

Mitschrift
Differentialrechnung in \mathbb{R}^n und
Differentialgleichungen, WS 2015/16
Prof. Dr. Josef Hörwick

M. Zell

20. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Hinweise	7
2	Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	8
2.1	Beispiele	8
2.2	Verallgemeinerung	9
2.3	Beispiele	9
2.4	Linearisierung von Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	9
2.5	Linearisierungsformel	9
2.6	Beispiel	9
2.7	Verallgemeinerung	10
2.8	Beispiel	11
2.9	Anwendung der Linearisierung - Die Fehlerrechnung	11
2.10	Beispiel	11
2.11	Die Richtungsableitung	11
2.12	Beispiel	11
2.13	Definition	13
2.14	Beispiel von oben	13
2.15	Hausaufgabe	13
2.16	Problem	13
2.17	Beispiel	14
2.18	Hausaufgabe	14
3	Integration von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	14
3.1	Annäherung	14
3.2	Annäherung durch Scheiben	15
3.3	Beispiel	16
3.4	Beispiel	18
4	Flächenberechnung und Volumenberechnung	18
4.1	Flächenberechnung	18
4.2	Volumenberechnung	19
4.3	Beispiel Kugelvolumen	19
4.4	Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
5	Höhere partielle Ableitungen	20
5.1	Beispiel zur Wiederholung	21
5.2	Allgemein gilt	21
5.3	Test	21
6	Extremwertaufgaben mit zwei Variablen	22
6.1	Beispiel	22
7	Abbildungen des Typs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	23
7.1	Beispiel	23
7.2	Ellipse	24
7.3	Geschwindigkeitsvektor	24
7.4	Beispiele	25
7.5	Der Beschleunigungsvektor	25
7.6	Merke	25

7.7	Beispiele	26
7.8	Linearisierung	28
7.9	Die Zykloide	28
8	Bogenlänge einer Kurve	29
8.1	Beispiel Kreis	30
8.2	Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung	30
8.3	Beispiel Schraubenlinie	30
8.4	Hausaufgabe	30
8.5	Bogenlänge der Zykloide	32
8.6	Die natürliche Parameterdarstellung	32
8.7	Parametertransformation	32
8.8	Beispiel	32
8.9	Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung	33
8.10	Beispiel Zykloide	33
8.11	Die Krümmung einer Kurve	34
8.12	Beispiel Krümmung der Schraublinie	35
8.13	Krümmung einer ebenen Kurve, die als Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben ist	35
8.14	Ein einfaches Beispiel	36
8.15	Krümmung einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung	37
8.16	Beispiel Ellipse	37
9	Kurven in Polarkoordinaten	38
9.1	Beispiel Archimedische Spirale	39
9.2	Sektorflächeninhalt	39
9.3	Bogenlänge in Polarkoordinaten	40
9.4	Beispiel Logarithmische Spirale	40
9.5	Linienintegrale	41
9.5.1	1. Art:	41
9.6	Beispiel	41
9.7	Beispiel	41
9.7.1	2. Art Arbeitsintegral (in der Ebene)	42
9.8	Beispiel Arbeitsintegral	42
9.9	Beispiel	44
10	Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	44
10.1	Linearisierung	44
10.2	Beispiel	44
10.3	Kettenregel	45
10.4	Beispiel	45
10.5	Hausaufgabe	45
10.6	Beispiel	46
11	Parameterdarstellung von Flächen	46
11.1	Beispiel	47
11.2	Parameterdarstellung des Drehellipsoids	47

12 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen	48
12.1 Kurven in \mathbb{R}^2	48
12.2 Lot auf eine Kurve	49
12.3 Ellipse	49
12.3.1 andere Berechnungsmethode	49
12.4 Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3	49
12.5 Beispiel	50
13 Die komplexen Zahlen	50
13.1 Zahlenebene	52
13.2 \sin, \cos, e -Funktion im Komplexen	53
13.3 Die n -ten Wurzeln von 1	53
Stichwortverzeichnis	55

Abbildungsverzeichnis

1	Schnittfunktionen im \mathbb{R}^n	8
2	Tangentialebene anstelle eines Funktionengebirges	10
3	Richtungsableitung im Raum	12
4	Richtungsableitung entlang der Geraden g	12
5	Steilste Richtungsableitung	13
6	Gradient von f	14
7	Volumen eines beliebigen Körpers	15
8	Annäherung Volumen	15
9	Annäherung Volumen durch Scheiben	16
10	Querschnittsfläche bei x	16
11	Beispiel	17
12	Dreiecksfläche	18
13	Berechnung einer Fläche	18
14	Berechnung des Volumens eines dreidimensionalen Körpers	19
15	Berechnung Kugelvolumen	19
16	Beispiel Wahrscheinlichkeitsberechnung	20
17	Beweis $f_{y,x} = f_{x,y}$	21
18	Punktbewegung im Raum	23
19	Ellipse	24
20	Geschwindigkeitsvektoren	24
21	Geschwindigkeitsvektor im Kreis	25
22	Beschleunigungsvektor	26
23	Beschleunigung im Kreis	26
24	Ein Zykloid	28
25	Zykloidbahn	29
26	Bogenlänge einer Kurve	29
27	Bogenlänge einer Kurve	29
28	Beispiel Kreis	30
29	Bogenlänge einer Kurve	30
30	Schraubenlinie	31
31	Abgewinkelte Schraubenlinie	31
32	Parametrisierung nach der Bogenlänge	32
33	Parametertransformation	33
34	Umwandlung einer Parameterdarstellung	33
35	Krümmung einer Kurve	34
36	Krümmung einer ebenen Kurve	35
37	Beispiel Krümmungskreis	36
38	Krümmung einer ebenen Kurve	37
39	Ellipse	37
40	Ellipse	38
41	Kurven in Polarkoordinaten	38
42	Beispiel Archimedische Spirale	39
43	Sektorflächeninhalt	39
44	Bogenlänge in Polarkoordinaten	40
45	Logarithmische Spirale	40
46	Linienintegral	41
47	Bogenlänge	41
48	Beispiel	42

49	Arbeitsintegral (in der Ebene)	42
50	Arbeitsintegral	43
51	Parameterdarstellung von Flächen	46
52	Beispiel Erdkugel	47
53	Parameterdarstellung des Drehellipsoids	47
54	Höhenlinienplan	49
55	Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3	50
56	Komplexen Zahlen	50
57	Zahlenebene	52
58	\sin, \cos, e -Funktion im Komplexen	53
59	Geometrische Interpretation	54
60	Die n -ten Wurzeln von 1	54

1 Hinweise

Diese Mitschrift basiert auf der Vorlesung „Differentialrechnung in \mathbb{R}^n und Differentialgleichungen“ von Prof. Dr. Josef Hörwick im WS 2015/16. Du kannst sie gerne benutzen, kopieren und an andere weitergeben. Auch in der Prüfung - soweit zugelassen ¹ - kannst du sie gerne als Hilfsmittel verwenden, wenn das meine Nutzung als Prüfungshilfsmittel nicht in irgendeiner Weise beeinträchtigt.

Natürlich besteht kein Anspruch auf Aktualität, Richtigkeit, Fortsetzung meines Angebots oder dergleichen. Sollten dir Fehler auffallen oder solltest du Verbesserungsvorschläge haben, würde ich mich über eine E-Mail (zell@hm.edu) freuen. Wenn du mir als kleines Dankeschön z.B. ein Club-Mate² ausgeben möchtest, findest du mich meistens hier: <http://fi.cs.hm.edu/fi/rest/public/timetable/group/if3b>. Wenn nicht, ist es auch ok ;-)

Nach der Prüfung werde ich den L^AT_EX-Quelltext veröffentlichen, damit die Mitschrift weitergeführt, korrigiert und ergänzt werden kann.

Viele Grüße
M. Zell

¹http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden_services/fi_pruefungskatalog.de.html

²<http://www.clubmate.de/ueber-club-mate.html>

2 Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases} \quad \text{Zwei Variablen.}$$

„Gebirge über der
x,y-Ebene.“

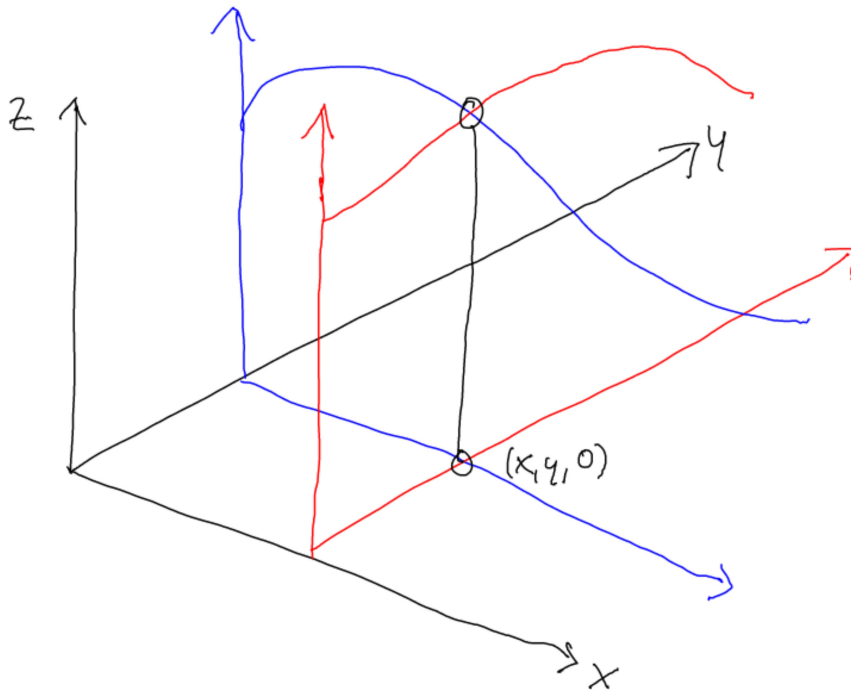


Abbildung 1: Schnittfunktion parallel zur yz-Ebene (rot); Schnittfunktion parallel zur xz-Ebene (blau).

Die Ableitungen der Schnittfunktionen heißen partielle Ableitungen. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ist die Ableitung der blauen Funktion (nur x ist Variable). $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ist die Ableitung der roten Funktion (nur y ist Variable).

2.1 Beispiele

a) $f(x, y) = 2x^3y^2 + x + 2y$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 3x^2 + 1$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 2y + 2$

b) $f(x, y) = \sin(xy^2)$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy^2)y^2$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy^2)x2y$

2.2 Verallgemeinerung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, \dots, x_n) \text{ nur } x_1 \text{ ist Variable.}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, \dots, x_n) \text{ nur } x_n \text{ ist Variable.}$$

Zum Beispiel: $\frac{\delta f}{\delta x_1}$

2.3 Beispiele

a) $f(x, y, z) = x^5 y^2 z^3 + xy + z^2$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 5x^4 y^2 z^3 + y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2yx^5 z^3 + x$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 3z^2 x^5 y^2 + 2z$$

b) $f(x, y, z) = e^{2x} e^y + z^2 \sin(x)$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^{2x} 2e^y + \cos(x) z^2$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = e^{2x} e^y$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 2z \sin(x)$$

c) $f(x, y, z) = e^x \sin(xy) + yze^z$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy) y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = e^x \cos(xy) x + ze^z$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = ye^z + yze^z$$

2.4 Linearisierung von Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Ersetze das Funktionsgebirge im Punkt (x, y, z) durch die Tangentialebene ε . Dieses ε wird aufgespannt durch die beiden Tangenten an die beiden Schnittfunktionen (siehe Abb. 2).

„Heißt nichts anderes als ich ersetze die Funktion durch die Tangente. Dadurch kann man eine schwierige Funktion durch eine einfachere ersetzen.“

2.5 Linearisierungsformel

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) dx + \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) dy$$

„Mit dieser Formel können wir die Funktion im Punkt (x, y) durch die Tangentialebene ersetzen.“

2.6 Beispiel

Linearisiere $f(x, y) = x^2 y^3$ bei $x = 2, y = 1$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2xy^3$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 3y^2 x^2$$

$$f(x + dx, y + dy) \approx x^2 y^3 + 2xy^3 \cdot dx + 3y^2 x^2 \cdot dy$$

$$f(2, 1) = 4$$

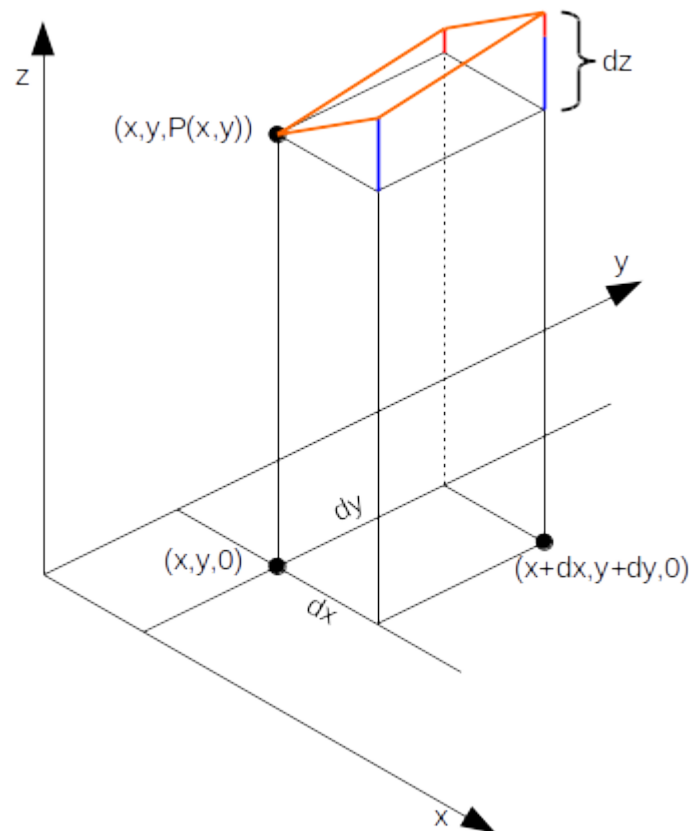


Abbildung 2: Die orangenen Tangenten an die blaue und die rote Schnittfunktion spannen eine Tangentialebene auf. Diese entspricht dem ε . Es gilt: blaue Schnittfunktion: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx$, rote Schnittfunktion: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ und $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\Rightarrow f(2 + dx, 1 + dy) \approx 4 + 4 \cdot dx + 12 \cdot dy$$

Test mit $dx = 0.1, dy = -0.1$

$$f(2.1, 0.9) = 2.1^2 \cdot 0.9^3 = \mathbf{3.214...}$$

$$f(2 + 0.1, 1 - 0.1) \approx 4 + 4 \cdot 0.1 - 12 \cdot 0.1 = 4 + 0.4 - 1.2 = \mathbf{3.2} \checkmark$$

2.7 Verallgemeinerung

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

2.8 Beispiel

Linearisiere $f(x, y, z) = x \sin y + y \cos z$ bei $(0.5, 1, 0.9)$

$$f(0.5, 1, 0.9) = 0.5 \sin 1 + 1 \cos 0.9 = 1.042$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) \hat{=} \sin(1) = 0.841$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y) + \cos(z) \hat{=} 0.5 \cos 1 + \cos 0.9 = 0.892$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y \sin z \hat{=} -1 \sin 0.9 = -0.783$$

Test: $f(0.5 + dx, 1 + dy, 0.9 + dz) \approx 1.042 + 0.841dx + 0.892dy - 0.783dz$ z.B.:

$$f(0.5 + 0.1, 1 + 0.1, 0.9 - 0.1) \approx \dots = 1.293. \text{ Der exakte Wert: } f(0.6, 1.1, 0.8) = 1.301\dots$$

„In der Mathematik gilt: Wenn man sich nicht sicher ist, immer den Winkel im Bogenmaß eingeben.“

2.9 Anwendung der Linearisierung - Die Fehlerrechnung

Gegeben ist $f(x_1, \dots, x_n)$. Die Größen x_1, \dots, x_n werden gemessen, wobei $x_1 = \bar{x}_1 + w_1$ (wahrer Wert, Messwert und Fehler), ..., $x_n = \bar{x}_n + w_n$.

Wahres Ergebnis: $e = f(x_1, \dots, x_n)$

Fehlerhaftes Ergebnis: $\bar{e} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$\Rightarrow e = f(\bar{x}_1 + w_1, \dots, \bar{x}_n + w_n)$. Wir linearisieren an der Messstelle: $e = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) +$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)w_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)w_n$. Die Fehler w_1, \dots, w_n kennt man nicht.

Gegeben sind die maximalen Fehler der Messwerte: $x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i$. Der maximale Fehler des Ergebnisses ist:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Delta x_1 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Delta x_n \right|$$

2.10 Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \sin(x_2) + x_3 x_4 \cos x_2$$

$$x_1 = 10m \pm 5cm$$

$$x_2 = 40^\circ \pm 1^\circ \hat{=} 0.01745rad$$

$$x_3 = 12m \pm 6cm$$

$$x_4 = 7m \pm 4cm$$

$$f(10m, 40^\circ, 12m, 7m) = 126.6m^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \sin x_2 \hat{=} 2 \cdot 10 \sin 40^\circ = 12.85$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 \cos x_2 - x_3 x_4 \sin x_2 \hat{=} 22.61$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4 \cos x_2 \hat{=} 5.36$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3 \cos x_2 \hat{=} 9.19$$

$$\text{maximaler Fehler} = |12.85 \cdot 0.05| + |22.61 \cdot 0.01745| + |5.36 \cdot 0.06| + |9.19 \cdot 0.04| =$$

$$0.64 + 0.39 + 0.32 + 0.37 = (\text{von } \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \text{ und } \Delta x_4) = 1.73$$

2.11 Die Richtungsableitung

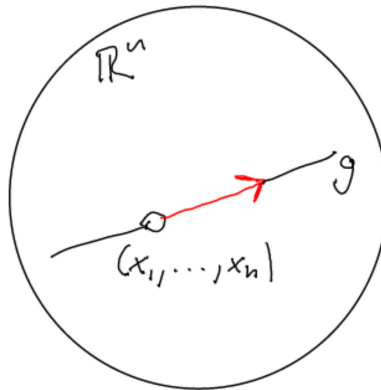
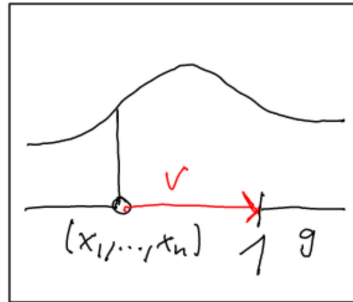
Wir betrachten $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen nun die Richtungsableitung des Vektors $v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ aufstellen (Abb. 3). Dazu betrachten wir die Funktion entlang

der Geraden g (Abb. 4) und erhalten: $f_v(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, \dots, x_n) + h(v_1, \dots, v_n)) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$

2.12 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1 x_2 + 2x_3$$

$$\tilde{v} = (1, 2, 2), |\tilde{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, v = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Abbildung 3: Der rote Vektor v liegt auf der Geraden g und im Raum \mathbb{R}^n Abbildung 4: Wir betrachten die Funktion entlang g .

$$\begin{aligned}
 f_v(x_1, x_2, x_3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, x_2, x_3) + h(v_1, v_2, v_3)) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1 + \frac{1}{3}h, x_2 + \frac{2}{3}h, x_3 + \frac{2}{3}h)) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1 + \frac{1}{3}h, x_2 + \frac{2}{3}h, x_3 + \frac{2}{3}h)) - x_1x_2 - 2x_3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1x_2 + x_1\frac{2}{3}h + \frac{1}{3}hx_2 + \frac{2}{9}h^2 + 2x_3 + \frac{4}{3}h - x_1x_2 - 2x_3}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{9}h + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3} \Rightarrow f_v(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

2.13 Definition

Wiederholung Richtungsableitung: $f_v(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot v) - f(x)}{h}$

Definition 2.1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Der Vektor $(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n})$ heißt der Gradient von f bei x .

Satz 2.1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ mit $|v| = 1$ Dann gilt: $f_v(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n) \cdot (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n})$
 $f_v(x) = v \cdot \text{Gradient von } f \hat{=} \text{Skalarprodukt: } (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Beweis. $f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n$
 $f(x_1 + hv_1, x_2 + hv_2, \dots, x_n + hv_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot h \cdot v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h \cdot v_n$
 Einsetzen der Grenzwertbildung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hv_1, \dots, x_n + hv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} h v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} h v_n - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta x_1} v_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} v_n = \text{Gradient von } f \cdot v \quad \square$$

2.14 Beispiel von oben

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + 2x_3, v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$f_v(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \frac{\delta f}{\delta x_3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (x_2, x_1, 2) = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}$$

2.15 Hausaufgabe

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2 x_3 + x_3^2 x_4$$

Richtung $\tilde{v} = (1, -1, -1, 1)$

Richtungsableitung in: $(1, 0, 2, -1)$

2.16 Problem

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Folgende Fragen stellen wir uns:

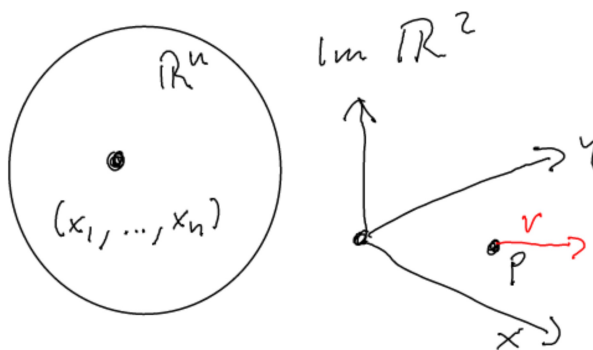


Abbildung 5: In welcher Richtung geht es am steilsten bergauf?

- In welcher Richtung v ist die Richtungsableitung am größten?
- In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten?



Abbildung 6: Gradient von f

- In welcher Richtung geht es am steilsten Bergauf? (Abb. 5)

$\cos = \frac{v \cdot \text{grad} f}{|v| \cdot |\text{grad} f|} = \frac{f_v}{|\text{grad} f|} \Rightarrow f_v = \cos \delta \cdot |\text{grad} f|$ (Abb. 6). f_v ist maximal bei $\cos \delta = 1$, d.h. bei $\delta = 0^\circ$. Die Richtungsableitung ist maximal in Richtung $\text{grad} f$. Die maximale Richtungsableitung ist $|\text{grad} f|$.

2.17 Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 2x_3^2$$

Punkt: (1, 2, -2)

In welcher Richtung wächst f am stärksten?

$$\text{grad} f = (3x_2, 3x_1, 4x_3)$$

$$\text{grad} f(1, 2, -2) = (6, 3, -8) \text{ (gesuchte Richtung)}$$

$$\text{Die maximale Steigung ist } |\text{grad} f| = |(6, 3, -8)| = \sqrt{36 + 9 + 64} = \sqrt{109}$$

$$\text{Steigungswinkel } \alpha = 84,5^\circ$$

2.18 Hausaufgabe

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2 - x_3x_4 + x_2x_3^2$$

Punkt: (2, 1, -3, 2)

In welcher Richtung wächst f am stärksten?

Wie groß ist dort der Steigungswinkel?

Lösung //TODO

3 Integration von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\int_B f$ ist das Volumen des „Zylinders“ über B (von B bis zur Funktion, vgl. Abb. 7).

3.1 Annäherung

Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht (Abb. 8).

Sei $\tilde{f} : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow f(x, y)$ für $(x, y) \in B, 0$ sonst

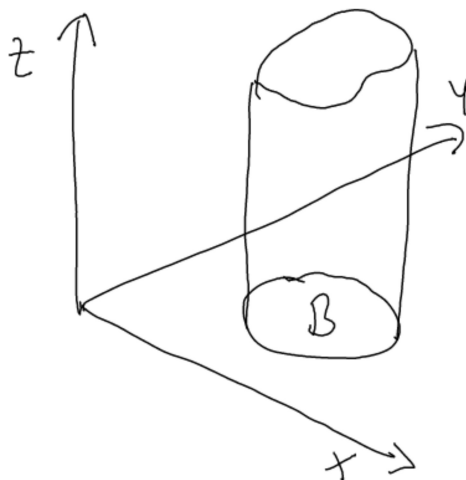


Abbildung 7: Das Volumen soll dem Integral $\int_B f$ entsprechen. Dabei ist die Fläche B beliebig und der obere „Deckel“ des „Zylinders“ entspricht irgendeinem „Funktionsgebirge“

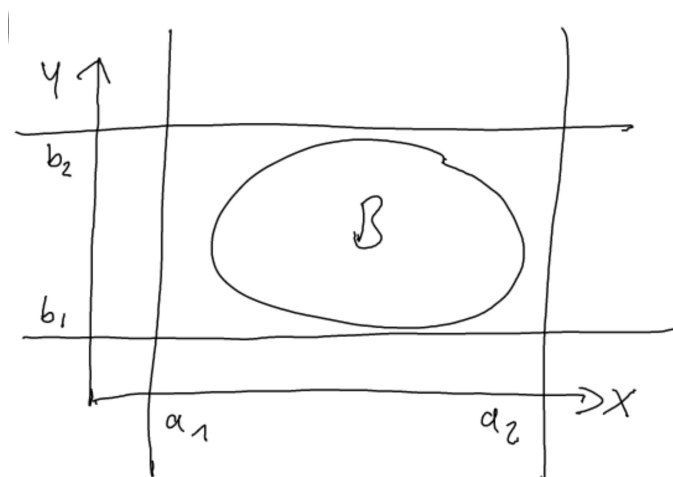


Abbildung 8: Zur Annäherung des Volumens betrachten wir nun die Draufsicht $f : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$

3.2 Annäherung durch Scheiben

Nun nähern wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an (Abb. 9).

$$\int_B f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(z_i, y) dy \right) \Delta x}_{\text{Das Volumen als Summe der einzelnen Scheiben}} \rightarrow \sum_{i=1}^n g(z_i) \cdot \Delta x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \quad (\text{für } g(z_i) \text{ vgl. Abb. 10})$$

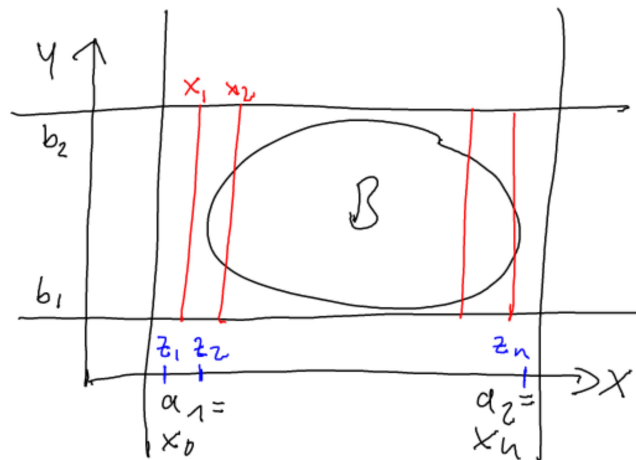


Abbildung 9: Nun nähern wir uns dem Volumen durch eine Unterteilung in Scheiben (rot) an.

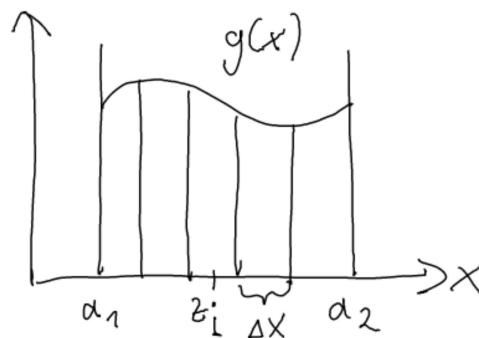


Abbildung 10: Querschnittsfläche bei x . Das Ergebnis ist irgendeine Funktion $g(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy$

also: $\int_B f(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} (\int_{b_1}^{b_2} \tilde{f}(x, y) dy) dx$ (Doppelintegral über die gelben Querschnitte)

analog: $\int_B f(x, y) = \int_{b_1}^{b_2} (\int_{a_1}^{a_2} \tilde{f}(x, y) dx) dy$ (Doppelintegral über die roten Querschnitte)

3.3 Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 1 + xy^2$$

$$\int_B f(x, y) \text{ (vgl. Abb. 11)}$$

Als erstes integrieren wir über die gelben Querschnitte:

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) &= \int_0^3 (\int_0^2 (1 + xy^2) dy) dx = \int_0^3 (x + \frac{1}{3}xy^3) \Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^3 (2 + \frac{1}{3}x \cdot 8) dx \\ &= \int_0^3 (2 + \frac{8}{3}x) dx = 2x + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=3} = 2 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 9 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

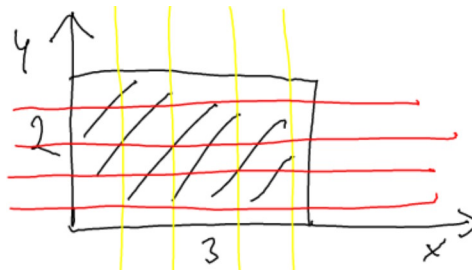


Abbildung 11: Flächenberechnung durch Integration über die gelben oder roten Querschnitte

Nun integrieren wir über die roten Querschnitte. Es muss das gleiche rauskommen:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^3 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^2 \left(\int_0^3 (1 + xy^2) dx \right) dy = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 9y^2 \right) dy \\ &= 3y + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=2} = 3 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 8 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

3.4 Beispiel

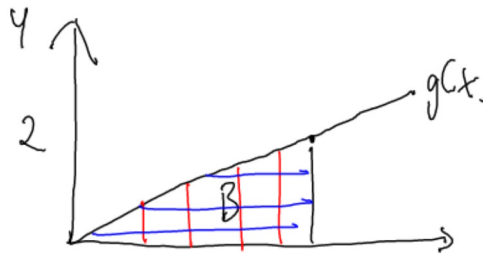


Abbildung 12: Berechnung der Dreiecksfläche unterhalb von $g(x)$ mit Hilfe der Querschnitte.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy^2 \\ \int_B f(x, y) &=? \\ g(x) &= \frac{2}{5}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) &= \int_0^5 \left(\int_0^{g(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^5 \left(\int_0^{\frac{2}{5}x} xy^2 dy \right) dx = \int_0^5 \left(x \cdot \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{2}{5}x} dx \\ &= \int_0^5 \left(x \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right) dx = \int_0^5 \left(x^4 \cdot \frac{8}{375} \right) dx = \frac{8}{375} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^5 = \frac{8}{375 \cdot 5} \cdot 3125 = 13,33... \end{aligned}$$

Andere Reihenfolge (blaue Querschnitte):

$$g(x) = \frac{2}{5}x$$

$$y = \frac{2}{5}x \Rightarrow x = \frac{5}{2}y$$

$$\begin{aligned} \int_B f &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{5}{2}y}^5 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{5}{2}y}^5 xy^2 dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=\frac{5}{2}y}^{x=5} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \right. \\ &25y^2 - \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{5}{2} y \right)^2 \Big) dy = \int_0^2 \left(\frac{25}{2} y^2 - \frac{25}{8} y^4 \right) dy = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 - \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^2 = \frac{25}{6} \cdot 8 - \frac{5}{8} \cdot 32 = \\ &13,33... \end{aligned}$$

4 Flächenberechnung und Volumenberechnung

4.1 Flächenberechnung

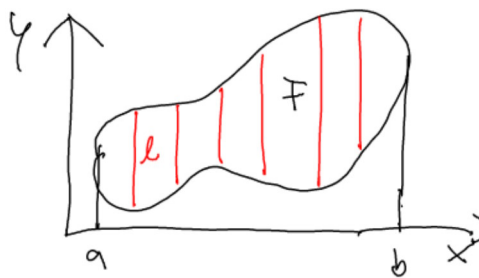


Abbildung 13: Näherungsweise bekommen wir den Flächeninhalt der Fläche F , wenn wir die Summe der Streifen/Rechtecke aus der Länge der Zwischenstellen z_i und der Breite Δx berechnen.

$$F \approx \sum_{i=1}^n l(z_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b l(x) dx$$

4.2 Volumenberechnung

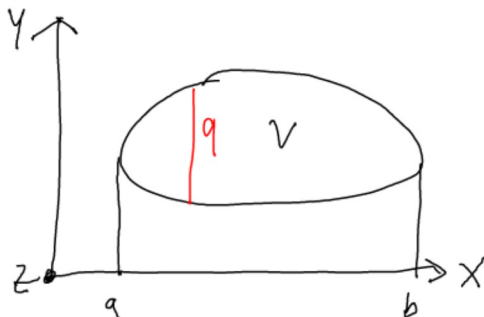


Abbildung 14: Irgendein Körper im \mathbb{R}^3 . Und wir berechnen sein Volumen.

Körper im \mathbb{R}^3 . Wie ist das Volumen?

$$V \approx \sum_{i=1}^n q(z_i) \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b q(x) dx$$

4.3 Beispiel Kugelvolumen

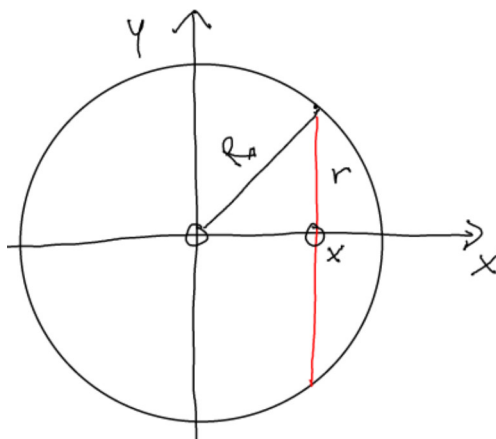


Abbildung 15: Berechnung des Kugelvolumens mit Hilfe der Streifensummen und des dazugehörigen Integrals.

Radius R

$$r^2 + x^2 = R^2$$

$$q(x) = r^2 \pi$$

$$q(x) = (R^2 - x^2) \pi$$

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R ((R^2 - x^2) \pi) dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \pi [R^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{x=0}^R = \pi [R^3 - \frac{1}{3} R^3] = \pi \frac{2}{3} R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

4.4 Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist Dichte, wenn:

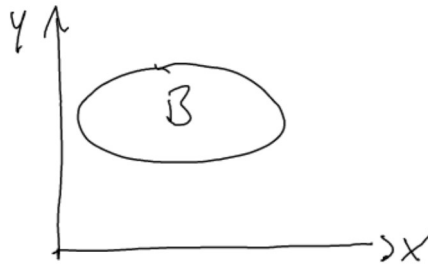


Abbildung 16: Dem Bereich B wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = 1$

Dem Bereich wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet: $P(B) = \int_B f(x, y)$

5 Höhere partielle Ableitungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$$

f_x partielle Ableitung nach x

$f_{x,y}$ erst nach x, dann nach y ableiten.

Die verschiedenen Ableitung der o.g. Funktion:

- $f_x = 2xy + \cos(xy)y$
- $f_y = x^2 + \cos(xy)x$
- $f_{x,x} = 2y - y \sin(xy)y$
- $f_{y,y} = -x \sin(xy)x$
- $f_{x,y} = 2x + [-x \sin(xy)y + \cos(xy)]$
- $f_{y,x} = 2x + [-y \sin(xy)x + \cos(xy)]$

Es fällt auf, dass hier gilt: $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.1 Beispiel zur Wiederholung

$$f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$$

$$f_x = 2xy + \cos(xy) \cdot y$$

$$f_{x,y} = 2x + [-\sin(xy)] \cdot y + \cos(xy)$$

$$f_y = x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

$$f_{y,x} = 2x + [-y \sin(xy) \cdot x + \cos(xy)]$$

Hier $f_{x,y} = f_{y,x}$

5.2 Allgemein gilt

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Sind $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ stetig, so ist $f_{x,y} = f_{y,x}$

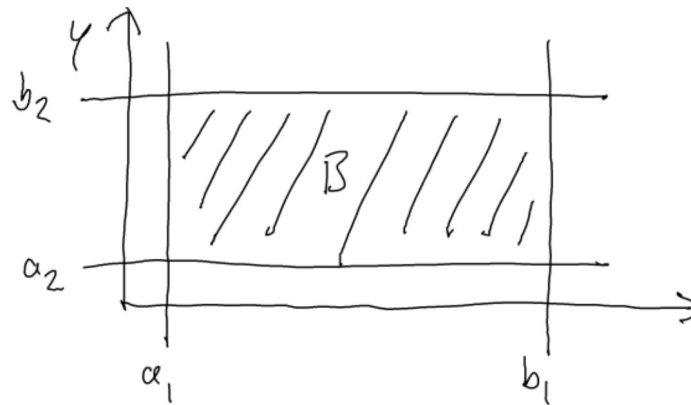


Abbildung 17: Beweis $f_{y,x} = f_{x,y}$

Beweis. Wir berechnen: $\int_B f_{x,y}$ und $\int_B f_{y,x}$

$$\begin{aligned} 1.) \int_B f_{x,y} &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f_{x,y} dy \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(x, y) \Big|_{y=a_2}^{y=b_2} dx = \int_{a_1}^{b_1} f_x(xb_2) - f_x(x, a_2) dx \\ &= f(xb_2) - f(xa_2) \Big|_{x=a_1}^{x=b_1} \\ &= [f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2)] - [f(a_1, b_2) - f(a_1, a_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \int_B f_{y,x} &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_{y,x} dx \right) dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(x, y) \Big|_{x=a_1}^{x=b_1} dy = \int_{a_2}^{b_2} f_y(b_1 y) - f_y(a_1 y) dy \\ &= f(b_1 y) - f(a_1 y) \Big|_{y=a_2}^{y=b_2} = [f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2)] - [f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2)] \\ &\Rightarrow \int_B f_{x,y} = \int_B f_{y,x} \text{ für jedes } B \\ &\Rightarrow f_{y,x} = f_{x,y} \text{ (vgl. Abb. 17)} \quad \square \end{aligned}$$

5.3 Test

$$f(x, y) = y \cdot e^x + \sin(xy^2)$$

$$f_x = y \cdot e^x + \cos(xy^2) \cdot y^2$$

$$f_{x,y} = e^x + [-\sin(xy^2) \cdot 2yx \cdot y^2 + \cos(xy^2) 2y]$$

$$f_y = e^x + \cos(xy^2) \cdot 2yx$$

$$f_{y,x} = e^x + 2y[-\sin(xy^2) \cdot y^2 x + \cos(xy^2)]$$

6 Extremwertaufgaben mit zwei Variablen

$f(x, y)$: Wir suchen ein relatives Maximum oder relatives Minimum. Eine notwendige Bedingung hierfür ist eine horizontale Tangentialebene, d.h. $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$.

Satz 6.1 (Rezept). f hat bei (x_0, y_0) einen relativen Extremwert, wenn:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $\Delta = f_{x,x}(x_0, y_0) \cdot f_{y,y}(x_0, y_0) - (f_{x,y}(x_0, y_0))^2 > 0$
 - $f_{x,x}(x_0, y_0) < 0$ relatives Maximum
 - $f_{x,x}(x_0, y_0) > 0$ relatives Minimum

Ist $\Delta < 0$, so haben wir einen Sattelpunkt.

Ist $\Delta < 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

6.1 Beispiel

$f(x, y) = xy - 27(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = xy - 27x^{-1} + 27y^{-1}$. Gibt es Extremwerte und wenn: Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

$$f_x = y + 27x^{-2}$$

$$f_y = x - 27y^{-2}$$

$$f_{xx} = -54x^{-3}$$

$$f_{yy} = 54y^{-3}$$

$$f_{xy} = 1$$

$$f_{yx} = 1$$

Kritische Punkte: $f_x = 0$ und $f_y = 0$

$$I : y + 27x^{-2} = 0$$

$$II : y - 27x^{-2} = 0 \Rightarrow x = 27y^{-2} \text{ in I}$$

$$I : y + 27(27y^{-2})^{-2} = 0$$

$$y + 27 \cdot 27^{-2}y^4 = 0$$

$$y + 27^{-1}y^4 = 0 \Rightarrow y \neq 0$$

$$1 + 27^{-1}y^3 = 0$$

$$y^3 = (-1)27 \Rightarrow y = -3$$

$$\text{in II: } x - 27(-3)^{-2} = 0$$

$$x - 27(\frac{1}{-3})^{-2} = 0$$

$$x - \frac{27}{9} = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Also } (x_0, y_0) = (3, -3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jetzt müssen wir das Delta } \Delta \text{ ausrechnen: } f_{x,x}(3, -3) \cdot f_{y,y}(3, -3) - f_{x,y}(3, -3)^2 \\ = (-54 \cdot 3^{-3}) \cdot (54(-3)^{-3}) - 1 = (-\frac{54}{27})(-\frac{54}{27}) - 1 = (-2)(-2) - 1 = 3 < 0 \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir $f_{x,x}$ anschauen: $f_{x,x}(3, -3) = -2 < 0$
 \Rightarrow relatives Maximum bei $(3, -3)$

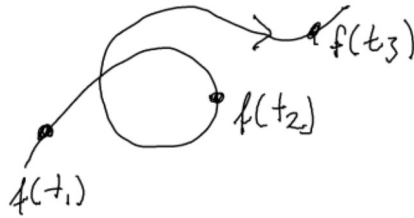


Abbildung 18: Die Bewegung eines Punktes im Raum

7 Abbildungen des Typs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, t als Parameter. Das stellt die Bewegung eines Punktes im Raum dar. Es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Kurve im \mathbb{R}^3 . Es wird nicht nur die Kurve gegeben, sondern wie ein Punkt die Kurve durchläuft (Abb. 18).

7.1 Beispiel

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t^3 \end{pmatrix}$
2. $f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$ t Winkel, R Radius Kreis

7.2 Ellipse

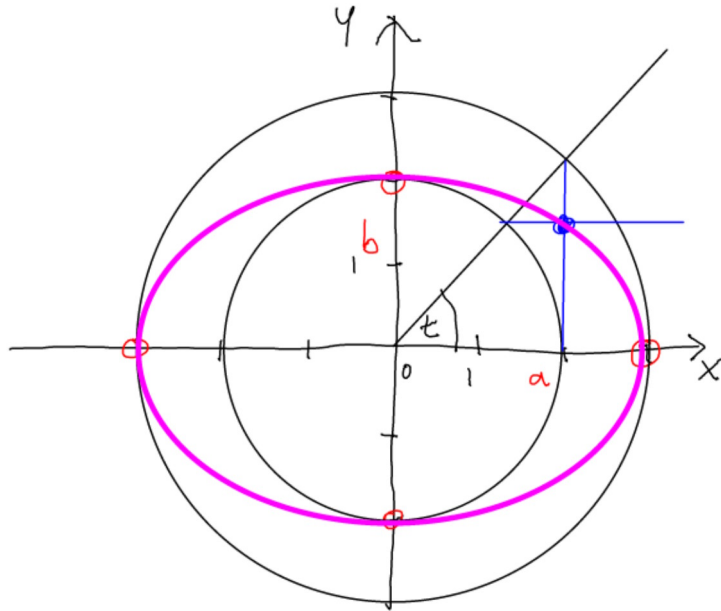


Abbildung 19: Eine Ellipse mit $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, Punktkoordinaten

Mit $f(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$, $a, b > 0$ (Halbachsen) wird eine Ellipse beschrieben (Abb. 19). In unserem Beispiel sind $a = 3$ cm und $b = 2$ cm.

7.3 Geschwindigkeitsvektor

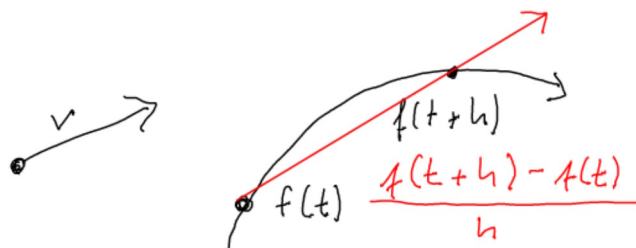


Abbildung 20: Geschwindigkeitsvektor links: Richtung, $|v|$ Betrag der Geschwindigkeit. Rechts: Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor

Wir berechnen den Geschwindigkeitsvektor [$t \hat{=}$ Zeit]. Der Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor berechnet sich durch $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, Test: $f(t) + h \cdot \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t+h)$. (Abb. 20)

Momentangeschwindigkeitsvektor $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \underbrace{=}_{\mathbb{R}^2} \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ mit $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$. Der Ableitungsvektor ist der Geschwindigkeitsvektor. Er ist auch Tangentenvektor an die Kurve.

7.4 Beispiele

$$1. \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Kreis } f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$R = 1 : f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} f'(1) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\text{Skalarprodukt: } \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0 \Rightarrow 90^\circ.$$

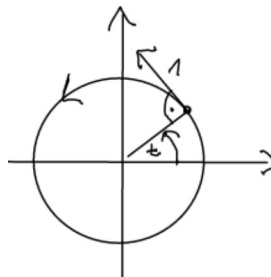


Abbildung 21: Geschwindigkeitsvektor im Kreis

$$\text{Ellipse } f(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

7.5 Der Beschleunigungsvektor

Durchschnittsbeschleunigung (Abb. 22) zwischen t und $t+h$: $\frac{v(t+h) - v(t)}{h}$

$$\text{Test: } v(t) + h \cdot \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v(t+h)$$

$$\text{Momentanbeschleunigung: } b(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t)$$

$$b(t) = f''(t)$$

7.6 Merke

1. Die erste Ableitung $f'(t)$ entspricht dem Geschwindigkeitsvektor $f'(t) = v(t)$.

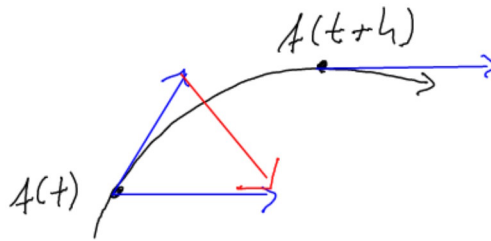


Abbildung 22: Der Beschleunigungsvektor

2. Die zweite Ableitung $f''(t)$ entspricht dem Beschleunigungsvektor $f''(t) = v'(t) = b(t)$.

7.7 Beispiele

1. $f(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, v(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6t \end{pmatrix}$

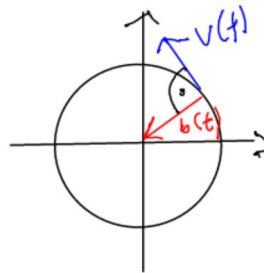


Abbildung 23: Beschleunigung im Kreis

2. **Kreis** Jetzt sehen wir uns die Beschleunigung im Kreis an (Abb. 23).

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$v(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, |v| = 1$$

$$b(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, |b| = 1$$

Zentrifuge: $R = 5$ m, 2 Umdrehungen pro Sekunde, $\varphi = 4\pi t = \varphi(t)$

$$f(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos(4\pi t) \\ 5 \sin(4\pi t) \end{pmatrix}$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -5 \cdot 4\pi \sin(4\pi t) \\ 5 \cdot 4\pi \cos(4\pi t) \end{pmatrix}$$

$$f''(t) = -80\pi^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(4\pi t) \\ \sin(4\pi t) \end{pmatrix}}_{\text{Länge 1}}$$

$$|f''(t)| = 80\pi^2 = 789 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ellipse $f(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \end{pmatrix}$
 $f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix} = v(\varphi)$
 $f''(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = b(\varphi)$

7.8 Linearisierung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t f'(t)$$

$$\text{z.B. } f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, f'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix}$$

$$f(t + \Delta t) \approx \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t^2 \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix}$$

Bei $t = 0$:

$$f(\Delta t) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta t = 0.1 : f(0.1) \approx \begin{pmatrix} 0 + 0.1 \\ 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 0.1 \\ \cos 0.1 \\ \sin 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.99 \\ 0.01 \end{pmatrix} \checkmark$$

7.9 Die Zykloide

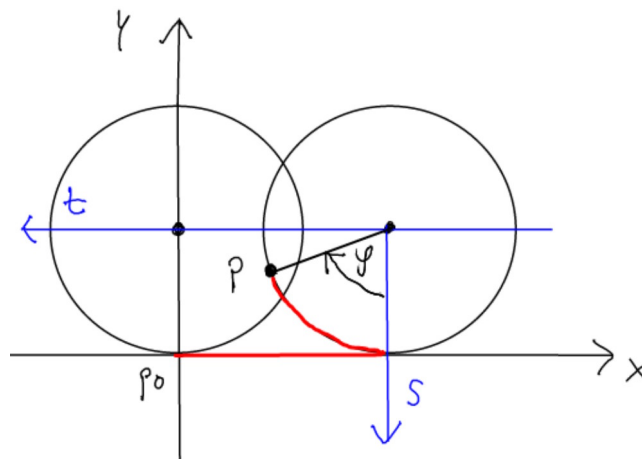


Abbildung 24: Ein Zykloid entsteht durch Abrollen eines Kreispunktes (rote Linie). Radius R , Parameter φ , t-s-Hilfskoordinatensystem (blau)

Ein Kreis rollt auf einer Geraden ab. Bahn des Punktes P . Im s-t-Hilfskoordinatensystem (vgl. Abb. 24): $s(\varphi) = R \cos \varphi$, $t(\varphi) = R \sin \varphi$, im x-y-System: $x(\varphi) = R\varphi - t = R\varphi - R \sin \varphi$, $y(\varphi) = R - s = R - R \cos \varphi$, also:

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi - R \sin \varphi \\ R - R \cos \varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi - \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (Zykloide)}$$

Eine Umdrehung in 2π Sekunden, Radgeschwindigkeit: $\frac{2R\pi}{2\pi} = R$

$$f'(\varphi) = R \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad f'(\pi) = R \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, |f'(\pi)| = 2R \Rightarrow \text{Doppelt so schnell wie Radgeschwindigkeit.}$$

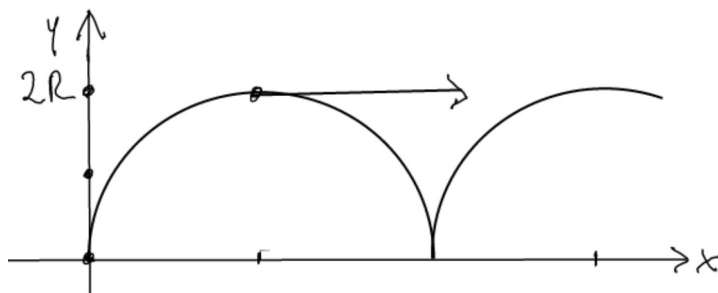


Abbildung 25: Die Bahn eines Zykloids

8 Bogenlänge einer Kurve

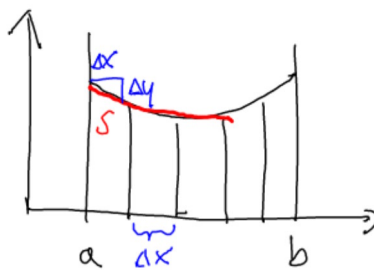


Abbildung 26: Wir wollen die Bogenlänge einer Kurve berechnen (s).

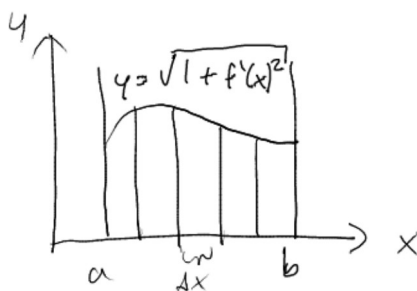


Abbildung 27: Die Bogenlänge für den Abschnitt a bis b.

$$\begin{aligned}
 y &= f(x), s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}, f'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
 s &\approx \sqrt{\Delta x^2 + f'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2} \approx \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \quad (\text{Abb. 26}) \\
 L_{a,b} &\approx \sum_{i=0}^{n-1} s_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (\text{Bogenlänge, vgl. Abb. 27})
 \end{aligned}$$

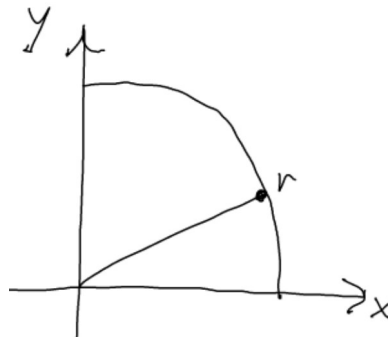


Abbildung 28: Beispiel Kreis

8.1 Beispiel Kreis

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}, f(x) = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L_{0,r} = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{Formelsammlung}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = r\frac{\pi}{2}$$

Formelsammlung

ganzer Kreis: $4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r$

8.2 Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

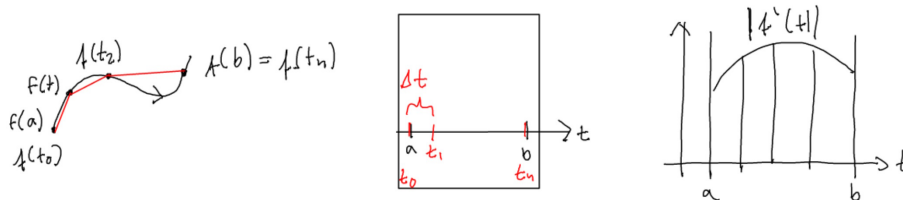


Abbildung 29: Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

$$L_{a,b} \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \approx \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i)| \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f'(t)| \Delta t, \text{ also:}$$

$$L_{a,b} f(t) = \int_a^b |f'(t)| \Delta t \text{ (Integral über Betrag der Geschwindigkeit).}$$

8.3 Beispiel Schraubenlinie

$f(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, v \cdot \varphi)$, v ist der Vorschub. Die Schraubenlinie befindet sich auf dem Schraubzylinder. Wickelt man den Schraubzylinder entlang der roten Linie (Abb. 30) ab, so entsteht ein Rechteck (Abb. 31). $L^2 = (2R\pi)^2 + (v2\pi)^2 = 4R^2\pi^2 + 4v^2\pi^2 = 4\pi^2(R^2 + v^2) \Rightarrow L = 2\pi\sqrt{R^2 + v^2}$

8.4 Hausaufgabe

$$f(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, v \cdot \varphi), f'(\varphi) = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, v)$$

$$|f'(\varphi)| = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi + v^2} = \sqrt{R^2 + v^2}$$

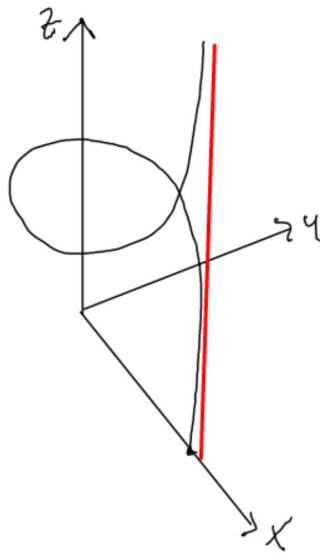


Abbildung 30: Eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 . Sie wird entlang der roten Linie abgewickelt

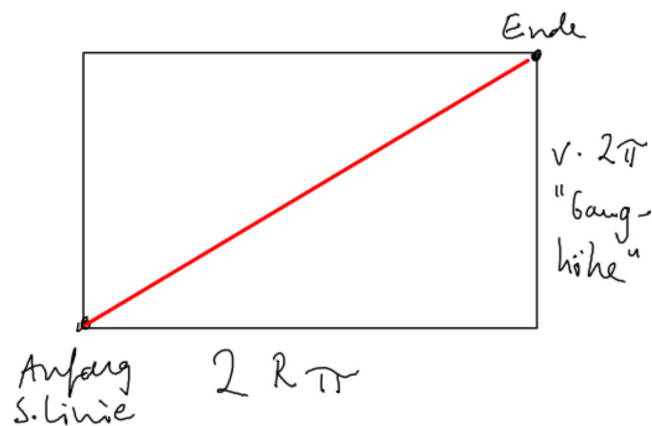


Abbildung 31: Durch das Abwickeln der Schraubenlinie entlang der roten Linie entsteht ein Rechteck. Die abgewickelte Schraubenlinie ist eine Gerade.

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + v^2} dt = \left[\sqrt{R^2 + v^2} t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{R^2 + v^2} 2\pi$$

8.5 Bogenlänge der Zykloide

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= R(\varphi - \sin \varphi, 1 - \cos \varphi), \quad f'(\varphi) = R(1 - \cos \varphi, \sin \varphi) \\
 |f'(\varphi)| &= R\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = R\sqrt{1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi} = R\sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \\
 &= 2R\sqrt{\frac{2 - 2 \cos \varphi}{4}} = 2R\sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Formelsammlung}} \quad 2R \sin \frac{\varphi}{2} \\
 \int_0^{2\pi} |f'(\varphi)| d\varphi &= \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \left[-4R \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = -4R(\cos \pi - \cos 0) = -4R(-1 - 1) \\
 &= 8R \text{ (Länge), Weg: } 2\pi R
 \end{aligned}$$

8.6 Die natürliche Parameterdarstellung

Definition 8.1. Eine Parameterdarstellung $k(t)$ heißt natürlich, wenn $|k'(t)| = 1, \forall t$ (konstante Geschwindigkeit 1).

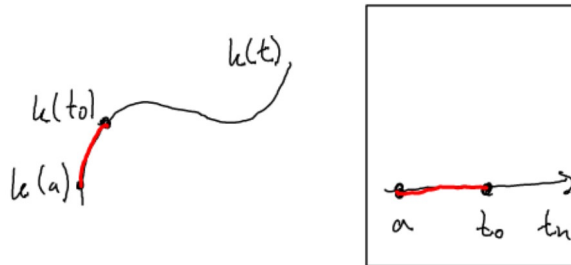


Abbildung 32: Parametrisierung nach der Bogenlänge. Eine Parameterdarstellung ist natürlich, wenn $L_{a,t} = t - a$

$$\text{Sei } k(t) \text{ natürlich: } L_{a,b} = \int_a^{t_0} |f'(t)| dt = \int_a^{t_0} 1 dt = [t]_a^{t_0} = \underline{t_0 - a}$$

8.7 Parametertransformation

Die Funktion $t(\theta)$ sei streng monoton wachsend (in Abb. 33 ist das so!) oder streng monoton fallend. Neue Parameterdarstellung der Kurve: $k(t(\theta)), \theta \in [c, d]$.

$t(\theta)$ streng monoton wachsend: Durchlaufsin bleibt (gestrichelten Linien in Abb. 33).

$t(\theta)$ streng monoton fallend: anderer Durchlaufsin.

8.8 Beispiel

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \sqrt{0, 2\pi} \\
 f(\theta) &= 2\theta + 1 \text{ (monoton steigend)} \\
 k(t(\theta)) &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta + 1) \\ \sin(2\theta + 1) \end{pmatrix} \\
 t(c) &= 0, 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \\
 t(d) &= 2\pi, 2d + 1 = 2\pi \Rightarrow d = \frac{2\pi - 1}{2}
 \end{aligned}$$

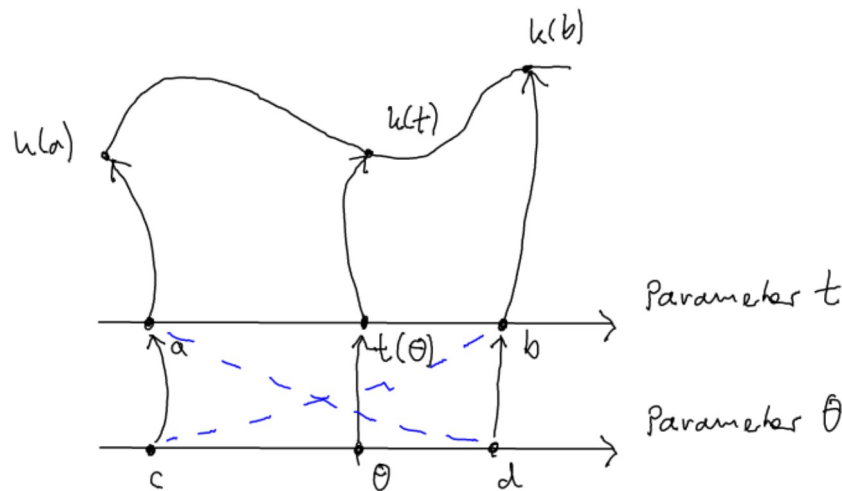


Abbildung 33: Parametertransformation

8.9 Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung

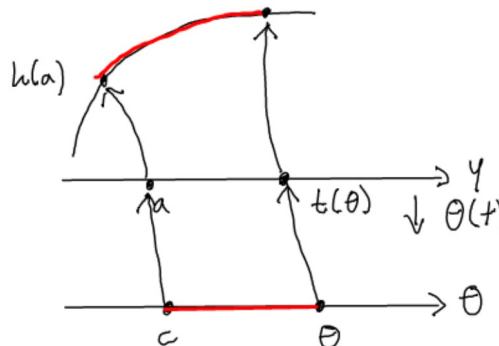


Abbildung 34: Umwandlung einer Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung. Die Bogenlänge soll so lang sein wie die Zeit (rote Linien).

Wir wollen eine Parameterdarstellung in eine natürliche Parameterdarstellung umwandeln (Abb. 34). $\theta(t) - c = \int_a^t |k'(s)| ds$. $t(\theta)$ ist die Umkehrfunktion von $\theta(t)$.

„Wir suchen das $t(\theta)$, haben aber nur $\theta(t)$.“

8.10 Beispiel Zykloide

Wir suchen die natürliche Parameterdarstellung der Zykloide. $R = 1, f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), a = 0 \leq t \leq b = \pi$ (halber Bogen bis 180°). Setze $c = 0$ ($d = 4$), $|f'(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}$ (Wir ersetzen im Folgenden t durch s).

$$\theta(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{s}{2} ds = \left[4 \cos \frac{s}{2} \right]_{s=0}^{s=t} = -4 \left(\cos \frac{t}{2} - \cos 0 \right) = -4 \cos \frac{t}{2} + 4$$

$\theta(t) = 4 - 4 \cos \frac{t}{2} = \theta$ Nun suchen wir die Umkehrfunktion $\rightarrow t(\theta)$ nach t

$$\begin{aligned}
&\text{auflösen. } -4 \cos \frac{t}{2} = \theta - 4 \\
&\cos \frac{t}{2} = 1 - \frac{\theta}{4} \\
&\frac{t}{2} = \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \\
&t = 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right), 0 \leq \theta \leq 4 \\
&t(\theta) = 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \\
&f(t(\theta)) = \begin{pmatrix} 2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) - \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \right) \\ 1 - \cos \left[2 \arccos \left(1 - \frac{\theta}{4} \right) \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.11 Die Krümmung einer Kurve

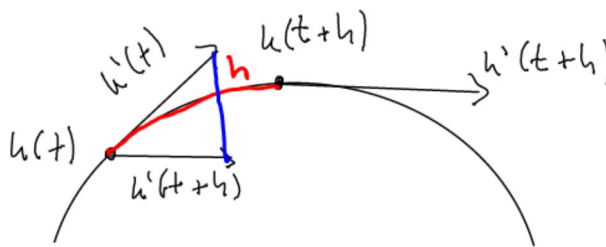


Abbildung 35: Die Krümmung einer Kurve

Die Parameterdarstellung $k(t)$ sei **natürlich**.

Krümmung = $\frac{\text{Winkeländerung des Geschwindigkeitsvektors}}{\text{Bogenlänge}}$

$$\text{Krümmung} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k'(t+h) - k'(t)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h} \right|$$

$$\text{Krümmungsvektor (ohne Betrag): } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h} = k''(t)$$

Krümmung: $|k''(t)|$

Der Krümmungsvektor $k''(t)$ steht senkrecht auf $k'(t)$.

Annäherung durch Kreis Wir nähern die Kurve k im Punkt $k(t)$ durch einen Kreis an (Abb. 35). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k'(t+h) - k'(t)}{h}$ mit $\alpha = \frac{h}{R}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k'(t+h) - k'(t)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha \cdot R} = \frac{1}{R}$. Der Betrag der Krümmung ist somit $\frac{1}{R}$. Also: Der Krümmungsvektor zeigt in Richtung des Krümmungskreismittelpunkts. Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{\text{Krümmung}}$. Die Ebene des Krümmungskreises wird aufgespannt durch den Geschwindigkeitsvektor und den Krümmungsvektor.

„Zähler \cong blaue Linie in Abb. 35“

8.12 Beispiel Krümmung der Schraublinie

$f(t) = (R \cos t, R \sin t, v \cdot t)$. Wir brauchen die natürliche Parameterdarstellung und müssen daher eine Transformation machen: $\theta(t) - c = \int_a^t |f'(s)| ds$ mit $a = 0, c = 0$. $\theta(t) = \int_0^t |(-R \sin s, R \cos s, v)| ds = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 s + R^2 \cos^2 s + v^2} ds$
 $= \int_0^t \sqrt{R^2 + v^2} ds = [\sqrt{R^2 + v^2} s]_0^t = t \sqrt{R^2 + v^2} = \theta$

Auflösen nach t : $t = \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}$

$$\Rightarrow g(\theta) = \left(R \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, R \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, v \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)$$

$$g'(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)$$

$$g''(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, -\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, 0 \right)$$

$$= -\frac{R}{\sqrt{R^2 + v^2} \sqrt{R^2 + v^2}} \underbrace{\left(\cos \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}}, \sin \frac{\theta}{\sqrt{R^2 + v^2}} \right)}_{\text{Länge 1}}$$

$$|g''(\theta)| = \frac{R}{R^2 + v^2} \text{ Konstante Krümmung. } R \text{ Radius Schraubzylinder. Krümmungskreisradius}$$

$$= \frac{1}{\text{Krümmung}} = \frac{R^2 + v^2}{R} = R + \frac{v^2}{R}$$

8.13 Krümmung einer ebenen Kurve, die als Graph einer Funktion $y = f(x)$ gegeben ist

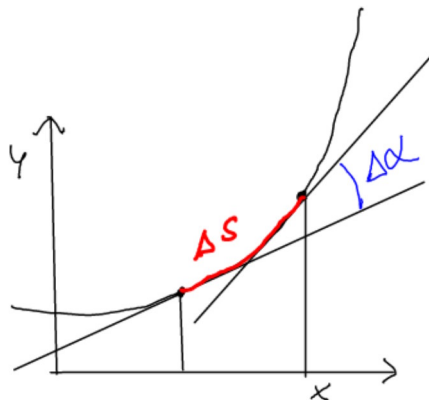


Abbildung 36: $\Delta\alpha$ ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten. s ist die Bogenlänge.

Krümmung von f bei $x \approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$,
 $\alpha_1(x) = \arctan f'(x)$, $\alpha_2(s) = \alpha_1(x(s))$

$$K(x) = \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{d\alpha_1}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{1}{1 + f'(x)^2} \cdot f''(x)$$

Ableitung von x nach s , $x(s)$ ist die Umkehrfunktion von $s(x)$. Dafür gibt es eine

$$\text{Formel: } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

$$\text{Also: } K(x) = \frac{1}{1 + f'(x)^2} \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

„Kettenregel!“

„Ableitung von $\arctan x$ ist $\frac{1}{1+x^2}$ “

Formel für die Krümmung bei x $K(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$

8.14 Ein einfaches Beispiel

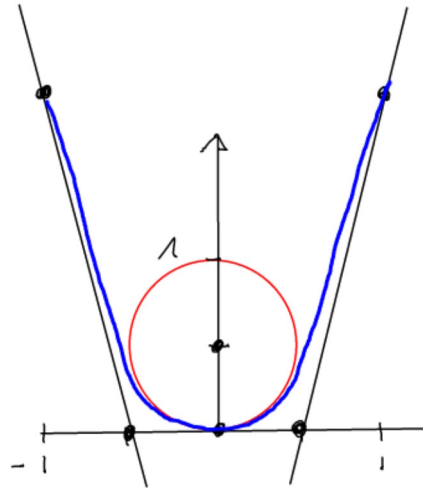


Abbildung 37: Beispiel Krümmungskreis mit dessen Hilfe die Funktion angenähert werden kann. Der Kreisradius beträgt $\frac{1}{2}$ und $f'(1) = 2$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 \Rightarrow K(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}^3}$
 Die Krümmung im Scheitel, also bei 0: $K(0) = \frac{2}{1} = 2$
 Der Krümmungskreisradius ist $\frac{1}{K(0)}$, also $\frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 37)

8.15 Krümmung einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung

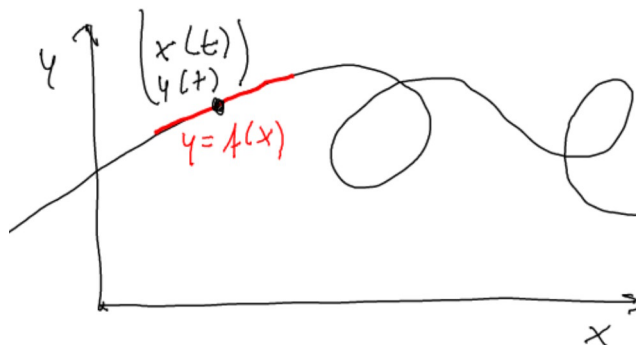


Abbildung 38: Krümmung einer ebenen Kurve

Steigung an der Stelle $x(t), y(t)$: $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = f'(t) = \frac{df}{dx}(x(t))$ (Abb. 38)

Beide Seiten nach t ableiten: $\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2} = \frac{df}{dx \cdot dx} \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow f''(x) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}$

Krümmung beim Parameterwert t $K(t) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3 \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}^3}$

Krümmung bei t $K(t) = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\left(\dot{x}\sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\right)^3}$

8.16 Beispiel Ellipse

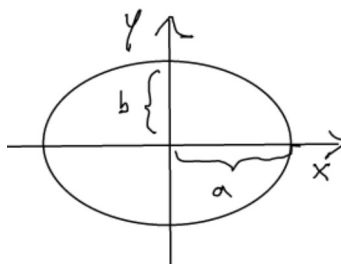


Abbildung 39: So kann eine Ellipse ausschauen ;-)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -a \sin t, \ddot{x} = -a \cos t$$

$$\dot{y} = b \cos t, \ddot{y} = -b \sin t$$

$$K(t) = \frac{b \sin(t) a \sin(t) + b \cos(t) a \cos(t)}{\left(-a \sin t \sqrt{1 + \frac{b \cos^2 t}{a \sin^2 t}}\right)^3} = \frac{ab}{\left(-a \sin t \sqrt{1 + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t}}\right)^3} = \frac{ab}{\left(\pm 1 \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\right)^3}$$

Krümmung an den Scheiteln ($0^\circ, 90^\circ$) $t = 0^\circ : K(0) = \frac{ab}{\sqrt{b^2}^3} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$
 \Rightarrow Krümmungskreisradius = $\frac{b^2}{a}$

$t = 90^\circ : K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2}^3} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2} \Rightarrow$ Krümmungskreisradius = $\frac{a^2}{b}$

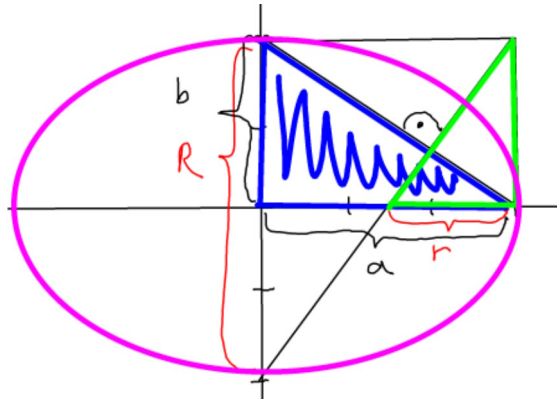


Abbildung 40: Konstruktion einer Ellipse mit $a = 3, b = 2$ mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken. R und r sind die Krümmungskreismittepunkte.

Wir suchen nun ähnliche Dreiecke (Abb. 40), bei denen die Seiten Senkrecht zueinander sind. $\frac{b}{a} = \frac{a}{R} \Rightarrow bR = a^2 \Rightarrow R = \frac{a^2}{b}$
 $\frac{b}{a} = \frac{r}{b} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$

9 Kurven in Polarkoordinaten

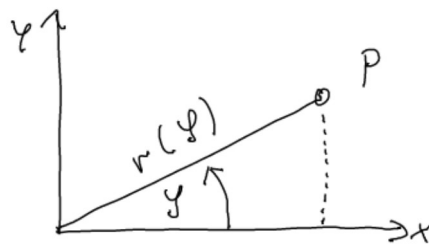


Abbildung 41: Kurven in Polarkoordinaten umrechnen. Gegeben $r(\varphi)$

Gegeben ist $r(\varphi) \Rightarrow$ übliche Parameterdarstellung: $x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$

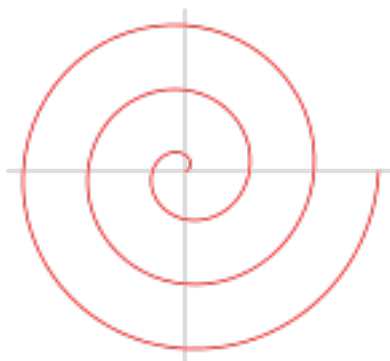


Abbildung 42: Beispiel Archimedische Spirale (Quelle: Wikipedia)

9.1 Beispiel Archimedische Spirale

$r(\varphi) = a \cdot \varphi, a > 0$ $x(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \cos \varphi$, $y(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \sin \varphi$, Tangentenvektor:
 $x'(\varphi) = a(1 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)$, $y'(\varphi) = a(1 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$.

Bei $\varphi = 0^\circ$: $(x'(0), y'(0)) = a(1, 0)$

Bei $\varphi = 2\pi$: $a(\cos 2\pi - 2\pi \sin 2\pi, \sin 2\pi + 2\pi \cos 2\pi) = a(1, 2\pi)$

9.2 Sektorflächeninhalt

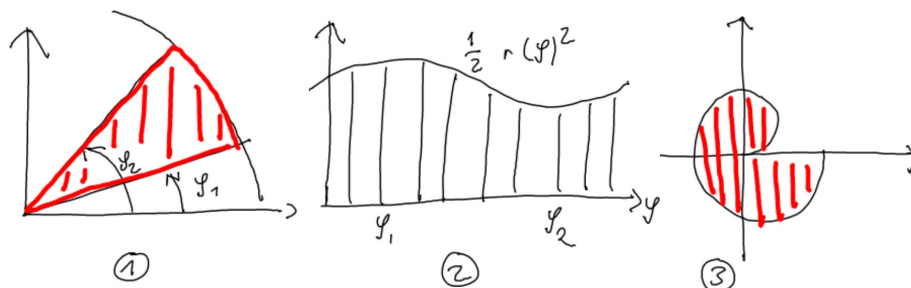


Abbildung 43: Sektorflächeninhalt: Annäherung durch Kreissegment (1), durch eine Funktion (2) und durch die Archimedische Spirale (3).

Annäherung durch Kreissegmente: $\sum_{i=1}^n \frac{r(\varphi_i)^2 \pi}{2\pi} \Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r(\varphi_i)^2 \Delta\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Archimedische Spirale: 2π

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \left[\frac{a^2}{2} \frac{1}{3} \varphi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 \text{ mit } a = 1: \frac{4}{3} \pi^3 = 41.3$$

9.3 Bogenlänge in Polarkoordinaten

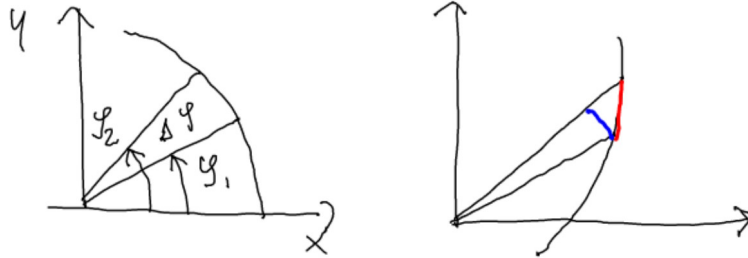


Abbildung 44: Bogenlänge in Polarkoordinaten

$\sum_{i=1}^n \frac{2r(\varphi_i)\pi}{2\pi} \cdot \Delta\varphi, \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)d\varphi$ ist **falsch!**

Formel für die Bogenlänge $\int_{t=a}^{t=b} |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$

Polarkoordinaten: $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$ $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = \dots \\ &= r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \Rightarrow \text{Bogenlänge} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

9.4 Beispiel Logarithmische Spirale

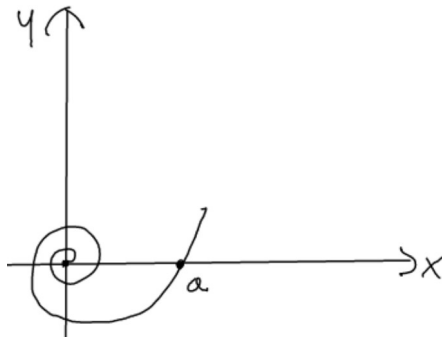


Abbildung 45: Logarithmische Spirale

Wir berechnen die Logarithmische Spirale (Abb. 45): $r(\varphi) = a \cdot e^{b\varphi}$, $a, b > 0$
 $r'(\varphi) = abe^{b\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 b^2 e^{2b\varphi} + a^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ae^{b\varphi} \sqrt{b^2 + 1} d\varphi = a\sqrt{b^2 + 1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{b\varphi} d\varphi$
 $= a\sqrt{b^2 + 1} \left[\frac{1}{b} e^{b\varphi} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} (e^{b\varphi_2} - e^{b\varphi_1})$

$$\text{Berechne: } \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \int_{\varphi}^0 \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} (\underbrace{e^{b \cdot 0}}_1 - \underbrace{e^{b\varphi}}_0) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} \Rightarrow$$

Strecke ist endlich z.B. $a = b = 1 \Rightarrow \text{Länge} = \sqrt{2}$

„Windet sich unendlich am Nullpunkt, aber die Strecke ist dennoch endlich.“

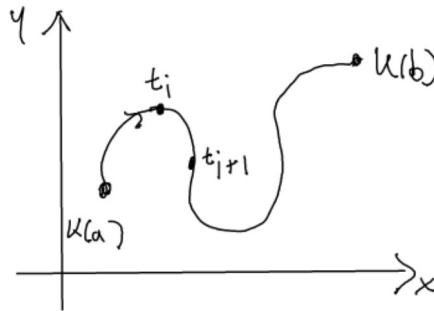


Abbildung 46: Linienintegral

9.5 Linienintegrale

9.5.1 1. Art:

Gegeben ist eine ebene Kurve (Abb. 46) in der xy-Ebene durch Parameterdarstellung $K(t)$ und die Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht wird der Inhalt der abgewickelten Fläche.

$$\sum_{i=1}^n F(K(t_i)) \cdot |K'(t_i)| \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(K(t)) \cdot |K'(t)| dt = \int_a^b F(K_1(t), K_2(t)) \cdot \sqrt{K_1'(t)^2 + K_2'(t)^2} dt$$

9.6 Beispiel

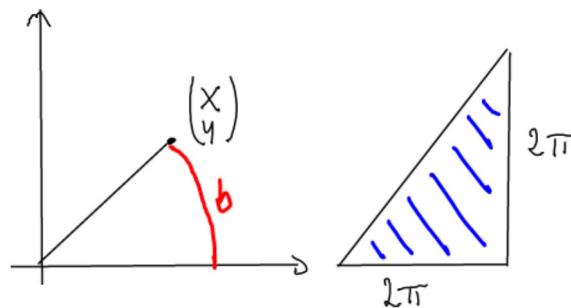


Abbildung 47: $F(x, y) =$ Länge des Bogens b im Einheitskreis und die abgewinkelte Fläche mit $F = 2\pi^2$ (rechts)

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ (Einheitskreis)}$$

$$\int_0^{2\pi} F(K(t)) |K'(t)| dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot |-\sin t, \cos t| dt = \int_0^{2\pi} t \cdot 1 dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} 4\pi^2 = 2\pi^2 \text{ (vgl. Abb. 47)}$$

9.7 Beispiel

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

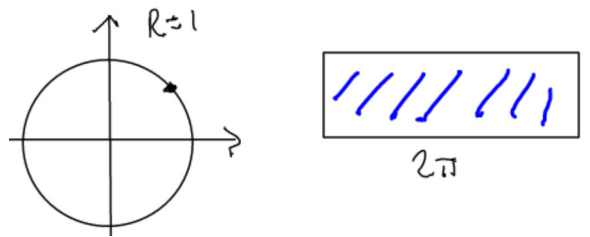


Abbildung 48: Beispiel und die abgewinkelte Fläche (rechts)

$$\int_0^{2\pi} F(K(t)) \cdot |K'(t)| dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot |(-\sin t, \cos t)| dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cdot 1 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \text{ (vgl. Abb. 48)}$$

9.7.1 2. Art Arbeitsintegral (in der Ebene)

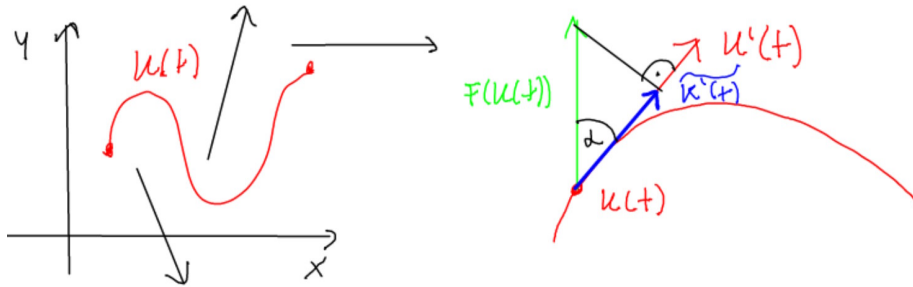


Abbildung 49: Arbeitsintegral und rechts ein Kraftvektor

Gegeben ist eine Kurve $K(t)$, ein Vektorfeld $F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$ und Kraftvektoren (Abb. 49). Arbeit ist Kraft mal Weg.

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &\approx \sum_{i=1}^n |\tilde{K}'(t)| \cdot |K'(t)| \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n |F(K(t_i))| \cdot \cos \alpha \cdot |K'(t)| \cdot \Delta t \text{ mit} \\ \cos \alpha &= \frac{F(K(t)) \cdot K'(t)}{|F(K(t))| \cdot |K'(t)|} = \sum_{i=1}^n |F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)| \cdot \frac{F(K(t_i)) \cdot K'(t_i)}{|F(K(t_i))| \cdot |K'(t_i)|} \cdot \Delta t = \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{F(K(t_i)) \cdot K'(t_i)}_{\text{Skalarprodukt}} \cdot \Delta t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(K(t)) \cdot K'(t) dt \text{ (Arbeitsintegral)} \end{aligned}$$

„NR: $|\tilde{K}'(t)|$
 $= |F(K(t))| \cos \alpha$
 „Wir rechnen mit Vorzeichen“

9.8 Beispiel Arbeitsintegral

Vektorfeld $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$, Kurve $K(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ von $t = 0$ bis $t = 1$ (Abb. 50).

$$K'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(K(t)) = F\left(\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(K(t)) \cdot K'(t) dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 8t^3 + 2t^3 dt = \int_0^1 10t^3 dt \\ &= \left[10 \cdot \frac{1}{4}\right]_0^1 = 2.5 \end{aligned}$$

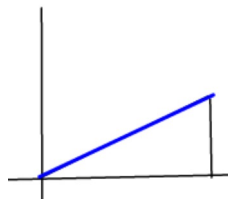


Abbildung 50: Arbeitsintegral: heir Gerade

9.9 Beispiel

Wir rechnen im \mathbb{R}^3 mit dem Vektorfeld $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Kurve

$K(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)$ (Schraubenlinie)

$$\int_0^{2\pi} F(K(\varphi)) \cdot K'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -1 d\varphi = -2\pi$$

„Bei einer Umdrehung geht es 2π nach oben“

10 Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

10.1 Linearisierung

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) + \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}, \frac{\delta f_1}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}, \frac{\delta f_m}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

„Linearisierung mittels partieller Ableitung“

„Die mittlere Matrix nennen wir **Ableitungsmatrix**, hier: Ableitung von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ “

10.2 Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2^2 \\ x_2 \cdot x_3 \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitungsmatrix: } \begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Linearisierung: } f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} \approx f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2, 2x_1x_2, 0 \\ 0, x_3, x_2 \\ 2x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_1^2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

10.3 Kettenregel

$$(g \circ f)(x + \Delta x) = g(f(x + \Delta x)) \approx g(f(x) + f'(x) \cdot \Delta x) \approx g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot [f'(x) \cdot \Delta x] = g(f(x)) + \underbrace{[g'(f(x)) \cdot f'(x)]}_{\text{Die Ableitungsmatrix von } g \circ f} \cdot \Delta x$$

$$\textbf{Kettenregel: } (g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{Matrix}} \underbrace{\cdot}_{\text{Matrizenmultiplikation}} \underbrace{f'(x)}_{\text{Matrix}}$$

10.4 Beispiel

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Direkt: } (g \circ f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ 3x_1^3x_2 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit der Kettenregel: } f' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix}, \quad g' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_2, 3x_1 \end{pmatrix}$$

$$g'(f(x)) = g' \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 3x_1^2, 3x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2, x_1 \\ 2x_1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 3x_1^2x_2 + 6x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1, 0 \\ 9x_1^2x_2, 3x_1^3 \end{pmatrix}$$

10.5 Hausaufgabe

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^y$$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

10.6 Beispiel

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x^y$$

gesucht: $(g \circ f)'$

1. direkt
2. mit Kettenregel

1) direkt $(g \circ f)(x) = g \left(\begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} \right) = x^{\cos x} = h(x)$
 $h(x) = e^{\ln x \cdot \cos x}, h'(x) = e^{\ln x \cdot \cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right) = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right)$

2) mit der Kettenregel $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix}$
 $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^y \Rightarrow g' \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (y \cdot x^{y-1}, x^y \cdot \ln x)$
 $g'(f(x)) = g' \left(\begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} \right) = (\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x)$
 $g'(f(x)) \cdot f'(x) = (\cos x \cdot x^{(\cos x)-1}, x^{\cos x} \cdot \ln x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x \end{pmatrix} = \cos x \cdot x^{(\cos x)-1} - x^{\cos x} \ln x \sin x = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cos x - \ln x \sin x \right)$

Aus der Formelsammlung:
 $x^n \rightarrow$
 $nx^{n-1}, a^y \rightarrow$
 $a^y \cdot \ln a$

11 Parameterdarstellung von Flächen

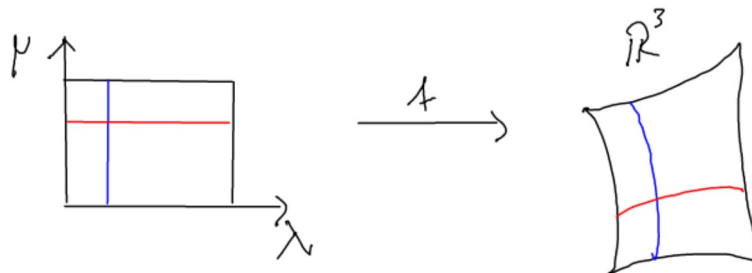


Abbildung 51: Das rote ist die λ -Parameterlinie (Immer die Variable), das blaue die μ -Parameterlinie

$$f: F \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(\lambda, \mu) \\ f_2(\lambda, \mu) \\ f_3(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$$

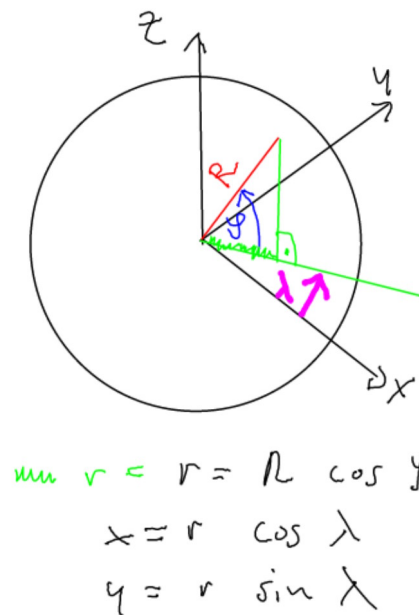


Abbildung 52: Beispiel Erdkugel: Erdachse: $z = R \sin \varphi$, Breite: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, Länge: $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

11.1 Beispiel

Parameterdarstellung: Wir betrachten die Erdkugel um 0 mit Radius R .

$$z = R \cos \varphi$$

$$x = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

λ -Parameterlinie ist der Breitenkreis, φ -Parameterlinie der Längenhalkreis.

11.2 Parameterdarstellung des Drehellipsoids

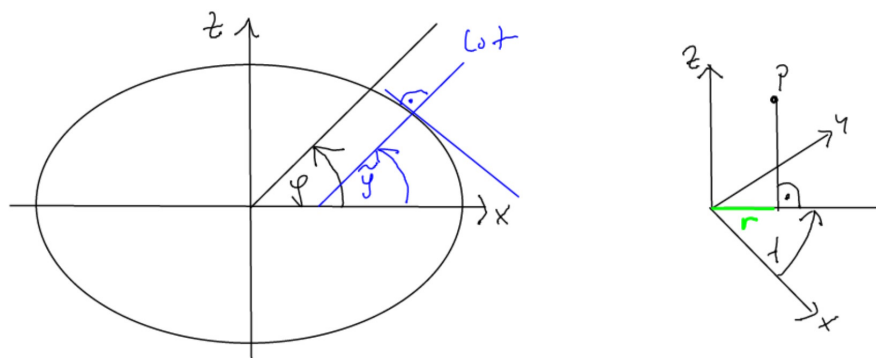


Abbildung 53: Parameterdarstellung des Drehellipsoids: $x = a \cos \varphi$, $z = b \sin \varphi$

Wir lassen eine Ellipse um ihre Nebenachse rotieren (Abb. 53).

$$r = a \cos \varphi$$

$$x = r \cos \lambda$$

$$y = r \sin \lambda$$

\Rightarrow Parameterdarstellung

$$x = a \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = a \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = b \sin \varphi$$

„Wir konstruieren
die Ellipse wie in
Abb. 40“

φ -Parameterlinie: Längenhalbellipse, Länge λ

λ -Parameterlinie: Breitenkreis, die geographische Breite ist nicht φ sondern $\tilde{\varphi}$.

12 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen

12.1 Kurven in \mathbb{R}^2

$f(x, y) = 0$ Kreis um den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit Radius R .

$$\text{Distanz } d \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^2 = R^2$$

$$\left| \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right|^2 = R^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Gerade: $ax + by + c = 0$

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit a, b Halbachsen.

Sonderfall Kreis: $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \checkmark$

12.2 Lot auf eine Kurve

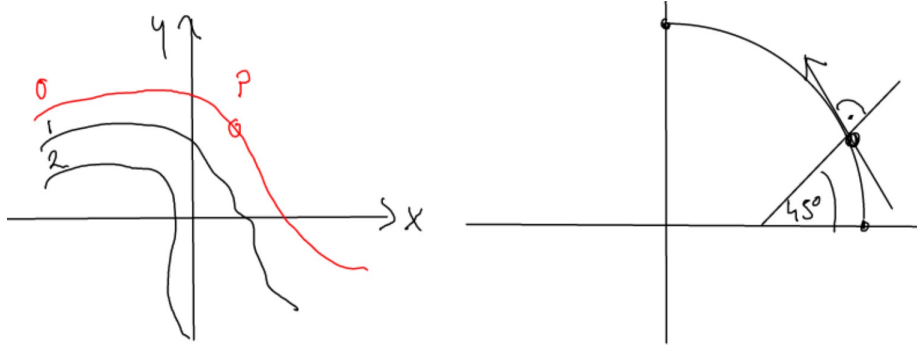


Abbildung 54: Höhenlinienplan: 0-er (rot)

$f(x, y) = 0$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) \end{cases}$ ist ein „Funktionsgebirge“. Die Kurve $f(x, y) = 0$ ist die 0-er Höhenlinie (Abb. 54). Der Ableitungsvektor in P (Gradient) zeigt in Richtung des steilsten Anstieg. Das ist senkrecht zur Höhenlinie. Das Lot ist also der Gradient. Lot im Punkt (x, y) ist $\left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right)$ (rechts in Abb. 54).

12.3 Ellipse

$$f(x, y) = 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \text{grad } f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

Lot mit 45° : $\frac{2x}{a^2} = \frac{2y}{b^2} \Rightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} = \frac{y^2}{b^4}$ (setzen wir unten ein)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^4} \cdot a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow y^2 \frac{a^2 + b^2}{b^4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}$$

$$\text{z.B.: } a = 3, b = 2, y^2 = \frac{16}{9+4} = \frac{16}{13} \Rightarrow y = 1.1094$$

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^2} \cdot y = \frac{9}{4} \cdot 1.1094 = 2.496$$

„grad ist der Gradient.“

12.3.1 andere Berechnungsmethode

Parameterdarstellung: $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$

Tangentenvektor: $(-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$

Lotvektor: $(b \cos \varphi, a \sin \varphi)$

$$45^\circ: b \cos \varphi = a \sin \varphi \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\text{Für } b = 2, a = 3: \frac{2}{3} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = 33,69^\circ$$

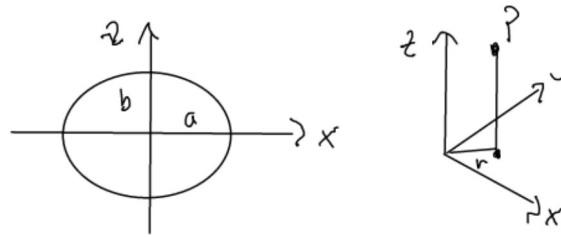
$$\text{einsetzen: } (a \cos \varphi, b \sin \varphi) = (3 \cos 33.69^\circ, 2 \sin 33.69^\circ) = (2.496, 1.109)$$

12.4 Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3

$f(x, y, z) = 0$. Kugel um 0 mit dem Radius R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Drehellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (Abb. 55)

Rotation um Z-Achse: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

Abbildung 55: Implizite Darstellung von Flächen im \mathbb{R}^3

Lot in einem Flächenpunkt: $F : f(x, y, z) = 0, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Fläche F ist die „0-er Niveaulfläche“.

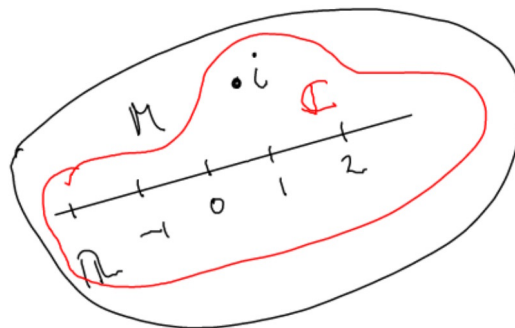
Bewegt man sich im Flächenpunkt P in Richtung $\text{grad}(f)$, so wächst die Funktion am stärksten. Der Gradient in P ist also das Lot auf die Fläche in P (Abb. 55).

12.5 Beispiel

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \text{grad}(f) = (2x, 2y, 2z)$

Drehellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \text{grad}(f) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{b^2}\right)$

13 Die komplexen Zahlen

Abbildung 56: Menge der komplexen Zahlen. Menge M und Menge \mathbb{C} (rot)

Wir starten mit den reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $(M, +, \cdot)$ sei eine Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (vgl. Abb. 56). In $(M, +, \cdot)$ sollen die üblichen Rechenregeln gelten. Das heißt, die Körperaxiome sollen gelten:

- $(M, +)$ kommutative Gruppe, 0 neutral
- (M^*, \cdot) kommutative Gruppe, 1 neutral
- das Distributivgesetz muss gelten: $a(b + c) = ab + ac$

Wir nehmen an, es gibt ein $i \in M$ mit $i^2 = -1$.

Definition 13.1. Wir definieren.: $\mathbb{C} = \{x \in M : x = a + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$
 $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac + adi + bci - bd) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$
 $\Rightarrow \mathbb{C}$ ist abgeschlossen bezüglich $+$ und \cdot , $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Darstellung $a + bi$ ist
 eindeutig.

„Erinnerung: $i^2 = -1$ “

Beweis. $a + bi = c + di$
 $a - c = di - bi = (d - b)i$
 angenommen: $d - b \neq 0 \Rightarrow i = \frac{a-c}{d-b}$ (!)
 Also: $d = b$ und $a = c$

□

„(!) Da schlägt der Blitz ein.“

Definition 13.2. Wir definieren: $\mathbb{C} = \{x \in M : x = a + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$
 $+: (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
 $\cdot: (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Die reellen Zahlen sind in \mathbb{C} eingebettet. $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$
 $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
 $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0 + 0)$

In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gelten die Körperaxiome:

- assoziativ: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- kommutativ: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- distributiv: $a(b + c) = ab + ac$

$(0, 0)$ ist neutrales Element bezüglich der Addition, $(1, 0)$ bezüglich der Multiplikation. Inverses Element bezüglich der Addition: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.
 Inverses Element bezüglich der Multiplikation: $(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (1, 0)$.
 Schreibweisen: $x + (-y) = x - y$ und $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$

Definition 13.3. $i = (0, 1)$

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \hat{=} -1$$

Die komplexe Zahl $(a, 0)$ bezeichnen wir auch als a . $(a, b) = (a, 0) + \underbrace{(b, 0) \cdot (0, 1)}_{(0, b)}$

$$= a + bi$$

$(a, b) = a + bi$ Darstellung ist eindeutig.

13.1 Zahlenebene

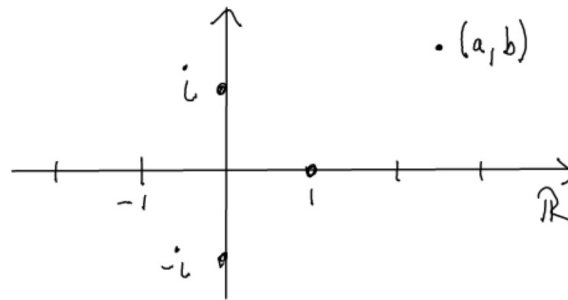


Abbildung 57: Zahlenebene: Addition \Leftrightarrow Vektoraddition und $(-i)^2 = -1 \Leftrightarrow (0, -1)(0, -1) = (-1, 0)$

Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition (Abb. 57). Spiegeln an der x-Achse (**konjugieren**): $(a, b) \rightarrow (a, -b) = (a, b)$ und $a + bi \rightarrow a - bi$. Es gilt also: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

*** ist ein Automorphismus, d.h.

1. *** ist bijektiv

$$2. \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$3. \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\begin{aligned} \text{von 3.) } \overline{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)} &= \overline{x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1} = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \overline{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)} &= (x_1, -x_2)(y_1, -y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad \square$$

Damit gilt z.B.:

$$\overline{x + z^2 y + y^4} = \bar{x} + \bar{z}^2 \bar{y} + \bar{y}^4$$

Polynom mit reellen Koeffizienten: $ax^4 + bx^4 + cx + d$ x Variable, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ist x_0 eine Nullstelle, dann auch \bar{x}_0 : $\overline{ax_0^4 + bx_0^4 + cx_0 + d} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{ax_0^4 + bx_0^4 + cx_0 + d} = 0$

$$1. z + \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$2. z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Beweis. (1) } \overline{z + \bar{z}} = \bar{z} + \bar{\bar{z}} = \bar{z} + z$$

$$(2) \overline{z \cdot \bar{z}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{z}} = \bar{z} \cdot z \quad \square$$

*** ist der Überstrich (vgl. Ziffer 2). Es lässt sich leider derzeit nicht anders darstellen.

„ $(a, b) = z, a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ “

Es gilt: (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(2) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (\bar{z} - z)$

„ $z = z_1 + iz_2$ “

Beweis. (2) $\frac{1}{2} \cdot i \cdot (z_1 - iz_2 - z_1 - iz_2) = \frac{1}{2} \cdot i(-2iz_2) = (-1)(-1)z_2 = z_2 \quad \square$

13.2 sin, cos, e-Funktion im Komplexen

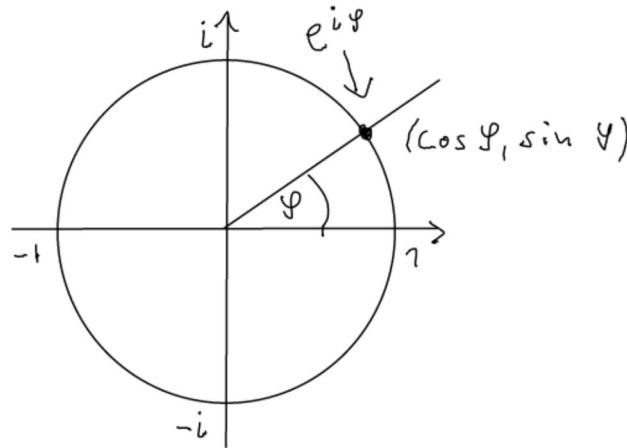


Abbildung 58: sin, cos, e-Funktion im Komplexen am Beispiel des Einheitskreises.

Reihendarstellung: (vgl. Abb. 58) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

„Setze einfach $x \in \mathbb{C}$ “

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln z.B. $e^{x+y} = e^x e^y$.

$$(1) \varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots$$

$$(2) \cos \varphi + i \sin \varphi = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + \left(i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \left(1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots\right)$$

Es gilt (1) = (2), also: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (Eulersche Formel).

$(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ Geometrische Interpretation von + und \cdot (vgl. auch Abb. 59).

+: Vektoraddition

$\because z \cdot s = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1+i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, also Radien multiplizieren und Winkel addieren.

$|z| = |(z_1, z_2)| = r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist eine Drehstreckung.

13.3 Die n-ten Wurzeln von 1

Für welche komplexen Zahlen gilt $z^n = 1$? Es muss gelten: $|z| = 1$, z auf Einheitskreis. $(e^{i\varphi})^n = 1 \Rightarrow e^{i\varphi n} = 1$

φn Vielfaches von $2\pi \Leftrightarrow \varphi n = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \varphi = k \cdot \frac{2\pi}{n}$

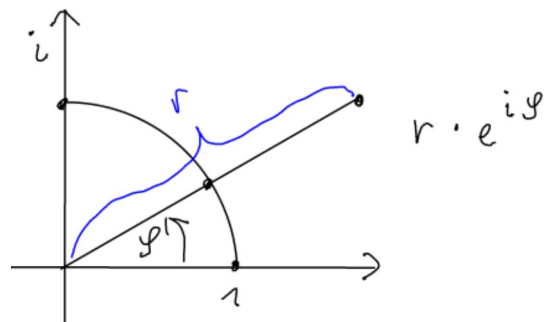
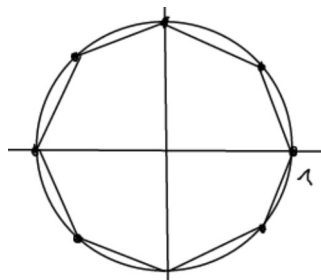


Abbildung 59: Geometrische Interpretation

Abbildung 60: Die n -ten Wurzeln von 1 am Beispiel eines Einheitskreises und einem 8-Eck.

$1 \cdot \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ sind alle. Das sind die passenden Winkel. Regelmäßiges 8-Eck auf dem Einheitskreis (Abb. 60).

Allgemein 1 hat genau n n -te Wurzeln, ein regelmäßiges n -Eck auf dem Einheitskreis. Jede komplexe Zahl z hat genau n -te Wurzeln (regelmäßiges n -Eck auf Kreis um 0 mit Radius R , verdreht).

Stichwortverzeichnis

Eulersche Formel, 50

Formel

Eulersche, 50