_2, x_1, 2) = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}$

2.15 Hausaufgabe

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2x_3 + x_3^2x_4$
Richtung $\tilde{v} = (1, -1, -1, 1)$
Richtungsableitung in: $(1, 0, 2, -1)$

2.16 Problem

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Folgende Fragen stellen wir uns:

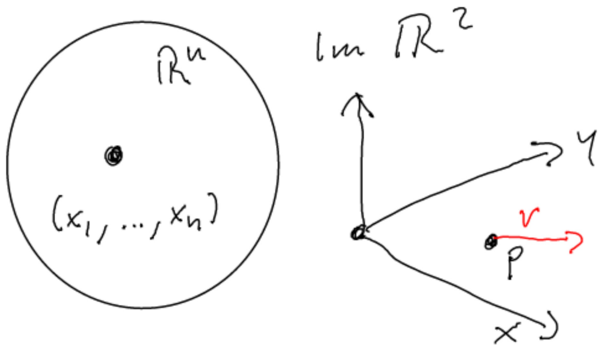


Abbildung 5: In welcher Richtung geht es am steilsten bergauf?

- In welcher Richtung v ist die Richtungsableitung am größten?
- In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten?

Abbildung 6: Gradient von f

- In welcher Richtung geht es am steilsten Bergauf? (Abb. 5)

$\cos = \frac{vgradf}{|v| \cdot |gradf|} = \frac{f_v}{|gradf|} \Rightarrow f_v = \cos\delta \cdot |gradf|$ (Abb. 6). f_v ist maximal bei $\cos\delta = 1$, d.h. bei $\delta = 0°$. Die Richtungsableitung ist maximal in Richtung gradf. Die maximale Richtungsableitung ist $|gradf|$.

2.17 Beispiel

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 2x_3^2$
Punkt: (1,2,-2)
In welcher Richtung wächst f am stärksten?
$gradf = (3x_2, 3x_1, 4x_3)$
$gradf(1, 2, -2) = \underline{(6, 3, -8)}$ (gesuchte Richtung)
Die maximale Steigung ist $|gradf| = |(6, 3, -8)| = \sqrt{36 + 9 + 64} = \sqrt{109}$
Steigungswinkel $\alpha = 84,5°$

2.18 Hausaufgabe

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2 - x_3x_4 + x_2x_3^2$
Punkt: (2,1,-3,2)
In welcher Richtung wächst f am stärksten?
Wie groß ist dort der Steigungswinkel?

Lösung //TODO

3 Integration von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\int_B f$ ist das Volumen des „Zylinders“ über B (von B bis zur Funktion, vgl. Abb. 7).

3.1 Annäherung

Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht (Abb. 8).
Sei $\tilde{f} : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$
$(x, y) \to f(x, y)$ für $(x, y) \in B, 0$ sonst

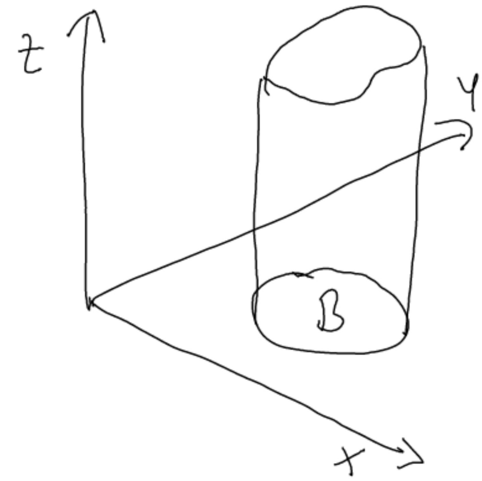


Abbildung 7: Das Volumen soll dem Integral $\int_B f$ entsprechen. Dabei ist die Fläche B beliebig und der obere „Deckel“ des „Zylinders“ entspricht irgendeinem „Funktionsgebirge“

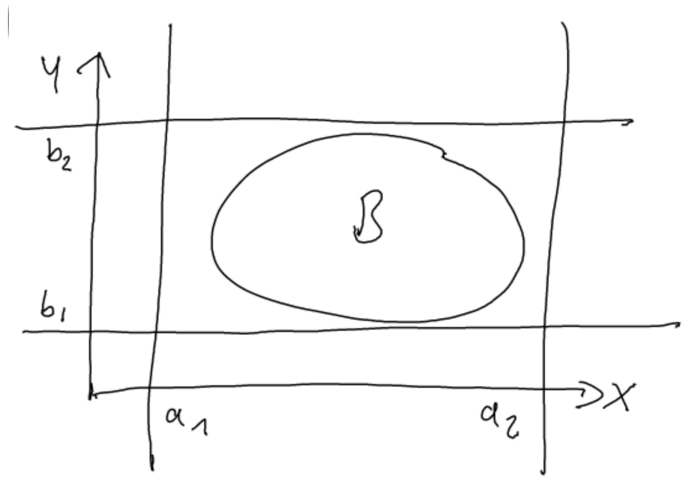


Abbildung 8: Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht $f : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$

3.2 Annäherung durch Scheiben

Nun näheren wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an (Abb. 9).

$\int_B f(x,y) \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{(\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(z_i, y)dy)\Delta x)}_{\text{Das Volumen als Summe der einzelnen Scheiben}} \to \sum_{i=1}^n g(z_i) \cdot \Delta x \xrightarrow[n\to\inf]{} \int_{a_1}^{a_2} g(x)dx$

$= \int_{a_1}^{a_2} (\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dy)dx$ (für $g(z_i)$ vgl. Abb. 10)

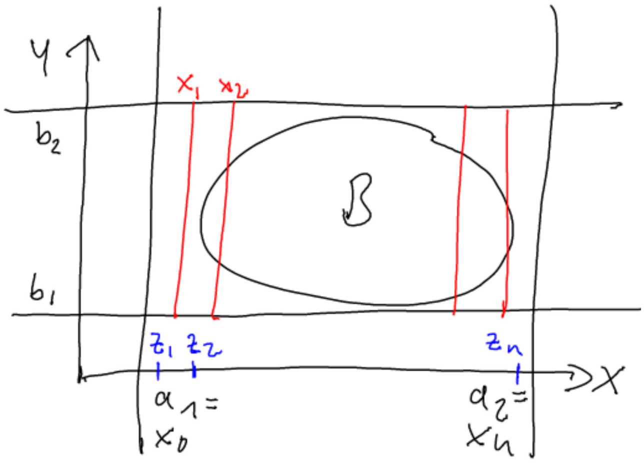


Abbildung 9: Nun näheren wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an.

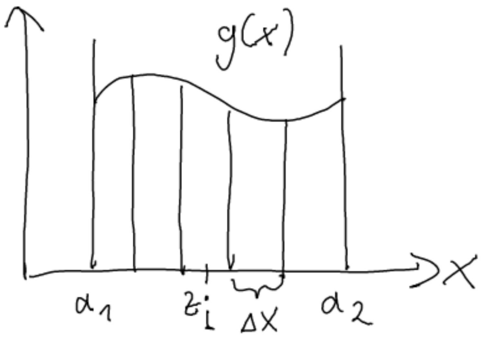


Abbildung 10: Querschnittsfläche bei x. Das Ergebnis ist irgendeine Funktion $g(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dy$

also: $\int_B f(x, y) = \int_{a_1}^{a_2}(\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(x, y)dy)dx$ (Doppelintegral über die gelben Querschnitte)

analog: $\int_B f(x, y) = \int_{b_1}^{b_2}(\int_{a_1}^{a_2} \tilde{f}(x, y)dx)dy$ (Doppelintegral über die roten Querschnitte)

3.3 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x, y) = 1 + xy^2$
$\int_B f(x, y)$ (vgl. Abb. 11)
Als erstes integrieren wir über die gelben Querschnitte:
$\int_B f(x, y) = \int_0^3(\int_0^2(1 + xy^2)dy)dx = \int_0^3(x + \frac{1}{3}xy^3)|_{y=0}^{y=2}dx = \int_0^3(2 + \frac{1}{3}x \cdot 8)dx$
$= \int_0^3(2 + \frac{8}{3}x)dx = 2x + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2|_{x=0}^{x=3} = 2 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 9 = 6 + 12 = 18$

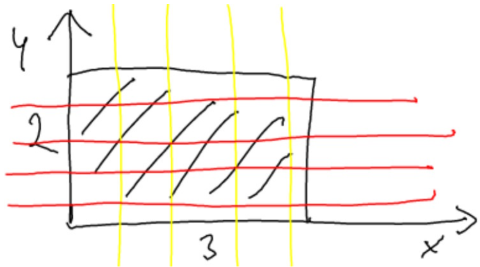


Abbildung 11: Flächenberechnung durch Integration über die gelben oder roten Querschnitte

Nun integrieren wir über die roten Querschnitte. Es muss das gleiche rauskommen:
$\int_0^2 (\int_0^3 f(x,y)dx)dy = \int_0^2 (\int_0^3 (1 + xy^2 dx)dy = \int_0^2 (x + \frac{1}{2}x^2y^2)_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 (3 + \frac{1}{2} \cdot 9y^2)dy = 3y + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3}y^3|_{y=0}^{y=2}\ 3 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 8 = 6 + 12 = 18$

3.4 Beispiel

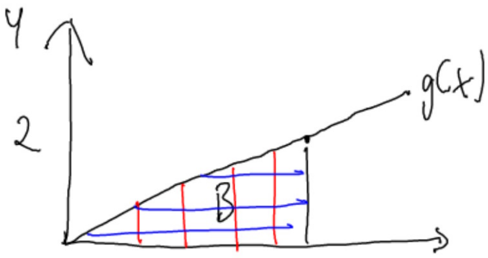


Abbildung 12: Berechnung der Dreiecksfläche unterhalb von g(x) mit Hilfe der Querschnitte.

$f(x,y) = xy^2$
$\int_B f(x,y) = ?$
$g(x) = \frac{2}{5}x$

$\int_B f(x,y) = \int_0^5 (\int_0^{g(x)} f(x,y)dy)dx = \int_0^5 (\int_0^{\frac{2}{5}x} (xy^2)dy)dx = \int_0^5 ((x \cdot \frac{1}{3}y^3)|_{y=0}^{y=\frac{2}{5}x})dx$
$= \int_0^5 (x \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{5}^3))dx = \int_0^5 (x^4 \cdot \frac{8}{375})dx = \frac{8}{375} \cdot \frac{1}{5}x^5|_0^5 = \frac{8}{375 \cdot 5} \cdot 3125 = 13,33...$
Andere Reihenfolge (blaue Querschnitte):
$g(x) = \frac{2}{5}x$
$y = \frac{2}{5}x \Rightarrow x = \frac{5}{2}y$
$\int_B f = \int_0^2 (\int_{\frac{5}{2}y}^5 (f(x,y)dx)dy) = \int_0^2 (\int_{\frac{5}{2}y}^5 (xy^2)dx)dy = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2y^2)|_{\frac{5}{2}y}^{x=5} dy = \int_0^2 (\frac{1}{2} \cdot 25y^2 - \frac{1}{2}y^2(\frac{5}{2}y)^2)dy = \int_0^2 (\frac{25}{2}y^2 - \frac{25}{8}y^4)dy = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3}y^3 - \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{5}y^5|_0^2 = \frac{25}{6} \cdot 8 - \frac{5}{8} \cdot 32 = 13,33...$

4 Flächenberechnung und Volumenberechnung

4.1 Flächenberechnung

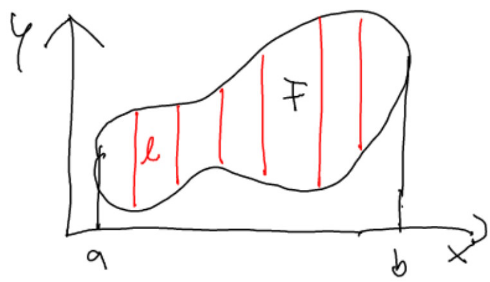


Abbildung 13: Näherungsweise bekommen wir den Flächeninhalt der Fläche F, wenn wir die Summe der Streifen/Rechtecke aus der Länge der Zwischenstellen z_i und der Breite Δx berechnen.

$F \approx \sum_{i=1}^{n} l(z_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b l(x)dx$

4.2 Volumenberechnung

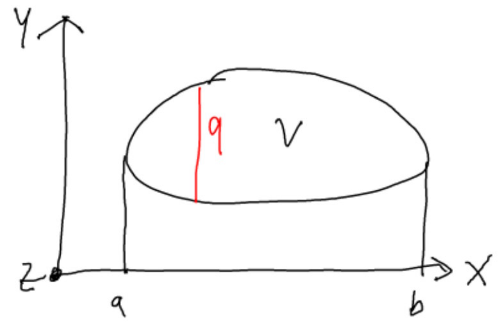


Abbildung 14: Irgendein Körper im $\mathbb{R}^3$. Und wir berechnen sein Volumen.

Körper im $\mathbb{R}^3$. Wie ist das Volumen?
$V \approx \sum_{i=1}^{n} q(z_i) \cdot \Delta x \to \int_a^b q(x)dx$

4.3 Beispiel Kugelvolumen

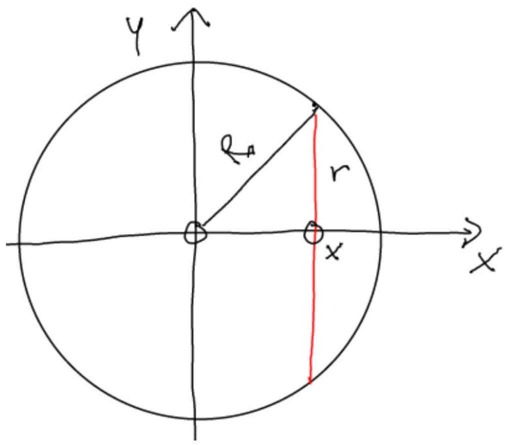


Abbildung 15: Berechnung des Kugelvolumens mit Hilfe der Streifensummen und des dazugehörigen Integrals.

Radius R
$r^2 + x^2 = R^2$
$q(x) = r^2\pi$
$q(x) = (R^2 - x^2)\pi$

$\frac{1}{2}V = \int_0^R((R^2-x^2)\pi)dx = \pi \int_0^R(R^2-x^2)dx = \pi[R^2x-\frac{1}{3}x^3]_{x=0}^R = \pi[R^3-\frac{1}{3}R^3] = \pi\frac{2}{3}R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}R^3\pi$

4.4 Beispiel aus der Wahscheinlichkeitsrechnung

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist Dichte, wenn:

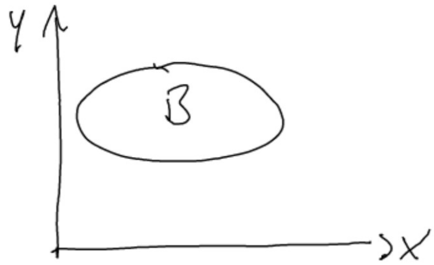


Abbildung 16: Dem Bereich B wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

- $f(x,y) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1$

Dem Bereich wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet: $P(B) = \int_B f(x,y)$

5 Höhere partielle Ableitungen

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to f(x,y) = x^2y + sin(xy)$
f_x partielle Ableitung nach x
$f_{x,y}$ erst nach x, dann nach y ableiten.

Die verschiedenen Ableitung der o.g. Funktion:

- $f_x = 2xy + \cos(xy)y$
- $f_y = x^2 + \cos(xy)x$
- $f_{x,x} = 2y - y\sin(xy)y$
- $f_{y,y} = -x\sin(xy)x$
- $f_{x,y} = 2x + [-x\sin(xy)y + \cos(xy)]$
- $f_{y,x} = 2x + [-y\sin(xy)x + \cos(xy)]$

Es fällt auf, dass hier gilt: $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.1 Beispiel zur Wiederholung

$f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$
$f_x = 2xy + \cos(xy) \cdot y$
$f_{x,y} = 2x + [-\sin(xy)] \cdot y + \cos(xy)]$
$f_y = x^2 + \cos(xy) \cdot x$
$f_{y,x} = 2x + [-y\sin(xy) \cdot x + \cos(xy)]$
Hier $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.2 Allgemein gilt

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Sind $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ stetig, so ist $f_{x,y} = f_{y,x}$

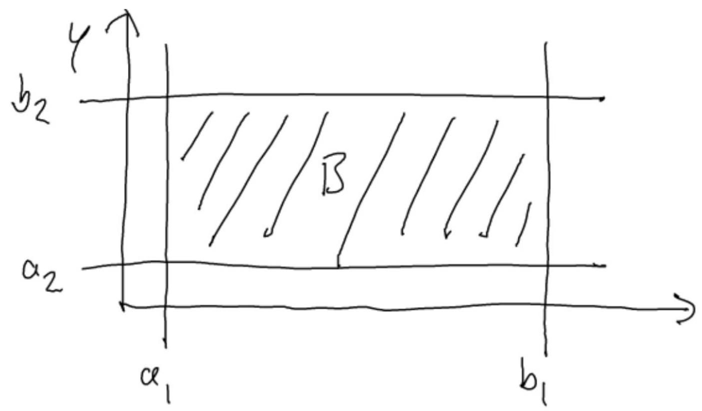


Abbildung 17: Beweis $f_{y,x} = f_{x,y}$

Beweis. Wir berechnen: $\int_B f_{x,y}$ und $\int_B f_{y,x}$

1.) $\int_B f_{x,y} = \int_{a_1}^{b_1}(\int_{a_2}^{b_2} f_{x,y}dy)dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y)|_{y=a_2}^{y=b_2}dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(xb_2) - f_x(x,a_2)dx$
$= f(xb_2) - f(xa_2)|_{x=a_1}^{x=b_1}$
$= [f(b_1,b_2) - f(b_1,a_2)] - [f(a_1,b_2) - f(a_1,a_2)]$

2. $\int_B f_{y,x} = \int_{a_2}^{b_2}(\int_{a_1}^{b_1} f_{y,x}dx)dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(x,y)|_{x=a_1}^{x=b_1}dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(b_1y) - f_y(a_1y)dy$
$= f(b_1y) - f(a_1y)|_{y=a_2}^{y=b_2} = [f(b_1,b_2) - f(a_1,b_2)] - [f(b_1,a_2) - f(a_1,a_2)]$
$\Rightarrow \int_B f_{x,y} = \int_B f_{y,x}$ <u>für jedes B</u>
$\Rightarrow f_{y,x} = f_{x,y}$ (vgl. Abb. 17) □

5.3 Test

$f(x,y) = y \cdot e^x + \sin(xy^2)$
$f_x = y \cdot e^x + \cos xy^2 \cdot y^2$
$f_{x,y} = e^x + [-\sin(xy^2) \cdot 2yx \cdot y^2 + \cos(xy^2)2y]$
$f_y = e^x + \cos(xy^2) \cdot 2yx$
$f_{y,x} = e^x + 2y[-\sin(xy^2) \cdot y^2x + \cos(xy^2)]$

6 Extremwertaufgaben mit zwei Variablen

$f(x, y)$: Wir suchen ein relatives Maximum oder relatives Minimum. Eine notwendige Bedingung hierfür ist eine horizontale Tangentialeben, d.h. $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$.

Satz 6.1 (Rezept)**.** *f hat bei (x_0, y_0) einen relativen Extremwert, wenn:*

1. *$f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$*
2. *$\Delta = f_{x,x}(x_0, y_0) \cdot f_{y,y}(x_0, y_0) \cdot f_{x,y}(x_0, y_0)^2 > 0$*
   - *$f_{x,x}(x_0, y_0) < 0$ relatives Maximum*
   - *$f_{x,x}(x_0, y_0) > 0$ relatives Minimum*

   Ist $\Delta < 0$, so haben wir einen Sattelpunkt.
   Ist $\Delta < 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

6.1 Beispiel

$f(x, y) = xy - 27(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = xy - 27x^{-1} + 27y^{-1}$. Gibt es Extremwerte und wenn: Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

$f_x = y + 27x^{-2}$
$f_y = x - 27y^{-2}$
$f_{xx} = -54x^{-3}$
$f_{yy} = 54y^{-3}$
$f_{xy} = 1$
$f_{yx} = 1$
Kritische Punkte: $f_x = 0$ und $f_y = 0$
$I : y + 27x^{-2} = 0$
$II : y - 27x^{-2} = 0 \Rightarrow x = 27y^{-2}$ in I
$I : y + 27(27y^{-2})^{-2} = 0$
$y + 27 \cdot 27^{-2}y^4 = 0$
$y + 27^{-1}y^4 = 0 \Rightarrow y \neq 0$
$1 + 27^{-1}y^3 = 0$
$y^3 = (-1)27 \Rightarrow y = -3$

in II: $x - 27(-3^{-2}) = 0$
$x - 27(\frac{1}{-3}^{-2}) = 0$
$x - \frac{27}{9} = 0 \Rightarrow x = 3$
Also $(x_0, y_0) = (3, -3)$

Jetzt müssen wir das Delta Δ ausrechnen: $f_{x,x}(3, -3) \cdot f_{y,y}(3, -3) - f_{x,y}(3, -3)^2$
$= (-54 \cdot 3^{-3}) \cdot (54(-3)^{-3}) - 1 = (-\frac{54}{27})(-\frac{54}{27}) - 1 = (-2)(-2) - 1 = 3 < 0$

Jetzt müssen wir $f_{x,x}$ anschauen: $f_{x,x}(3, -3) = -2 < 0$
$\Rightarrow$ relatives Maximum bei (3,-3)

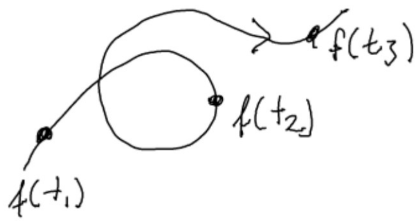


Abbildung 18: Die Bewegung eines Punktes im Raum

7 Abbildungen des Typs $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, t als Parameter. Das stellt die Bewegung eines Punktes im Raum dar. Es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^3$. Es wird nicht nur die Kurve gegeben, sondern wie ein Punkt die Kurve durchläuft (Abb. 18).

7.1 Beispiel

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t^3 \end{pmatrix}$

2. $f(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$ t Winkel, R Radius Kreis

7.2 Ellipse

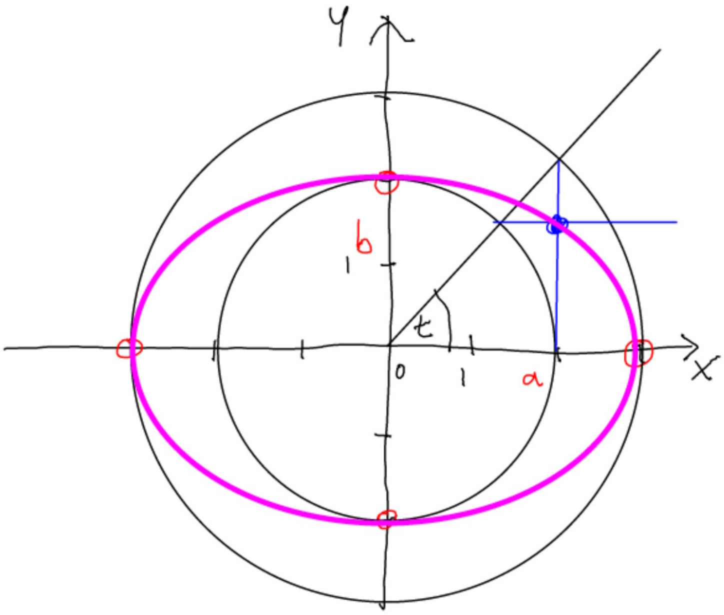


Abbildung 19: Eine Ellipse mit $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, Punktkoordinaten

Mit $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$, $a, b > 0$ (Halbachsen) wird eine Ellipse beschrieben (Abb. 19). In unserem Beispiel sind $a = 3$ cm und $b = 2$ cm.

7.3 Geschwindigkeitsvektor

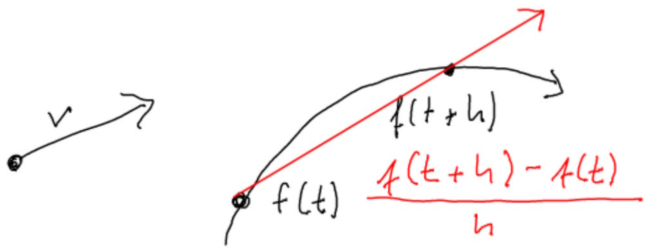


Abbildung 20: Geschwindigkeitsvektor links: Richtung, —v— Betrag der Geschwindigkeit. Rechts: Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor

Wir berechnen den Geschwindigkeitsvektor [$t \widehat{=}$ Zeit]. Der Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor berechnet sich durch $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, Test: $f(t) + h \cdot \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t+h)$. (Abb. 20)

Momentangeschwindigkeitsvektor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \underbrace{=}_{\mathbb{R}^2} \lim\limits_{h\to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ mit $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$. Der Ableitungsvektor ist der Geschwindigkeitsvektor. Er ist auch Tangentenvektor an die Kurve.

7.4 Beispiele

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$

2. Kreis $f(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$

$R = 1 : f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} f'(1) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$|f'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ cost \end{pmatrix} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0 \Rightarrow 90°$.

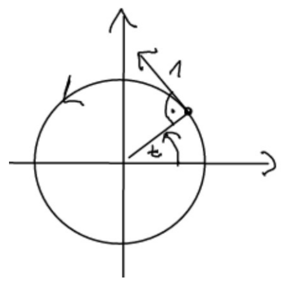


Abbildung 21: Geschwindigkeitsvektor im Kreis

Ellipse $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

7.5 Der Beschleunigungsvektor

Durchschnittsbeschleunigung (Abb. 22) zwischen t und t+h: $\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$

Test: $v(t) + h \cdot \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v(t+h)$

Momentanbeschleunigung: $b(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)$

$b(t) = f''(t)$

7.6 Merke

1. Die erste Ableitung $f'(t)$ entspricht dem Geschwindigkeitsvektor $f'(t) = v(t)$.

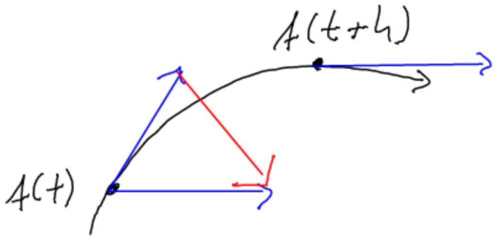


Abbildung 22: Der Beschleunigungsvektor

2. Die zweite Ableitung $f''(t)$ entspricht dem Beschleunigungsvektor $f''(t) = v'(t) = b(t)$.

7.7 Beispiele

1. $f(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, v(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6t \end{pmatrix}$

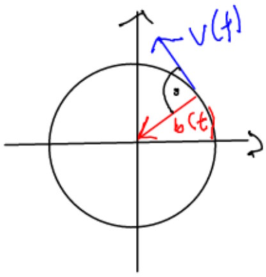


Abbildung 23: Beschleunigung im Kreis

2. Kreis Jetzt sehen wir uns die Beschleunigung im Kreis an (Abb. 23).

$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$v(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, |v| = 1$

$b(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}, |b| = 1$

Zentrifuge: $R = 5$ m, 2 Umdrehungen pro Sekunde, $\varphi = 4\pi t = \varphi(t)$

$f(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(4\pi t) \\ 5\sin(4\pi t) \end{pmatrix}$

$f'(t) = \begin{pmatrix} -5 \cdot 4\pi \sin(4\pi t) \\ 5 \cdot 4\pi \cos(4\pi t) \end{pmatrix}$

$f''(t) = -80\pi^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(4\pi t) \\ \sin(4\pi t) \end{pmatrix}}_{\text{Länge } 1}$

$|f''(t)| = 80\pi^2 = 789 \frac{m}{s^2}$

Ellipse $f(\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}$

$f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ b\cos\varphi \end{pmatrix} = v(\varphi)$

$f''(\varphi) = \begin{pmatrix} -a\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = b(\varphi)$

7.8 Linearisierung

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t f'(t)$

z.B. $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t\cos t^2 \end{pmatrix}$

$f(t + \Delta t) \approx \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t\cos t^2 \end{pmatrix}$

<u>Bei $t = 0$:</u>

$f(\Delta t) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta t = 0.1 : f(0.1) \approx \begin{pmatrix} 0 + 0.1 \\ 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin 0.1 \\ \cos 0.1 \\ \sin 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.99 \\ 0.01 \end{pmatrix} \checkmark$

7.9 Die Zykloide

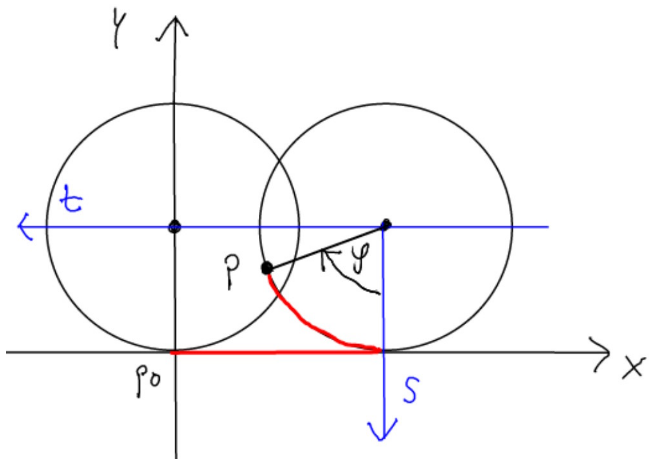


Abbildung 24: Ein Zykloid entsteht durch Abrollen eines Kreispunktes (rote Linie). Radius R, Parameter φ, t-s-Hilfskoordinatensystem (blau)

Ein Kreis rollt auf einer Geraden ab. Bahn des Punktes P. Im s-t-Hilfskoordinatensystem (vgl. Abb. 24): $s(\varphi) = R\cos\varphi, t(\varphi) = R\sin\varphi$, im x-y-System: $x(\varphi) = R\varphi - t = R\varphi - R\sin\varphi, y(\varphi) = R - s = R - R\cos\varphi$, also:

$f(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi - R\sin\varphi \\ R - R\cos\varphi \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix}$ (Zykloide)

Eine Umdrehung in 2π Sekunden, Radgeschwindigkeit: $\frac{2R\pi}{2\pi} = R$

$f'(\varpi) = R\begin{pmatrix} 1 - \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $f'(\pi) = R\begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|f'(\pi)| = 2R \Rightarrow$ Doppelt so schnell wie Radgeschwindigkeit.

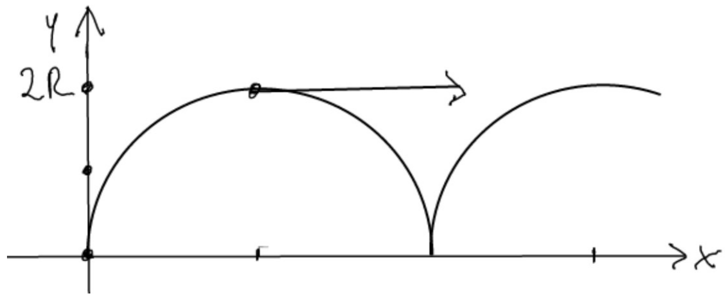


Abbildung 25: Die Bahn eines Zykloids

8 Bogenlänge einer Kurve

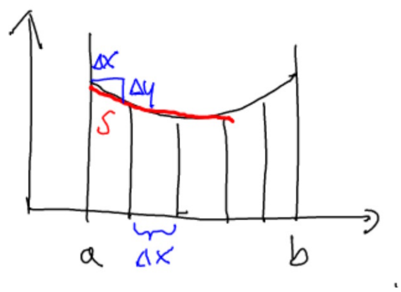


Abbildung 26: Wir wollen die Bogenlänge einer Kurve berechnen (s).

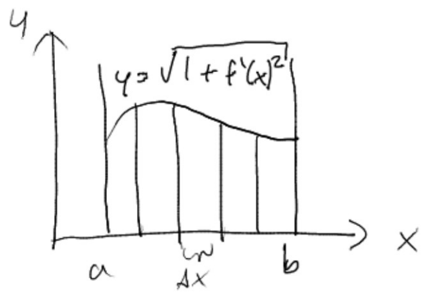


Abbildung 27: Die Bogenlänge für den Abschnitt a bis b.

$y = f(x), s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta t^2}, f'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$s \approx \sqrt{\Delta x^2 + f'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2} \approx \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2}$ (Abb. 26)
$L_{a,b} \approx \sum_{i=0}^{n-1} s_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ (Bogenlänge, vgl. Abb. 27)

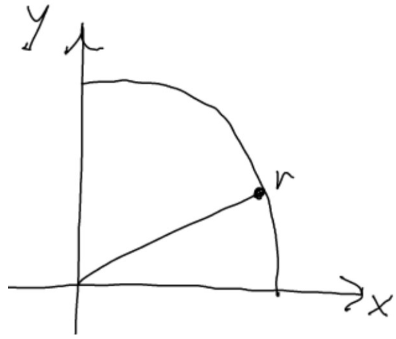


Abbildung 28: Beispiel Kreis

8.1 Beispiel Kreis

$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}, f(x) = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$L_{0,r} = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = r\int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}}dx$$

$$\underbrace{=}_{Formelsammlung} \left[r \arcsin \frac{x}{r}\right]_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r(\tfrac{\pi}{2} - 0) = r\tfrac{\pi}{2}$$

ganzer Kreis: $4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r$

8.2 Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

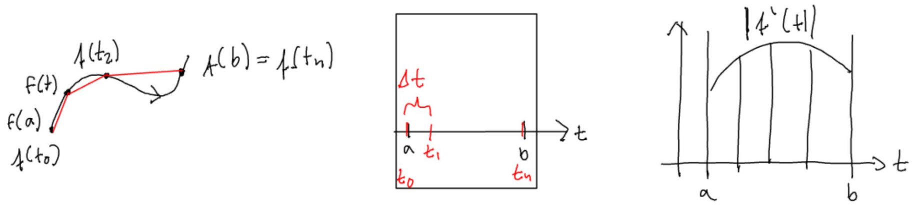


Abbildung 29: Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

$L_{a,b} \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i)| \cdot \Delta t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b |f'(t)|\,\Delta t$, also:
$L_{a,b}f(t) = \int_a^b |f'(t)|\,\Delta t$ (Integral über Betrag der Geschwindigkeit).

8.3 Beispiel Schraubenlinie

$f(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, v\cdot\varphi)$, v ist der Vorschub. Die Schraubenlinie befindet sich auf dem Schraubzylinder. Wickelt man den Schraubzylinder entlang der roten Linie (Abb. 30) ab, so entsteht ein Rechteck (Abb. 31). $L^2 = (2R\pi)^2 + (v2\pi)^2 = 4R^2\pi^2 + 4v^2\pi^2 = 4\pi^2(R^2 + v^2) \Rightarrow L = 2\pi\sqrt{R^2 + v^2}$

8.4 Hausaufgabe

$f(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, v\cdot\varphi),\ f'(\varphi) = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, v)$
$|f'(\varphi)| = \sqrt{R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi + v^2} = \sqrt{R^2 + v^2}$

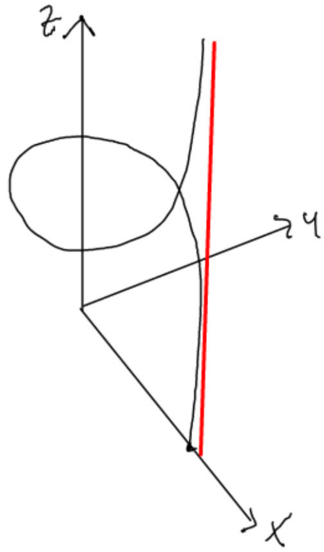


Abbildung 30: Eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$. Sie wird entlang der roten Linie abgewickelt

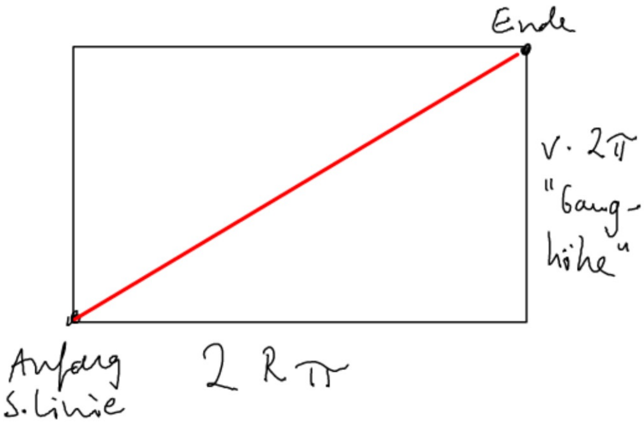


Abbildung 31: Durch das Abwickeln der Schraubenlinie entlang der roten Linie entsteht ein Rechteck. Die abgewickelte Schraubenlinie ist eine Gerade.

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + v^2} dt = \left[\sqrt{R^2 + v^2} t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \underline{\sqrt{R^2 + v^2} 2\pi}$$

8.5 Bogenlänge der Zykloide

$f(\varphi) = R\,(\varphi - \sin\varphi, 1 - \cos\varphi)\,,\ f'(\varphi) = R\,(1 - \cos\varphi, \sin\varphi)$
$|f'(\varphi)| = R\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + sin^2\varphi} = R\sqrt{1+\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + \sin^2\varphi} = R\sqrt{2-2\cos\varphi}$
$= 2R\sqrt{\frac{2-2\cos\varphi}{4}} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} \underbrace{=}_{\text{Formelsammlung}} 2R\sin\frac{\varphi}{2}$
$\int_0^{2\pi} |f'(\varphi)|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \left[-4R\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = -4R\,(\cos\pi - \cos 0) = -4R(-1-1)\ \underline{= 8r}$ (Länge), $\underline{\text{Weg: } 2\pi R}$

8.6 Die natürliche Parameterdarstellung

Definition 8.1. *Eine Parameterdarstellung k(t) heißt natürlich, wenn* $|k'(t) = 1|\,,\forall t$ *(konstante Geschwindigkeit 1).*

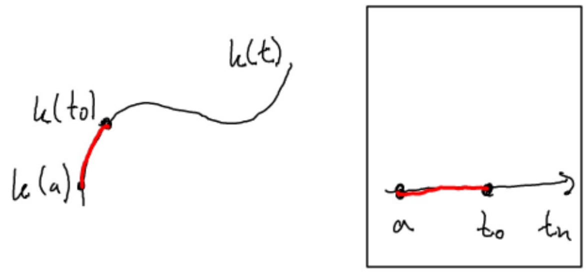


Abbildung 32: Parametrisierung nach der Bogenlänge. Eine Parameterdarstellung ist natürlich, wenn $L_{a,t} = t - a$

Sei k(t) natürlich: $L_{a,b} = \int_a^{t_0} |f'(t)|\,dt = \int_a^{t_0} 1dt = [t]_a^{t_0}\ \underline{= t_0 - a}$

8.7 Parametertransformation

Die Funktion $t(\theta)$ sei streng monoton wachsend (in Abb. 33 ist das so!) oder streng monoton fallend. Neue Parameterdarstellung der Kurve: $k(t(\theta)), \theta \in [c,d]$.
$t(\theta)$ steng monoton wachsend: Durchlaufsinn bleibt (gestrichelten Linien in Abb. 33).
$t(\theta)$ steng monoton fallend: anderer Durchlaufsinn.

8.8 Beispiel

$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in \sqrt{0, 2\pi}$
$f(\theta) = 2\theta + 1$ (monoton steigend)
$k(t(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta+1) \\ \sin(2\theta+1) \end{pmatrix}$
$t(c) = 0, 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$
$t(d) = 2\pi, 2d + 1 = 2\pi \Rightarrow d = \frac{2\pi - 1}{2}$

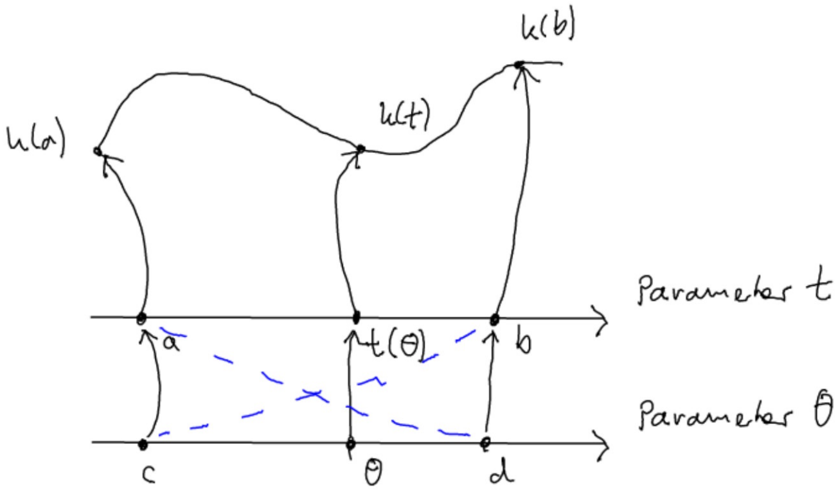


Abbildung 33: Parametertransformation

8.9 Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung

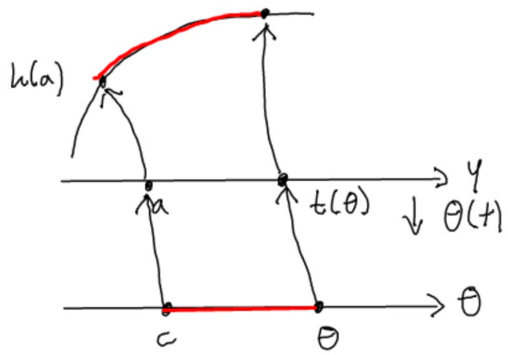


Abbildung 34: Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung. Die Bogenlänge soll so lang sein wie die Zeit (rote Linien).

Wir wollen eine Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung umwandeln (Abb. 34). $\theta(t) - c = \int_a^t |k'(s)|\, ds$. $t(\theta)$ ist die Umkehrfunktion von $\theta(t)$.

„Wir suchen das $t(\theta)$, haben aber nur $\theta(t)$.“

8.10 Beispiel Zykloide

Wir suchen die natürliche Parameterdarstellung der Zykloide. $R = 1, f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), a = 0 \leq t \leq b = \pi$ (halber Bogen bis 180°). Setze $c = 0 (d = 4), |f' t(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}$ (Wir ersetzen im Folgenden t durch s).
$\theta(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{s}{2} ds = \left[4 \cos \frac{s}{2}\right]_{s=0}^{s=t} = -4 \left(\cos \frac{t}{2} - \cos 0\right) = -4 \cos \frac{t}{2} + 4$
$\theta(t) = 4 - 4 \cos \frac{t}{2} = \theta$ Nun suchen wir die Umkehrfunktion $\rightarrow t(\theta)$ nach t

auflösen. $-4\cos\frac{t}{2} = \theta - 4$
$\cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{\theta}{4}$
$\frac{t}{2} = \arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right)$
$t = 2\arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right), 0 \leq \theta \leq 4$
$t(\theta) = 2\arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right)$
$f(t(\theta)) = \begin{pmatrix} 2\arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right)\right) \\ 1 - \cos\left[2\arccos\left(1 - \frac{\theta}{4}\right)\right] \end{pmatrix}$

8.11 Die Krümmung einer Kurve

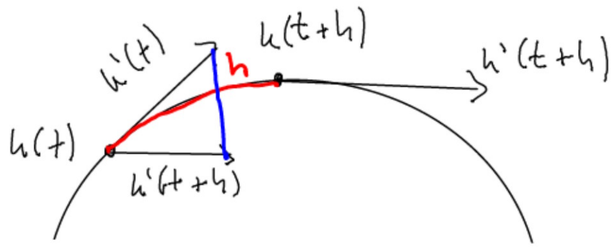


Abbildung 35: Die Krümmung einer Kurve

Die Parameterdarstellung $k(t)$ sei **natürlich**.
Krümmung $= \frac{\text{Winkeländerung des Geschwindigkeitsvektors}}{\text{Bogenlänge}}$
Krümmung $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{|k'(t+h)-k'(t)|}{|h|} = \lim\limits_{h\to 0} \left|\frac{k'(t+h)-k'(t)}{h}\right|$ „Zähler ≙ blaue Linie in Abb. 35“
Krümmungsvektor (ohne Betrag): $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k'(t+h)-k'(t)}{h} \underline{= k''(t)}$
Krümmung: $|k''(t)|$
Der Krümmungsvektor $k''(t)$ steht senkrecht auf $k'(t)$.

Annäherung durch Kreis Wir nähern die Kurve k im Punkt k(t) durch einen Kreis an (Abb. 35). $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k'(t+h)-k(t)}{h}$ mit $\alpha = \frac{h}{R}$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{|k'(t+h)-k(t)|}{|h|} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha}{\alpha \cdot R} = \frac{1}{R}$. Der Betrag der Krümmung ist somit $\frac{1}{R}$. Also: Der Krümmungsvektor zeigt in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts. Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{\text{Krümmung}}$. Die Ebene des Krümmungskreises wird aufgespannt durch den Geschwindigkeitsvektor und den Krümmungsvektor.

8.12 Beispiel Krümmung der Schraublinie

$f(t) = (R\cos t, R\sin t, v\cdot t)$. Wir brauchen die natürliche Parameterdarstellung und müssen daher eine Transformation machen: $\theta(t) - c = \int_a^t |f'(s)|\,ds$ mit $a = 0, c = 0$. $\theta(t) = \int_0^t |(-R\sin s, R\cos s, v)|\,ds = \int_0^t \sqrt{R^2\sin^2 s + R^2\cos^2 s + v^2}ds$
$= \int_0^t \sqrt{R^2+v^2}ds = \left[\sqrt{R^2+v^2}s\right]_0^t = t\sqrt{R^2+v^2} = \theta$
Auflösen nach t: $t = \frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}$
$\Rightarrow g(\theta) = \left(R\cos\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, R\sin\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, v\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}\right)$
$g'(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}}\sin\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}}\cos\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2+v^2}}\right)$
$g''(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}\sqrt{R^2+v^2}}\cos\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, -\frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}\sqrt{R^2+v^2}}\sin\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, 0\right)$
$= -\frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}\sqrt{R^2+v^2}}\underbrace{\left(\cos\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, \sin\frac{\theta}{\sqrt{R^2+v^2}}, 0\right)}_{\text{Länge 1}}$
$|g''(\theta)| = \frac{R}{R^2+v^2}$ Konstante Krümmung. R Radius Schraubzylinder. Krümmungskreisradius $= \frac{1}{\text{Krümmung}} = \frac{R^2+v^2}{R} = R + \frac{v^2}{R}$

8.13 Krümmung einer ebenen Kurve, die als Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben ist

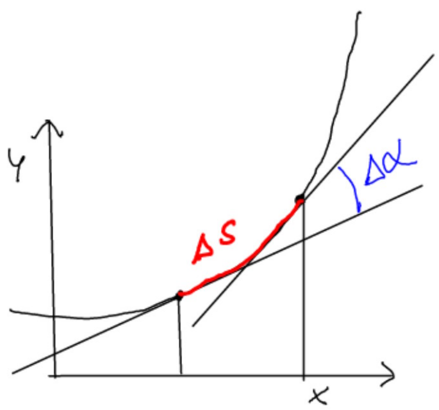


Abbildung 36: $\Delta\alpha$ ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten. s ist die Bogenlänge.

Krümmung von f bei x $\approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+f'(x)^2}$, $\alpha_1(x) = \arctan f'(x)$, $\alpha_2(s) = \alpha_1(x(s))$
$K(x) = \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{d\alpha_1}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}$ „Kettenregel!"
$\frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{1}{1+f'(x)^2}\cdot f''(x)$ „Ableitung von $\arctan x$ ist $\frac{1}{1+x^2}$"
Ableitung von x nach s, x(s) ist die Umkehrfunktion von s(x). Dafür gibt es eine Formel: $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$
Also: $K(x) = \frac{1}{1+f'(x)^2}\cdot f''(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$

Formel für die Krümmung bei x $K(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$

8.14 Ein einfaches Beispiel

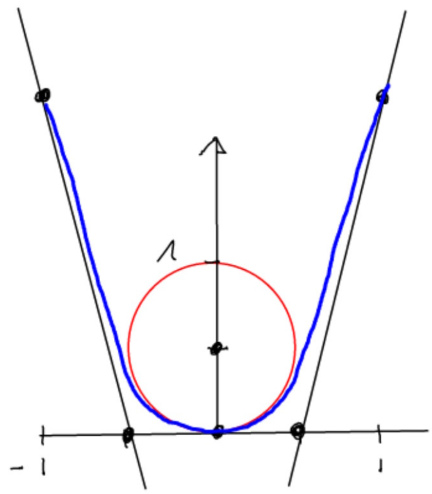


Abbildung 37: Beispiel Krümmungskreis mit dessen Hilfe die Funktion angenähert werden kann. Der Kreisradius beträgt $\frac{1}{2}$ und $f'(1) = 2$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 \Rightarrow K(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}^3}$
Die Krümmung im Scheitel, also bei 0: $K(0) = \frac{2}{1} = 2$
Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{\text{Krümmung}}$, also $\frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 37)

8.15 Krümmung einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung

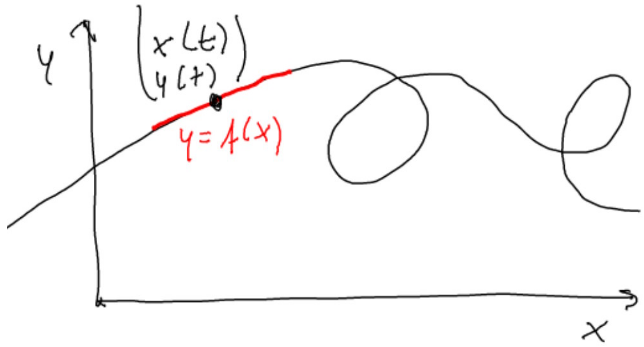


Abbildung 38: Krümmung einer ebenen Kurve

Steigung an der Stelle $x(t), y(t)$): $\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = f'(t) = \frac{df}{dx}(x(t))$ (Abb. 38)

Beide Seiten nach t ableiten: $\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2} = \frac{df}{dx \cdot dx} \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow f''(x) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}$

Krümmung beim Parameterwert t $K(t) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3\sqrt{1+\frac{\dot{y}}{\dot{x}}^2}^3}$

Krümmung bei t $K(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}\sqrt{1+\frac{\dot{y}}{\dot{x}}^2}\right)^3}$

8.16 Beispiel Ellipse

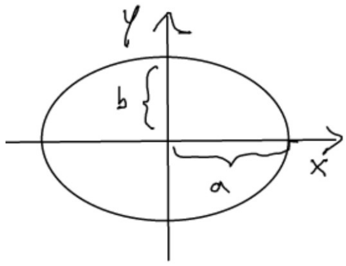


Abbildung 39: So kann eine Ellipse ausschauen ;-)

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$
$\dot{x} = -a\sin t, \ddot{x} = -a\cos t$
$\dot{y} = b\cos t, \ddot{y} = -bin\sin t$

$$K(t) = \frac{b\sin(t)a\sin(t)+b\cos(t)a\cos(t)}{\left(-a\sin t\sqrt{1+\frac{b\cos t}{-a\sin t}^2}\right)^3} = \frac{ab}{\left(-a\sin t\sqrt{1+\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}}\right)^3} = \frac{ab}{\left(\pm 1\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}^3\right)}$$

Krümmung an den Scheiteln $(0°, 90°)$ $\quad t = 0° : K(0) = \frac{ab}{\sqrt{b^2}^3} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$
$\Rightarrow$ Krümmungskreisradius $= \frac{b^2}{a}$

$t = 90° : K(\frac{\pi}{2}) = \frac{ab}{\sqrt{a^2}^3} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$ $\Rightarrow$ Krümmungskreisradius $= \frac{a^2}{b}$

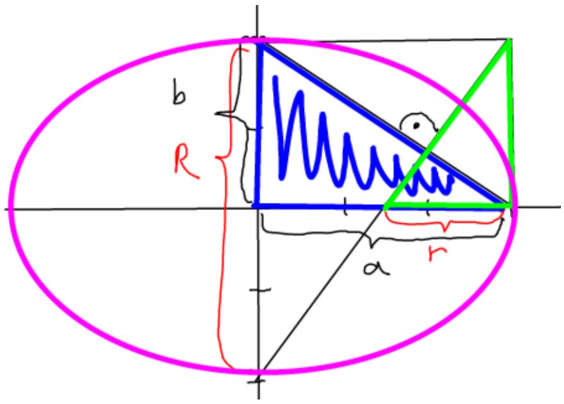


Abbildung 40: Konstruktion einer Ellipse mit $a = 3, b = 2$ mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken. R und r sind die Krümmungskreismittelpunkte.

Wir suchen nun ähnliche Dreiecke (Abb. 40), bei denen die Seiten Senkrecht zueinander sind. $\frac{b}{a} = \frac{a}{R} \Rightarrow bR = a^2 \Rightarrow R = \frac{a^2}{b}$
$\frac{b}{a} = \frac{r}{b} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$

9 Kurven in Polarkoordinaten

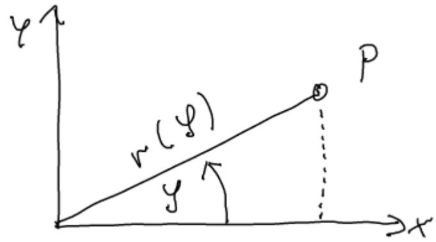


Abbildung 41: Kurven in Polarkoordinaten umrechnen. Gegeben $r(\varphi)$

Gegeben ist $r(\varphi) \Rightarrow$ übliche Parameterdarstellung: $x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin\varphi$

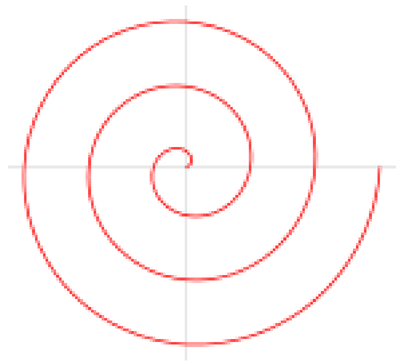


Abbildung 42: Beispiel Archimedische Spirale (Quelle: Wikipedia)

9.1 Beispiel Archimedische Spirale

$r(\varphi) = a \cdot \varphi, a > 0$ $x(\varphi) = a \cdot \varpi \cdot \cos\varphi$, $y(\varphi) = a \cdot \varpi \cdot \sin\varphi$, Tangentenvektor: $x'(\varphi) = a(1\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)$, $y'(\varphi) = a(1\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$.

Bei $\varphi = 0°$: $(x'(0), y'(0)) = a(1,0)$
Bei $\varphi = 2\pi$: $a(\cos 2\pi - 2\pi\sin 2\pi, \sin 2\pi + 2\pi\cos 2\pi) = a(1, 2\pi)$

9.2 Sektorflächeninhalt

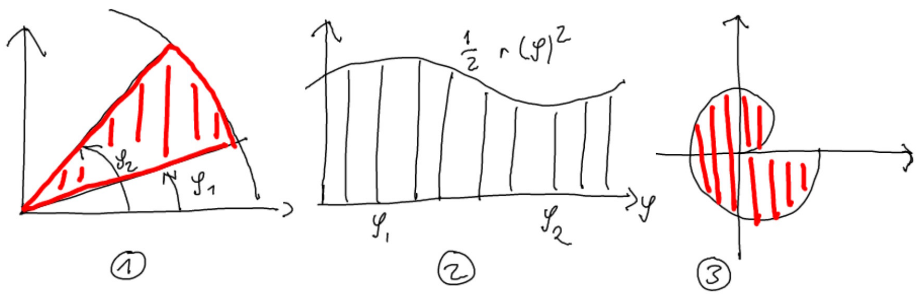


Abbildung 43: Sektorflächeninhalt: Annäherung durch Kreissegment (1), durch eine Funktion (2) und durch die Archimedische Spirale (3).

Annäherung durch Kreissegmente: $\sum_{i=1}^{n} \frac{r(\varphi_i)^2\pi}{2\pi}\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r(\varphi_i)^2 \Delta\varphi \ \overrightarrow{n \Rightarrow \infty}$ $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Archimedische Spirale: 2π
$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \left[\frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}a^2\pi^3$ mit $a = 1$: $\frac{4}{3}\pi^3 = 41.3$

9.3 Bogenlänge in Polarkoordinaten

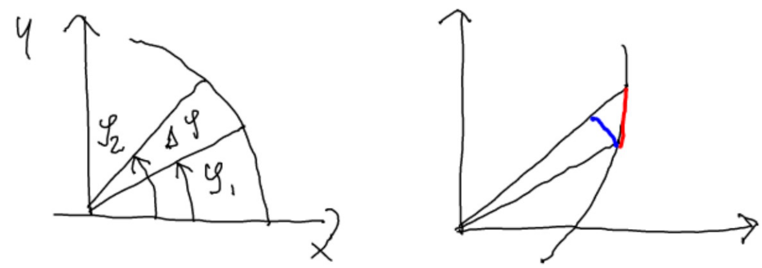


Abbildung 44: Bogenlänge in Polarkoordinaten

$\sum_{i=1}^{n} \frac{2r(\varphi_i)\pi}{2\pi} \cdot \Delta\varphi$, $\int_\alpha^\beta r(\varphi)dy$ ist **falsch!**

Formel für die Bogenlänge $\int_{t=a}^{t=b} |f'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt$
Polarkoordinaten: $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$ $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$
$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}^2\right) = (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2 = ...$
$= r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \Rightarrow$ **Bogenlänge** $= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d\varphi$

9.4 Beispiel Logarithmische Spirale

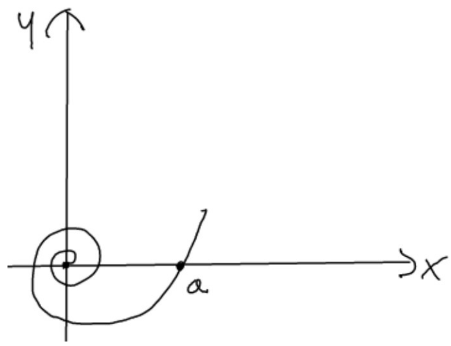


Abbildung 45: Logarithmische Spirale

Wir berechnen die Logarithmische Spirale (Abb. 45): $r(\varphi) = a \cdot e^{b\varphi}$, $a, b > 0$
$r'(\varphi) = abe^{b\varphi}$ $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2b^2e^{2b\varphi} + a^2e^{2b\varphi}}d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ae^{b\varphi}\sqrt{b^2+1}d\varphi = a\sqrt{b^2+1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{b\varphi}d\varphi$
$= a\sqrt{b^2+1}\left[\frac{1}{b}e^{b\varphi}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\left(e^{b\varphi_2} - e^{b\varphi_1}\right)$
Berechne: $\lim\limits_{\varphi\to\infty} \int_\varphi^0 \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d\varphi = \lim\limits_{\varphi\to\infty} \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}(\underbrace{e^{b\cdot 0}}_{1} - \underbrace{e^{b\varphi}}_{0}) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1} \Rightarrow$

Strecke ist endlich z.B. $a = b = 1 \Rightarrow$ Länge $= \sqrt{2}$

„Windet sich umendlich am Nullpunkt, aber die Strecke ist dennoch endlich.“

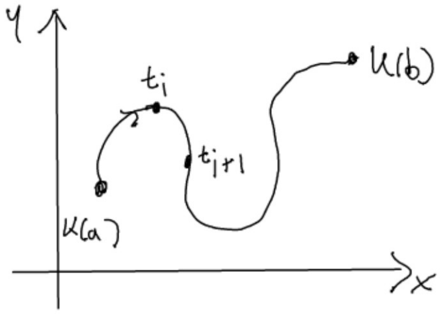


Abbildung 46: Linienintegral

9.5 Linienintegrale

9.5.1 1. Art:

Gegeben ist eine ebene Kurve (Abb. 46) in der xy-Ebene durch Parameterdarstellung K(t) und die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gesucht wird der Inhalt der abgewickelten Fläche.
$\sum_{i=1}^{n} F(K(t_i))\cdot|K'(t_i)|\cdot\Delta t \overrightarrow{n \to \infty} \int_a^b F(K(t))\cdot|K'(t)|\,dt = \int_a^b F(K_1(t), K_2(t))\cdot \sqrt{K_1'(t)^2 + K_2'(t)^2}dt$

9.6 Beispiel

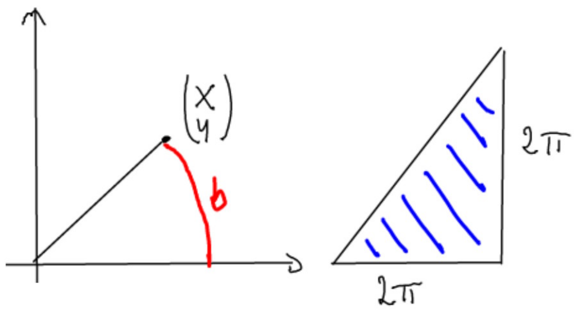


Abbildung 47: $F(x, y)$ = Länge des Bogens b im Einheitskreis und die abgewickelte Fläche mit $F = 2\pi^2$ (rechts)

$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ (Einheitskreis)
$\int_0^{2\pi} F(K(t))\,|K'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\cdot|-\sin t, \cos t|\,dt = \int_0^{2\pi} t\cdot 1 dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi}$
$= \frac{1}{2}4\pi^2 = 2\pi^2$ (vgl. Abb. 47)

9.7 Beispiel

$F(x, y) = x^2 + y^2$ $K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

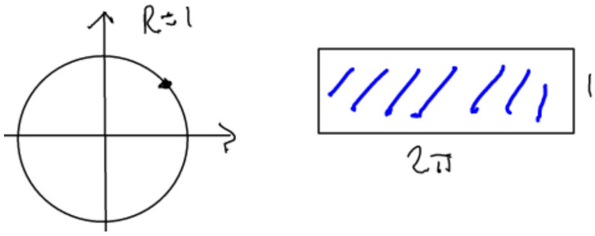


Abbildung 48: Beispiel und die abgewickelte Fläche (rechts)

$\int_0^{2\pi} F(K(t))\cdot|K'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\cdot|(-\sin t, \cos t)|\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\cdot 1dt = \int_0^{2\pi} 1dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$ (vgl. Abb. 48)

9.7.1 2. Art Arbeitsintegral (in der Ebene)

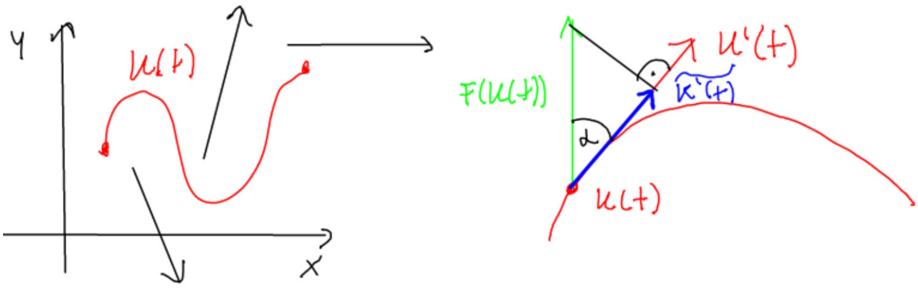


Abbildung 49: Arbeitsintegral und rechts ein Kraftvektor

Gegeben ist eine Kurve K(t), ein Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ und Kraftvektoren (Abb. 49). Arbeit ist Kraft mal Weg.

Arbeit $\approx \sum_{i=1}^n \left|\tilde{K}'(t)\right| \cdot |K'(t)| \cdot \Delta t$ $\sum_{i=1}^n |F(K(t))| \cdot \cos\alpha \cdot |K'(t)| \cdot \Delta t$ mit $\cos\alpha = \frac{F(K(t))\cdot K'(t)}{|F(K(t))|\cdot|K'(t)|} = \sum_{i=1}^n |F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)| \cdot \frac{F(K(t_i))\cdot K'(t_i)}{|F(K(t_i))|\cdot|K'(t_i)|} \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n F(K(t_i)) \underbrace{\cdot}_{\text{Skalarprodukt}} K'(t_i)\cdot\Delta t \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b F(K(t))\cdot K'(t)dt$ (Arbeitsintegral)

„NR: $\left|\tilde{K}'(t)\right| = |F(K(t))|\cos\alpha$"

„Wir rechnen mit Vorzeichen"

9.8 Beispiel Arbeitsintegral

Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}$, Kurve $K(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ von $t=0$ bis $t=1$ (Abb. 50).

$K'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F(K(t)) = F\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$

$\int_0^1 F(K(t))\cdot K'(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 8t^3 + 2t^3 dt = \int_0^1 10t^3 dt$
$= \left[10\cdot\frac{1}{4}\right]_0^1 = 2.5$

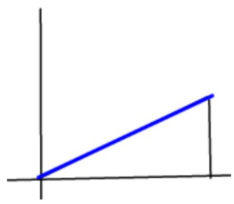


Abbildung 50: Arbeitsintegral: heir Gerade

9.9 Beispiel

Wir rechnen im $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorfeld $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Kurve $K(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)$ (Schraubenlinie)

$\int_0^{2\pi} F(K(\varphi)) \cdot K'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -1 d\varphi = -2\pi$

„Bei einer Umdrehung geht es 2π nach oben"

10 Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$

10.1 Linearisierung

$$f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) \end{pmatrix}$$

„Linearisierung mittels partieller Ableitung"

$$\approx \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) + \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + ... + \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \\ \vdots \\ f_m(x_m, ..., x_n) + \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + ... + \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}, \frac{\delta f_1}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}, \frac{\delta f_m}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

„Die mittlere Matrix nennen wir **Ableitungsmatrix**, hier: Ableitung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$"

10.2 Beispiel

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2^2 \\ x_2 \cdot x_3 \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$

Ableitungsmatrix: $\begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix}$

Linearisierung: $f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} \approx f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$

10.3 Kettenregel

$(g \circ f)(x + \Delta x) = g(f(x + \Delta x)) \approx g(\underline{f(x)} + \overline{f'(x) \cdot \Delta x}) \approx g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot [f'(x) \cdot \Delta x] = g(f(x)) + \underbrace{[g'(f(x)) \cdot f'(x)]}_{\text{Die Ableitungsmatrix von } g \circ f} \cdot \Delta x$

Kettenregel: $(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{Matrix}} \underbrace{\cdot}_{\text{Matrizenmultiplikation}} \underbrace{f'(x)}_{\text{Matrix}}$

10.4 Beispiel

$\mathbb{R}^2 \underset{\to}{f} \mathbb{R}^2 \underset{\to}{g} \mathbb{R}^2$ $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1x_2 \end{pmatrix}$

Direkt: $(g \circ f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ 3x_1^3x_2 \end{pmatrix}$

$(g \circ f)'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$

Mit der Kettenregel: $f'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix}$, $g'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_2, 3_x1 \end{pmatrix}$

$g'(f(x)) = g'\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix}$

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 3x_1^2x_2 + 6x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$

10.5 Hausaufgabe

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \to \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x^y$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

10.6 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \to \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x^y$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

1) direkt $(g \circ f)(x) = g \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} = x^{\cos x} = h(x)$

$h(x) = e^{\ln x \cdot \cos x}$, $h'(x) = e^{\ln x \cdot \cos x} \cdot \left(\frac{1}{x}\cos x - \ln x \sin x\right) = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x}\cos x - \ln x \sin x\right)$

2) mit der Kettenregel $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix}$

Aus der Formelsammlung: $x^n \to nx^{n-1}$, $a^y \to a^y \cdot \ln a$

$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^y \Rightarrow g' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(y \cdot x^{y-1}, x^y \cdot \ln x\right)$

$g'(f(x)) = g' \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} = \left(\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x\right)$

$g'(f(X)) \cdot f'(x) = \left(\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix} = \cos x \cdot x^{(\cos x)-1} - x^{\cos x} \ln x \sin x = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x}\cos x - \ln x \sin x\right)$

11 Parameterdarstellung von Flächen

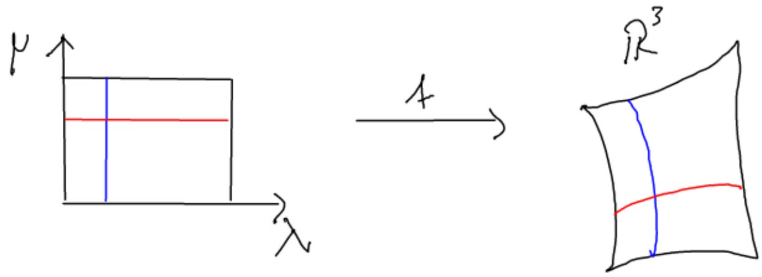


Abbildung 51: Das rote ist die λ-Parameterlinie (Immer die Variable), das blaue die μ-Parameterlinie

$f : F \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(\lambda, \mu) \\ f_2(\lambda, \mu) \\ f_3(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$

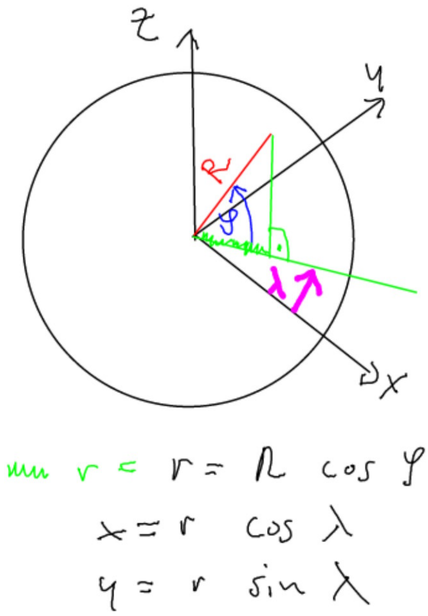


Abbildung 52: Beispiel Erdkugel: Erdachse: $z = R\sin\varphi$, Breite: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi\frac{\pi}{2}$, Länge: $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

11.1 Beispiel

Parameterdarstellung: Wir betrachten die Erdkugel um 0 mit Radius R.
$z = R\cos\varphi$
$x = R\cos\varphi$
$y = R\cos\varphi\sin\lambda$
λ-Parameterlinie ist der Breitenkreis, φ-Parameterlinie der Längenhalbkreis.

11.2 Parameterdarstellung des Drehellipsoids

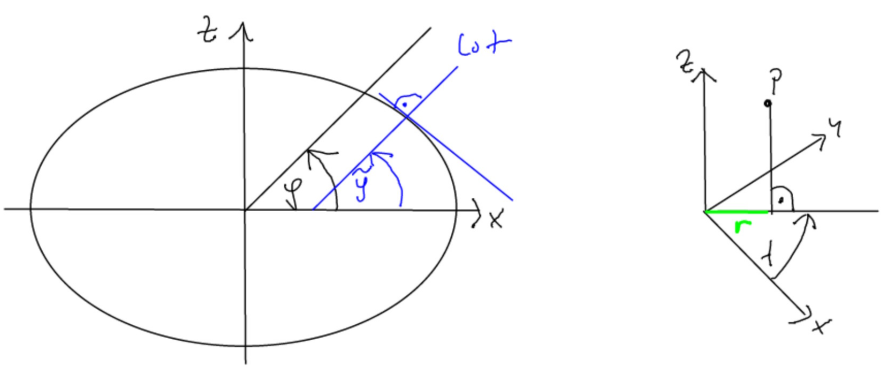


Abbildung 53: Parameterdarstellung des Drehellipsoids: $x = a\cos\varphi, z = b\sin\varphi$

Wir lassen eine Ellipse um ihre Nebenachse rotieren (Abb. 53).
$r = a \cos\varphi$
$x = r \cos\lambda$
$y = r \sin\lambda$
$\Rightarrow$ Parameterdarstellung
$x = a \cos\varphi \cos\lambda$
$y = a \cos\varphi \sin\lambda$
$z = b \sin\varphi$

„Wir konstruieren die Ellipse wie in Abb. 40“

φ-Parameterlinie: Längenhalbellipse, Länge λ
λ-Parameterlinie: Breitenkreis, die geographische Breite ist nicht φ sondern $\tilde{\varphi}$.

12 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen

12.1 Kurven in $\mathbb{R}^2$

$f(x, y) = 0$ Kreis um den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit Radius R.
Distanz $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^2\right) = R^2$
$\left|\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right|^2 = R^2$
$(x-a)^2 + (y+b)^2 = R^2$
Gerade: $ax + by + c = 0$
Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit a,b Halbachsen.
Sonderfall Kreis: $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \checkmark$

12.2 Lot auf eine Kurve

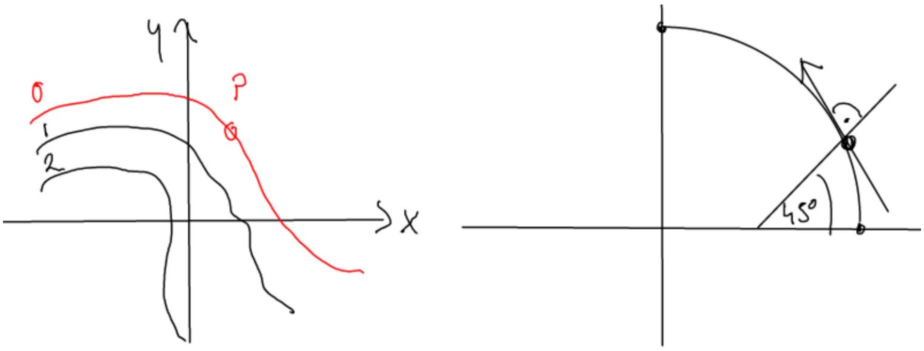


Abbildung 54: Höhenlinienplan: 0-er (rot)

$f(x,y) = 0,\ f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{cases}$ ist ein „Funktionsgebirge“. Die Kurve $f(x,y) = 0$ ist die 0-er Höhenlinie (Abb. 54). Der Ableitungsvektor in P (Gradient) zeigt in Richtung des steilsten Anstieg. Das ist senkrecht zur Höhenlinie. Das Lot ist also der Gradient. Lot im Punkt (x,y) ist $\left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right)$ (rechts in Abb. 54).

12.3 Ellipse

$f(x,y) = 0;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$ grad f $= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$

„grad ist der Gradient. “

Lot mit 45°: $\frac{2x}{a^2} = \frac{2y}{b^2} \Rightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} = \frac{y^2}{b^4}$ (setzen wir unten ein)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$

$\Rightarrow y^2 \frac{a^2+b^2}{b^4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$

z.B.: $a = 3, b = 2,\ y^2 = \frac{16}{9+4} = \frac{16}{13} \Rightarrow y = 1.1094$

$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^2} \cdot y = \frac{9}{4} \cdot 1.1094 \underline{= 2.496}$

12.3.1 andere Berechnungsmethode

Parameterdarstellung: $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$
Tangentenvektor: $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$
Lotvektor: $(b\cos\varphi, a\sin\varphi)$
45°: $b\cos\varphi = a\sin\varphi \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$
Für $b = 2, a = 3 : \frac{2}{3} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = 33,69°$
einsetzen: $(a\cos\varphi, b\sin\varphi) = (3\cos 33.69°, 2\sin 33.69°) = (2.496, 1.109)$

12.4 Implizite Darstellung von Flächen im $\mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = 0$. Kugel um 0 mit dem Radius R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
Drehellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (Abb. 55)
Rotation um Z-Achse: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

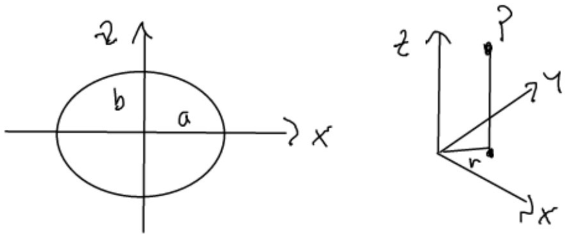


Abbildung 55: Implizite Darstellung von Flächen im $\mathbb{R}^3$

Lot in einem Flächenpunkt: $F : f(x, y, z) = 0, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Fläche F ist die „0-er Niveaufläche“.
Bewegt man sich im Flächenpunkt P in Richtung grad(f), so wächst die Funktion am stärksten. Der Gradient in P ist also das Lot auf die Fläche in P (Abb. 55).

12.5 Beispiel

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow grad(f) = (2x, 2y, 2z)$
Drehellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow grad(f) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{b^2}\right)$

13 Die komplexen Zahlen

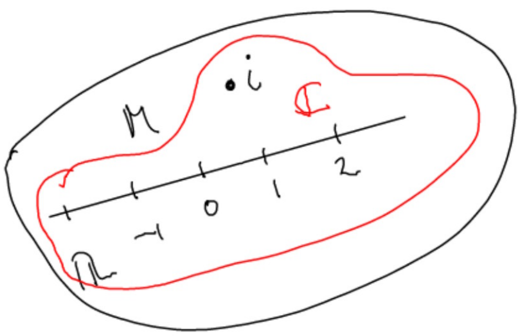


Abbildung 56: Menge der komplexen Zahlen. Menge M und Menge $\mathbb{C}$ (rot)

Wir starten mit den reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $(M, +, \cdot)$ sei eine Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (vgl. Abb. 56). In $(M, +, \cdot)$ sollen die üblichen Rechenregeln gelten. Das heißt, die Körperaxiome sollen gelten: „Einschub“

- $(M, +)$ kommutative Gruppe, 0 neutral
- $(M^*, \cdot)$ kommutative Gruppe, 1 neutral
- das Distributivgesetz muss gelten: $a(b + c) = ab + ac$

Wir nehmen an, es gibt ein $i \in M$ mit $i^2 = -1$.

Definition 13.1. *Wir definieren.:* $\mathbb{C} = \{x \in M : x = a + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \in \mathbb{C}$
$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac+adi+bci-bd)=(ac-bd)+(ad+bc)i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen bezüglich $+$ und $\cdot, \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Darstellung $a+bi$ ist eindeutig.

„Erinnerung: $i^2 = -1$“

Beweis. $a+bi=c+di$
$a-c=di-bi=(d-b)i$
angenommen: $d-b \neq 0 \Rightarrow i=\frac{a-c}{d-b}$ (!)
Also: $d=b$ und $a=c$ □

„(!) Da schlägt der Blitz ein.“

Definition 13.2. *Wir definieren:* $\mathbb{C}=\{x \in M : x=a+b\cdot i; a,b \in \mathbb{R}\}$
$+$*:* $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$\cdot$*:* $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Die reellen Zahlen sind in $\mathbb{C}$ eingebettet. $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x,0) \in \mathbb{C}$
$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$
$(x,0)\cdot(y,0)=(xy,0+0)$

In $(\mathbb{C},+,\cdot)$ gelten die Körperaxiome:

- assoziativ: $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
- kommutativ: $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$
- distributiv: $a(b+c)=ab+ac$

$(0,0)$ ist neutrales Element bezüglich der Addition, $(1,0)$ bezüglich der Multiplikation. Inverses Element bezüglich der Addition: $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$. Inverses Element bezüglich der Multiplikation: $(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)$. Schreibweisen: $x+(-y)=x-y$ und $x\cdot y^{-1}=\frac{x}{y}$

Definition 13.3. $i = (0,1)$
$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \mathrel{\widehat{=}} -1$
Die komplexe Zahl $(a,0)$ *bezeichnen wir auch als* a. $(a,b) = (a,0) + \underbrace{(b,0)\cdot(0,1)}_{(0,b)}$
$= a + bi$
$(a,b) = a + bi$ *Darstellung ist eindeutig.*

13.1 Zahlenebene

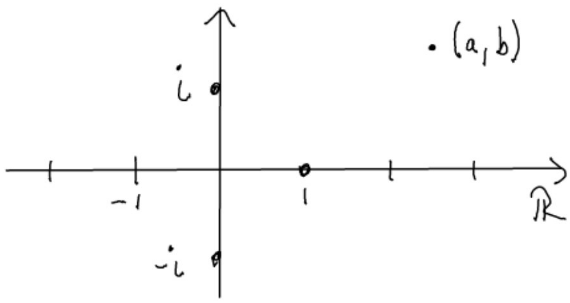


Abbildung 57: Zahlenebene: Addition $\Leftrightarrow$ Vektoraddition und $(-i)^2 = -1 \Leftrightarrow (0,-1)(0,-1) = (-1,0)$

Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition (Abb. 57). Spiegeln an der x-Achse (**konjugieren**): $(a,b) \to (a,-b) = \overline{(a,b)}$ und $a+bi \to a-bi$. Es gilt also: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
*** ist ein Automorphismus, d.h.

*** ist der Überstrich (vgl. Ziffer 2). Es lässt sich leider derzeit nicht anders darstellen.

1. *** ist bijektiv
2. $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$
3. $\overline{x\cdot y} = \bar{x}\cdot\bar{y}$

von 3.) $\overline{(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)} = \overline{x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1} = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
$\overline{(x_1,x_2)}\cdot\overline{(y_1,y_2)} = (x_1,-x_2)(y_1,-y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ □

Damit gilt z.B.:
$\overline{x + z^2y + y^4} = \bar{x} + \bar{z}^2\bar{y} + \bar{y}^4$
Polynom mit reellen Koeffizienten: $ax^4 + bx^4 + cx + d$ x Variable, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Ist x_0 eine Nullstelle, dann auch $\overline{x_0}$: $\overline{ax_0^4 + bx_0^2 + cx_0 + d} = \bar{0} \Leftrightarrow a\overline{x_0}^4 + b\overline{x_0}^2 + c\overline{x_0} + d$
Es gilt:

1. $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
2. $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

„$(a,b) = z$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$“

Beweis. (1) $\overline{z+\bar{z}} = \bar{z} + \bar{\bar{z}} = \bar{z} + z$
(2) $\overline{z\cdot\bar{z}} = \bar{z}\cdot\bar{\bar{z}} = \bar{z}\cdot z$ □

Es gilt: (1) Re z $= \frac{1}{2}(z+\bar{z})$
(2) Im z $= \frac{1}{2} \cdot i \cdot (\bar{z} - z)$ „$z = z_1 + iz_2$“

Beweis. (2) $\frac{1}{2} \cdot i \cdot (z_1 - iz_2 - z_1 - iz_2) = \frac{1}{2} \cdot i(-2iz_2) = (-1)(-1)z_2 = z_2$ □

13.2 $\sin, \cos, e$-Funktion im Komplexen

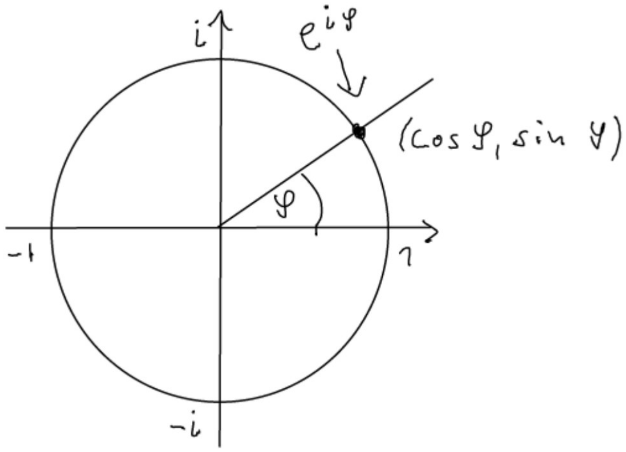


Abbildung 58: $\sin, \cos, e$-Funktion im Komplexen am Beispiel des Einheitskreises.

Reihendarstellung: (vgl. Abb. 58) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ „Setze einfach $x \in \mathbb{C}$“
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ...$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ...$
Es gelten die üblichen Rechenregeln z.B. $e^{x+y} = e^x e^y$.
(1) $\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + ...$

(2) $\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + ...\right) + \left(i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + ...\right)$
$= \left(1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + ...\right)$
Es gilt (1) = (2), also: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in \mathbb{R}$ (Eulersche Formel).
$(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ Geometrische Interpretation von + und $\cdot$ (vgl. auch Abb. 59).
+: Vektoraddition
$\cdot$: $z \cdot s = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, also Radien multiplizieren und Winkel addieren.
$|z| = |(z_1, z_2)| = r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist eine Drehstreckung.

13.3 Die n-ten Wurzeln von 1

Für welche komplexen Zahlen gilt $z^n = 1$? Es muss gelten: $|z| = 1$, z auf Einheitskreis. $(e^{i\varphi})^n = 1 \Rightarrow e^{i\varphi n} = 1$
φn Vielfaches von $2\pi \Leftrightarrow \varphi n = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \varphi = k \cdot \frac{2\pi}{n}$

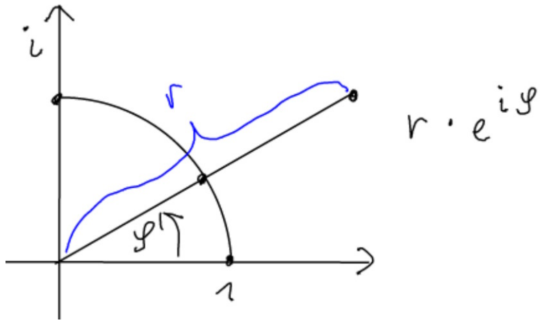


Abbildung 59: Geometrische Interpretation

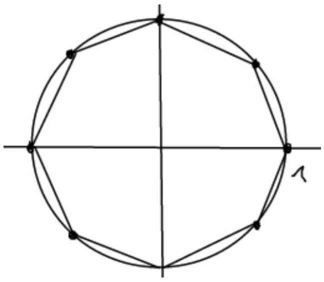


Abbildung 60: Die n-ten Wurzeln von 1 am Beispiel eines Einheitskreises und einem 8-Eck.

$1 \cdot \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, ..., n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ sind alle. Das sind die passenden Winkel. Regelmäßiges 8-Eck auf dem Einheitskreis (Abb. 60).

Allgemein 1 hat genau n n-te Wurzeln, ein regelmäßiges n-Eck auf dem Einheitskreis. Jede komplexe Zahl z hat genau n-te Wurzeln (regelmäßiges n-Eck auf Kreis um 0 mit Radius R, verdreht).

13.4 Bemerkung

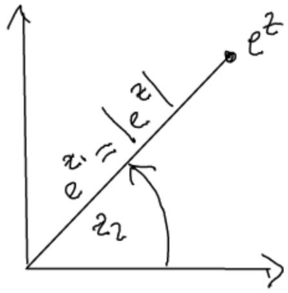


Abbildung 61: Bemerkung: e^z ist periodisch mit Periode 2π

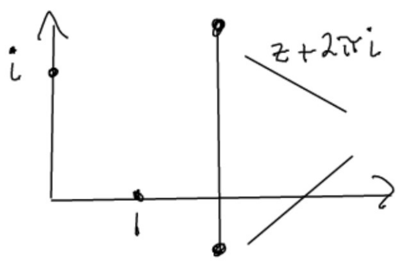


Abbildung 62: Bemerkung 2: $f(z) = e^z$, gleicher Funktionswert

$z \in \mathbb{C}, z = z_1 + iz_2$
$e^z = e^{z_1+iZ_2} = \underbrace{e^{z_1}}_{\text{reelle Zahl (Radius)}} \cdot \underbrace{e^{iZ_2}}_{\cos z_2 + i \sin z_2, \text{Einheitskreis zum Winkel} z_2}$ (Abb. 61 und 62)
$\underline{e^{z_1+iz_2+2\pi i}} = e^{z_1+i(z_2+2\pi)} = e^{z_1} \cdot e^{i(z_2+2\pi)} = e^{z_1} \cdot e^{iz_2} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1} \underline{= e^{z_1+iz_2}}$ (Abb. ??)

13.5 Polynome in $\mathbb{C}$

Sei $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ mit $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ Koeffizienten und x Variable.
In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom von Grad $\geq$ eine Nullstelle. x_0 ist Nullstelle von $P(x)$. $\underbrace{P(x)}_{\text{Grad m}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Grad n-1}} \cdot (x - x_0) \Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren:
$P(x) = c \cdot (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_n)$
Nullstellen $c_1, c_2, ..., c_n$, c Koeffizient vor x^n

„Durch die Nullstellen kann man dividieren.“

13.6 Beispiel

$P(x) = x^2 - 2ix - 5 = 0$
$x^2 - 2ix + i^2 = 5 + i^2$

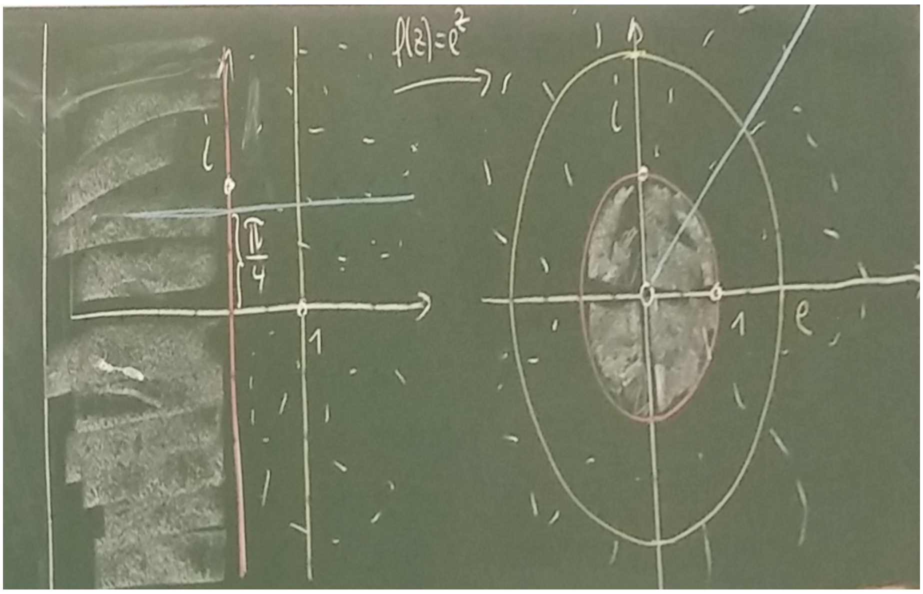


Abbildung 63: Ich habe vergessen, was die Grafik soll.

$(x-i)^2 = 4$
$x - i = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2 + i, x_2 = -2 + i$
Probe mit x_1:

1. $(2+i)^2 - 2i(2+i) - 5 = 4 + 4i - 1 - 4i + 2 - 5 = 0\checkmark$
2. $(x-x_1)(x-x_2) = (x-2-i)(x+2-i) = x^2+2x-ix-2x-4+2i-ix-2i-1$ $= x^2 - 2ix - 5\checkmark$

14 Differentialgleichungen (DGL)

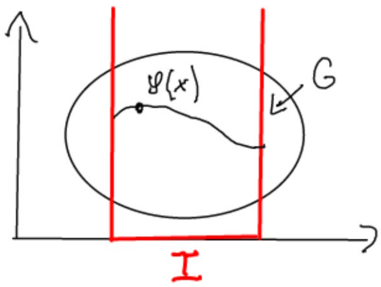


Abbildung 64: Differentialgleichungen (DGL)

Definition 14.1. $G \subset \mathbb{R}^2$
$$f : \begin{cases} G \to \mathbb{R} \textit{ stetig} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{cases}$$

(Abb. 64)
$y' = f(x,y)$ heißt Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung.
φ: Intervall $I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der DGL, wenn $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \forall x \in I$

Sonderfall: $y' = f(x)$ f nicht abhängig vom y-Wert.
$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(f)dt + c$ ist eine Lösung. $(\varphi'(x) = f(x))$. Es gilt auch $\underline{\varphi(x_0) = c}$

Allgemein: Es sei $\varphi(x)$ eine Lösung von $y' = f(x,y)$,ot $\varphi(x_0) = c$ $[\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))]$.

Es gilt: $\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)dt + c = \varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=c} + c$

$\Rightarrow \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)dt + c$
$\varphi(x) = f(x,\varphi(x))$

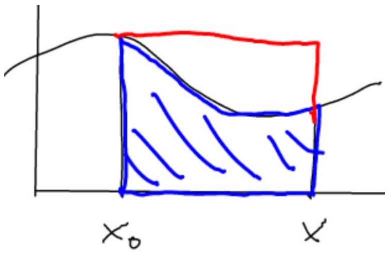
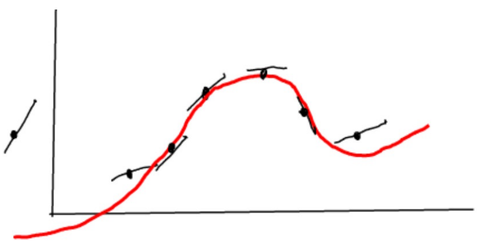


Abbildung 65: Gesucht ist die exakte Fläche (blau) - Näherung durch Rechteck (rot) - der Funktion $f(t,\varphi(t))$ unterhalb des Graphen.

$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt + c$. Damit kann man aber die gesuchte Funktion $\varphi(x)$ auch nicht ausrechnen! Wenn $|x - x_0|$ klein ist, so kann man $\varphi(x)$ näherungsweise berechnen (Abb. 65).
$\varphi(x) \approx (x - x_0) \cdot f(x_0, \varphi(x_0)) + c$
$\varphi(x) \approx (x - x_0) \cdot f(x_0, c) + c$ „Jetzt ned mitschreiben. “

14.1 Geometrische Interpretation



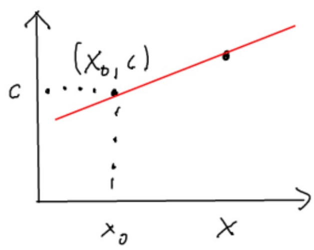


Abbildung 66: In jedem Punkt gibt es Steigungen, die passen müssen (links). Näherungslösung (rechts).

$y' = f(x,y)$ DGL und $\varphi(x) = f(x,\varphi(x))$

Die DGL gibt in jedem Punkt (x,y) eine Steigung $f(x, y)$ an. Gesucht ist die Funktion $\varphi(x)$, die passt (links in Abb. 66). $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$. Es gelte $\varphi(x_0) = c$ (rechts in Abb. 66).
Näherungslösung für $|x - x_0|$ klein: $\varphi(x) \approx c+(x-x_0)\cdot\varphi'(x_0) = c+f(x_0, \varphi(x_0)) = \underline{= c + f(x_0, c) \approx \varphi(x)}$

14.2 Ein System von DGL

$y_1' = f_1(x_1, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x_1, y_1, y_2)$
Lösung: φ_1, φ_1 mit $\varphi_1'(x) = f_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\varphi_2'(x) = f_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$

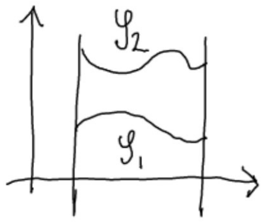


Abbildung 67: System von DGL

Allgemein:
$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$
$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$
$\vdots$
$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$

Lösung: Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_n$ (vgl. Abb. 67) mit
$\varphi_1'(x) = f_1(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n'(x))$
$\varphi_2'(x) = f_2(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n'(x))$
$\vdots$
$\varphi_n'(x) = f_n(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n'(x))$

Die fassen wir nun zusammen:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

Das ist die Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dabei ist x die Zeit, die Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^n$. Also ist

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \varphi_n'(x) \end{pmatrix}$$

der Geschwindigkeitsvektor.

$$f\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

f gibt zu jedem Zeitpunkt x und Raumpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ einen Vektor aus $\mathbb{R}^n$ an.

Lösung: $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

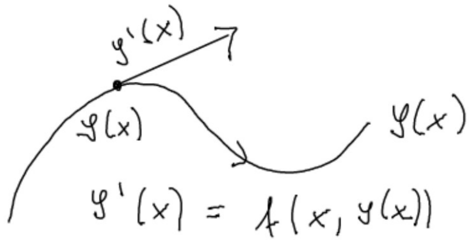


Abbildung 68: DGL und der Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(x)$

Die DGL gibt zu jedem Zeitpunkt x und Raumpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ einen Geschwindigkeitsvektor an. Gesucht ist die Bewegung im Raum $\varphi(x)$, die dazu passt (Abb. 68).

Gegeben: $\varphi(x_0) = y_0$. Falls $|x - x_0|$ klein $\Rightarrow$ Näherung: $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $\varphi(x_0) + f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot (x - x_0)$
Auch eine *normale* eindimensionale DGL (Abb. 69) kann man so auffassen:
$y' = f(x, y)$ Lösung $\varphi(x)$

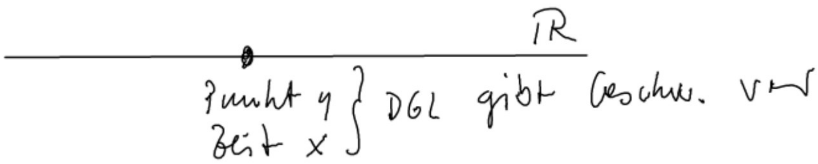


Abbildung 69: Eindimensionales DGL: Der Punkt y zur Zeit x $\Rightarrow$ Die DGL gibt die Geschwindigkeit vor.

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $\varphi(x)$ fassen wir als Bewegung eines Punktes auf der Geraden $\mathbb{R}$ auf. $\varphi'(x)$ ist dabei die Geschwindigkeit (Abb. **??**). Lösung: Bewegung eines Punktes, die dazu passt.

14.3 DGL n-ter Ordnung

Definition 14.2. *$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ heißt DGL n-ter Ordnung. Eine Lösung ist $\varphi(x) : I \to \mathbb{R}$ mit*
** $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ...\varphi^{(n-1)}(x))$*

Das kann man umformen in ein System von DGL (DGL-System):
$y^{(n)} = f(x, \underbrace{y}_{y_0}, \underbrace{y'}_{y_1}, ..., \underbrace{y^{(n-1)}}_{y_{n-1}})$
$y_0' = y_1 = f_1(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$
$y_1' = y_2 = f_2(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$
$\vdots$
$y_{n-2}' = y_{n-1} = f_{n-1}(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$

$y'_{n-1} = f(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$

Ist $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ ... \\ \varphi_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems, so ist $\varphi_0(x)$ eine Lösung von * in der Definition 14.2.

14.4 Lippschitzbedingung

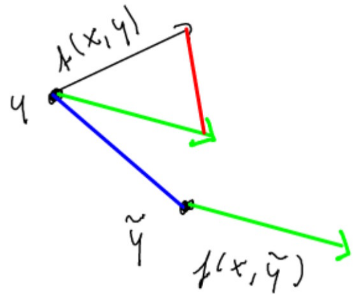


Abbildung 70: Die Lippschitzbedingung

Definition 14.3 (Lippschitzbedingung1)**.** $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \to f(x, y)$ *genügt der Lippschitzbedingung mit konstanter* $L > 0$*, wenn gilt:*
$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ *(vgl. Abb. 70)*

Diese Stunde werde ich bei Gelegenheit nachtragen.

15 Elementare Lösungsmethoden

Satz 15.1. *$y' = f(x) \cdot g(y)$ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt$
Es sei $\varphi(x)$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = (y_0)$. Dann gilt:
$G(\varphi(x)) = F(x)$
$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

Beweis. $\varphi(x_0) = y_0$
$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$
$\Rightarrow f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}$
$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t)dt \underbrace{=}_{Subst.} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)}dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)}dt$

□

15.1 Beispiel

$y' = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)}$ Anfangsbedingung: $\underbrace{\varphi(1)}_{x_0} = \underbrace{1}_{y_0}$.
$\int_{1}^{\varphi(x)} \frac{1}{t}dt = \int_{1}^{x} t^2 dt$
$= [\ln t]_1^{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x$
$\ln \varphi(x) - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$
$\varphi(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}}$

Test:
$\varphi(1) = e^0 = 1\checkmark$
$\varphi'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2} = \varphi'(x) \cdot x^2\checkmark$

15.2 Beispiel

$y' = y^2 \Rightarrow y' = \underbrace{1}_{f(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{g(y)}$ Anfangsbedingung: $\varphi(0) = c$

1. Fall $\underline{c = 0}$ (vgl. rote Linie in Abb. 71)
In diesem Fall erraten wir eine Lösung. An der Stelle 0 soll 0 rauskommen ($\varphi(0) = 0$). Deswegen machen wir einfach die Nullfunktion ($\varphi(x) = 0$).

2. Fall $\underline{c > 0}$ (vgl. grüne Linie in Abb. 71)
$\varphi(x)$ muss in diesem Fall großer als Null sein ($\varphi(x) > 0$).
$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)}dt$
$\int_0^x 1dt = \int_c^{\varphi(x)} \frac{1}{t^2}dt = \int_c^{\varphi(x)} t^2 dt$
$x = \left[(-t^{-1})\right]_c^{\varphi(x)} = (-\frac{1}{\varphi(x)} - (-\frac{1}{c})) = \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)}$ wird aufgelöst nach $\varphi(x) \Rightarrow$ $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{c} - x = \frac{1-cx}{c} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$
$\boxed{\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{1-cx} > 0, c > 0 \Leftrightarrow 1 - cx > 0 \Leftrightarrow 1 > cx \Leftrightarrow \frac{1}{c} > x \Rightarrow x < \frac{1}{c}}$ $\Rightarrow$ Funktion ist nur definiert für $x < \frac{1}{c}$.

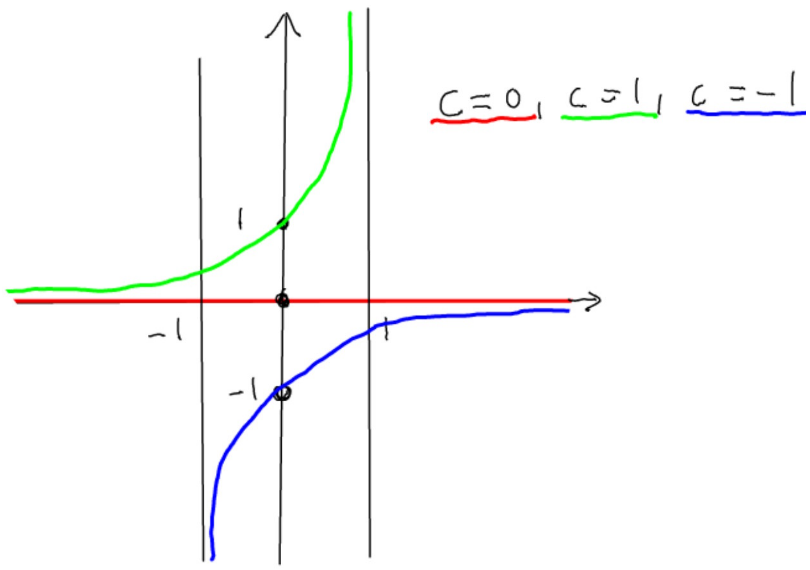


Abbildung 71: Beispiel für verschiedene Werte von c

3. Fall $\underline{c < 0}$ (vgl. blaue Linie in Abb. 71)
$\varphi(x) < 0$, $\varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$

$$\boxed{\frac{c}{1-cx} < 0 \Rightarrow ... \Rightarrow x > \frac{1}{c}}$$

15.3 Lineare DGL

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$ homogen, falls $b(x) = 0$

Satz 15.2. *$y'a(x) \cdot y$. Die Lösung $\varphi(x)$ mit $\varphi(x_0) = c$ ist:*
$\varphi(x) = c \cdot exp(\int_{x_0}^{x} a(t)dt)$ „Ich schreibe jetzt $exp(a)$ statt e^a "

Beweis. Durch Einsetzen beweisen wir: $\varphi(x_0) = c \cdot exp(\int_{x_0}^{x_0} a(t)dt) = c$
$\varphi'(x) = c \cdot exp(\int_{x_0}^{x} a(t)dt) \cdot a(x) = \varphi(x) \cdot a(x)$ □

15.4 Beispiel

$y' = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot y, \varphi(x_0) = c$

$\varphi(x) = c \cdot exp(\int_{x_0}^{x} t^2 dt) = c \cdot exp\left(\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{x_0}^{x}\right) = c \cdot exp(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x_0^3) = \varphi(x)$

15.5 Inhomogene DGL

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$
Sei $\varphi(x)$ eine Lösung der homogenen DGL: $y' = a(x) \cdot y$ und $\psi(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

Ansatz:
$\psi(x) = \varphi(x) = u(x) \Rightarrow \psi'(x) = \underline{\varphi' \cdot u + \varphi \cdot u'}$
$\psi'(x) = a \cdot \psi + b = \underbrace{a \cdot \varphi}_{\varphi'} \cdot u + b \underline{= \varphi' \cdot a + b}$

„Wir lassen jetzt (x) weg. Also φ statt $\varphi(x)$"

$\Rightarrow \varphi \cdot u' = b$
$\Rightarrow u' = \frac{b}{\varphi}$
$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + c$

Satz 15.3. *Die DGL sieht so aus:* $y' = a(x) \cdot y + b(x)$.
Die Lösung $\psi(x)$ *mit* $\psi(x_0) = c$ *ist:*

$\psi(x) = \varphi(x) \cdot (c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt)$ *mit* $\varphi(x) = exp(\int_{x_0}^{x} a(t)dt)$

Beweis. $\psi(x_0) = \varphi(x_0) \cdot (c + \int_{x_0}^{x_0} \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt) = \varphi(x_0) \cdot c = c$✓ □

15.6 Beispiel

$y' = 2xy + x^3$ mit $\psi(0) = c$
Zuerst lösen wir den vorderen Teil: $\varphi(x) = exp(\int_{x_0}^{x} 2tdt) = exp(\left[t^2\right]_0^x) = exp(x^2)$
$\Rightarrow \psi(x) = exp(x^2) \cdot (c + \int_0^x \frac{t^3}{e^{(t^2)}}dt)$
Jetzt versuchen wir das Integral auszurechnen: $\int_0^x \frac{t^3}{e^{(t^2)}}dt = \int_0^x t^3 \cdot e^{-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot 2tdt$
$\underbrace{=}_{\text{Subst. } s=t^2} \int_0^{x^2} \frac{1}{2}s \cdot e^{-s}ds = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \underbrace{s}_{f} \cdot \underbrace{e^{-s}}_{g'} ds$
$\underbrace{=}_{\text{Produktregel}} \frac{1}{2}([-se^{-s}]_0^{x^2} - \int_0^{x^2} -e^{-s}ds) = \frac{1}{2}(-x^2 \cdot e^{-x^2} - (e^{-x^2} - 1)) = \frac{1}{2}(-x^2 \cdot e^{-x^2} - e^{-x^2} + 1)) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + \frac{1}{2}$
Das ausgerechnete Integral setzen wir jetzt ein:
$\Rightarrow \psi(x) = e^{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + \frac{1}{2}\right) = e^{x^2}(c + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(x^2+1)$

„Substitutionsregel: $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$“

„NR: $f(s) = s, f'(s) = 1, g(s) = -e^{-s}, g'(s) = e^{-s}$“

15.7 DGL vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

Substituiere: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \Rightarrow y' = z' \cdot x + z \Rightarrow z' \cdot x + z = f(z)$
$z' = \underbrace{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{[f(z) - z]}$

„Typ getrennte Variable“

Satz 15.4 (Genauer Satz)**.** $y' = f(\frac{y}{x})*$
$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)**$
*φ ist genau dann Lösung von * mit $\varphi(x_0) = y_0$, wenn $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ Lösung von ** mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ ist.*

15.8 Beispiel

$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, Bedingung: $\varphi(x_0) = y_0$
$z = \frac{y}{x}$, $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x}(1 + z + z^2 - z) = \underbrace{\frac{1}{x}}\underbrace{(1+z^2)}$ (getrennte Variable),
Bedingung: $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$
$\int_{\frac{y_0}{x_0}}^{\psi(x)} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}dt = [\arctan]_{\frac{y_0}{x_0}}^{\psi(x)} = [\ln|t|]_{x_0}^{x} = \arctan\psi(x) - \arctan\frac{y_0}{x_0} = \ln|x| - \ln|x_0|$
$\arctan\psi(x) = \arctan\frac{y_0}{x_0} + \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|$
$\psi(x) = \tan[\arctan\frac{y_0}{x_0} + ln\left|\frac{x}{x_0}\right|]$
$\varphi(x) = x \cdot \psi(x) = x \cdot \tan[\arctan\frac{y_0}{x_0} + ln\left|\frac{x}{x_0}\right|]$

15.9 Beispiel

$y' = (x+y)^2$ Substituiere $z = x + y, z' = 1 + y', y' = z' - 1$
$z' - 1 = z^2$
$z' = \underbrace{(z^2+1)} \cdot \underbrace{1}$

„getrennte Variable“

$\int_{x_0}^{x} 1dt = \int_{z_0}^{\psi(x)} \frac{1}{t^2+1}dt = [t]_{x_0}^{x} = [\arctan t]_{z_0}^{\psi(x)}$

$x - x_0 = \arctan \psi(x) + \alpha$
$\arctan \psi(x) = x + \beta$
$\psi(x) = tan(x + \beta)$
$\psi(x) = x + \varphi(x)$
$\varphi(x) = \psi(x) - x \underline{= \tan(x + \beta) - x}$. Aus der Bedingung folgt β bzw. kann ausgerechnet werden.

15.10 Numerische Lösung von DGL

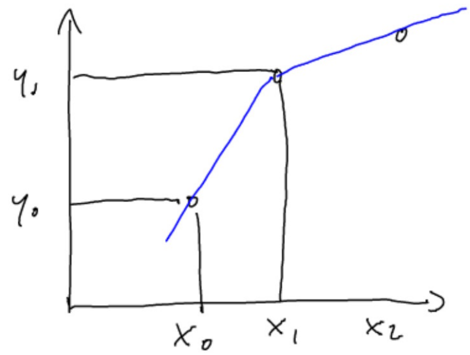


Abbildung 72: Statt der Funktion, die wir nicht haben, nehmen wir die Tangente, die wir kennen.

$y' = f(x, y)$ (Abb. 72) $\varphi(x_0) = y_0$
x_0, y_0 Start
$x_1 = x_0 + h$
$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$
allgemein:
$x_{n+1} = x_n + h$ $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

15.10.1 Verbesserung: Mittelpunktsregel

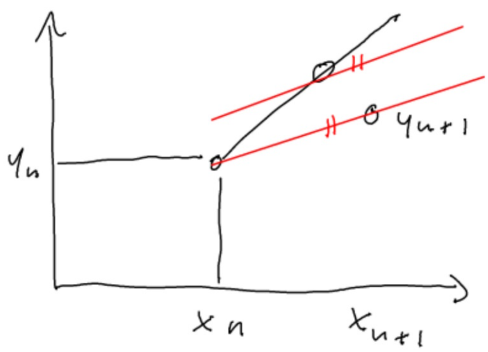


Abbildung 73: Numerische Lösung von DGL, Verbesserung: Mittelpunktsregel

$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)$ (Abb. 73)
$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$

15.10.2 Rückwärts

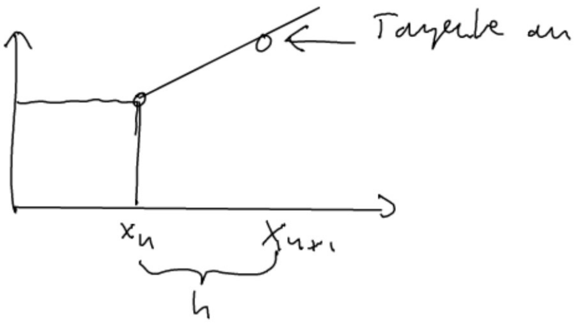


Abbildung 74: Numerische Lösung von DGL, Rückwärts

$y' = f(x, y)$
$y_n = y_{n+1} - h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Nach y_{n+1} auflösen. (Abb. 74)

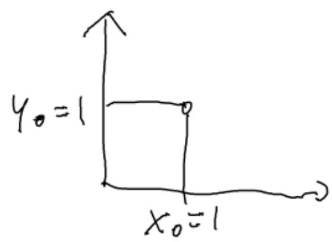


Abbildung 75: Beispiel

Beispiel $y' = f(x, y) = x + y$, Schrittweite h: 0.1
Vorwärts: $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1(1 + 1) = 1.2$ (Abb. 75)

Rückwärts $y_0 = y_1 - hf(x_1, y_1)$
$1 = y_1 - 0.1(1.1 + y_1)$
$1 = 0.9y_1 - 0.11$
$0.9y_1 = 1.11$
$y_1 = 1.23$

15.10.3 Hausaufgabe

Das letzte Beispiel mit der Mittelpunktsregel rechnen.

15.11 Runge-Kutta-Verfahren

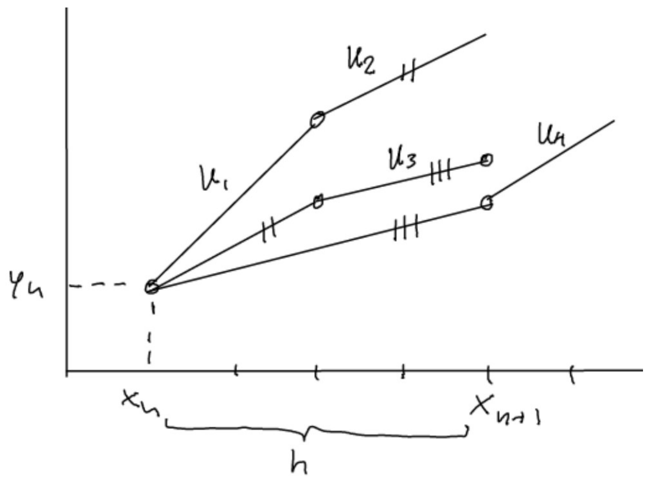


Abbildung 76: Runge-Kutta-Verfahren

Das Runge-Kutta-Verfahren ist ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Anfangswertproblemen in der numerischen Mathematik (Abb. 76).
$K_1 = f(x_n, y_n)$ mit $y' = f(x, y)$ und Schrittweite h
$K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot K_1)$
$K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot K_2)$
$K_4 = f(x_n + h, y_n + h \cdot K_3)$
$y_{n+1} = y_n + h(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6})$ (gewichtetes Mittel der Steigungen)

16 Lineare DGL-Systeme

Wir haben eine quadratische Matrix A und einen Vektor b. Die Werte von A sind Funktionen von x.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, ..., a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, ..., a_{nn} \end{pmatrix}, \; a_{i,j} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to a_{i,j}(x) \end{cases}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \; b_i : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to b_i(x) \end{cases}$$

$y' = Ay + b$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, ..., a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, ..., a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lineares DGL-System}$$

Lösung: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$, $\varphi' = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \vdots \\ \varphi'_n \end{pmatrix}$,

$\varphi = A\varphi + b$ ist homogen, wenn b=0.

Satz 16.1. *$y' = ay$ sei ein homogenes DGL-System. L_h sei die Menge aller Lösungen. $L_h = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | \varphi' = A\varphi\}$*
L_h ist ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Sind $\varphi_1, ..., \varphi_k$ Lösungen, so sind äquivalent:

1. *$\varphi_1, ..., \varphi_k$ sind linear unabhängig.*
2. *Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x_0), ..., \varphi_k(x_0)$ sind linear unabhängig ($\varphi_1(x_0)$ sind k Vektoren aus $\mathbb{R}^n$).*
3. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$*

ohne Beweis.

Definition 16.1. *Seien $\varphi_1, ..., \varphi_n$ linear unabhängige Lösungen ($\Rightarrow$ Alle Lösungen, weil es eine Basis ist: $c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n, c_i \in \mathbb{R}$). $\varphi_1, ..., \varphi_n$ heißt Lösungsfundamentalsystem.*

Lösungsmatrix:

$$\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

alle Lösungen:

$$\Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\varphi_1 + ...c_n\varphi_n$$

$\Phi' = (\varphi_1', ..., \varphi_n')$
$\Phi' = A\Phi$

16.1 Beispiel

$y_1' = -\omega y_2, \omega \in \mathbb{R}$
$y_1' = \omega y_1$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, -\omega \\ \omega, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$y' = A \cdot y$

$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\omega x \\ \sin\omega x \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin\omega x \\ \cos\omega x \end{pmatrix}$ sind 2 linear unabhängige Lösungen.

Test:

$$\varphi_1'(x) = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega x \\ \omega\cos\omega x \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0, -\omega \\ \omega, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega x \\ \sin\omega x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega x \\ \omega\cos\omega x \end{pmatrix} \checkmark$$

analog φ_2

Sind φ_1, φ_2 linear unabhängig?

Setze ein x ein, z.B. $x = 0$

$$\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

Alle Lösungen:

$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Satz 16.2. *$y' = Ay + b$ sei ein inhomogenes DGL-System.*
Sei L_h die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems und L_I ide Lösungsmenge des inhomogenen Systems. Für beliebiges $\psi_0 \in L_I$ gilt: $L_I = \psi_0 + L_h$

ohne Beweis

Satz 16.3. *$y' = Ay + b$ Sei Φ ein Lösungsfundamentalsystem für $y' = ay$. Man erhält eine Lösung $\psi(x)$ von $y'Ay + b$ durch den Ansatz $\psi(x) = \Phi \cdot u(x)$. Dieser Ansatz bzw. dieses Verfahren heißt Variation der Konstanten. $\Phi \cdot c$ ist die Gesamtlösung des homogenen Systems.*
Damit ergibt sich:
$\Phi(x) \cdot u'(x) = b(x)$
$u'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot b(x)$
$u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1} \cdot b(t)dt +$ *konstanter Vektor.*

„Das von x lassen wir im beweis weg.“

Beweis. $\psi = \Phi \cdot u$
$\psi' = \Phi' \cdot u + \underline{\Phi \cdot u'}$ auch: $\psi' = A\psi + b = \underbrace{A\Phi}_{\Phi'} u + b = \Phi' u + \underline{b}$

$\Rightarrow \Phi u' = b \Rightarrow u' = \Phi^{-1} b \Rightarrow u = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t) \cdot b(t)dt +$ konstanter Vektor. $\square$

16.2 Beispiel

$y_1' = -y_2$
$y_2' = y_1 + x$
$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,-1 \\ 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$
$y' = A \cdot y + b$
Lösungen des homogenen Systems:
$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$
Test mit φ_1:
$\varphi_1'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 0,-1 \\ 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$
φ_1, φ_2 sind linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.
$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x, -\sin x \\ \sin x, \cos x \end{pmatrix}$. Was ist Φ^{-1}? Φ ist orthogonal! $\Rightarrow \Phi^{-1} = \Phi^t =$
$\begin{pmatrix} \cos x, \sin x \\ -\sin x, \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} \cos t, \sin t \\ -\sin t, \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^x t \sin t dt + c_1 \\ \int_{x_0}^x t \cos t dt + c_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \sin x - x\cos x + d_1 \\ \cos x + x \sin x + d_2 \end{pmatrix}$

„Die beiden Konstanten fassen wir zusammen: d_1, d_2“

Wähle ohne die Konstanten $u(x) = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi(x) = \Phi \cdot u =$
$\begin{pmatrix} \cos x, -\sin x \\ \sin x, \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} = \Psi(x)$

Alle Lösungen:
$\Psi(x) + L_h = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

17 Prüfungsvorbereitung

17.1 Prüfung

17.2 Lösung

17.2.1 zu 1.)

$f(x,y,z) = \sin(x \cdot e^y) + \sin x \cos z$
$\frac{\delta f}{\delta x} = \cos(x \cdot e^y) e^y + \cos x \cos z$
$\frac{\delta f}{\delta y} = \cos(x \cdot e^y) x e^y$
$\frac{\delta f}{\delta z} = -\sin x \sin z$

17.2.2 zu 2.)

a) $(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)xy2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3y + 2x^2y^2 \\ 2x \end{pmatrix}$

Ableitungsmatrix: $(g \circ f)' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6yx^2 + 4xy^2, 2x^3 + 4x^2y \\ 2,0 \end{pmatrix}$

b) $f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ y,x \\ 2,0 \end{pmatrix}$

$g'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz, xz, xy \\ 0,0,1 \end{pmatrix}$

$(g \circ f)'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g'\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g'\begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,1 \\ y,x \\ 2,0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2x^2y, 2x^2 + 2xy, x^2y + y^2x \\ 0,0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,1 \\ y,x \\ 2,0 \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} 6yx^2 + 4xy^2, 2x^3 + 4x^2y \\ 2,0 \end{pmatrix}$ „Matrizenmultiplikation: Zeile mal Spalte!“

17.2.3 zu 3.)

a) $f(x) = g(x)$
$\frac{1}{3}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 2$
$x = 1.85 \Rightarrow y = f(1.85) = 1.14 \Rightarrow S(1.85, 1.14)$

b) $\int_B h(x,y) = \int_0^{1.85}\left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy\right)dx = \int_0^{1.85}\left(\int_{\frac{1}{3}x^2}^{-\frac{1}{4}x^2+2} x^2dy\right)dx = \int_0^{1.85}\left[yx^2\right]_{y=\frac{1}{3}x^2}^{y=-\frac{1}{4}x^2+2} dx = \int_0^{1.85}\left(\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)x^2 - \frac{1}{3}x^2x^2\right)dx = \int_0^{1.85} -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^4dx = \int_0^{1.85} -\frac{7}{12}x^4 + 2x^2dx = \left[-\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{5}x^5 + 2\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1.85} = -\frac{7}{60}\cdot 1.85^5 + \frac{2}{3}\cdot 1.85^3 = 1.69$

Stichwortverzeichnis