

Mitschrift  
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS  
2015/16  
Prof. Dr. Josef Hörwick

M. Zell

11. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hinweise</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Allgemeines</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Zufallsexperimente</b>	<b>8</b>
3.1	2. Ereignisse . . . . .	8
3.2	Zweimal Würfeln . . . . .	9
3.3	Rechenregeln in der Mengenlehre . . . . .	9
3.4	Zufallsvariable . . . . .	9
3.5	Indikatorfunktionen . . . . .	9
3.6	Zählvariable . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Relative Häufigkeit</b>	<b>11</b>
4.1	Relative Häufigkeit am Beispiel des Reißnagelversuchs . . . . .	11
4.2	Relative Häufigkeit allgemein . . . . .	11
4.3	Beispiel . . . . .	11
4.4	Stabilisierung . . . . .	11
4.5	Empirisches Gesetz . . . . .	11
4.6	Übung 4.2 (Buch) . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Deskriptive Statistik</b>	<b>12</b>
5.1	Stabdiagramm . . . . .	12
5.2	Histogramm . . . . .	13
5.3	Lagemaße . . . . .	13
5.4	Gewichtetes Mittel . . . . .	13
5.5	Der empirische Median . . . . .	14
5.5.1	Beispiel . . . . .	14
5.5.2	Verallgemeinerung . . . . .	14
5.6	Streuungsmaße . . . . .	14
5.6.1	Die empirische Varianz . . . . .	14
5.6.2	Beispiel . . . . .	14
5.6.3	Beispiele für andere Streuungsmaße . . . . .	15
5.6.4	Beispiel Medianabweichung . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Endliche Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>15</b>
6.1	Einfache Folgerungen . . . . .	15
6.2	Wie gibt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an? . . . . .	16
6.3	Beispiel . . . . .	16
6.4	Verteilung einer Zufallsvariablen . . . . .	17
6.4.1	Beispiel . . . . .	17
6.4.2	Übung 6.10 . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Laplace-Modelle</b>	<b>17</b>
7.1	Beispiel Zweimal Würfeln . . . . .	17
7.2	Beispiel Zwei farbige Würfel . . . . .	18
7.3	Beispiel Drei Würfel . . . . .	18
7.4	Beispiel Faires Spiel . . . . .	18
7.5	Hausaufgabe Ziegenproblem . . . . .	18
7.6	Lösung Ziegenproblem . . . . .	19

7.7 Übung 7.5 . . . . .	19
<b>8 Kombinatorik</b>	<b>19</b>
8.1 Anzahl der $k$ -Tupel ohne Wiederholungen . . . . .	20
8.2 Beispiele . . . . .	20
8.3 Pascalsches Dreieck . . . . .	20
8.4 Binomische Formel . . . . .	20
8.5 Beispiel . . . . .	21
8.6 Permutationen . . . . .	21
8.7 Das Stimmzettelproblem . . . . .	22
<b>9 Urnenmodell, Teilchen-Fächer-Modell</b>	<b>23</b>
9.1 Urnenmodell . . . . .	23
9.2 Teilchen-Fächer-Modell . . . . .	23
9.3 Die Semmelaufgabe . . . . .	25
9.3.1 Modell: Teilchen unterscheidbar . . . . .	25
9.3.2 Modell: Teilchen nicht unterscheidbar . . . . .	25
9.3.3 Auswertung Ergebnisse . . . . .	25
9.4 Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln . . . . .	25
9.5 Übung 9.5 . . . . .	25
<b>10 Erste Kollision</b>	<b>26</b>
10.1 Beispiel: Schulklasse . . . . .	26
<b>11 Die Siebformel</b>	<b>27</b>
11.1 Beispiel . . . . .	27
11.2 Siebformel allgemein . . . . .	27
11.3 Beispiel Siebformel mit vier Mengen . . . . .	27
11.4 Sonderfall . . . . .	27
11.5 Aufgabe Permutationen der Zahlen von 1 bis $n$ . . . . .	27
11.6 Beispiel Glücksspiel . . . . .	28
11.7 Beispiele 5 Briefe und 5 Umschläge . . . . .	28
<b>12 Erwartungswert</b>	<b>29</b>
12.1 Beispiel Würfeln . . . . .	29
12.2 Andere Berechnung des Erwartungswertes . . . . .	29
12.3 Beispiel Würfeln mit zwei Würfeln . . . . .	29
12.4 Satz . . . . .	29
12.5 Beispiel Rekorde . . . . .	30
12.6 Näherungsformel . . . . .	30
12.7 Sortieralgorithmus . . . . .	32
12.8 Beispiel . . . . .	32
12.9 Transformationsformel . . . . .	32
12.10 Beispiel würfeln mit zwei Würfeln . . . . .	33
<b>13 Stichprobenentnahme</b>	<b>33</b>
13.1 Lotterie Keno . . . . .	34

<b>14 Mehrstufige Experimente</b>	<b>34</b>
14.1 Beispiel . . . . .	34
14.1.1 Modellierung durch einen Baum . . . . .	34
14.1.2 Wahrscheinlichkeit eines Pfades . . . . .	35
14.2 Modellierung mehrstufiger Experimente . . . . .	35
14.3 Sonderfall: unabhängige Experimente . . . . .	35
14.4 Das Polya'sche Urnenschema . . . . .	35
14.5 Beispiel . . . . .	37
14.6 Beispiel . . . . .	37
<b>15 Bedingte Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>39</b>
15.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit für einzelne Ausgänge . . . . .	39
15.2 Beispiel . . . . .	39
15.3 Beispiel . . . . .	39
15.4 Umstellung der Formel . . . . .	40
15.5 Beispiel . . . . .	40
15.6 Bayes-Formel . . . . .	40
15.7 Beispiel Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich . . . . .	42
15.8 Beispiel Würfeln . . . . .	43
15.9 Beispiel Test auf Krankheit . . . . .	43
15.10 Verblüffende Beispiele . . . . .	44
<b>16 Stochastische Unabhängigkeit</b>	<b>44</b>
16.1 Beispiel . . . . .	46
16.2 Unabhängigkeit bei Produktexperimenten . . . . .	46
16.3 Beispiel 3mal würfeln . . . . .	46
16.4 Vergrößerung . . . . .	46
16.5 Beispiel Lotto 6 aus 49 . . . . .	46
16.6 Beispiel Gruppenscreening . . . . .	47
16.7 Beispiel . . . . .	47
16.8 p gegeben, Gruppengröße ausrechnen. . . . .	47
<b>17 Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen</b>	<b>47</b>
17.1 Beispiel 2 mal würfeln . . . . .	49
17.2 Funktionen von Zufallsvariablen/-größen . . . . .	49
17.3 Beispiel 2 mal würfeln . . . . .	49
17.4 Unabhängigkeit von 2 Zufallsvariablen . . . . .	50
17.4.1 Beispiel . . . . .	50
17.5 Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen . . . . .	51
17.6 Beispiel . . . . .	51
17.7 Standardmodell . . . . .	51
<b>18 Binomial- und Multinomialverteilung</b>	<b>51</b>
18.1 Verallgemeinerung zur Multinomialverteilung . . . . .	52
18.2 Beispiel . . . . .	52
18.3 Beispiel . . . . .	52
<b>19 Pseudozufallszahlen</b>	<b>53</b>
19.1 Simulation eines Experiments mit Hilfe des Pseudozufallsgenerators	53

<b>20 Varianz</b>	<b>54</b>
20.1 Beispiel . . . . .	54
20.2 Varianz der Indikatorfunktion $I_A = I\{A\}$ . . . . .	54
20.3 Rechenregeln der Varianz . . . . .	54
<b>21 Standardisierung einer Zufallsgröße</b>	<b>56</b>
21.1 Die Tschebyschow-Ungleichung . . . . .	56
21.2 Beispiel . . . . .	56
21.3 Aufgabe 1 . . . . .	57
21.4 Aufgabe 2 . . . . .	57
21.5 Aufgabe 3 . . . . .	57
<b>22 Kovarianz</b>	<b>59</b>
22.1 Folgerung . . . . .	59
22.2 Beispiel . . . . .	60
22.3 Varianz einer Indikatorsumme . . . . .	60
22.4 Beispiel Binomialverteilung $\text{Bin}(n,p)$ . . . . .	60
22.5 Beispiel hypergeometrische Verteilung . . . . .	61
22.6 Beispiel Permutationen . . . . .	61
22.7 Korrelationskoeffizient . . . . .	61
22.8 Folgerungen . . . . .	62
22.9 Beispiel . . . . .	63
<b>23 Überbestimmte LGS</b>	<b>63</b>
23.1 Aufgabe . . . . .	63
23.2 Beispiel Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	63
23.3 Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	64
<b>24 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>66</b>
24.1 Beispiel . . . . .	66
24.2 St. Petersburgs Spiel . . . . .	66
24.3 Spieler-Ruin-Problem . . . . .	66
<b>25 Exkurs wichtige Reihen</b>	<b>68</b>
25.1 Aufgabe 22.2 . . . . .	69
<b>26 Wartezeitprobleme</b>	<b>69</b>
<b>27 Lösung für die Prüfung SS 2012</b>	<b>73</b>
27.1 zu 1) . . . . .	73
27.1.1 zu 1a) . . . . .	73
27.1.2 zu 1b) . . . . .	73
27.2 zu 2a) . . . . .	73
27.3 zu 2b) . . . . .	73
27.4 zu 3) . . . . .	73
27.4.1 zu 3a) . . . . .	73
27.4.2 zu 3b) . . . . .	74
27.4.3 zu 3c) . . . . .	74
27.5 zu 4) . . . . .	74
27.6 zu 5) . . . . .	74

Inhaltsverzeichnis	6
--------------------	---

---

Stichwortverzeichnis	75
----------------------	----

## Abbildungsverzeichnis

1	Reißnagelversuch . . . . .	11
2	Stabilisierung . . . . .	12
3	Stabdiagramm Stimmenverteilung . . . . .	12
4	Beispiel für ein Histogramm . . . . .	13
5	Beispiel Vier Stühle . . . . .	19
6	Pascalsches Dreieck . . . . .	20
7	Veranschaulichung bijektive Abbildung . . . . .	23
8	Teilchen-Fächer-Modell . . . . .	24
9	Teilchen-Fächer-Modell . . . . .	24
10	Rosinensammeln 1 . . . . .	25
11	Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln . . . . .	26
12	Glücksrad . . . . .	29
13	Wir berechnen die Flächen der roten Rechtecke unterhalb der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ . . . . .	30
14	Modellierung mittels Baum . . . . .	34
15	Beispiel Schachteln . . . . .	37
16	Beispiel . . . . .	40
17	Beispiel Urne . . . . .	42
18	Beispiel Würfeln: . . . . .	43
19	Beispiel Test auf Krankheit . . . . .	43
20	Beispiel Familie 2 . . . . .	44
21	Beispiel Unabhängigkeit . . . . .	46
22	Zwei Zufallsvariablen . . . . .	48
23	Funktionen von Zufallsvariablen/-größen . . . . .	49
24	Zufallszahlen zwischen 0 und 1 . . . . .	53
25	Simulation eines Experiments . . . . .	53
26	Beweis . . . . .	55
27	Beweis . . . . .	56
28	Beispiel . . . . .	56
29	Beweis . . . . .	58
30	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	64
31	Punktewolken und Geraden . . . . .	65
32	Spieler-Ruin-Problem . . . . .	67

## 1 Hinweise

Diese Mitschrift basiert auf der Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ von Prof. Dr. Josef Hörwick im WS 2015/16. Du kannst sie gerne benutzen, kopieren und an andere weitergeben. Auch in der Prüfung - soweit zugelassen<sup>1</sup> - kannst du sie gerne als Hilfsmittel verwenden, wenn das meine Nutzung als Prüfungshilfsmittel nicht in irgendeiner Weise beeinträchtigt.

Natürlich besteht kein Anspruch auf Aktualität, Richtigkeit, Fortsetzung meines Angebots oder dergleichen. Sollten dir Fehler auffallen oder solltest du Verbesserungsvorschläge haben, würde ich mich über eine E-Mail (zell@hm.edu) freuen. Wenn du mir als kleines Dankeschön z.B. ein Club-Mate<sup>2</sup> ausgeben möchtest, findest du mich meistens hier: <http://fi.cs.hm.edu/fi/rest/public/timetable/group/if3b>. Wenn nicht, ist es auch ok ;-)

Nach der Prüfung werde ich den L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Quelltext veröffentlichen, damit die Mitschrift weitergeführt, korrigiert und ergänzt werden kann.

Viele Grüße  
M. Zell

---

<sup>1</sup>[http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden\\_services/fi\\_pruefungskatalog.de.html](http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden_services/fi_pruefungskatalog.de.html)

<sup>2</sup><http://www.clubmate.de/ueber-club-mate.html>



## 2 Allgemeines

- kein Skript. Alles wichtige steht an der Tafel.
- Literatur: Norbert Henze, Stochastik für Einsteiger, Vieweg/Teubner
- keine Hausaufgaben
- Übungsaufgaben gibt es immer zwischendurch und alte Prüfungsaufgaben gegen Ende des Semesters

## 3 Zufallsexperimente

Experimente: Würfeln, Ergebnismenge  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , Münze werfen:  $\Omega = \{K, Z\}$ . Solange würfeln bis eine 6 kommt:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$

n Einzelexperimente  $\Rightarrow$  Kartesisches Produkt:  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$

„Man kann mehrere Experimente auch zusammenfassen“

Zum Beispiel erst würfeln, dann Münze:

$$\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}, \Omega_2 = \{K, Z\} \Rightarrow \Omega = \{(a, b) | a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$$

$$\text{Zweimal nacheinander würfeln: } \underbrace{\Omega}_{1. \text{ Wurf}} = \{(\underbrace{a}_{1.}, \underbrace{b}_{2. \text{ Wurf}}) : 1 \leq a, b \leq 6\}$$

$$\text{Mit rotem und grünen Würfel gleichzeitig: } \Omega = \{(\underbrace{a}_{\text{grüner}}, \underbrace{b}_{\text{roter}}) | 1 \leq a, b \leq 6\}$$

In einer Urne sind die Kugeln 1 bis n. Es wird k mal mit Rücklegen gezogen:

$$\Omega = \{(\underbrace{a_1}_{1. \text{ Zug}}, \underbrace{a_2}_{2. \text{ Zug}}, \dots, a_k) | 1 \leq a_i \leq n\}$$

In einer Schachtel mit den Kugeln 1, 2, 3, 4 werden zwei mit einem Griff gezogen. Wie sieht  $\Omega$  aus?

$$\Omega = \{\{a_1, a_2\} | a_1 \neq a_2, 1 \leq a_1, a_2 \leq 4\}$$

$$\Omega = \{\{a_1, a_2\} | 1 \leq a_1, a_2 \leq 4, a_1 < a_2\}$$

$$\text{Lotto: 6 Kugeln aus 49: } \Omega = \{(\underbrace{a_1}_{1. \text{ Kugel}}, \underbrace{a_2}_{2. \text{ Kugel}}, a_3, a_4, a_5, a_6) | a_i \text{ sind verschieden}\}$$

(mit Reihenfolge)

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_6) | a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6\} \text{ (ohne Reihenfolge)}$$

### 3.1 2. Ereignisse

$A \subset \Omega$  heißt Ereignis, Ergebnis  $\omega$ . A ist eingetreten, wenn  $\omega \in A$ .

$\{\omega\}$  Elementarereignis

$\Omega$  sicheres Ereignis

$\emptyset$  unmögliches Ereignis

$A \cap B$  A und B sind eingetreten.

$A \cup B$  A oder B

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$B \setminus A = \{\omega \in B : \omega \notin A\}$  B minus A.

Gegenseitiges Komplement:  $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega : \omega \notin A\}$

$A, B$  heißen disjunkt, wenn  $A \cap B = \emptyset$ . Für  $A \cup B$  schreibt man dann  $A + B$

### 3.2 Zweimal Würfeln

A: erster Wurf 5  $\Rightarrow A = \{(5, 1), (5, 2), \dots, (5, 6)\}$

B: zweiter Wurf höher als erster  $\Rightarrow B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

### 3.3 Rechenregeln in der Mengenlehre

Kommutativ:  $A \cap B = B \cap A$  und  $A \cup B = B \cup A$

Assoziativ:  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  und  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

De Morgan:  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$  und  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ , Beispiel:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Distributiv:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  und  $A \cup (B \cap C) = \underbrace{(A \cup B)}_L \cap \underbrace{(A \cup C)}_R$

**Beweis**  $L = R$

$$1. x \in L \Rightarrow x \in R \Rightarrow L \subset R$$

$$2. x \in R \Rightarrow x \in L \Rightarrow R \subset L$$

$$\Rightarrow R = L \square$$

### 3.4 Zufallsvariable

Abbildung:  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zufallsvariable, z.B. zweimal würfeln.  $X$  ist die

Augensumme:  $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$

$X_1$ : erste Augenzahl

$X_2$ : zweite Augenzahl

$$X = X_1 + X_2$$

$$(X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = \omega_1 + \omega_2$$

**Abkürzungen**  $\{X = K\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = K\}$

Augensumme mindestens 10:  $\{X \geq 10\}$

Augensumme zwischen 3 und 8:  $\{3 \leq X \leq 8\}$

Wertebereich von  $X$  ist  $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$

Arithmetik mit Zufallsvariable (ZV):

$$(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

$$(a \cdot X)(\omega) = a \cdot X(\omega)$$

$$\{X \leq Y\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq Y(\omega)\}$$

### 3.5 Indikatorfunktionen

$I_A(\omega) = 1$ , falls  $\omega \in A$ , sonst 0 ( $A \in \Omega$ ). Die Indikatorfunktion  $I$  zeigt an, ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht.

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$$

$I_A = I\{A\}$  sind mögliche Schreibweisen im Buch.  $I_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot \dots \cdot I_{A_n}$   
 $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$   
 $I_A = I_A \cdot I_A$

### 3.6 Zählvariable

$A_1, \dots, A_n$  Ereignisse:  $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$ .  $X$  zählt, wie viele Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  eingetreten sind.

$X(\omega) = \text{Anzahl der } A_i, \text{ in denen } \omega \text{ liegt. } \{X = n\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ und } \{X = 0\} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$

**Beispiel:** Ein Treffer (1), Niete (0) Experiment wird  $n$  mal wiederholt.

$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i = 1/0\}$

$A_j = \{\omega : \omega_j = 1\}$  in  $j$ -ten Versuch Treffer

$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$  zählt Anzahl der Treffer

$X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$

**Übung 3.5 (Buch)**  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | 1 \leq \omega_i \leq 6\}$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow 100$  wenn  $\omega_1 = 6$

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow 50$ , falls  $\omega_2 = 6$  und  $\omega_1 \neq 6$

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow 10$ , falls  $\omega_2 = 6$  und  $\omega_1, \omega_3 \neq 6$

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow -30$ , falls  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 6$

## 4 Relative Häufigkeit

### 4.1 Relative Häufigkeit am Beispiel des Reißnagelversuchs

Ein Reißnagel wurde 300 mal geworfen. Er kann grundsätzlich in den zwei Positionen 1 und 0 landen (Abb. 1). Die absoluten Häufigkeiten sind: 1 kommt 124 mal, 0 kommt 176 mal vor. Die relative Häufigkeit von 1 beträgt  $\frac{124}{300} = 0.413 = 41,3\%$ , die von 0 beträgt  $\frac{176}{300} = 0.586 = 58,6\%$ .

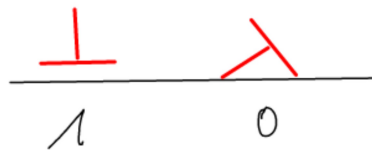


Abbildung 1: Der Reißnagel kann auf seinem Kopf landen (1) oder eben nicht (0)

### 4.2 Relative Häufigkeit allgemein

Einzelexperiment mit Ergebnismenge  $\Omega$  wird  $n$  mal wiederholt. Dadurch entsteht ein Datenvektor  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_i \in \Omega$ . Jedem Ereignis  $A$  von  $\Omega$  können wir eine relative Häufigkeit zuordnen:  $r(A) = |\{j : 1 \leq j \leq n \text{ und } \omega_j \in A\}| \cdot \frac{1}{n}$ . Für diese relative Häufigkeit gilt:

1.  $0 \leq r(A) \leq 1$
2.  $r(\Omega) = 1$
3.  $r(A + B) = r(A) + r(B)$

„Dieser Datenvektor steht fest und kann nachträglich nicht mehr geändert werden.“  
 „Die relative Häufigkeit von  $A$   $\approx$  Wahrscheinlichkeit von  $A$ .“

### 4.3 Beispiel

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n = 10$ , Datenvektor:  $(5, 1, 1, 6, 2, 3, 4, 2, 1, 5)$ , Ereignisse:  $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, A \cap B = \emptyset$   
 $r(A) = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$  und  $r(B) = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$   
 $r(A \cup B) = \frac{7}{10}$

### 4.4 Stabilisierung

Angenommen Datenvektor sehr lang ( $n = 10000$ ), Ereignis  $A \subset \Omega$ . Man berechnet die  $r_k(A)$  indem man die ersten  $k$  Daten berücksichtigt, also:  $r_{10}(A), r_{11}(A), r_{12}(A), \dots, r_{10000}(A)$   
 $r_k(A) = |\{j : 1 \leq j \leq k \text{ und } \omega_j \in A\}| \cdot \frac{1}{k}$

### 4.5 Empirisches Gesetz

Von der Stabilisierung der relativen Häufigkeit von  $A$ . Für  $k \rightarrow \infty$  läuft  $r_k(A)$  gegen einen festen Wert  $P(A)$ .

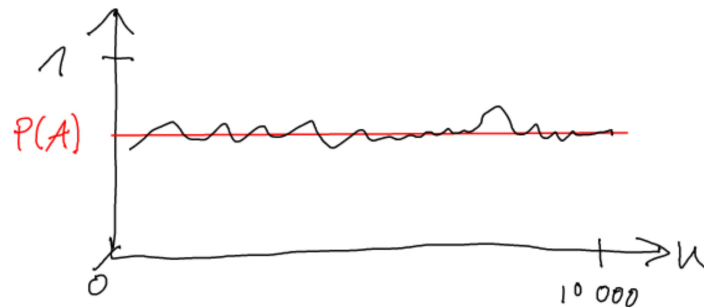


Abbildung 2: Das Diagramm zeigt beispielhaft, was unter Stabilisierung gemeint ist.

#### 4.6 Übung 4.2 (Buch)

Lotto 6 aus 49. Die ersten 2058 Ziehungen enthielten 198 mal die 13 und 248 mal die 43 ( $\Omega = \{(a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6) : 1 \leq a_i \leq 49\}$ ). Der Datenvektor hat die Länge  $n = 2058$ .

$A_{13}$  : "13 wird gezogen",  $r(A_{13}) = \frac{198}{2058} = 0.096$

$A_{43}$  : "43 wird gezogen",  $r(A_{43}) = \frac{248}{2058} = 0.120$

Wie groß ist die relative Häufigkeit einer Zahl, wenn jede Zahl gleich oft gezogen wird?

Gezogene Kugeln:  $6 \cdot 2058$

Jede gleich oft:  $\frac{6 \cdot 2058}{49} = 252 \Rightarrow r(A_k) = \frac{252}{2058} = \frac{6}{49}$

## 5 Deskriptive Statistik

### 5.1 Stabdiagramm

Bundestagswahl mit  $n = 43371190$  gültigen Zweitstimmen. Dabei entsteht das folgende Stabdiagramm (Abb. 3).

„Beispiel aus dem Buch (Seite 24)“

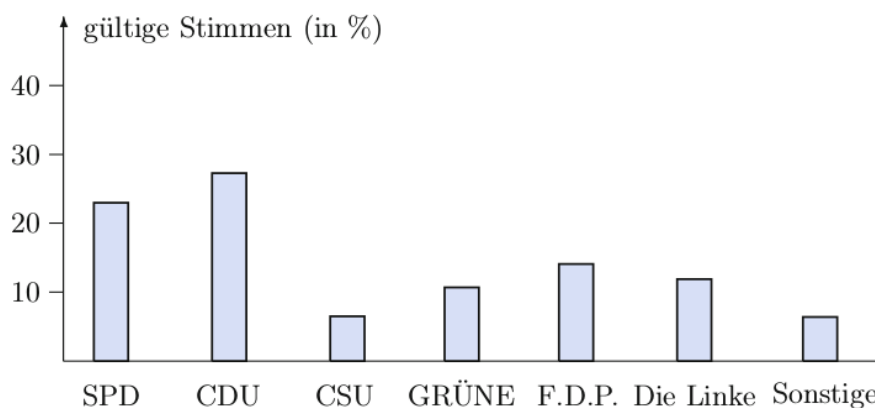


Abbildung 3: Aufteilung der Parteien in % (Quelle: Buch)

## 5.2 Histogramm

Bei 1000 Glühbirnen wurde die Lebensdauer getestet.

Stunden	ausgefallene Glühbirnen	relative Häufigkeit	Höhe
0-50	20	0.02	0.0004
50-200	80	0.08	0.00053
200-400	120	0.12	0.0006
400-600	180	0.18	0.0009
600-800	500	0.5	0.0025
800-1000	100	0.1	0.0005

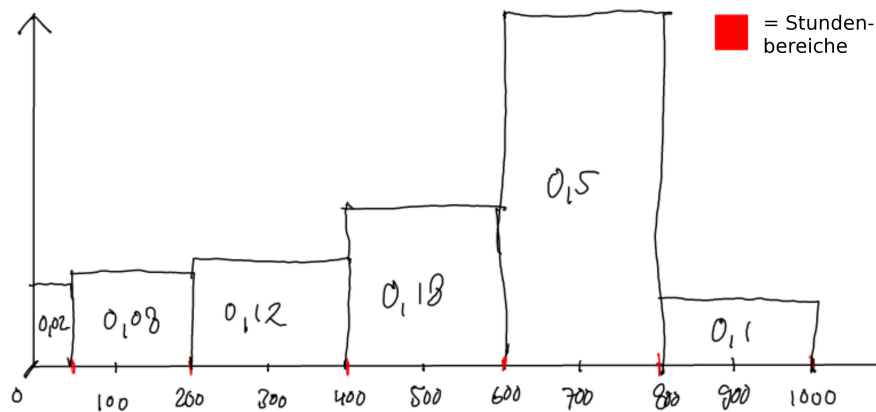


Abbildung 4: Rechteckfläche = relative Häufigkeit, Höhe  $\times$  Breite = relative Häufigkeit, Höhe =  $\frac{\text{relative Häufigkeit}}{\text{Breite}}$

## 5.3 Lagemaße

$x_1, \dots, x_n$  Zahlen. Suche Zahl  $l$  für die "grobe Lage".

Forderung:  $l(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) = l(x_1, \dots, x_n) + a$

arithmetisches Mittel:  $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  Forderung erfüllt!

**Aufgabe** Für welches  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$  minimal? Für  $t = \bar{x}$ ! Wegen:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$$

$$f'(t) = -\sum_{i=1}^n 2(x_i - t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \cdot t$$

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

## 5.4 Gewichtetes Mittel

Werte	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_n$
Gewichte	$g_1$	$g_2$	$\dots$	$g_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i a_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$$

**Beispiel Schulnoten** Noten: 2,4,6,3,4,2,5

Gewicht: 1,5,1,3,3,5,1

$$\text{Endnote} = \frac{1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{1 + 5 + 1 + 3 + 3 + 5 + 1} = 3.37$$

## 5.5 Der empirische Median

Die Stichprobe ist der Größe nach sortiert, also  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Der Median  $x_{\frac{1}{2}} = x_{0.5} = x_{50\%} = x_{\frac{n+1}{2}}$ , falls ungerade und  $x_{0.5} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$

### 5.5.1 Beispiel

1.  $3, 4, 5, 6, 7 \Rightarrow x_{0.5} = 5$
2.  $3, 4, 5, 6, 7, 8 \Rightarrow x_{0.5} = 5.5$
3.  $3, 3, 4, 5, 6, 20 \Rightarrow x_{0.5} = 4.5$ ; vgl. dazu das arithmetische Mittel:  $\bar{x} = \frac{3+3+4+5+6+20}{6} = 6.8$

Der Median unempfindlich gegen Ausreißer, das arithmetische Mittel nicht.  
Minimiere  $\sum_{j=1}^n |x_j - t|$ . Bei welchem  $t$  minimal? Beim Median: 3 3 4 | 5 6 7

### 5.5.2 Verallgemeinerung

Für den Median  $x_{0.5}$  gilt:

- Mindestens 50% der Werte sind  $\leq x_{0.5}$
- Mindestens 50% der Werte sind  $\geq x_{0.5}$

„Links und rechts vom Median sind gleich viele Werte.“

Der  $p$  Quantil  $x_p$

- Mindestens  $p \cdot 100\%$  der Werte sind  $\leq x_p$
- Mindestens  $100\% - p \cdot 100\%$  der Werte sind  $\geq x_p$

## 5.6 Streuungsmaße

$\sigma$  Streuungsmaß

Formel:  $\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sigma(a + x_1, a + x_2, \dots, a + x_n)$

### 5.6.1 Die empirische Varianz

Daten:  $x_1, \dots, x_n$

arithmetische Mittel:  $\bar{x}$

Varianz:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$

empirische Standardabweichung:  $\sqrt{s^2}$

### 5.6.2 Beispiel

5, 5, 7, 8, 9

$\bar{x} = \frac{1}{5}(5 + 5 + 7 + 8 + 9) = 6.8$

$s^2 = \frac{1}{4}[(5 - 6.8)^2 + (5 - 6.8)^2 + (7 - 6.8)^2 + (8 - 6.8)^2 + (9 - 6.8)^2] = 3.2$

$s = \sqrt{3.2} = 1.78$

Einheiten:

Meßwerte, Mittel, Standardabweichung: m

Varianz:  $m^2$

### 5.6.3 Beispiele für andere Streuungsmaße

1. mittlere absolute Abweichung:  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - \bar{x}|$
2. Medianabweichung:  $x_1, \dots, x_n$ , Median:  $x_{0.5}$   
 $|x_1 - x_{0.5}|, |x_2 - x_{0.5}|, \dots, |x_n - x_{0.5}|$  und davon wählt man nun den Median.

### 5.6.4 Beispiel Medianabweichung

5, 5, 7, 8, 9  $\Rightarrow x_{0.5} = 7$

Abstände:  $|5 - 7|, |5 - 7|, |7 - 7|, |8 - 7|, |9 - 7|$ , also 2, 2, 0, 1, 2  $\Rightarrow 0, 1, 2, 2, 2 \Rightarrow$   
 Median ist 2  $\rightarrow$  Medianabweichung: 2

## 6 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

endliche Ergebnismenge:  $\Omega$

Potenzmenge von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ :  $P$

$A \rightarrow P(A)$

mit

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$

$P$  heißt Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung.  $P(A)$  heißt Wahrscheinlichkeit von  $A$ . Also: Jede Teilmenge von  $\Omega$  bekommt eine Wahrscheinlichkeit.

### 6.1 Einfache Folgerungen

1.  $P(\emptyset) = 0$
2.  $P(\sum_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$
3.  $0 \leq P(A) \leq 1$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7.  $P(\bigcup_{j=1}^n A_j) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$

*Beweis.* 1.  $P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. Induktionsbeweis

$$3. 1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$$

$$4. 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$5. B = A + B \setminus A, P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



$$\begin{aligned}
6. \quad & P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\
& P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\
& P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B) \\
& \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\
& P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

7. richtig für  $n = 2$ , Induktionsbeweis

□

## 6.2 Wie gibt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an?

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Kennt man  $P(\{\omega_1\}), \dots, P(\{\omega_n\})$  - Abkürzung:  $P(\{\omega_1\}) = p(\omega_1)$  -, so kennt man ganz  $P$ .

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}).$$

Weiter muss gelten:  $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_n) = 1$

Man zeigt:  $0 \leq p(\omega_1) \leq 1$  beliebig mit  $\sum_{i=1}^n p(\omega_i)$  so hat man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

## 6.3 Beispiel

$$\Omega : 2, 3, 5, 6, 7$$

$$p : 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3$$

$$A = \{3, 5\} \Rightarrow P(A) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

## 6.4 Verteilung einer Zufallsvariablen

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Auf  $\Omega$  haben wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$ .

$W = X(\Omega)$  Wertemenge von  $X$ .

$W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Auf  $W$  haben wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P^x$ :

$B \subset W$

$P^x(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$  (Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen Wert von  $B$  annimmt.)

$P^x$  heißt die Verteilung von  $X$ .

Für  $B \subset \mathbb{R}$  kann man schreiben:  $P^x(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$

### 6.4.1 Beispiel

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\Omega$	1	2	3	4	5	6
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
X	0	5	5	10	1	0

mit  $\omega = \{0, 1, 5, 10\}$

$$P^x(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{1, 6\}) = \frac{2}{6}$$

$$P^x(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$$

$$P^x(\{5\}) = P(X = 5) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{6}$$

$$P^x(\{10\}) = P(X = 10) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$$

Neues Zufallsexperiment:  $\Omega = \{0, 1, 5, 10\}$

Wahrscheinlichkeit  $P$  auf  $\Omega$ :  $p(0) = \frac{2}{6}, p(1) = \frac{1}{6}, p(5) = \frac{2}{6}, p(10) = \frac{1}{6}$

### 6.4.2 Übung 6.10

Konstruiere  $(\Omega, P)$  mit  $(A, B)$  und  $P(A \cap B) \geq 9 \cdot P(A) \cdot P(B)$  mit  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}, p(i) = \frac{1}{n}$ .

$$P(A \cap B) = \frac{t}{n}, P(A) = \frac{s+t}{n}, P(B) = \frac{t+u}{n}$$

$$\frac{t}{n} \geq 9 \cdot \frac{s+t}{n} \cdot \frac{t+u}{n} | n^2$$

$$t \cdot n \geq 9(s+t)(t+u)$$

$$n \geq \frac{9(s+t)(t+u)}{t}$$

$$\text{z.B. } s = 2, t = 2, u = 2 \Rightarrow n \geq \frac{9 \cdot 4 \cdot 4}{2} \Rightarrow n \geq 72$$

Also:  $\Omega = \{1, 2, \dots, 72\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$

## 7 Laplace-Modelle

Laplace-Experiment: endlich viele Ausgänge/Ergebnisse mit derselben Wahrscheinlichkeit.  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$$P(\{\omega_i\}) = p(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl alle Fälle}}$$

„Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich.“

### 7.1 Beispiel Zweimal Würfeln

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 5 ist?

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}, |\Omega| = 36$$

$$X(i, j) = i + j$$

$$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

## 7.2 Beispiel Zwei farbige Würfel

Zwei weiße Würfel werden gleichzeitig geworfen.  $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6 \text{ und } i \leq j\}$ . Aber nicht jeder Ausgang ist gleich wahrscheinlich!  $\Rightarrow$  kein Laplace-Experiment. Nun denken wir uns die Würfel grün (i) und rot (j)  $\Rightarrow \Omega' = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ .

$$P(5 \text{ und } 6) = P\{(5, 6), (6, 5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P(6 \text{ und } 6) = P(6, 6) = \frac{1}{36}$$

## 7.3 Beispiel Drei Würfel

Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Gesucht wird  $P(\text{Augensumme } 5)$ .

$$P(\{(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)\}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

## 7.4 Beispiel Faires Spiel

A, B spielen ein faires Spiel. Einsatz 10 Taler. Wer zuerst 6 mal gewonnen hat, bekommt den Einsatz. A hat 5 Runden gewonnen, B 3 Runden. Es kommt zu einer Spielunterbrechung. Wie kann man nun den Einsatz von 20 Talern fair verteilen?

Nun stellen wir uns vor, dass das Spiel dreimal fortgesetzt wird:

A gewinnt: AAA, BAA, ABA, AAB, ABB, BAB, BBA

B gewinnt: BBB

Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da jeder Ausgang gleich wahrscheinlich ist nämlich:  $\frac{1}{8} \Rightarrow$

$P(\text{B gewinnt}) = \frac{1}{8}$ ,  $P(\text{A gewinnt}) = \frac{7}{8}$ . Wir teilen den Einsatz entsprechend der Wahrscheinlichkeiten auf. Wenn man das Spiel n mal fertig spielt, wird in  $\approx \frac{1}{8}$  der Fälle B den Einsatz bekommen, in  $\approx \frac{7}{8}$  der Fälle A.

Aufteilung: B bekommt  $\frac{20}{8} = 2,50$  Taler und A 17,50 Taler.

## 7.5 Hausaufgabe Ziegenproblem

In Amerika gab es eine Show, da konnte man etwas gewinnen. Es gab drei Tore mit Gewinnen dahinter, eines mit einem Ferrari und zwei Ziegen. Der Teilnehmer wählt ein Tor. Der Quizmaster hilft und öffnet ein Tor mit einer Ziege. Der Quizmaster fragt, ob der Teilnehmer sein Tor beibehalten oder wechseln will. Wie soll sich der Teilnehmer entscheiden?

## 7.6 Lösung Ziegenproblem

Der Kandidat wählt Tor 1. Der Showmaster öffnet Tor 3 und man sieht eine Ziege. Was ist besser, bei 1 bleiben oder auf 2 wechseln?

**Der Standhafte bleibt bei 1.**  $P(\text{gewinnt}) = \frac{1}{3}$

**Der Wechsler wechselt zu 2.**  $P(\text{gewinnt}) = P(\text{hinter 1 ist eine Ziege}) = \frac{2}{3}$

## 7.7 Übung 7.5

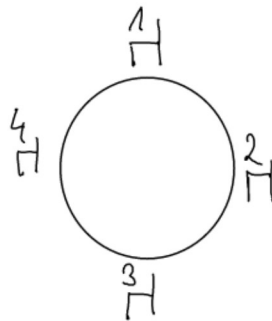


Abbildung 5: Beispiel vier Stühle

Zwei Ehepaare nehmen zufällig an einem runden Tisch mit vier Stühlen Platz (Abb. 5). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ehepaare jeweils nebeneinander sitzen.

Wir setzen A auf 1. Für das zweite A hat man gleich 3 Möglichkeiten.  $\Rightarrow$  alle Fälle: 3, günstige Fälle: 2  $\Rightarrow P = \frac{2}{3}$ .

## 8 Kombinatorik

k-Tupel:  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$

$j_1$  Möglichkeiten für  $a_1$

$j_2$  Möglichkeiten für  $a_2$

...

$j_k$  Möglichkeiten für  $a_k$

$\Rightarrow$  insgesamt:  $j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_k$  Möglichkeiten.

**Auf wieviele Arten** kann man die Zahlen 1 bis n anordnen?

z.B.  $n = 5 : (2, 1, 5, 4, 3) \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  Möglichkeiten.

**allgemein**  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

Menge  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ . Wieviele Teilmengen mit genau k Elementen hat sie?

Abkürzung:  $\binom{n}{k}$  Binomialkoeffizient.

### 8.1 Anzahl der k-Tupel ohne Wiederholungen

$(., ., ., .) \Rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ . Zu einer ungeordneten Teilmenge gehören  $k!$  geordnete Tupel.

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 8.2 Beispiele

1.  $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

2.  $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$

3. 10 Leute trinken Sekt. Jeder stößt mit jedem an. Wie oft klingen die Gläser? Wie viele zweielementige Teilmengen hat M? Das sind:  $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$

**Satz 8.1.** Es gilt:  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, k = 1, 2, \dots, n, M = \{1, 2, \dots, n+1\}$ . Wie viele Teilmengen mit  $k$  Elementen?

Teilmengen, die  $(n+1)$  enthalten:  $\binom{n}{k-1}$

Teilmengen, die  $(n+1)$  nicht enthalten:  $\binom{n}{k}$

$$\Rightarrow \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

### 8.3 Pascalsches Dreieck

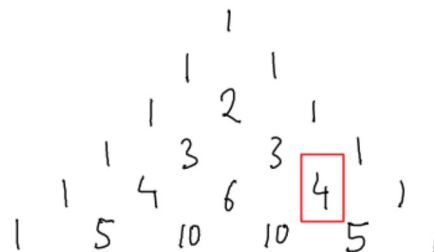


Abbildung 6: Pascalsches Dreieck: Zeilen: 0,1,2,3,...; Spalten: 0,1,2,3,...; Im Beispiel  $\binom{4}{3} = 4$

Das kann man auch mit dem Binomialkoeffizienten ausrechnen:  $\binom{\text{Zeile}}{\text{Spalte}}$

### 8.4 Binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

*Beweis.*  $(x+y)(x+y)(x+y) \dots (x+y)$  mit  $n$  Faktoren. Ausmultiplizieren: Aus jeder Klammer ein  $x$  oder  $y$  auswählen, z.B.:  $x \cdot x \cdot y \cdot x \cdot \dots \cdot y$   $n$  Faktoren. alle Möglichkeiten:  $2^n$  Summanden. Man fasst alle die Summanden mit gleich vielen  $x$ -en zusammen:  $x^k \cdot y^{n-k} : \binom{n}{k}$  solche Produkte  $k = 0, 1, \dots, n$ .

$$\binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

□

### 8.5 Beispiel

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k} = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

### 8.6 Permutationen

Menge  $M$  mit  $n$  Elementen.  $k$ -Permutationen aus  $M$  (mit Wiederholungen):

$$Per_k^n(\text{m.W.}) = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_j \in M\}$$

$k$ -Permutationen aus  $M$  (ohne Wiederholungen):  $Per_k^n(\text{o.W.}) = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_i \neq a_j\}$

Bei Kombinationen kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Sie werden deshalb der Größe nach sortiert angegeben.  $K$ -Kombinationen ohne Wiederholungen:

$$Kom_k^n(\text{o.W.}) = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$$

$K$ -Kombinationen mit Wiederholungen:  $Kom_k^n(\text{m.W.}) = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\}$

$k$ -Perm: es kommt auf die Reihenfolge an

$k$ -Kom: Reihenfolge egal.

- Satz 8.2.**
1.  $|Per_k^n(m.W.)| = n^k$
  2.  $|Per_k^n(o.W.)| = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n^{\underline{k}}$
  3.  $|Kom_k^n(m.W.)| = \binom{n+k-1}{k}$  (müssen wir noch beweisen)
  4.  $|Kom_k^n(o.W.)| = \binom{n}{k}$

*Beweis.* Wir zeigen: Es gibt eine bijektive Abbildung  $\varphi$  von  $Kom_k^n(m.W.) \rightarrow Kom_k^n(n+k-1)(o.W.)$ . Damit gleich viele. Für *rechts* haben wir die Formel. Sei  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  aus  $Kom_k^n(mW)$ .

Also  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq n$

$1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \dots < a_k + k - 1 \leq n + k - 1$

$\varphi Kom_k^n(mW) \rightarrow \binom{n+k-1}{k}(oW)$

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \rightarrow (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1)$

$\varphi$  ist **injektiv** (verschiedene Tupel haben verschiedene Bilder)

$\varphi$  ist **surjektiv** geg.: Tupel von rechter Seite:  $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k \leq n + k - 1$

$1 \leq a_1 \leq a_2 - 1 \leq a_3 - 2 \leq \dots \leq a_k - (k - 1) \leq n$  (Tupel von links)

$\Rightarrow$  bijektiv  $\Rightarrow$  Die gesuchte Anzahl ist nach Ziffer 4 des letzten Satzes:  $\binom{n+k-1}{k}$   $\square$

## 8.7 Das Stimmzettelproblem

Wir haben eine Wahl zwischen zwei Kandidaten A und B. Es gibt n Stimmen, a für A und b für B.  $a + b = n$  und  $a > b$ . Also hat A gewonnen. Die Stimmzettel werden nacheinander ausgezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (W), dass der Kandidat A während der ganzen Auszählung in Führung liegt?

Stimmzettel: 1 für A und -1 für B.  $\Omega = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) : c_i = 1/-1, a \text{ mal } 1, b \text{ mal } -1\}$  sind die möglichen Auszählungen und kann man auch so schreiben:  $\sum_{j=1}^n I\{c_j = 1\} = a, \sum_{j=1}^n I\{c_j = -1\} = b$  (I ist die Indikatorfunktion). Gleichverteilung auf  $\Omega$ .

Jede Auszählung ist gleich wahrscheinlich.  $|\Omega| = \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

$D = \{(c_1, \dots, c_n) \in \Omega : c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq 1 \text{ für } k = 1, 2, \dots, n\}$ . Wir müssen das D zählen.

$E = \{(c_1, \dots, c_n) \in \Omega : c_1 = -1\}$  erster Stimmzettel für B.

$F = \{(c_1, \dots, c_n) \in \Omega : c_1 = 1 \text{ und } c_1 + c_2 + \dots + c_k \leq 0 \text{ für ein } k\}$  erster Stimmzettel für A, aber A nicht immer in Führung.

$$\Omega = \underbrace{D}_{\text{A immer in Führung}} + E + \underbrace{F}_{\text{A nicht immer vorne}}$$

Es ist  $|E| = \binom{n-1}{a}$

Es gilt:  $|E| = |F|$  (vgl. Abb. 7)

$\Rightarrow |\Omega| = |D| + 2|E|$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - 2|E|}{|\Omega|} = 1 - 2 \frac{|E|}{|\Omega|} = 1 - 2 \frac{\binom{n-1}{a}}{\binom{n}{a}} = 1 - 2 \left( \frac{(n-1)!a!(n-a)!}{a!(n-1-a)!n!} \right) =$$

$$1 - 2 \frac{n-a}{n} = 1 - 2 \frac{b}{a+b} = \frac{a+b-2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

$P(D) = \frac{a-b}{a+b}$ ,  $P(D)$  ist die Steigung der Geraden vom Startpunkt (0,0) zum Endpunkt (n,a-b) vgl. Abb. 7, z.B.:  $n = 100, a = 70, b = 30, P(D) = \frac{70-30}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$

„Das ist aber gar nicht so leicht.“

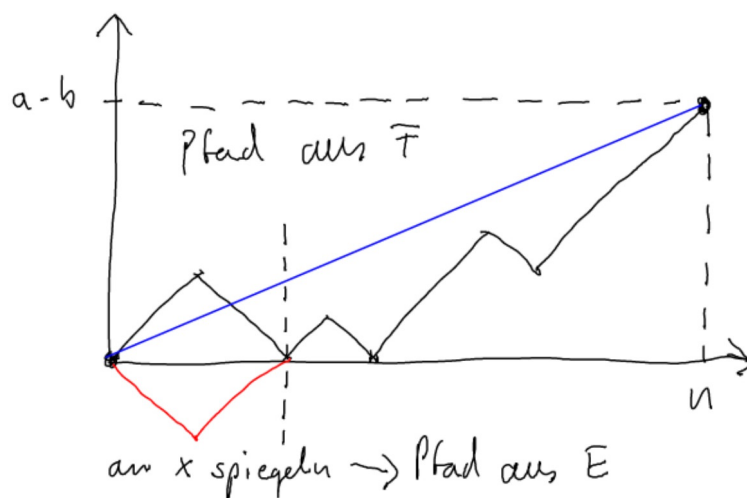


Abbildung 7: Veranschaulichung der bijektiven Abbildung zwischen E und F

## 9 Urnenmodell, Teilchen-Fächer-Modell

### 9.1 Urnenmodell

In einer Urne sind  $n$  Kugeln (bezeichnet mit 1 bis  $n$ ). Wir ziehen  $k$  Kugeln. Wir zählen die Möglichkeiten.

1. **Mit Reihenfolge, mit Rücklegen:**

$$\{(a_1, \dots, a_k) : 1 \leq a_i \leq n\}, \text{Per}_k^n(mW) = n^k$$

2. **Mit Reihenfolge, ohne Rücklegen:**

$$\{(a_1, \dots, a_k) : a_i \neq a_j\}, \text{Per}_k^n(oW) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

3. **Ohne Reihenfolge, mit Rücklegen:**

$$\{a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\}, \text{Kom}_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k}$$

4. **Ohne Reihenfolge, ohne Rücklegen:**

$$\{a_1 < a_2 < \dots < a_k\}, \text{Kom}_k^n(oW) = \binom{n}{k}$$

### 9.2 Teilchen-Fächer-Modell

Wir haben  $n$  Fächer bezeichnet mit 1 bis  $n$ . Wir haben  $k$  Kugeln, die wir auf die Fächer verteilen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auf die Fächer zu verteilen?

1. unterscheidbare Kugeln (Farben, Nummern z.B. 1 bis  $k$ ). Mehrfachbesetzungen sind zugelassen.

$$\left\{ \left( \underbrace{a_1}_{\text{Kugel 1 in Fach } a_2}, a_2, \dots, a_k \right) : 1 \leq a_i \leq n \right\}, \text{Per}_k^n(mW) = n^k$$



2. unterscheidbare Kugeln, Mehrfachbesetzung verboten.

$$\left\{ \left( \underbrace{a_1}_{\text{Kugel 1 in Fach a1}}, \dots, a_k \right) : a_i \neq a_j \right\}, Per_k^n(oW) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

3. Nicht unterscheidbare Kugeln (alle weiß). Mehrfachbesetzung erlaubt.

$$\left\{ \underbrace{a_1}_{\text{Kugel im Fach a1}} \leq \underbrace{a_2}_{\text{Kugel im Fach a2}} \leq \dots \leq a_k : 1 \leq a_i \leq n \right\}, Kom_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k}$$

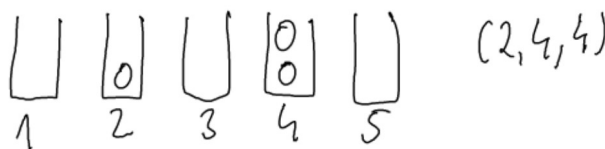


Abbildung 8: Fünf Fächer mit nicht unterscheidbaren Kugeln. Die Mehrfachbesetzung ist in diesem Fall erlaubt.

4. Nicht unterscheidbare Kugeln, Mehrfachbesetzungen verboten.

$$\left\{ \underbrace{a_1}_{\text{Kugel im Fach a1}} < \dots < a_k \right\} Kom_k^n(oW) = \binom{n}{k}$$



Abbildung 9: Fünf Fächer mit nicht unterscheidbaren Kugeln. Die Mehrfachbesetzung ist in diesem Fall erlaubt.

### 9.3 Die Semmelaufgabe

In einem Teig sind 7 Rosinen. Aus dem Teig werden 10 Semmeln gemacht. Eine Semmel wird ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau zwei Rosinen enthält? Die Fächer entsprechen den Semmeln, die Teilchen den Rosinen. Das Fach 1 wird ausgewählt.

„Das machen wir mit dem Teilchen-Fächer-Modell.“

#### 9.3.1 Modell: Teilchen unterscheidbar



Abbildung 10: Modell: Teilchen unterscheidbar

Alle Fälle:  $10^7$

günstige Fälle:  $\binom{7}{2} 9^5$

$$\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 9^5}{1 \cdot 2 \cdot 10^7} = 21 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \frac{1}{100} = 0.1240$$

#### 9.3.2 Modell: Teilchen nicht unterscheidbar

Formel:  $\binom{n+k-1}{k}$

alle Fälle:  $\binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7}$

$$\text{günstige Fälle: } \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5} \quad \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{9 \cdot 6 \cdot 7}{16 \cdot 15 \cdot 14} = 0.1125$$

„Nicht mehr unterscheidbar, also lauter weiße Kugeln.“

#### 9.3.3 Auswertung Ergebnisse

Wir bekommen verschiedene Ergebnisse. Welches ist nun richtig? Das 1. Modell, also die unterscheidbaren Teilchen ist richtig, weil die Ausgänge nicht gleich wahrscheinlich sind.

### 9.4 Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln

Die Abbildung 11 zeigt, wann die Ausgänge gleich wahrscheinlich sind und wann nicht.

### 9.5 Übung 9.5

K Personen werden anonym nach ihrem Geburtsmonat gefragt. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es?

Wir brauchen 12 Fächer. K gleiche Kugeln werden verteilt. Mehrfachbelegung ist erlaubt. Wir nutzen die Formel:  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{12+k-1}{k}$ , z.B.  $k = 30$  Personen:

$$\binom{41}{30} = \binom{41}{41-30} = \binom{41}{11}$$

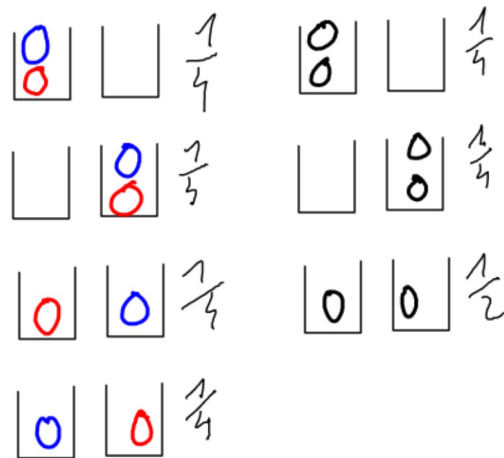


Abbildung 11: Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten je nachdem, ob die Kugeln unterscheidbar sind oder nicht.

## 10 Erste Kollision

Lotto: 6 aus 49. Bei der 3016 Ziehung wurden zum ersten Mal 6 Zahlen gezogen, die schon einmal gezogen wurden. Es gibt  $n = \binom{49}{6} = 13983816$  mögliche Ziehungen und Fächer. Wir nummerieren die Teilchen: Teilchen 106 = 106. Ziehung. Die Teilchen werden der Reihenfolge nach (1,2,3,...) auf die Fächer verteilt. Beim Teilchen 3016 trat zum ersten mal eine Kollision ein.

Also: Fächer 1 bis  $n$ . Unterscheidbare Teilchen (1,2,3,...) werden nacheinander auf die Fächer verteilt.

Zufallsgröße  $X$ : Zeitpunkt der ersten Kollision,  $2 \leq X \leq n+1$

$$P(X \geq k+1) = P(\text{In den ersten } k \text{ Belegungen keine Kollision}) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}} \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \Rightarrow P(X \leq k) = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k+1)}{n} \\ = 1 - \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right]$$

**Unsere Formel:**  $P(X \leq k) = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$

**In unserem Beispiel**  $n = 13983816, P(X \leq 3016) = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left(1 - \frac{j}{13983816}\right) = 0.2775$

### 10.1 Beispiel: Schulklasse

Wir haben eine Klasse mit  $k$  Kindern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 2 Kinder am gleichen Tag (ohne Jahr) Geburtstag haben. Es gibt also  $n = 365$  Fächer. Es werden  $k$  Kugeln auf die Fächer verteilt.

$$P(X \leq k) = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right), \text{ z.B.: } P(X \leq 23) = 1 - \prod_{j=1}^{22} \left(1 - \frac{j}{365}\right) = 0.507$$

## 11 Die Siebformel

### 11.1 Beispiel

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 P([A \cup B] \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P([A \cup B] \cap C) \text{ mit } P([A \cup B] \cap C) = \\
 &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

### 11.2 Siebformel allgemein

Ereignisse:  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$S_r = \sum P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}), 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n \quad P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} s_r$$

*Beweis.* per Induktion

Richtig für  $n = 1, 2, 3$ , Schluss von  $n$  auf  $n+1$ :

$$\begin{aligned}
 P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - P[\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})] \\
 &= \underbrace{\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_r}_{I.V.} + P(A_{n+1}) + \sum_{m=1}^n (-1)^m \tilde{S}_m = \left[ \text{mit } \tilde{S}_m = \sum P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \cap A_{i_{n+1}}) \right] \\
 &= \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} S_r \quad \square
 \end{aligned}$$

### 11.3 Beispiel Siebformel mit vier Mengen

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) \\
 &+ P(A \cap D) + P(B \cap C) + P(B \cap D) + P(C \cap D)] + [P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C \cap D) \\
 &+ P(A \cap B \cap D) + P(B \cap C \cap D)] - P(A \cap B \cap C \cap D)
 \end{aligned}$$

### 11.4 Sonderfall

$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$  nur abhängig von  $r$ . Dann heißen die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  austauschbar. Siebformel:  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r)$

### 11.5 Aufgabe Permutationen der Zahlen von 1 bis $n$

Wir haben eine Abbildung (Permutation):

1	2	3	4	5
↓	↓	↓	↓	↓
2	5	3	1	4

oder nur die Reihenfolge (2,5,3,1,4).

Fixpunkt: hier 3.

Es gibt  $n!$  Permutationen.

$\Omega$  alle Permutationen, jede gleich wahrscheinlich.

Man zieht eine. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wenigstens einen Fixpunkt hat?

$$A_i = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : j \text{ Fixpunkt, } a_j = j\}$$

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j \text{ wenigstens ein Fixpunkt.}$$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 P(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{n! (n-r)!}{r! (n-r)! n!} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} \\
 &= P(A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{kein Fixpunkt}) &= P(B) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{1}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{1}{r!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e} \\
P(B) &= \frac{|B|}{n!} \\
|B| &= n! \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{1}{r!} \approx n! \frac{1}{e} \\
P(B) &\approx \frac{1}{e} = 0.37, P(A) = 1 - \frac{1}{e} = 0.632
\end{aligned}$$

„Wenn  $n$  groß ist, dann ist die Näherung recht genau.“

## 11.6 Beispiel Glücksspiel

Wir haben zwei identische Kartestapel. Jeder ist für sich gemischt. Die beiden oberen Karten werden abgehoben. Bei zwei gleichen Karten gewinnt die Bank, sonst der Spieler. Wir nummerieren den einen Stapel von 1 bis 32 durch. Im anderen Stapel kommen genau die gleichen Zahlen vor, allerdings in einer anderen Reihenfolge (Permutation). Zwei gleiche Zahlen hat man, wenn die Permutation einen Fixpunkt hat.

$P(\text{Fixpunkt}) = P(A) \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.63$  oder exakt:  $P(A) = 1 - \sum_{r=0}^{32} (-1)^r \frac{1}{r!}$ . Mit 63 % Wahrscheinlichkeit gewinnt die Bank.

## 11.7 Beispiele 5 Briefe und 5 Umschläge

Wir haben 5 Briefe und 5 Umschläge. Die Briefe werden zufällig in die Umschläge gesteckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Brief richtig ankommt?

$$\begin{aligned}
P(\text{Fixpunkt}) &\approx 63\%, \text{ exakt: } P(A) = 1 - \sum_{r=0}^5 (-1)^r \frac{1}{r!} = 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right) \\
&= 0.633
\end{aligned}$$

## 12 Erwartungswert

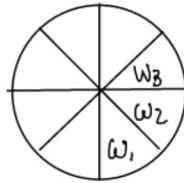


Abbildung 12: Glücksrad mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$

Glücksrad mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$  (Abb. 12). Gegeben ist  $P(\{\omega_1\})$ . Bei  $\omega_i$  erhält man den Gewinn  $X(\omega_i)$ . Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn? Wir drehen  $n$  mal:

$h_1$  mal  $\omega_1$ ,  $h_1 + h_2 + \dots + h_s = n$

$h_2$  mal  $\omega_2$

$\vdots$

$h_s$  mal  $\omega_s$

Gesamtgewinn:  $\sum_{j=1}^s X(\omega_j) \cdot h_j$

Durchschnittsgewinn:  $\sum_{j=1}^s X(\omega_j) \cdot \underbrace{\frac{h_j}{n}}_{\text{relative Häufigkeit von } \omega_j \approx P(\{\omega_j\})}$

**Definition 12.1.**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist Zufallsgröße. Erwartungswert von  $X = EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$

### 12.1 Beispiel Würfeln

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $X : \omega \rightarrow \omega^2$

$$EX = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = 15.17$$

### 12.2 Andere Berechnung des Erwartungswertes

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . Der Wertebereich von  $X$  sei:  $\{x_1, \dots, x_s\}$ .

$$EX = \sum_{i=1}^s x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^s x_i \cdot P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = \sum_{i=1}^s x_i \cdot \sum_{X(\omega_j)=x_i} P(\{\omega_j\}) = \sum_{i=1}^s \sum_{X(\omega_j)=x_i} x_i \cdot P(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^n X(\omega_j) \cdot P(\{\omega_j\})$$

### 12.3 Beispiel Würfeln mit zwei Würfeln

$X(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4.47$$

### 12.4 Satz

**Satz 12.1.**  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsgrößen,  $A \subset \Omega$

1.  $E(X + Y) = EX + EY$
2.  $E(a \cdot X) = a \cdot EX$

„Wichtiger Satz!“

$$3. E(I_A) = P(A)$$

$$4. \text{ Aus } X \leq Y \text{ folgt } EX \leq EY \quad [X(\omega) \leq Y(\omega), \forall \omega \in \Omega]$$

*Beweis.* des o.g. Satzes.

$$1. E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot p(\omega) + \sum_{\omega} Y(\omega) \cdot p(\omega) \\ = EX + EY$$

2. analog 1.

$$3. E(I_A) = \sum_{\omega} I_A(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega \in A} 1 \cdot p(\omega) = P(A)$$

4. klar.

□

Es folgt:  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n$  Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  Ereignisse. Zählvariable ist X:

$X(\omega)$  = Anzahl der  $A_i$  in denen  $\omega$  liegt.  $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$

## 12.5 Beispiel Rekorde

$\Omega$  : Permutationen der Zahlen 1 bis n  $(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$

$X(\omega)$  = Anzahl der Rekorde von  $\omega$ ,  $A_j : \{(a_1, \dots, a_n) : a_j \text{ ist Rekord}\}, \Rightarrow X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$

„ $a_j$  ist ein Rekord, falls alle vorderen kleiner sind.“

Wir berechnen  $P(A_j) : \{(a_1, a_2, \dots, a_j)\}, 1 \leq a_s \leq n$

alle:  $\binom{n}{j} \cdot j!$

günstige:  $\binom{n}{j} \cdot (j-1)!$

„Wir brechen das Tupel bei  $a_j$  ab.“

Wahrscheinlichkeit von  $A_j$  (Abzählformel):  $P(A_j) = \frac{\binom{n}{j} \cdot (j-1)!}{\binom{n}{j} \cdot j!} = \frac{1}{j}$

Also:  $EX = EI_{A_1} + EI_{A_2} + \dots + EI_{A_n} = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

z.B.:  $n = 7$  Permutationen der Zahlen 1 bis 7.  $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2.6$

## 12.6 Näherungsformel

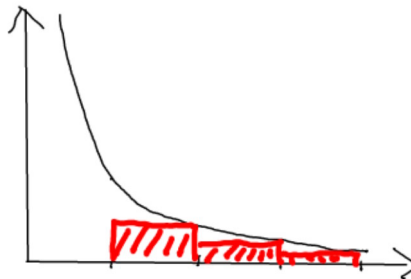


Abbildung 13:  $f(x) = \frac{1}{x}$

Wir berechnen die Flächen der Rechtecke (Abb. 13).  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$   
 $= [\ln x]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n$

Permutationen der Zahlen 1 bis  $n$ .  $X$ : Anzahl der Rekorde  $\Rightarrow EX \leq 1 + \ln n$

z.B.:  $n = 100 \Rightarrow EX = 5.6$

$n = 1000000 \Rightarrow EX = 14.8$



## 12.7 Sortieralgorithmus

Wir haben die verschiedenen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Wir betrachten die Permutationen dieser Zahlen. Eine Permutation  $(a_1, \dots, a_n)$  soll sortiert werden (von klein nach groß). Vorgehen:

- $a_1$  lassen
- Ist  $a_2$  kleiner als  $a_1$ , dann vertauschen.
- Dann  $a_3$  durch Vertauschen einsortieren.
- $\vdots$
- bis  $a_n$

## 12.8 Beispiel

(13,10,15,11)

1. (10,13,15,11)
2. (10,13,11,15)
3. (10,11,13,15), fertig!

Die Zufallsgröße  $X$  zählt die Anzahl der Vertauschungen.  $X(13, 10, 15, 11) = 3$

**Wir wollen  $EX$  berechnen**  $Y_j$  Einsortieren von  $a_j$  (Anzahl der Vertauschungen),  $2 \leq j \leq n$

$Y_j(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)$  = Anzahl der  $a_i$  mit  $a_i < a_j, i < j$ . Das kann man auch so ausrechnen:  $Y_j = \sum_{i=1}^{j-1} I\{a_j < a_i\}$

$$X(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=2}^n Y_j(a_1, \dots, a_n)$$

Wir brauchen  $P(a_j < a_i)$  ist  $\frac{1}{2}$  (plausibel), also:

$$\begin{aligned} EY_j &= \sum_{i=1}^{j-1} P(a_j < a_i) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2} = (j-1) \cdot \frac{1}{2} \\ \Rightarrow EX &= \sum_{j=2}^n EY_j = \sum_{j=2}^n (j-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{4}. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert  $EX$  wächst quadratisch mit  $n$ . Für  $n = 10 \Rightarrow EX = \frac{100-10}{4} = 22.5$ ,  $n = 30 \Rightarrow EX = 217.5$

„Wieviele Werte vor  $a_j$  sind größer als  $a_j$ ? So viele muss ich vertauschen.“

„Die Indikatorfunktion  $I$  zählt auch die Anzahl der Vertauschungen.“

„Die Wahrscheinlichkeit der Indikatorfunktion ist immer die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse  $a_i$ “

## 12.9 Transformationsformel

Wir betrachten die Zufallsgröße  $g \circ X$ ,  $[(g \circ X)(\omega) = g(X(\omega))]$ .  $x_1, \dots, x_k$  ist der Wertebereich von  $X$ .

$E(g \circ X) = \sum_{j=1}^k g(x_j) \cdot P(X = x_j)$ . Speziell für  $g = id$  folgt:  $EX = \sum_{j=1}^k x_j P(X = x_j)$  (schon bekannt).

*Beweis.* Zerlegung von  $\Omega$ :  $A_j = \{\omega \in \Omega : x(\omega) = x_j\}$

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) \cdot p(\omega) = \sum_{j=1}^k \sum_{\omega \in A_j} g(X(\omega)) \cdot p(\omega) = \sum_{j=1}^k g(x_j) \cdot \sum_{\omega \in A_j} p(\omega) \\ &= \sum_{j=1}^k g(x_j) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^k g(x_j) \cdot P(X = x_j) \quad \square \end{aligned}$$

### 12.10 Beispiel würfeln mit zwei Würfeln

X: größere Augenzahl,  $g(x) = x^2$ , gesucht:  $E(g(X))$

$$E(g \circ X) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \dots = 22.0$$

## 13 Stichprobenentnahme

Urne mit  $r$  roten und  $s$  schwarzen Kugeln. Die roten Kugeln sind nummeriert mit  $1, 2, \dots, r$  und die schwarzen Kugeln mit  $r+1, \dots, r+s$ . Es werden nacheinander (Stichprobe)  $n$  Kugeln ohne Rücklegen gezogen. Der mögliche Grundraum ist  $\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \text{ verschieden}\}$ . Das Ereignis  $A_j$  bedeutet jede  $j$ -te Kugel ist rot, also muss  $a_j \leq r$ .

$P(A_j) = \frac{r}{r+s}$  ist plausibel. Wir machen trotzdem eine formale Rechnung:

**alle Fälle:**  $(r+s)^n$

**günstige Fälle:** Kugel 1 an Stelle  $j$ :  $(r+s-1)^{n-1}$

$\vdots$

Kugel  $r$  an Stelle  $j$ :  $(r+s-1)^{n-1}$

$$P(A_j) = \frac{r \cdot (r+s-1)^{n-1}}{(r+s)^n} = \frac{r \cdot (r+s-1) \cdot (r+s-2) \cdot \dots \cdot (r+s-n+1)}{(r+s)(r+s-1) \cdot \dots \cdot (r+s-n+1)} = \frac{r}{r+s}$$

**Satz 13.1.**  $r$  rote,  $s$  schwarze Kugeln.  $n$  Stück ziehen ohne Rücklegen.

$X(\omega) =$  Anzahl der roten Kugeln in der Ziehung. Die Verteilung von  $X$  heißt *hypergeometrische Verteilung*. Es gilt:

$$1. EX = n \cdot \frac{r}{r+s}$$

$$2. P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

$$\text{Beweis.} \quad 1. X = \sum_{j=1}^n I_{A_j} \quad EX = \sum_{j=1}^n EI_{A_j} = \sum_{j=1}^n P(A_j) = \sum_{j=1}^n \frac{r}{r+s} = n \cdot \frac{r}{r+s}$$

2. Modell wechseln!  $\Omega =$  Alle Teilmengen mit genau  $n$  Kugeln.

**Alle Fälle:**  $\binom{r+s}{n}$

**Günstige Fälle:** genau  $k$  rote Kugeln  $\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$ , also:  $P(X = k) =$

$$\frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

□

„Wir machen das mit der Abzählregel.“

„Beispiel:  $7^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ “

### 13.1 Lotterie Keno

Aus den Zahlen 1 bis 70 werden 20 gezogen. Man kann 2 bis 10 Zahlen ankreuzen, z.B. kreuzen wir 9 Zahlen an. Es gibt aber feste Gewinnquoten. Man kann 0 bis 9 Richtige haben:

Richtige	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Quote	50000	1000	20	5	2	0	0	0	0	2

Wir spielen mit 1 EUR Einsatz: Die Zufallsgröße  $Y$  ist der ausbezahlte Betrag. Wir suchen  $EY$ . Die gezogenen 20 Kugeln malen wir rot an und legen sie in die Trommel zurück. Wir ziehen jetzt  $n = 9$  Kugeln ohne Rücklegen. Die Zufallsgröße  $X$  entspricht nun der Anzahl der roten Kugeln in der Ziehung.  $X$  ist hypergeometrisch (Stichprobenverteilung) verteilt.

$g(x)$  ist die Quote, z.B.  $g(7) = 20$ .  $\Rightarrow Y = g(X)$ ,  $P(X = k) = \frac{\binom{20}{k} \cdot \binom{50}{9-k}}{\binom{70}{9}}$ ,  
 $EY = 2 \cdot P(X = 0) + 2 \cdot P(X = 5) + 5 \cdot P(X = 6) + 20 \cdot P(X = 7) + 1000 \cdot P(X = 8) + 50000 \cdot P(X = 9) = 0.510$

angekreuzte Zahlen	10	9	8	7	6	5	4	3	2
EY	0.49	0.51	0.49	0.49	0.49	0.50	0.49	0.50	0.47

## 14 Mehrstufige Experimente

### 14.1 Beispiel

Urne mit 1 roten und 3 schwarzen Kugeln.

**1. Stufe:** Kugel ziehen, Kugel + eine weitere Kugel der gleichen Farbe zurücklegen.

**2. Stufe:** Wieder eine Kugel ziehen.

#### 14.1.1 Modellierung durch einen Baum

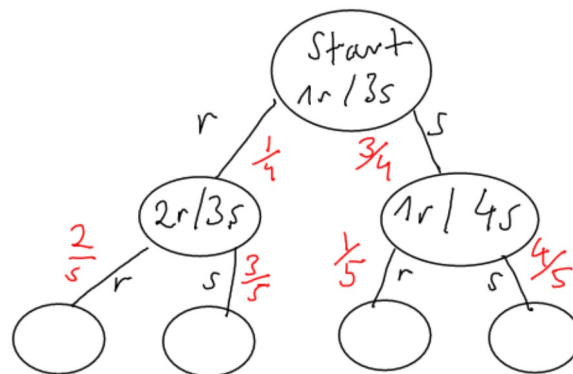


Abbildung 14: Modellierung mittels Baum. Die relativen Wahrscheinlichkeiten stehen an den Ästen

Die Pfade sind die möglichen Ausgänge. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Pfade? Zum Beispiel ungefähre relative Häufigkeit von (r,r) ist  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$ . Die relativen Häufigkeiten sind ungefähr die Wahrscheinlichkeiten.

### 14.1.2 Wahrscheinlichkeit eines Pfades

Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu erhalten, muss man die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren. Das nennt sich die erste Pfadregel. Die Wahrscheinlichkeiten der Pfade in der Abb. 14 sind also:  $P(r, r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$ ,  $P(r, s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ ,  $P(s, r) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ ,  $P(s, s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$ . Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade ist 1.  $P(2. \text{ Kugel rot}) = P(r, r) + P(s, r) = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$  (2. Pfadregel).

## 14.2 Modellierung mehrstufiger Experimente

Ergebnismenge:  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$

Startverteilung:  $p(a_1)$  mit  $a_1 \in \Omega_1$

**2. Stufe:** Für jedes  $a_1 \in \Omega_1$ :  $P(a_2|a_1)$  Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\Omega_2$

**3. Stufe:**  $p(a_3|a_1, a_2)$  Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\Omega_3$

usw.

**n. Stufe:**  $p(a_n|a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\Omega_n$

$$p(\omega) = p(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_1) \cdot P(a_2|a_1) \cdot P(a_3|a_1, a_2) \cdot \dots \cdot P(a_n|a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

„Wie beim Baum,  
1. Pfadregel.“

### 14.3 Sonderfall: unabhängige Experimente

z.B.  $p(a_2|a_1)$  unabhängig von  $a_1$ ,  $p(a_n|\dots)$  unabhängig von  $\dots$ .  $p(a_1, a_2, \dots, a_n) = p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot \dots \cdot p(a_n)$ , z.B. dreimal würfeln:  $p(2, 3, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

### 14.4 Das Polyasche Urnenschema

Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln. Eine Kugel ziehen, zurücklegen und c Kugeln der gleichen Farbe hineinlegen. ( $c < 0$  heißt herausnehmen). Den Vorgang wiederholen wir (n-1) mal und nennen das n-stufiges Experiment mit den Sonderfällen  $c = 0$  ziehen mit Rücklegen und  $c = 1$  ziehen ohne Rücklegen. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.

Verteilung von X? EX? Wir definieren:  $1 \hat{=} \text{rot}$ ,  $0 \hat{=} \text{schwarz}$ .

$$\text{Start: } P_1(1) = \frac{r}{r+s}, P_1(0) = \frac{s}{r+s}$$

Züge  $1, 2, \dots, j-1$  schon gemacht. Darunter seien genau l Einsen:  $a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} = l$

$$P_j(1|a_1, a_2, \dots, a_{j-1}) = \frac{r+l \cdot c}{r+s+(j-1)c}, P_j(0|a_1, a_2, \dots, a_{j-1}) = \frac{s+(j-1-l)c}{r+s+(j-1)c}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind nur von der Anzahl der Einsen abhängig, nicht von der Reihenfolge.

$$P(\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{\text{Zähle die Einsen. Es sind k Stück.}}) = \text{entlang des Pfades multiplizieren} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (r+j \cdot l) \cdot \prod_{j=0}^{n-k-1} (s+j \cdot l)}{\prod_{j=0}^{n-1} (r+s+j \cdot l)}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (r+j \cdot l) \cdot \prod_{j=0}^{n-k-1} (s+j \cdot l)}{\prod_{j=0}^{n-1} (r+s+j \cdot l)}$$

$c = -1$ : ohne Rücklegen  $\Rightarrow$  hypergeometrische Verteilung

$c = 0$ : mit Rücklegen  $\Rightarrow$  Binomialverteilung

Wir setzen jetzt einfach mal  $c = 0$ :  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1} r \cdot \prod_{j=0}^{n-k-1} s}{\prod_{j=0}^{n-1} (r+s)}$  mit  $p = \frac{r}{r+s}$   
folgt  $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

### 14.5 Beispiel

Wir haben  $r = 1, s = 3, c = 1$  Kugeln. Wir ziehen  $n = 4$  mal. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich genau zwei rote Kugeln hab, also:  $P(X = 2)$ .

$$\prod_{j=0}^{n-1} (r + s + j \cdot c) = \prod_{j=0}^3 (5 + j) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

$$\prod_{j=0}^{k-1} (r + j \cdot c) = \prod_{j=0}^1 (2 + j) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\prod_{j=0}^{n-k-1} (s + j \cdot c) = \prod_{j=0}^1 (3 + j) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

$$P(X = 2) = 6 \cdot \frac{6 \cdot 12}{1680} = 0.257$$

„c sind die Kugeln, die wir wieder zurücklegen.“

Wir wollen den Erwartungswert von  $X$  berechnen, also wie viele rote Kugeln durchschnittlich gezogen werden. Dazu schauen wir uns das Ereignis  $A_j$  an (Menge aller Ziehungen), also:  $A_j = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_j = 1\}$ ,  $P(A_1) = \frac{r}{r+s}$  (klar). Es gilt aber für jedes  $j$ :  $P(A_j) = \frac{r}{r+s}$ , z.B.  $n = 3$ :  $P(A_1) = p(1, 0, 0) + p(1, 0, 1) + p(1, 1, 0) + p(1, 1, 1) = p(0, 1, 0) + p(0, 1, 1) + p(1, 1, 0) + p(1, 1, 1) = P(A_2)$

**Es gilt sogar:** Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  sind austauschbar, d.h.  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n})$ , z.B.  $n = 4$ :  $P(A_1 \cap A_2) = p(1, 1, 0, 0) + p(1, 1, 0, 1) + p(1, 1, 1, 0) + p(1, 1, 1, 1) = p(0, 0, 1, 1) + p(1, 0, 1, 1) + p(0, 1, 1, 1) + p(1, 1, 1, 1) = P(A_3 \cap A_4)$

$$\text{Also: } X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}, EX = \sum_{j=1}^n E(I_{A_j}) = \sum_{j=1}^n P(A_j) = \sum_{j=1}^n \frac{r}{r+s} = n \cdot \frac{r}{r+s} = EX$$

In unserem Beispiel:  $r = 1, s = 3, c = 1, n = 4$ ,  $EX = 4 \cdot \frac{1}{2+3} = \frac{8}{5} = 1.6$  (rote Kugeln im Durchschnitt)

### 14.6 Beispiel

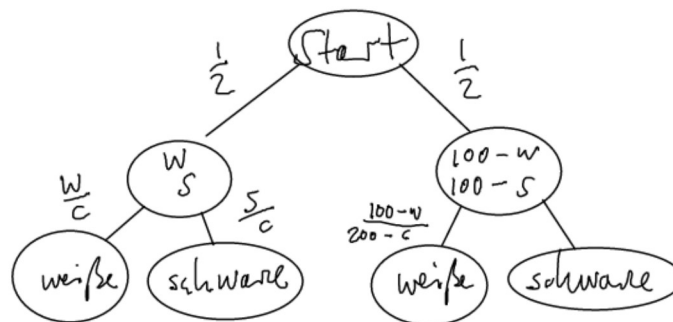


Abbildung 15: Beispiel Schachteln:  $w + s = c, c \leq 100$

100 weiße und 100 schwarze Kugeln werden auf 2 Schachteln (keine leer) verteilt. Schachteln wählen, Kugeln ziehen. Man gewinnt, wenn die Kugel weiß ist. Idee: Wir legen eine weiße Kugel in eine Schachtel und die restlichen 99 weißen Kugeln und die 100 schwarzen in die andere Schachtel (Abb. 15).

$$P(\text{weiße Kugeln}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100-w}{200-c}, \text{ maximiere: } \frac{w}{c} + \frac{100-w}{200-c} = f(w) | c \text{ Konstante.}$$

$$f(w) = \frac{1}{c} \cdot w + \frac{100}{200-c} - \frac{1}{200-c} \cdot w = w \underbrace{\left( \frac{1}{c} - \frac{1}{200-c} \right)}_{>0} + \frac{100}{200-c} \quad (\text{Geradengleichung})$$

$\Rightarrow$  w möglichst groß wählen, also  $w = c$ .

**maximiere:**  $\underbrace{\frac{c}{c}}_1 + \underbrace{\frac{100-c}{200-c}}_{\text{maximal}}$

**minimiere:**  $\frac{200-c}{100-c} \cdot \frac{100-c+100}{100-c} = \frac{100-c}{100-c} + \frac{100}{100-c} = 1 + \frac{100}{100-c}$  minimal bei  $c = 1$ .

**Optimal:**  $c = 1, w = 1$  in eine Schachtel eine weiße Kugel.  $P(\text{weiße Kugel})$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100-1}{200-1} = \frac{1}{2} + \frac{99}{2 \cdot 199} \approx 0.75$

## 15 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$ . Experiment wird durchgeführt. Man bekommt die Information, dass das Ereignis  $A$  eingetreten ist (Ausgang  $\omega \in A$ ). Damit konstruieren wir eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_A$  (bedingte Wahrscheinlichkeit). Versuchsserie mit  $n$  (groß) Einzelversuchen:

$$r_n(B|A) = \text{relative Häufigkeit von } B \text{ unter der Bedingung } A = \frac{\text{absolute Häufigkeit von } A \cap B}{\text{Häufigkeit von } A}$$

$$\underbrace{\quad}_{= \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(A)}} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(A)}.$$

Die relative Häufigkeiten entsprechen den Wahrscheinlichkeiten. Mit dieser Vorlage definieren wir:

**Definition 15.1.**  $(\Omega, P)$  endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.  $P(A) > 0$ .

$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  bedingte Wahrscheinlichkeit (ist neue Wahrscheinlichkeitsverteilung).

„ $P(B|A)$ “ spricht:  
Die Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung  $A$ .“

Ist das überhaupt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

$0 \leq P_A(B) \leq 1$  klar!

$P_A(\Omega) = 1$  ✓

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$  (disjunkt):

$$\text{Beweis. } P_A(B_1 + B_2) = \frac{P((B_1 + B_2) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B_1 \cap A) + (B_2 \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P_A(B_1) + P_A(B_2) \quad \square$$

### 15.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit für einzelne Ausgänge

$$P_A(\{\omega\}) = p_A(\omega) = \begin{cases} \frac{p(\omega)}{P(A)}, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Jedes  $\omega \in A$  wird mit Faktor  $\frac{1}{P(A)}$  multipliziert. Die anderen  $\omega$  werden auf 0 gesetzt.

### 15.2 Beispiel

$\omega$	1	2	3	4	5	6
$p$	0.1	0.1	0.2	0.4	0.1	0.1

$A = \{1, 2, 3\}$  ist eingetreten.  $\frac{1}{P(A)} = \frac{1}{0.4} = 2.5$

$\omega$	1	2	3	4	5	6
$P_A$	0.25	0.25	0.5	0	0	0

### 15.3 Beispiel

Urne mit 2 roten, 2 schwarzen und 2 blauen Kugeln. Man vereinbart: Ziehen ohne Rücklegen, Mitteilung, wann zum ersten mal eine blaue gezogen wurde. Das Experiment wird durchgeführt und man bekommt die Mitteilung: „Erste blaue Kugel beim 3. Zug.“ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden gezogenen Kugeln rot waren?

Wir modellieren:

- rote Kugeln  $1/2$



- blaue Kugeln 3/4
- schwarze Kugeln 5/6

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : 1 \leq a_i \leq 6, a_1 \neq a_2 \neq a_3\}$$

$$A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \Omega : a_3 \in \{3, 4\}, a_1, a_2 \in \{1, 2, 5, 6\}\}$$

$$B = \{(a_1, a_2, a_3) \in \Omega : \{a_1, a_2\} = \{1, 2\}\}$$

apriori Wahrscheinlichkeit von B: Pfadregel:  $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

$$|A| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$|A \cap B| = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{120}}{\frac{24}{120}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

„Zu Erinnerung:  
 $P(B|A)$  sprich: Die  
Wahrscheinlichkeit  
von B unter der  
Bedingung A.“

### 15.4 Umstellung der Formel

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Das kann man nun Verallgemeinern.  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

„Der Beweis kann  
mittels Induktion  
durchgeführt  
werden.“

### 15.5 Beispiel

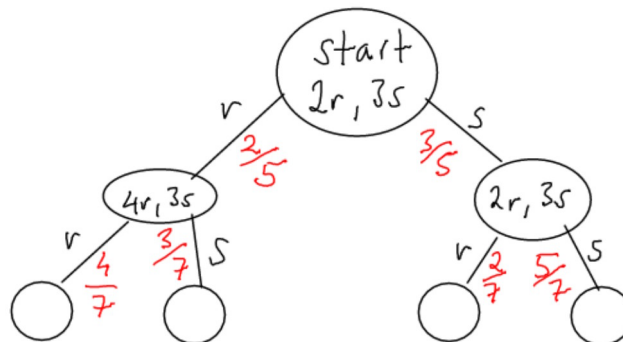


Abbildung 16: Beispiel Urne mit 2 roten und 3 schwarzen Kugeln

Urne mit 2 roten und 3 schwarzen Kugeln. Kugel ziehen, Kugel zurück und zusätzlich zwei Kugeln derselben Farbe. Wieder eine Kugel ziehen. Fertig. Man bekommt die Information: 2 gezogene Kugeln sind rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 1. gezogene Kugel rot ist (Abb. 16)?

Bedingungen A: 2. rot, Ereignis B: 1. rot;  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8+6}{35} = \frac{14}{35}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{14}{35}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

### 15.6 Bayes-Formel

$\Omega$  ist Wahrscheinlichkeitsraum,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eine Zerlegung von  $\Omega$ , B Ereignis.

„Zerlegung: Dis-  
junkte Vereinigung  
von Teilmengen.“

$$\mathbf{a)} \quad P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)$$

$$\mathbf{b)} \quad P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \mathbf{a)} \quad P(B) &= P(\Omega \cap B) = P((\sum_{j=1}^n A_j) \cap B) = P(\sum_{j=1}^n (A_j \cap B)) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j) \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)} \quad \square$$

### 15.7 Beispiel Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich

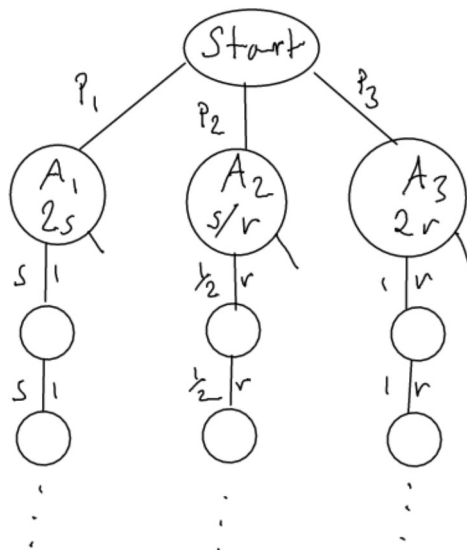


Abbildung 17: Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich

Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich (Abb. 17):

1.  $A_1$ : 2 schwarze
2.  $A_2$ : 1 rote, 1 schwarze
3.  $A_3$ : 2 rote

Man bekommt die Information B: Nur rote Kugeln wurden gezogen. Berechne

$P(A_1|B)$ ,  $P(A_2|B)$ ,  $P(A_3|B)$ . Ergebnis: Alle Pfade

$$P(A_1|B) = 0$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_3}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

**Mit der Formel von Bayes**  $P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^3 P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

Nenner:  $p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3 \cdot 1 = p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3$

Zähler:  $k = 1 : 0$ ,  $k = 2 : p_2 \cdot rbr \frac{1}{2}^n$ ,  $k = 3 : p_3 \cdot 1$

$$P(A_1|B) = 0$$

$$P(A_2|B) = \frac{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3}$$

$$P(A_3|B) = \frac{p_3}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3}$$

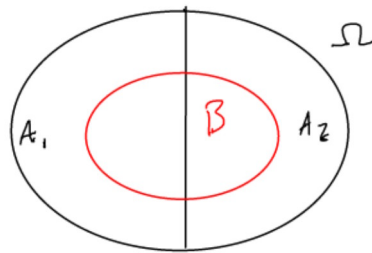


Abbildung 18: Beispiel Würfeln: B: Augensumme  $\geq 8$ ,  $A_1$ : kein Sechser,  $A_2$ : mindestens ein Sechser

### 15.8 Beispiel Würfeln

Es werden zwei Würfel geworfen. Wir bekommen die Information: Augensumme  $\geq 8$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens einen Sechser haben (Abb. 18)?

Exakt: Es muss vor dem Würfeln ausgemacht werden: Man bekommt die Information Augensumme  $\geq 8$  oder Augensumme  $< 8$ .

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

### 15.9 Beispiel Test auf Krankheit

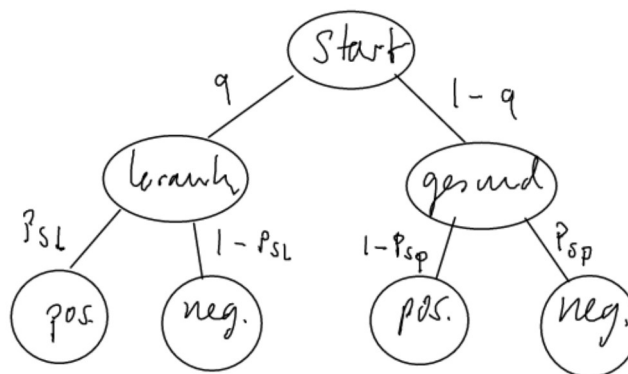


Abbildung 19: Beispiel Test auf Krankheit: A: Person krank, B: Test zeigt positiv

Test positiv  $\Rightarrow$  krank

Test negativ  $\Rightarrow$  gesund

$P_{sl}$  Wahrscheinlichkeit (Test zeigt positiv — Person krank)

$P_{sp}$  Wahrscheinlichkeit (Test zeigt negativ — Person gesund)

ELISA-Test auf HIV:  $P_{sl} = P_{sp} = 0.998$

Person wird getestet. Test zeigt positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person krank ist?  $q$  sei die apriori Wahrscheinlichkeit, dass die Person

krank ist ( $q \cdot 100\%$  der Bevölkerung hat HIV, vgl. Abb. 19)

$$P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{q \cdot P_{sl}}{q \cdot P_{sl} + (1-q)(1-P_{sp})}$$

$$\text{Hier: } P(A|B) = \frac{q \cdot 0.998}{q \cdot 0.998 + (1-q) \cdot 0.002}$$

q	0.001	0.01	0.1
$P(A B)$	0.333	0.834	0.982

### 15.10 Verblüffende Beispiele

1) Eine Familie hat 2 Kinder. Man bekommt die Information „Mindestens ein Junge“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 2 Jungen sind?

A: 2 Jungen

B: mindestens ein Junge

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

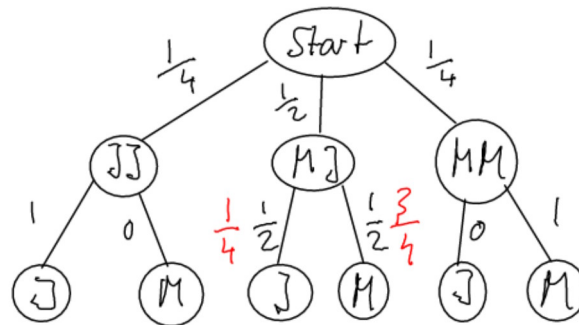


Abbildung 20: Beispiel Familie mit zwei Kindern

2) Familie mit 2 Kindern. Die 2 Kinder spielen im Haus. Eines schaut aus dem Fenster heraus. Es ist ein Junge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Junge ist?

$$P(JJ|\text{Junge schaut heraus}) = \frac{P(JJ \cap J_{sh})}{P(J_{sh})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Mädchen sind nun neugieriger als Jungen (vgl. rote Wahrscheinlichkeiten in

$$\text{Abb. 20). } P(JJ|J_{sF}) = \frac{P(JJ \cap J_{sF})}{P(J_{sF})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

## 16 Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)}$$

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow A \text{ ist von } B \text{ unabhängig.}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Definition 16.1.** Zwei Ereignisse  $A, B$  heißen unabhängig, wenn gilt:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Definition 16.2.** Drei Ereignisse  $A, B, C$  heißen unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

**Definition 16.3.**  $A_1, \dots, A_n$  heißen *unabhängig*, wenn:  $P(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} P(A_j)$  für jede Teilmenge  $T$  aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

### 16.1 Beispiel

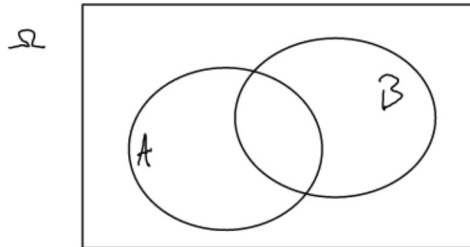


Abbildung 21: Beispiel Unabhängigkeit

$A$  und  $B$  sind unabhängig. Dann sind auch  $A$  und  $\bar{B}$  unabhängig (Abb. 21).  
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B))$   
 $= P(A) \cdot P(\bar{B})$

**Satz 16.1.** Sind  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  unabhängig, dann auch z.B.  $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, A_4, \bar{A}_5$  unabhängig (ohne Beweis).

### 16.2 Unabhängigkeit bei Produktexperimenten

Es gibt  $n$  unabhängige Experimente  $(\Omega_i, P_i)$  und  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ . Dann ist der Produktwahrscheinlichkeitsraum:  $p(\underbrace{a_1}_{\in \Omega_1}, \underbrace{a_2}_{\in \Omega_2}, \dots, a_n) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2) \cdot$

$\dots \cdot p_n(a_n)$   
 $A_j = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_j \in A_j^*\}, A_j^* \subset \Omega_j$   
 $P(A_j) = P_j(A_j^*)$   
 Dann sind  $A_1, A_2, \dots, A_n$  unabhängig.

### 16.3 Beispiel 3mal würfeln

$A_1^* = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$  Im ersten Wurf 1, 2 oder 3.  $A_1$  hingegen wäre  $A_1 = (1/2/3, \dots)$ .  
 $A_2^* = \{5, 6\} \Rightarrow$  Im zweiten Wurf 5 oder 6.  
 $A_3^* = \{4, 5, 6\} \Rightarrow$  Im dritten Wurf 4, 5 oder 6.  
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

### 16.4 Vergrößerung

Es seien Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  unabhängig. Diese werden in zwei Blöcke unterteilt (1. Block:  $A_1, \dots, A_5$ , 2. Block:  $A_6, \dots, A_{10}$ ). Aus jedem Block ein Ereignis konstruieren, z.B.:  $B = (A_1 \cup A_3) \cap \bar{A}_5$ ,  $C = (A_7 \cap \bar{A}_9) \cap A_{10}$ . Dann sind  $B$  und  $C$  unabhängig.

### 16.5 Beispiel Lotto 6 aus 49

Ein Spieler gibt jede Woche  $k$  verschiedene Reihen ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in  $n$  Wochen mindestens einen *Sechser* hat?  
 Anzahl der Möglichkeiten:  $\binom{49}{6}$

Wahrscheinlichkeit in einer Woche einen *Sechser* zu haben, ist:  $P(k) = \frac{k}{\binom{49}{6}}$

Wahrscheinlichkeit in  $n$  Wochen keinen *Sechser*:  $(1 - P(k))^n$  (unabhängig)

$P(\text{In } n \text{ Wochen mindestens einen Sechser}) = 1 - (1 - P(k))^n$  mit z.B.:  $n = 2000$  (Wochen),  $k = 10$  (Spiele)  $\underline{= 0.00142}$

## 16.6 Beispiel Gruppenscreening

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Krankheit sei  $p$  (klein z.B. 0.02). Mit einer Blutuntersuchung kann man das feststellen:

- Einzeluntersuchung
- Gruppenuntersuchung: Das Blut von  $k$  Personen wird gemischt. Falls gesund  $\Rightarrow$  fertig, falls krank  $\Rightarrow$  noch  $k$  Einzeluntersuchungen.

Finde die optimale Gruppengröße. Wir definieren die Zufallsgröße  $Y$  als *Anzahl der Untersuchungen*. Zwei Werte sind hier möglich:  $Y = 1$  und  $Y = 1 + k$ .

$$P(Y = 1) = (1 - p)^k$$

$$P(Y = 1 + k) = 1 - (1 - p)^k$$

$$EY = 1 \cdot (1 - p)^k + (1 + k) \cdot [1 - (1 - p)^k] = (1 - p)^k + (1 + k) - (1 + k)(1 - p)^k \\ = (1 - p)^k [1 - (1 + k)] + (1 + k) = (1 + k) - k(1 - p)^k$$

minimiere:  $\frac{EY}{k}$  ist die durchschnittliche Anzahl an Untersuchungen pro Person.

$$\frac{EY}{k} = \frac{1+k}{k} - (1 - p)^k = \frac{1}{k} + 1 - (1 - p)^k$$

## 16.7 Beispiel

$$P = 0.1, k = 4 \Rightarrow \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{4} - (1 - 0.1)^4 = 0.59 \text{ also Ersparnis von } 41\%.$$

$$P = 0.01, k = 11 \Rightarrow \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{11} - (1 - 0.01)^{11} = 0.20 \text{ also Ersparnis von } 80\%.$$

## 16.8 $p$ gegeben. Gruppengröße ausrechnen.

$$f(k) = \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k \text{ minimieren:}$$

p	0.2	0.1	0.01
opt. k	3	4	11
Ersparnis	18%	41%	80%

## 17 Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

(Nur) Eine Zufallsvariable  $X$ :

Wertebereich von $X$	1	2	3
$p^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  (Abb. 22):

Wertebereich von  $X$ :  $x_1, x_2, \dots, x_r$

Wertebereich von  $Y$ :  $y_1, y_2, \dots, y_s$

### Verteilung von $XY$

$$P^{(X,Y)}(x_i, y_j) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = x_i \text{ und } Y(\omega) = y_j\})$$

„Man sagt auch gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$ .“



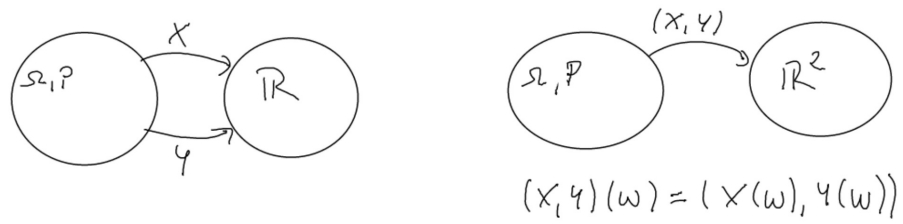


Abbildung 22: Zwei Zufallsvariablen kann man unterschiedlich darstellen

X/Y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_s$	Verteilung von X
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$		$p_{1s}$	$\sum$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$		$p_{2s}$	$\sum$
$x_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$		$p_{3s}$	$\sum$
...						$\sum$
$x_r$	$p_{r1}$	$p_{r2}$	$p_{r3}$		$p_{rs}$	$\sum$
Verteilung von Y	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	

### 17.1 Beispiel 2 mal würfeln

X: Augenzahl im 1. Wurf, Y: maximale Augenzahl,  $\Omega : \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ .  
 $(X, Y)(3, 1) = (3, 3)$

X/Y	1	2	3	4	5	6	$\sum$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
$\sum$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	<b>1</b>

### 17.2 Funktionen von Zufallsvariablen/-größen

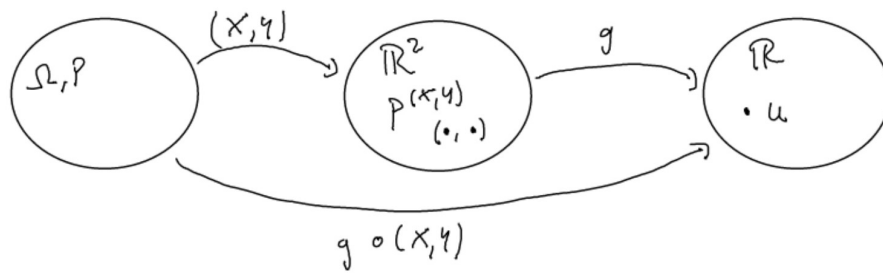


Abbildung 23: Funktionen von Zufallsvariablen/-größen:  $P(g \circ (X, Y) = u) = P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega), Y(\omega)) = u\}$

$$\begin{aligned}
 P(g \circ (X, Y) = u) &= P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega), Y(\omega)) = u\} \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) = y_j) = g(x_i, y_j) = u \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P(X = x_i \wedge Y = y_j) = g(x_i, y_j) = u \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P^{(X, Y)}(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) = u
 \end{aligned}$$

Für die Verteilung  $g \circ (X, Y)$  braucht man also nur  $P^{(X, Y)}$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Wir berechnen den Erwartungswert von  $g \circ (X, Y)$ . Es gibt drei Möglichkeiten diesen auszurechnen:

1.  $E[g \circ (X, Y)] = \sum_{\omega \in \Omega} g \circ (X, Y)(\omega) \cdot p(\omega)$
2.  $E[g \circ (X, Y)] = \sum_{i=1, \dots, r; j=1, \dots, s} P^{(X, Y)}(x_i, y_j) \cdot g(x_i, y_j)$
3.  $E[g \circ (X, Y)] = \sum_{u \in \text{Wertebereich von } g \circ (X, Y)} u \cdot P^{g \circ (X, Y)}$

### 17.3 Beispiel 2 mal würfeln

X: erste Augenzahl, Y: maximale Augenzahl, Verteilung und Erwartungswert von  $X \cdot Y = Z$ ,  $g(x, y) = x \cdot y$

Mit Verfahren 2)

$$EZ = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot$$

$$\frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} + 15 \cdot \frac{1}{36} + 18 \cdot \frac{1}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 20 \cdot \frac{1}{36} + 24 \cdot \frac{1}{36} + 25 \cdot \frac{5}{36} + 30 \cdot \frac{1}{36} + 36 \cdot \frac{6}{36} = \frac{616}{36} = 17.11$$

**Mit Verfahren 3)**

Wertebereich von Z	1	2	3	4	5	6	8	9	...
Verteilung von Z	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	...

$$\text{also: } EZ = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{2}{36} + 8 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + \dots$$

**Mit Verfahren 1)**

$\omega$	X	Y	$X \cdot Y$
(1,1)	1	1	1
(1,2)	1	2	2
(1,3)	1	3	3
(1,4)	1	4	4
(1,5)	1	5	5
(1,6)	1	6	6
(2,1)	2	2	4
(2,2)	2	2	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$P(\omega) = \frac{1}{36}, \frac{1}{36}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 4 + 4 + \dots)$$

**17.4 Unabhängigkeit von 2 Zufallsvariablen**

X,Y heißen unabhängig, wenn für alle u,v gilt:  $P(X = u, Y = v) = P(X = u) \cdot P(Y = v)$

**17.4.1 Beispiel**

X/Y	1	2	3	4	$\sum$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Für unabhängige ZV X und Y gilt dann:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

ohne Beweis:

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\} \quad P(X \in A) = \frac{2}{3}, \quad P(Y \in B) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \in A) \cdot P(Y \in B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24}$$

Multiplikationsregel: Es seien X,Y unabhängige ZV.

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY, \quad E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i y_j \cdot P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i y_j \cdot P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = \left[ \sum_{i=1}^r x_i \cdot P(X = x_i) \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^s y_j \cdot P(Y = y_j) \right] = EX \cdot EY$$

„ $x_i, y_i$  stehen in der Tabelle.“

**Immer gilt:**  $E(X + Y) = EX + EY$

### 17.5 Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen

$$P(X + Y = u) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P(X = x_i, Y = y_j) \text{ mit } x_i + y_j = u = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \text{ mit } x_i + y_j = u$$

### 17.6 Beispiel

Zweimal würfeln mit X erste Augenzahl, Y zweite Augenzahl. Wertebereich von  $X + Y$ : 2, 3, ..., 12

$$P(X + Y = u) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{1}{6} \frac{1}{6} \text{ mit } i + j = u$$

$$P(X + Y = 10) = \frac{1}{36} \text{ mit } i + j = 10, \text{ also } 4 \cdot 6, 5 \cdot 5 \text{ und } 6 \cdot 4 \Rightarrow \text{kommt drei mal vor} = \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{3}{36}$$

$X + Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X + Y) = \frac{1}{36} (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7$$

Das geht auch einfacher, denn den Erwartungswert kann man auch zerlegen. Bei + ist es, im Gegensatz zu  $\cdot$ , auch egal ob die Zufallsgrößen unabhängig sind oder nicht:  $E(X + Y) = EX + EY = 3.5 + 3.5 = 7$

### 17.7 Standardmodell

Wir haben zwei Zufallsexperimente:  $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2)$

Zusammen:  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, P(\{\omega\}) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\})$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \dots$ , hängt nur von  $\omega_1$  ab.

$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \dots$ , hängt nur von  $\omega_2$  ab.

Dann sind X und Y unabhängig.

## 18 Binomial- und Multinomialverteilung

Ein Zufallsexperiment habe 2 Ausgänge (Treffer 1, Niete 0). Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ , Nietenwahrscheinlichkeit  $1 - p = q$ . So ein Experiment nennt man auch Bernoulli-Experiment. Das Experiment wird  $n$  mal wiederholt, was man Bernoullikette nennt.

$$P(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) = p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot \dots \cdot q \cdot p = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} \cdot q^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i}$$

$A_i$  Ereignis: im Versuch  $i$  ein Treffer.

$Y = \sum_{i=1}^n I\{A_i\}$  Zählvariable.  $I$  ist die Indikatorfunktion.

$Y(\omega_1, \dots, \omega_n) = \text{Anzahl der Einser.}$

**Exkurs: Binomialverteilung**  $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$

$Y$  ist binomialverteilt.

$$EY = E\left(\sum_{i=1}^n I\{A_i\}\right) = \sum_{i=1}^n EI\{A_i\} = \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^n p = n \cdot p$$

$$EY = n \cdot p$$

**Satz 18.1.**  $(\Omega, P)$  Wahrscheinlichkeitsraum.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  unabhängige Ereignisse mit  $P(A_i) = p$

Dann ist  $Z = \sum_{j=1}^n I\{A_j\}$  binomialverteilt  $\text{Bin}(n, p)$

$Z(\omega)$  ist die Anzahl der  $A_j$ , in denen  $\omega$  ist.

### 18.1 Verallgemeinerung zur Multinomialverteilung

Ein Zufallsexperiment habe  $s$  Ausgänge.

	1	2	3	...	s
Wahrscheinlichkeit	$p_1$	$p_2$	$p_3$		$p_s$

$p_1 + p_2 + \dots + p_s = 1$ . Es wird  $n$  mal wiederholt.

$P(\{(3, 4, 1, 1, 5)\}) = p_3 \cdot p_4 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_5, n = 5$

$X_1(\omega)$  : Anzahl der Einser in  $\omega$ .

$X_2(\omega)$  : Anzahl der Zweier in  $\omega$ .

$\vdots$

$X_s(\omega)$  : Anzahl der  $s$  in  $\omega$ .

$X = (X_1, X_2, \dots, X_s)$  ist multinomialverteilt.

$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_s = i_s) = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_s^{i_s} = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_s!}$

### 18.2 Beispiel

$n$  Kugeln, in  $s$  Farben,  $i_1$  rot,  $i_2$  blau, ...,  $i_s$  gelb.

Auf wie viele Arten kann man die Kugeln anordnen? ( $= k$ )

$n! = k \cdot i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_s!$

$k = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_s!}$  ist der Multinomialkoeffizient.

### 18.3 Beispiel

Experiment mit 3 Ausgängen  $A_1, A_2, A_3$  und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ . Es wird  $n = 7$  mal wiederholt.  $P(X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 1)$   
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} \cdot 105 = 0.102$   
 $\approx 10\%$

## 19 Pseudozufallszahlen

Zufallsgenerator: liefert Folge von Zufallszahlen  $x_1, x_2, \dots$ , aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Diese sollen zufällig und gleichverteilt sein. Die Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots$ , sollen unabhängig sein und  $P(X_i \in (a, b)) = b - a$

Der Generator liefert Pseudozufallszahlen, d.h. abhängig vom Startwert immer die gleiche Folge. Diese Folge sollte möglichst gut sein.

Wir machen das mit einem linearen Kongruenzgenerator und rechnen dafür modulo  $m$  (möglichst groß):  $Z_{j+1} = a \cdot Z_j + b, 0 < a, b < m, 0 \leq z_j < m$ .

$$x_j = \frac{z_j}{m}$$

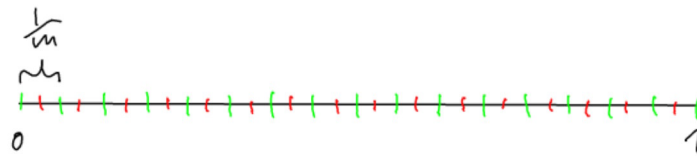


Abbildung 24: Zufallszahlen zwischen 0 und 1:  $x_j = \frac{z_j}{m} + \frac{1}{2 \cdot m}$

z.B.  $m = 100, a = 18, n = 11$ , Startwert:  $z_0 = 40$  (Abb. 24)

$$z_1 = 18 \cdot 40 + 11 = 31 \quad z_2 = 18 \cdot 31 + 11 = 69$$

$$z_3 = 18 \cdot 69 + 11 = 53$$

$$z_4 = 18 \cdot 53 + 11 = 65$$

$$z_5 = 18 \cdot 65 + 11 = 81$$

$$z_6 = 18 \cdot 81 + 11 = 69$$

53, 65, 81, 69, 53, 65, 81, ... schlecht, weil sehr schnell Wiederholungen. Nun stellt sich die Frage: Wie bekommt man einen guten Generator?

### 19.1 Simulation eines Experiments mit Hilfe des Pseudozufallsgenerators

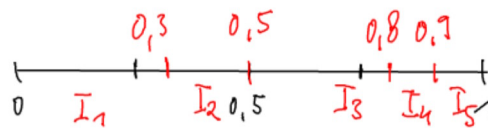


Abbildung 25: Simulation eines Experiments:  $x \in I_k \Leftrightarrow \omega_k$  ist das Ergebnis des Experiments.

Wir haben 5 Ausgänge des Experiments (Abb. 25):  $\omega_1 p(\omega_1) = 0.3$

$$\omega_2 p(\omega_2) = 0.2$$

$$\omega_3 p(\omega_3) = 0.3$$

$$\omega_4 p(\omega_4) = 0.1$$

$$\omega_5 p(\omega_5) = 0.1$$

$x \in I_k \Leftrightarrow \omega_k$  ist das Ergebnis des Experiments.

## 20 Varianz

EX gibt einen Mittelwert der Zufallsgröße X an. Die Varianz ist ein Streuungsmaß von X, das wie folgt definiert wird:

$Var(X) = V(X) = E[(X - EX)^2] = \sigma^2(X)$ . Mittelwert der quadratischen Abweichungen von EX. Die Wurzel der Varianz nennt man Standardabweichung:  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

**Bemerkung:** Hat die Zufallsgröße X die Einheit Meter, so haben Erwartungswert EX und Standardabweichung  $\sigma(X)$  dieselbe Einheit, die Varianz  $\sigma^2(X)$  aber Quadratmeter. Nimmt X die Werte  $x_1, \dots, x_n$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$  an, dann ist die Varianz  $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 \cdot p_i$ .

### 20.1 Beispiel

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5 \\ Var(X) &= \frac{1}{6} [(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2] \\ &= 2.916 \\ \sigma(X) &= \sqrt{2.916} = 1.707 \end{aligned}$$

### 20.2 Varianz der Indikatorfunktion $I_A = I\{A\}$

$$\begin{aligned} EI_A &= 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A) \\ Var(I_A) &= [1 - P(A)]^2 \cdot P(A) + [0 - P(A)]^2 \cdot (1 - P(A)) = [1 + P(A)^2 - 2P(A)] \cdot \\ &P(A) + P(A)^2 \cdot (1 - P(A)) = P(A) + P(A)^3 - 2P(A)^2 + P(A)^2 - P(A)^3 = \underline{P(A) - P(A)^2} \\ &= Var(I_A) \end{aligned}$$

### 20.3 Rechenregeln der Varianz

**Satz 20.1.**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zufallsgröße. Dann gilt:

1.  $Var(X) = E[(X - a)^2] - [(EX) - a]^2, a \in \mathbb{R}$
2.  $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$
3.  $Var(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2]$
4.  $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
5.  $Var(X) \geq 0$   
 $Var(X) = 0 \Rightarrow$  Es gibt  $a \in \mathbb{R}$  mit  $P(X = a) = 1$

*Beweis.* 1. „ned mitschreiben“ deswegen: siehe Abb. 26.

2. setze  $a = 0$ :  $Var(X) = E[X^2] - (EX)^2$
3.  $a \Rightarrow E[(\underbrace{X}_{\text{minimal bei } a=EX}} - a)^2] = Var(X) + [(EX) - a]^2$
4.  $V(aX + b) = E[(aX + b - aEX - b)^2] = E[a^2(X - EX)^2] = a^2 E[(X - EX)^2] = a^2 Var(X)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 a) \quad E[(X-a+a-EX)^2] &= \\
 &= E[(X-a)^2 + 2(X-a)(a-EX) + (a-EX)^2] = \\
 &= E(X-a)^2 + E[2(X-a)(a-EX)] + E[(a-EX)^2] = \\
 &= E[(X-a)^2] + 2(a-EX)(EX-a) + (a-EX)^2 = \\
 &= E[(X-a)^2] - 2(EX-a)^2 + (EX-a)^2 = \\
 &= E[(X-a)^2] - (EX-a)^2
 \end{aligned}$$

Abbildung 26: Beweis: Foto weil „nicht mitschreiben“

5.  $Var(X) \geq 0$  klar.

$$Var(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\underbrace{x_j - EX}_{0 \text{ bei } x_j = EX})^2 \cdot p(x_j) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow P(X = EX) = 1$$

□



## 21 Standardisierung einer Zufallsgröße

$$X^* = \frac{X - EX}{\sigma(x)} \text{ mit } \sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

$$EX^* = \frac{1}{\sigma(x)} \cdot E[X - EX] = \frac{1}{\sigma(x)} \cdot [EX - EX] = 0$$

$$\text{Var}(X^*) = \text{Var}\left[\frac{1}{\sigma(x)} \cdot (X - EX)\right] = \frac{1}{\sigma^2(x)} \cdot \text{Var}(X - EX) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \cdot \text{Var}(x) = 1$$

### 21.1 Die Tschebyschow-Ungleichung

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Var}(X)$$

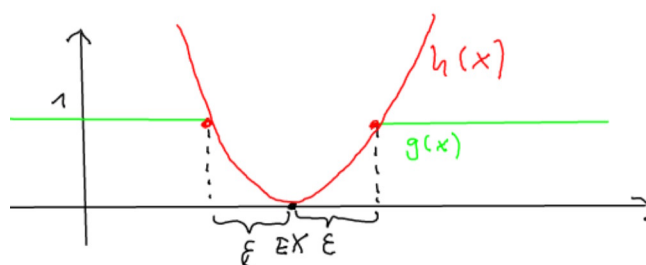


Abbildung 27: Beweis

$$\text{Beweis. } g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x - EX| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{vgl. Abb. 27})$$

$$h(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (x - EX)^2 \quad (\text{vgl. Abb. 27})$$

Es ist  $g(x) \leq h(x)$  für alle  $x$ . Zufallsgröße  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Es ist  $g(X(\omega)) \leq h(X(\omega))$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - EX| \geq \varepsilon\}) = P(\{\omega : g(X(\omega)) = 1\}) \\ = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot g(X(\omega))$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X) = \sum_{\omega} [(X(\omega) - EX)^2 \cdot p(\omega)] \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \sum_{\omega} \frac{1}{\varepsilon^2} (X(\omega) - EX)^2 \cdot p(\omega) = \\ \sum_{\omega} h(X(\omega)) \cdot p(\omega) \Rightarrow \underbrace{\sum_{\omega} g(X(\omega)) \cdot p(\omega)}_{\text{linke Seite}} \leq \underbrace{\sum_{\omega} h(X(\omega)) \cdot p(\omega)}_{\text{rechte Seite}} \quad \square$$

### 21.2 Beispiel

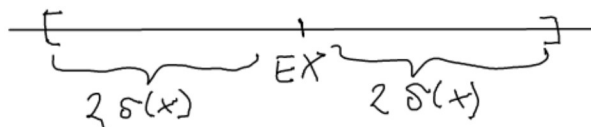


Abbildung 28: Beispiel

Setze  $\varepsilon = k \cdot \sigma(x)$

$$P(|X - EX| \geq k \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{k^2 \cdot \sigma^2(x)} \cdot \sigma^2(x) = \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - EX| \leq k \cdot \sigma(x)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

z.B.  $k = 2$

$$P(|X - EX| \geq 2 \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{4}$$

$$P(|X - EX| \leq 2 \cdot \sigma(x)) \geq \frac{3}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  einen Wert in diesem Intervall (Abb. 28) annimmt, ist  $\geq 75\%$ .

### 21.3 Aufgabe 1

$X$  nimmt die Werte  $1, 2, \dots, k$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit an. Berechne  $EX$  und  $Var(x)$ .

$$EX = \frac{1}{k}(1 + 2 + 3 + \dots + k) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{k}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) \stackrel{F.S.}{=} \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

„F.S.: Aus der Formelsammlung“

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} = \dots = \frac{k^2-1}{12}$$

### 21.4 Aufgabe 2

Wir würfeln  $n$  mal mit einem Würfel. Die Zufallszahl  $Y_n$  ist die größte Augenzahl. Berechne Varianz und Erwartungswert.

$$P(Y_n = 1) = \frac{1}{6^n}$$

$$P(Y_n = 2) = \frac{2^n - 1}{6^n}$$

$$P(Y_n = 3) = \frac{3^n - 2^n}{6^n}$$

$$P(Y_n = 4) = \frac{4^n - 3^n}{6^n}$$

$$P(Y_n = 5) = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$$

$$P(Y_n = 6) = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$

$$EY_n = \frac{1}{6^n} \cdot 1 + \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right] \cdot 2 + \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right] \cdot 3 + \left[\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right] \cdot 4 + \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right] \cdot 5 + \left[1^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \cdot 6 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} EY_n = 6$$

„Lauter 1er  $\Rightarrow -1$ “

$$EY_n^2 = \frac{1}{6^n} \cdot 1^2 + \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right] \cdot 2^2 + \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right] \cdot 3^2 + \left[\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right] \cdot 4^2 + \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right] \cdot 5^2 + \left[1^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \cdot 6^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} EY_n^2 = 6^2 = 36$$

„Wir müssen die abziehen, wo kein 3er vorkommt ( $2^n$ ).“

$$Var(Y_n) = E(Y_n^2) - [EY_n]^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Var(Y_n) = 36 - 36 = 0$$

### 21.5 Aufgabe 3

$X$  nehme nur Werte im Intervall  $[b, c]$  an. Zeige:

$$1. \quad Var(X) \leq \frac{1}{4}(c-b)^2$$

$$2. \quad Var(X) = \frac{1}{4}(c-b)^2 \Leftrightarrow P(X=b) = P(X=c) = \frac{1}{2}$$

*Beweis.* zu 1.) Es gilt:  $Var(X) = E[(X-a)^2] - [(EX) - a]^2, a \in \mathbb{R}$

$$(X-a)^2 \leq \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \Rightarrow E[(X-a)^2] \leq \frac{(c-b)^2}{4}$$

$$E[(X-a)^2] \geq Var(X) \Rightarrow \frac{(c-b)^2}{4} \geq Var(X)$$

$$\text{zu 2.) } Var(X) = \frac{(c-b)^2}{4} \Leftrightarrow E[(X-a)^2] = \frac{(c-b)^2}{4} \text{ und } E(X) - a = 0, \text{ also } EX = a$$



Abbildung 29: Beweis: Für  $a$  nehmen wir die Mitte, also  $a = \frac{c-b}{2}$ .

$$\Leftrightarrow EX = a \text{ und } (x_1 - a)^2 \cdot p_1 + (x_2 - a)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - a)^2 \cdot p_n = \frac{(c-b)^2}{4}$$

$$(x_i - a)^2 \leq \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \text{ für alle } i.$$

$$\text{also } (x_i - a)^2 = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$$

also  $x_i = b$  oder  $c$ .

$$\text{weil } EX = a \text{ ist } P(X = b) = P(X = c) = \frac{1}{2}$$

□

## 22 Kovarianz

$X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[(X+Y - E(X+Y))^2] = E[((X-EX) + (Y-EY))^2] = \\ &= E[\underbrace{(X-EX)^2}_{\text{Var}(X)} + \underbrace{(Y-EY)^2}_{\text{Var}(Y)} + 2(X-EX)(Y-EY)] = \text{Var}(X) + V(Y) + 2 \cdot \\ &\quad \underbrace{E[(X-EX)(Y-EY)]}_{\text{Kovarianz von X und Y}} \end{aligned}$$

„auch:  
 $\text{cov}(X, Y), C(X, Y)$ “

**Definition 22.1.**  $C(X, Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$   
 $V(X+Y) = \text{Var}(X) + V(Y) + 2 \cdot C(X, Y)$

**Satz 22.1.** 1.  $C(X, Y) = E(X \cdot Y) - (EX) \cdot (EY)$

2.  $C(X, Y) = C(Y, X), C(X, X) = V(X)$

3.  $C(X+a, Y+b) = C(X, Y)$

4.  $X, Y$  unabhängig  $\Rightarrow C(X, Y) = 0$

5.  $C(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_j Y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j C(X_i, Y_j)$

6.  $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n V(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(X_i, X_j)$

*Beweis.* 1.  $C(X, Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E[X \cdot Y - XEY - YEX + EX \cdot EY] = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY - EY \cdot EX + EX \cdot EY = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$

2. klar

3.  $C(X+a, Y+b) = E[(X+a-EX-a)(Y+b-EY-b)] = E[(X-EX)(Y-EY)] = C(X, Y)$

4. mit 1.)  $C(X, Y) = E(X \cdot Y) - (EX) \cdot (EY) = (EX) \cdot (EY) - (EX) \cdot (EY) = 0$

„Jetzt verwenden wir die Unabhängigkeit. Sind sie unabhängig ist die Kovarianz 0. Umgekehrt gilt das nicht!“

5.  $C(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_j Y_j) \stackrel{\text{mit 1.}}{=} E[\sum_{i=1}^m a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j Y_j] - E[\sum_{i=1}^m a_i X_i] \cdot E[\sum_{j=1}^n b_j Y_j]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j E(X_i \cdot Y_j) - \sum_{i=1}^m a_i E X_i \cdot \sum_{j=1}^n b_j E Y_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j [E(X_i \cdot Y_j) - E X_i \cdot E Y_j] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j C(X_i, Y_j) \end{aligned}$$

6.  $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = C(X_1 + \dots + X_n, X_1 + \dots + X_n) \stackrel{\text{mit 5.}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(X_i, X_j)$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n V(X_j)}_{\text{Das sind die, bei denen gilt: } i=j} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(X_i, X_j)$$

Das sind die, bei denen gilt:  $i=j$

□

### 22.1 Folgerung

Sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig, so ist  $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$  (nach 6.) und 4.))

## 22.2 Beispiel

Aus  $C(X, Y = 0)$  (d.h. unkorreliert) folgt nicht, dass  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, z.B.: 2 mal Würfeln:  $X$  ist die erste Augenzahl,  $Y$  ist die zweite Augenzahl.  
 $C(X + Y, X - Y) = C(X, X) - C(X, Y) + C(Y, X) - C(Y, Y) = V(X) - V(Y) = 0$ , **also**  $(X + Y), (X - Y)$  unkorreliert.

Die Wahrscheinlichkeit zwei 6er zu würfeln:  $P(X + Y = 12, X - Y = 0) = \frac{1}{36}$   
 $\neq P(X + Y = 12) \cdot P(X - Y = 0) = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{36}$   
 $\Rightarrow$  also unabhängig

„Das Komma muss man als und lesen.“

## 22.3 Varianz einer Indikatorsumme

$$C(I_A, I_B) \underbrace{=}_{\text{mit 1.}} E(I_A \cdot I_B) - EI_A \cdot EI_B = E(I_{A \cap B}) - EI_A \cdot EI_B = P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$V(I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}) \underbrace{=}_{\text{mit 6.}} \sum_{j=1}^n V(I_{A_j}) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(I_{A_i}, I_{A_j}) = \sum_{j=1}^n P(A_j)(1 - P(A_j)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [P(A_i \cap A_j) - P(A_i) \cdot P(A_j)] = I_{A_1} + \dots + I_{A_n} \cdot \text{Zählvariable (zählt in wie vielen } A_i \text{ } \omega \text{ liegt)}$$

**Sonderfall**  $P(A_j)$  alle gleich und  $P(A_i \cap A_j)$  auch alle gleich.

$$V(I_{A_1} + \dots + I_{A_n}) = n \cdot P(A_1) \cdot (1 - P(A_1)) + n(n-1)[P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)^2]$$

## 22.4 Beispiel Binomialverteilung Bin(n,p)

Wir haben  $n$  unabhängige Ereignisse.  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .  $P(A_i) = p$ .  $X$  zählt, wieviele Ereignisse eingetreten sind.  $X$  ist Bin(n,p)-verteilt.  $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$ .

$$V(X) = n \cdot P(A_1)(1 - P(A_1)) + n(n-1) \cdot 0$$

$$V(X) = np(1 - p), EX = np$$

## 22.5 Beispiel hypergeometrische Verteilung

Wir haben  $r$  rote und  $s$  schwarze Kugeln in einer Urne. Es werden  $n$  Kugeln ohne Rücklegen gezogen:  $X$  ist die Anzahl der roten Kugeln,  $A_j$  das Ereignis: bei jeder  $j$ -ten Ziehung rot ( $a_1, a_s, \dots, \underbrace{a_j}_{\text{hier rot}}, \dots, a_n$ )

$$X = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$$

$$P(A_j) = \frac{r}{r+s}, P(A_i \cap A_j) = \frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)}$$

$$V(I_{A_1} + \dots + I_{A_n}) = n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \left(1 - \frac{r}{r+s}\right) + n(n-1) \left[ \frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \right] = \dots$$

$$= n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \left(1 - \frac{r}{r+s}\right) \left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right)$$

$$\text{Mit } p = \frac{r}{r+s}$$

$$V(X) = n \cdot p(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right)$$

$$[EX = n \cdot p]$$

**Vergleich zur Binomialverteilung**  $EX = np, V(X) = np(1-p)$

## 22.6 Beispiel Permutationen

Betrachte die Permutationen der Zahlen 1 bis  $n$ .  $X$  ist die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation.

$$A_j : \{\text{Permutationen } \omega : \text{Fixpunkte bei } j\}$$

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}$$

$$P(A_j) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \text{ auch möglich: } = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$V(X) = nP(A_1)(1 - P(A_1)) + n(n-1)[P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)^2] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + (n-1) \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n(n-1)} - \frac{n-1}{n^2} = 1$$

$$\text{Var}(X) = 1, \text{ von früher: } EX = 1 \Rightarrow \text{unabhängig von } n.$$

## 22.7 Korrelationskoeffizient

**Definition 22.2.**  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$r(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \text{ heißt Korrelationskoeffizient von } X \text{ und } Y$$

**Problem:**  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir kennen  $X(\omega)$  und wollen  $Y(\omega)$  schätzen.  $Y \approx g(X), Y \approx a + bX$  (Gerade). Wie berechnet man  $a$  und  $b$ , damit man  $Y$  möglichst gut schätzt?

Der Schätzfehler  $Y(\omega) - a - bX(\omega)$  ist eine Zufallsgröße.

Minimiere  $E[(Y(\omega) - a - bX(\omega))^2]$ . Dieses Optimierungsproblem hat die Lösung:

$$b^* = \frac{C(X, Y)}{V(X)}, a^+ = EXY - b^*EX.$$

Der Minimalwert  $M^+$  von  $*$  ist:  $M^+ = V(Y) \cdot [1 - r^2(X, Y)]$

$$\text{Beweis: } Z = Y - bX; E[(Y - a - bX)^2] = E[(Z - a)^2]$$

$$= \left[ V(X) = E[(X - a)^2] - [EX - a]^2 \right] = \text{Var}(Z) + [EZ - a]^2$$

$$\text{minimal bei: } EZ = a; E(Y - bX) = a; EY - bEX = a$$

„Abkürzung:  $\tilde{Y} = Y - EX, \tilde{X} = X - EX$ “

**minimiere:**  $V(Z) = V(Y - bX) = E[(Y - bX - EY + bEX)^2] = E[(\tilde{Y} - b\tilde{X})^2]$   
 $= E[\tilde{Y}^2 - 2b\tilde{X}\tilde{Y} + b^2\tilde{X}^2] = V(Y) - 2bC(X, Y) + b^2V(X) = h(b) \Rightarrow \text{minimal}$   
**beim Scheitel:**  $h'(b) = -2C(X, Y) + 2bV(X) = 0$   
 $bV(X) = C(X, Y)$   
 $b = \frac{C(X, Y)}{V(X)}$   
**Also:**  $b^* = \frac{C(X, Y)}{V(X)}, a^* = EY - b^*EX$

$$\begin{aligned} M^* &= E[(Y - a^* - b^*X)^2] = E[(Y - EY + b^*EX - b^*X)^2] = E[((Y - EY) - b^*(X - EX))^2] \\ &= E[((Y - EY)^2 - b^{*2}(X - EX)^2 - 2b^*(Y - EY)(X - EX))] = V(Y) + b^{*2}V(X) - \\ &2b^*C(X, Y) = V(Y) + \frac{C(X, Y)^2 \cdot V(X)}{V(X)^2} - 2 \cdot \frac{C(X, Y)}{V(X)} \cdot C(X, Y) = V(Y) + \frac{C(X, Y)^2}{V(X)} - 2 \cdot \\ &\frac{C(X, Y)^2}{V(X)} = V(Y) - \frac{C(X, Y)^2}{V(X)} = V(Y) - V(Y) \cdot \frac{C(X, Y)^2}{V(X) \cdot V(Y)} = V(Y) \cdot [1 - r(X, Y)^2] \end{aligned}$$

## 22.8 Folgerungen

1.  $[C(X, Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$
2.  $|r(X, Y)| \leq 1$
3.  $|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow M^* = 0 \Leftrightarrow Y = a + bX$

## 22.9 Beispiel

X/Y	3	5	7	
1	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{24}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{8}{24}$
	$\frac{8}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{24}{24}$

$$EX = 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{8}{24} + 3 \cdot \frac{8}{24} = 2$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{8}{24} + 4 \cdot \frac{8}{24} + 9 \cdot \frac{8}{24} = 4.66$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 4.66 - 4 = 0.66$$

$$EY = 3 \cdot \frac{8}{24} + 5 \cdot \frac{8}{24} + 7 \cdot \frac{8}{24} = 5$$

$$E(Y^2) = 9 \cdot \frac{8}{24} + 25 \cdot \frac{8}{24} + 49 \cdot \frac{8}{24} = 27.66$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 27.66 - 25 = 2.66$$

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{24}(1 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \cdot 6) = 10.83$$

$$C(X, Y) = E(X \cdot Y) - (EX)(EY) = 10.83 - 2 \cdot 5 = 0.83$$

$$b^* = \frac{C(X, Y)}{V(X)} = \frac{0.83}{0.66} = 1.25$$

$$a^+ = EY - b^*EX = 5 - 1.25 \cdot 2 = 2.50$$

$$\text{Also: } Y \approx a^* + b^*X = 2.50 + 1.25 \cdot X, \quad r(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{0.83}{\sqrt{0.66 \cdot 2.66}} = 0.625$$

$$g(1) = 2.50 + 1.25 \cdot 1 = 3.75$$

$$g(2) = 2.50 + 1.25 \cdot 2 = 5$$

$$g(3) = 2.50 + 1.25 \cdot 3 = 6.25$$

## 23 Überbestimmte LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ also } Ax = b \text{ ist nicht lösbar. Daher}$$

suchen wir die beste Näherungslösung:  $|Ax - b|$  minimal. Lösungsformel: Die Normalengleichung  $A^T Ax = A^T b$  ist lösbar.

### 23.1 Aufgabe

Gegeben sind die Punkte  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ . Wir suchen nun die Gerade  $g: y = a + bx$  möglichst passend.

$$x_1 + a = y_1$$

$$x_2 + a = y_2$$

$$\vdots$$

$$x_n + a = y_n$$

lösen!

Minimal ist  $(x_1 b + a - y_1)^2 + (x_2 b + a - y_2)^2 \dots (x_n b + a - y_n)^2$  (Abb. 30).

### 23.2 Beispiel Methode der kleinsten Quadrate

$$P_1 = (2, 2), P_2 = (4, 3), P_3 = (5, 2), P_4 = (7, 4)$$

Werte einsetzen:



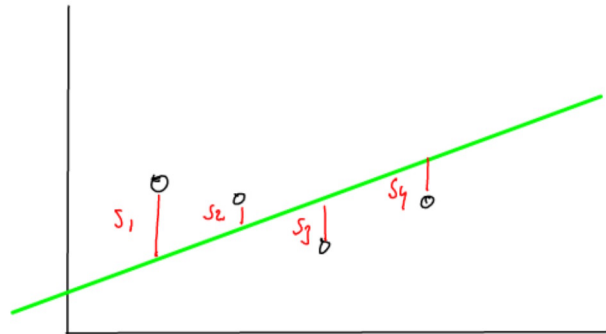


Abbildung 30: Methode der kleinsten Quadrate:  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$  soll minimal sein

$$2b + a = 2$$

$$4b + a = 3$$

$$5b + a = 2$$

$$7b + a = 4$$

Daraus machen wir die Matrix A: 
$$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 4,1 \\ 5,1 \\ 7,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,1 \\ 4,1 \\ 5,1 \\ 7,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 94,18 \\ 18,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$a = 1.19, b = 0.346$$

$$g: y = a + bx = 1.19 + 0.346x \text{ (Idee siehe Abb. 30)}$$

X	0	5
Y	1.2	2.9

### 23.3 Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\Omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ . Jedes  $\omega$  habe die gleiche Wahrscheinlichkeit, hier  $p(\omega) = \frac{1}{4}$

$$X(x_i, y_i) = x_i$$

$$Y(x_i, y_i) = y_i$$

X bekannt, schätze Y durch  $Y \approx a + bX$ . Berechne  $a^*, b^*$

X/Y	2	3	4	
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
7	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} = 4.5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{4}(4 + 16 + 25 + 49) = 23.5$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 3.25$$

$$EY = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2.75$$

$$E(Y^2) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{4} = 8.25$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 0.687$$

$$E(X \cdot Y) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 13.5$$

$$C(X, Y) = E(X \cdot Y) - (EX) \cdot (EY) = 13.5 - 4.5 \cdot 2.75 = 1.125$$

$$b^* = \frac{C(X, Y)}{V(X)} = \frac{1.125}{3.25} = 0.346$$

$$a^* = EY - b^* \cdot EX = 2.75 - 0.346 \cdot 4.5 = 1.19$$

**Die beiden Ansätze bringen das gleiche Ergebnis!**

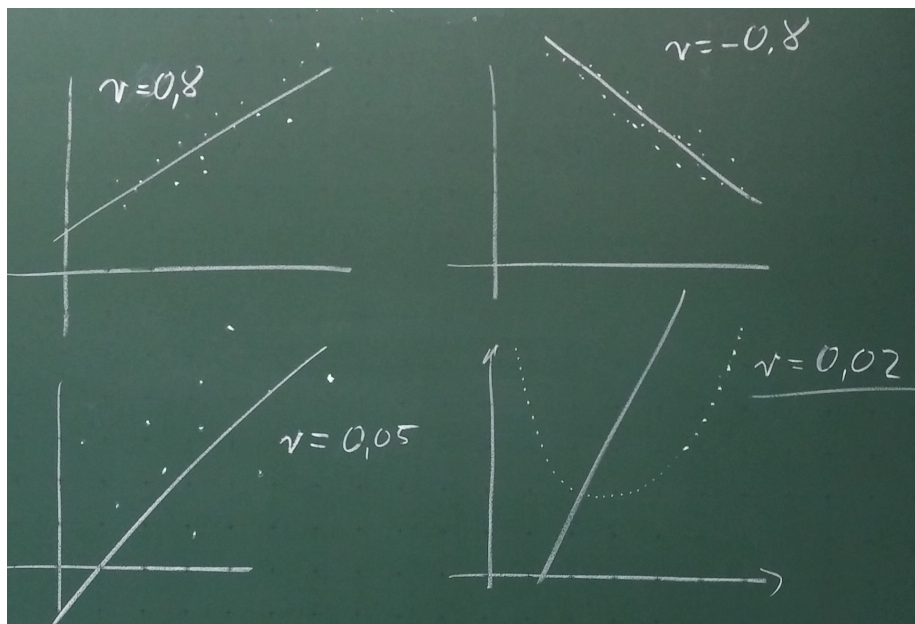


Abbildung 31: Punktwolken, der Korrelationskoeffizient und die dazugehörigen Geraden.

Der Korrelationskoeffizient gibt an, wie gut sich die Punktwolke durch eine Gerade annähern lässt.  $r(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{1.125}{\sqrt{3.25 \cdot 0.687}} = 0.75$  Die Steigung hat das gleiche Vorzeichen wie der Korrelationskoeffizient (+ steigt, - fällt, vgl. Abb. 31).

„Je näher dieser Betrag bei 1 liegt, desto genauer ist der Graph.“

## 24 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

$\Omega$  abzählbar unendlich.  $(\Omega, P)$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wenn:  $P$  auf den Teilmengen von  $\Omega$  definiert mit:

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  disjunkte  $A_i$

Die  $\varphi$  Additivität  $(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)$  folgt nicht aus  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  für  $A \cap B = \emptyset$

### 24.1 Beispiel

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$P(\omega_j) \geq \forall j, \sum_{j=1}^{\infty} p(\omega_j) = 1, P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p(\omega_j)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega)$$

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot P(X = x_j)$$

$$E(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot P(X = x_j)$$

### 24.2 St. Petersburg Spiel

Eine Münze wird solange geworfen bis eine Zahl oben ist.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow P(\{k\}) = (\frac{1}{2})^k$ . Man bekommt  $2^{k-1}$  Rubl als Gewinn.  $X$  ist der Gewinn.

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) \cdot X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \text{ Erwartungswert ist } \infty.$$

### 24.3 Spieler-Ruin-Problem

Der Spieler A hat ein Kapital von  $a$  Euro und der Spieler B eins von  $b$ . Sie werfen eine Münze. Gewinnt A, so bekommt A von B einen Euro und umgekehrt. Sie spielen solange, bis einer bankrott ist.

**Wahrscheinlichkeit Allgemeiner:**

A gewinnt:  $p$

B gewinnt:  $(1-p) = q$

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt?**

Wir rechnen das allgemein aus (Abb. 32), ges.:

$P_k(A)$  Kapital von A

$$P_0(A) = 0$$

$$P_r(A) = 1$$

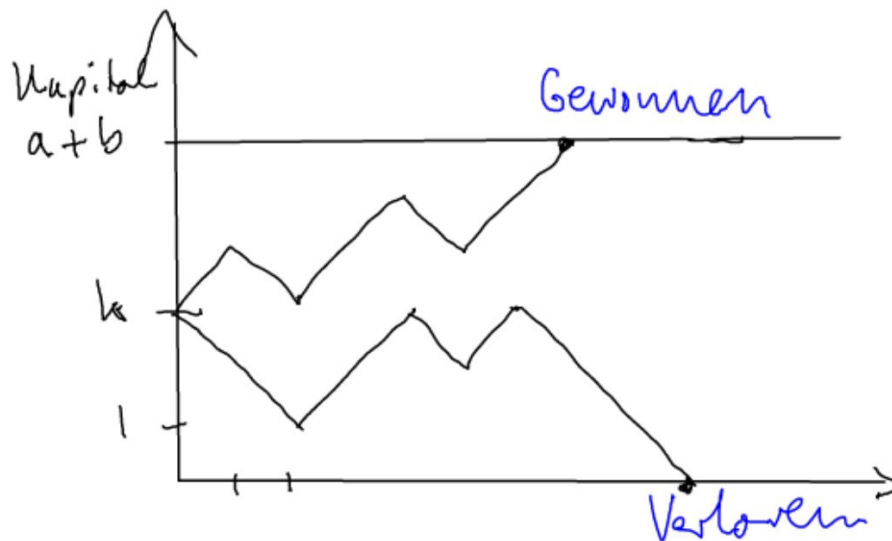
Sei  $1 \leq k \leq r-1$

$P_k(A) = P_k(A \cap A_1) + P_k(A \cap A_2)$ , wobei  $A_1$ : gewinnt beim nächsten Wurf,  $A_2$  verliert ((Abb. 6)).  $= P_k(A_1) \cdot P_k(A|A_1) + P_k(A_2) \cdot P_k(A|A_2) = p \cdot P_{k+1}(A) + q \cdot P_{k-1}(A)$

$$d_k = P_{k+1}(A) - P_k(A)$$

$$d_{k-1} = P_k(A) - P_{k-1}(A)$$

„Wir lassen das von A also (A) mal weg  $\Rightarrow$  weniger Schreibarbeit.“

Abbildung 32: Spieler-Ruin-Problem:  $\Omega$ : alle möglichen Pfade.

$$\frac{d_k}{d_{k-1}} = \frac{P_{k+1} - P_{k+1} \cdot p - P_{k-1} \cdot q}{P_{k+1} \cdot p + P_{k-1} \cdot q - P_k} = \frac{P_{k+1} \underbrace{(1-p)}_q - P_{k-1} \cdot q}{P_{k+1} \cdot p + P_{k-1} \underbrace{(q-1)}_{-p}} = \frac{P_{k+1} \cdot q - P_{k-1} \cdot q}{P_{k+1} \cdot p - P_{k-1} \cdot p} = \frac{q(P_{k+1} - P_{k-1})}{p(P_{k+1} - P_{k-1})} =$$

$$\frac{q}{p} \Rightarrow d_k = d_{k-1} \cdot \frac{q}{p} \Rightarrow P_{k+1} = P_k + d_k$$

$$P_1 = P_0 + d_0 = d_0$$

$$P_2 = P_1 + d_1 = d_0 + d_1$$

$$\vdots$$

$$P_k = d_0 + d_1 + \dots + d_{k-1}$$

$$p_r = 1$$

**1. Fall:**  $p = q = \frac{1}{2}$ . Alle  $d_k$  gleich.

$$1 = d_0 + d_1 + \dots + d_{r-1} \Rightarrow d = \frac{1}{r}, d = d_0 = d_1 = \dots$$

$$\Rightarrow P_k = k \cdot \frac{1}{r} = \frac{k}{r}. \text{ Also } P_a = \frac{a}{a+b}$$

**Beispiel** A hat 10 Euro und B hat 12.  $P(A) = \frac{10}{10+12} = 0.45$

**2. Fall:**  $p \neq q$

$$d_1 = d_0 \cdot \frac{1}{p}$$

$$d_2 = d_1 \cdot \frac{q}{p} = d_0 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Rightarrow P_k(A) = \sum_{j=0}^{k-1} d_j = \sum_{j=0}^{k-1} d_0 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^j = d_0 \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j =$$

$$d_0 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \frac{q}{p}} = P_k(A)$$

Für  $k = r$  ergibt sich  $P_r(A) = 1$

$$1 = d_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r}{1 - \frac{q}{p}} \Rightarrow d_0 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \Rightarrow P_k(A) = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \Rightarrow P_k(A) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r}$$

**Beispiel**  $a = 10, b = 12, p = 0.6, q = 0.4 \Rightarrow P(A) = \frac{1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{22}} = 0.98$

## 25 Exkurs wichtige Reihen

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  Exp.reihe  
 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  für  $|x| < 1$  geometrische Reihe.  
 Ableitung:  $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$   
 Ableitung:  $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

**Satz 25.1** (Umordnungssatz).  $a_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Dann darf man:

1. Reihe beliebig umordnen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$  ( $\pi$  Permutationen)
2. In Teilmengen  $T_1, T_2, \dots$  zerlegen und aufaddieren  $\sum_i \left( \sum_{a_k \in T_i} a_k \right)$

### 25.1 Aufgabe 22.2

Urne mit einer roten und einer schwarzen Kugel. Wir ziehen eine Kugel. Wenn wir die rote ziehen, sind wir fertig. Wenn wir die schwarze ziehen, legen wir **zwei** schwarze zurück. Die Zufallsgröße  $X$  entspricht der Anzahl der Ziehungen.

$$\Omega = \left\{ (r), (s, r), (s, s, r), \underbrace{(s, s, s, r)}_{X=4}, \dots \right\}$$

1.  $P(X=1) = \frac{1}{2}, P(X=4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow P(X=k) = \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)}$
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ . Mit Partialbruchzerlegung:  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{A+k(A+B)}{k(k+1)} \Rightarrow A=1, A+B=0 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \rightarrow 1 \checkmark$
3. ges.:  $EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty \Rightarrow$  Der Erwartungswert ist unendlich bzw. existiert nicht.

## 26 Wartezeitprobleme

Wir haben ein Treffer-Niete-Experiment. Treffer ist 1 und Niete 0. Die Wahrscheinlichkeiten sind  $p$  und  $q$ , wobei  $q = 1-p$ . Das Experiment wird solange wie-

derholt, bis zum ersten mal ein Treffer kommt.  $\Omega = \left\{ \underbrace{1}_{\omega_1}, \underbrace{01}_{\omega_2}, 001, 0001, \dots \right\}$

$$p_1(\omega_j) = (1-p)^{j-1} \cdot p \quad \text{Test: } \sum_{j=1}^{\infty} p_1(\omega_j) = p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \underset{\text{geom. R.}}{=} p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$X(\omega_j) = j-1$  Anzahl der Nieten bis zum ersten Treffer.

Verteilung von  $X$ :  $P(X=k) = \underbrace{(1-p)^k}_{\text{Nieten}} \cdot \underbrace{p}_{\text{Treffer}}, k=0, 1, 2, 3, \dots$   $X$  heißt geometrisch verteilt.

**Satz 26.1.** Es sei  $X$  geometrisch verteilt  $P(X=k) = (1-p)^k \cdot p$ . Es gilt:

1.  $EX = \frac{1-p}{p}$
2.  $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

**Wir berechnen**

$$1. EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p \quad \text{Mit } \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} \cdot (1-p) = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p(1-p) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}}_X = \frac{1-p}{p} \checkmark$$

$$2. V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \underbrace{E[X \cdot (X-1)]}_{\text{den rechnen wir aus}} + EX - (EX)^2$$

$$E[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(1-p)^k p = p(1-p)^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \underbrace{(1-p)^{k-2}}_X$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} &= \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow p(1-p)^2 \cdot \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p(1-p)^2}{p^3} = \\ \frac{2(1-p)^2}{p^2} &\Rightarrow V(X) = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{(1-p)^2 + (1-p)p}{p^2} = \\ \frac{(1-p)(1-p+p)}{p^2} &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

## Prüfung in Wahrscheinlichkeitsrechnung

Arbeitszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: Alle

Prüfer: Hörwick

- 1.) 1% der Bevölkerung hat eine bestimmte Krankheit.

Ein Diagnosetest hat folgende Eigenschaften:

Testperson gesund:  $P(\text{Test zeigt negativ}) = 0,90$  $P(\text{Test zeigt positiv}) = 0,10$ Testperson krank:  $P(\text{Test zeigt negativ}) = 0,01$  $P(\text{Test zeigt positiv}) = 0,99$ 

- a) Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet und der Test zeigt positiv.
- (2) Keine

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person krank ist? (4) Rechnung

- b) Eine Person geht zum Arzt, da sie befürchtet, diese Krankheit zu haben.
- (3)
- 
- Der Test zeigt positiv.

Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Person krank ist?

(Keine Rechnung, aber Begründung)

- 2.) Eine gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsgrößen
- $X$
- und
- $Y$
- ist durch folgende Tabelle gegeben:

$X \backslash Y$	1	4	7
1	0,2	0,1	0,05
2	0,05	0,2	0,05
3	0,05	0,1	0,2

- a) Man berechne:
- $EX, EY, Var(X), Var(Y), E(X \cdot Y), Cov(X, Y)$

- b) Man berechne:
- $E(7X - 3Y + 5)$
- (2)

- 3.) 6 weiße Kugeln werden eine nach der anderen, rein zufällig, auf 4 nummerierte Fächer verteilt.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Fach 1 genau zwei Kugeln sind.

- a) Man löse die Aufgabe mit dem Modell „nicht unterscheidbare Kugeln“.
- (4)

- b) Man löse die Aufgabe mit dem Modell „unterscheidbare Kugeln“.
- (4)

- c) Welches Modell liefert das richtige Ergebnis?
- (2)



- 4.) Ein Treffer / Nieter Experiment wird beliebig oft wiederholt. Die Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  sei 0.2. Die Zufallsgröße  $X_1$  zählt die Anzahl der Nieten bis zum ersten Treffer.

Wie viele Versuche braucht man im Schnitt, bis zum 12. Treffer?

Hinweis:  $EX_1 = \frac{1-p}{p}$

- 5.) 5 % der Bevölkerung hat eine bestimmte Krankheit. Mit einem Bluttest kann die Krankheit sicher festgestellt werden. Sehr viele Menschen sollen getestet werden. Es wird folgendermaßen vorgegangen:

Man bildet Gruppen von 10 Personen. Ihre Blutproben werden vermischt und der Test durchgeführt. Zeigt der Test „gesund“, ist man fertig. Zeigt der Test „krank“, so wird jede Person einzeln getestet.

Wie viele Tests pro Person braucht man im Durchschnitt?

- 6.) In einer Urne sind 7 weiße und eine schwarze Kugel. Es werden nacheinander 5 Kugeln gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass man (wenigstens einmal) die schwarze Kugel zieht. Man führe die Rechnung zweimal durch.

a) Ziehen mit Rücklegen

b) Ziehen ohne Rücklegen

Aufs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Ans	7	3	9	2	4	4	2	7	5	3	3	49	

## 27 Lösung für die Prüfung SS 2012

### 27.1 zu 1)

#### 27.1.1 zu 1a)

A: Person krank

B: Test zeigt positiv  $P(A|B) = \frac{P \cap B}{P(B)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.10} = 0.09$

#### 27.1.2 zu 1b)

Jetzt ist die apriori Wahrscheinlichkeit, dass er krank ist, höher (vielleicht 0.1 statt 0.01). Damit ist die aposteriori Wahrscheinlichkeit, dass er krank ist, auch höher (vielleicht 0.5).

### 27.2 zu 2a)

X/Y	1	4	7	
1	0.2	0.1	0.05	0.35
2	0.05	0.2	0.05	0.3
3	0.05	0.1	0.2	0.35
	0.3	0.4	0.3	

1. Immer multiplizieren Zeile mal Randwahrscheinlichkeit:  $EX = 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.35 = 2$
2. Wert mal Wahrscheinlichkeit:  $1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.3 = 4$
3.  $EX^2 = 1^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.35 = 1 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.35 = 4.7$   
 $EY^2 = 1 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.4 + 49 \cdot 0.3 = 21.4$   
 $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 4.7 - 4 = 0.7$   
 $Var(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 21.4 - 16 = 5.4$
4. Nicht einfach multiplizieren. Ganze Tabelle durchmachen:  $E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 7 \cdot 0.05 + 2 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 7 \cdot 0.05 + 3 \cdot 1 \cdot 0.05 + 3 \cdot 4 \cdot 0.1 + 3 \cdot 7 \cdot 0.2 = 8.9$
5.  $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY = 8.9 - 2 \cdot 4 = 0.9$

### 27.3 zu 2b)

$$E(7X - 3Y + 5) = 7EX - 3EY + 5 = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 5 = 7$$

### 27.4 zu 3)

#### 27.4.1 zu 3a)

Anzahl der Möglichkeiten bei n Fächern und k Kugeln:  $\binom{n+k-1}{k}$ ,  $n = 4, k = 6$

alle Möglichkeiten:  $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$

günstige Möglichkeiten, also 4 Kugeln auf 3 Fächer:  $\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$

$$\Rightarrow P = \frac{15}{84} = 0.178$$

**27.4.2 zu 3b)**

Formel bei n Fächern und k Kugeln für die Anzahl der Möglichkeiten:  $n^k$

alle Fälle:  $4^6 = 4096$

günstige Fälle:  $\binom{6}{2} \cdot 3^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 3^4 = 1215$

$\Rightarrow P = \frac{1215}{4096} = 0.296$

**27.4.3 zu 3c)**

b ist richtig, weil a falsch ist. a ist falsch, weil nicht alle Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind.

**27.5 zu 4)**

$X_1$  Anzahl der Nieten bis zum 1. Treffer.

$X_2$  Anzahl der Nieten vom 1. bis zum 2. Treffer.

$\vdots$

$X_{12}$  Anzahl der Nieten vom 11. bis zum 12. Treffer.

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$

$EY = E \sum_{i=1}^{12} X_i = EX_1 + \dots + EX_{12} = 12 \cdot EX_1 = 12 \cdot \frac{1-P}{P} = 12 \cdot \frac{1-0.2}{0.2} = 48$

Im Schnitt sind es also 48 Nieten bis zum 12. Treffer. Dadurch braucht man im Schnitt 60 Versuche bis zum 12. Treffer.

„Durchschnitt  
heißt immer  
Erwartungswert“

**27.6 zu 5)**

X: Anzahl der Tests pro Gruppe (10).

$P(X = 1) = 0.95^{10} = 0.6$

$P(X = 11) = 0.40$

$EX = 1 \cdot 0.60 + 11 \cdot 0.40 = 5.0$

Pro Gruppe im Schnitt 5.0 Tests. Pro Person werden also im Schnitt 0.5 Tests benötigt.

## Stichwortverzeichnis

Bayes-Formel, 40

Datenvektor, 11

Empirisches Gesetz, 11

Formeln

Bayes, 40

Häufigkeit

relative, 11

Histogramm, 13

Pfadregel

Erste, 35

Reißnagelversuch, 11

Stabdiagramm, 12

Stabilisierung, 11

Statistik

deskriptive, 12