Mitschrift
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS 2015/16
Prof. Dr. Josef Hörwick

M. Zell

14. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Hinweise

Diese Mitschrift basiert auf der Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ von Prof. Dr. Josef Hörwick im WS 2015/16. Du kannst sie gerne benutzen, kopieren und an andere weitergeben. Auch in der Prüfung - soweit zugelassen [1] - kannst du sie gerne als Hilfsmittel verwenden, wenn das meine Nutzung als Prüfungshilfsmittel nicht in irgendeiner Weise beeinträchtigt.

Natürlich besteht kein Anspruch auf Aktualität, Richtigkeit, Fortsetzung meines Angebots oder dergleichen. Sollten dir Fehler auffallen oder solltest du Verbesserungsvorschläge haben, würde ich mich über eine E-Mail (zell@hm.edu) freuen. Wenn du mir als kleines Dankeschön z.B. ein Club-Mate[2] ausgeben möchtest, findest du mich meistens hier: `http://fi.cs.hm.edu/fi/rest/public/timetable/group/if3b`. Wenn nicht, ist es auch ok ;-)

Nach der Prüfung werde ich den LaTeX-Quelltext veröffentlichen, damit die Mitschrift weitergeführt, korrigiert und ergänzt werden kann.

Viele Grüße
M. Zell

[1] `http://www.cs.hm.edu/meinstudium/studierenden_services/fi_pruefungskatalog.de.html`
[2] `http://www.clubmate.de/ueber-club-mate.html`

2 Allgemeines

- kein Skript. Alles wichtige steht an der Tafel.
- Literatur: Norbert Henze, Stochastik für Einsteiger, Vieweg/Teubner
- keine Hausaufgaben
- Übungsaufgaben gibt es immer zwischendurch und alte Prüfungsaufgaben gegen Ende des Semesters

3 Zufallsexperimente

Experimente: Würfeln, Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, Münze werfen: $\Omega = \{K, Z\}$. Solange würfeln bis eine 6 kommt: $\Omega = \{1,2,3,4,...\} = \mathbb{N}$
n Einzelexperimente $\Rightarrow$ Kartesisches Produkt: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n, \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$

„Man kann mehrere Eperimente auch zusammenfassen“

Zum Beispiel erst würfeln, dann Münze:
$\Omega_1 = \{1, ..., 6\}, \Omega_2 = \{K, Z\} \Rightarrow \Omega = \{(a,b) | a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$
Zweimal nacheinander würfeln: $\underbrace{\Omega}_{1.Wurf} = \{(\underbrace{a}_{1.}, \underbrace{b}_{2.Wurf}) : 1 \leq a, b \leq 6\}$
Mit rotem und grünen Würfel gleichzeitig: $\Omega = \{(\underbrace{a}_{grüner}, \underbrace{b}_{roter}) | 1 \leq a, b \leq 6\}$
In einer Urne sind die Kugeln 1 bis n. Es wird k mal mit Rücklegen gezogen:
$\Omega = \{(\underbrace{a_1}_{1.Zug}, \underbrace{a_2}_{2.Zug}, ..., a_k) | 1 \leq a_i \leq n\}$
In einer Schachtel mit den Kugeln 1, 2, 3, 4 werden zwei mit einem Griff gezogen. Wie sieht Ω aus?
$\Omega = \{\{a_1, a_2\} | a_1 \neq a_2, 1 \leq a_1, a_2 \leq 4\}$
$\Omega = \{\{a_1, a_2\} | 1 \leq a_1, a_2 \leq, a_1 < a_2\}$

Lotto: 6 Kugeln aus 49: $\Omega = \{(\underbrace{a_1}_{1.Kugel}, \underbrace{a_2}_{2.Kugel}, a_3, a_4, a_5, a_6) | a_i \text{sind verschieden}\}$
(mit Reihenfolge)
$\Omega = \{(a_1, ..., a_6) | a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6\}$ (ohne Reihenfolge)

3.1 2. Ereignisse

$A \subset \Omega$ heißt Ereignis, Ergebnis ω. A ist eingetreten, wenn $\omega \in A$.
$\{\omega\}$ Elementarereignis
Ω sicheres Ereignis
$\emptyset$ unmögliches Ereignis
$A \cap B$ A und B sind eingetreten.
$A \cup B$ A oder B
$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap$
$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup$
$B\ A = \{\omega \in B : \omega \notin A\}$ B minus A.
Gegenseitiges Komplement: $\overline{A} = \Omega A = \{\omega : \omega \notin A\}$

A, B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$. Für $A \cup B$ schreibt man dann $A + B$

3.2 Zweimal Würfeln

A: erster Wurf 5 $\Rightarrow A = \{(5,1), (5,2), ...(5,6)\}$
B: zweiter Wurf höher als erster $\Rightarrow B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), ($

3.3 Rechenregeln in der Mengenlehre

Kommutativ: $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$
Assoziativ: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
De Morgan: $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ und $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, Beispiel: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Distributiv: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{L} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{R}$

Beweis $L = R$

1. $x \in L \Rightarrow x \in R \Rightarrow L \subset R$
2. $x \in R \Rightarrow x \in L \Rightarrow R \subset L$

$\Rightarrow R = L\square$

3.4 Zufallsvariable

Abbildung: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallswariable, z.B. zweimal würfeln. X ist die Augensumme: $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$
X_1: erste Augenzahl
X_2: zweite Augenzahl
$X = X_1 + X_2$
$(X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

Abkürzungen $\{X = K\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = K\}$
Augensumme mindestens 10: $\{X \geq 10\}$
Augensumme zwischen 3 und 8: $\{3 \leq X \leq 8\}$
Wertebereich von X ist $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$
Arithmetik mit Zufallsvariable (ZV):
$(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$(a \cdot X)(\omega) = a \cdot X(\omega)$
$\{X \leq Y\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq Y(\omega)\}$

3.5 Indikatorfunktionen

$I_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$, sonst 0 $(A \in \Omega)$. Die Indikatorfunktion I zeigt an, ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht.
$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$

$I_A = I\{A\}$ sind mögliche Schreibweisen im Buch. $I_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n} = I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot ... \cdot I_{A_n}$
$I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
$I_A = I_A \cdot I_A$

3.6 Zählvariable

$A_1, ..., A_n$ Ereignisse: $X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$. X zählt, wie viele Ereignisse $A_1, ..., A_n$ eingetreten sind.
$X(\omega)$ = Anzahl der A_i, in denen ω liegt. $\{X = n\} = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ und $\{X = 0\} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_n$

Beispiel: Ein Treffer (1), Niete (0) Experiment wird n mal wiederholt.
$\Omega = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i = 1/0\}$
$A_j = \{\omega : \omega_j = 1\}$ in j-ten Versuch Treffer
$X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$ zählt Anzahl der Treffer
$X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n$

Übung 3.5 (Buch) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | 1 \leq \omega_i \leq 6\}$
$X : \Omega \to \mathbb{R}$
$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to$ 100 wenn $\omega_1 = 6$
$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to$ 50, falls $\omega_2 = 6$ und $\omega_1 \neq 6$
$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to$ 10, falls $\omega_2 = 6$ und $\omega_a, \omega_2 \neq 6$
$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to$ -30, falls $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq 6$

4 Relative Häufigkeit

4.1 Relative Häufigkeit am Beispiel des Reißnagelversuchs

Ein Reißnagel wurde 300 mal geworfen. Er kann grundsätzlich in den zwei Positionen 1 und 0 landen (Abb. 1). Die absoluten Häufigkeiten sind: 1 kommt 124 mal, 0 kommt 176 mal vor. Die relative Häufigkeit von 1 beträgt $\frac{124}{300} = 0.413 = 41,3\%$, die von 0 beträgt $\frac{176}{300} = 0.586 = 58,6\%$.

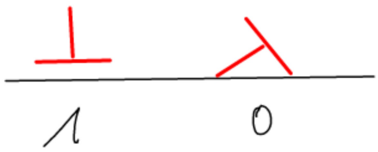

Abbildung 1: Der Reißnagel kann auf seinem Kopf landen (1) oder eben nicht (0)

4.2 Relative Häufigkeit allgemein

Einzelexperiment mit Ergebnismenge Ω wird n mal wiederholt. Dadurch entsteht ein Datenvektor $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_)$, $\omega_i \in \Omega$. Jedem Ereignis A von Ω können wir eine relative Häufigkeit zuordnen: $r(A) = |\{j : 1 \leq j \leq n \text{und} \omega_j \in A\}| \cdot \frac{1}{n}$. Für diese relative Häufigkeit gilt:

„Dieser Datenvektor steht fest und kann nachträglich nicht mehr geändert werden.“

„Die relative Häufigkeit von A ≈ Wahrscheinlichkeit von A.“

1. $0 \leq r(A) \leq 1$
2. $r(\Omega) = 1$
3. $r(A + B) = r(A) + r(B)$

4.3 Beispiel

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n = 10,$ Datenvektor: $(5, 1, 1, 6, 2, 3, 4, 2, 1, 5),$ Ereignisse: $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, A \cap B = \emptyset$
$r(A) = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$ und $r(B) = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$
$r(A \cup B) = \frac{7}{10}$

4.4 Stabilisierung

Angenommen Datenvektor sehr lang ($n = 10000$), Ereignis $A \subset \Omega$. Man berechnet die $r_k(A)$ indem man die ersten k Daten berücksichtigt, also: $r_{10}(A), r_{11}(A), r_{12}(A), ..., r_{10000}(A)$
$r_k(A) = |\{j : 1 \leq j \leq k \text{ und } \omega_j \in A\}| \cdot \frac{1}{k}$

4.5 Empirisches Gesetz

Von der Stabilisierung der relativen Häufigkeit von A. Für $k \to \infty$ läuft $r_k(A)$ gegen einen festen Wert $P(A)$.

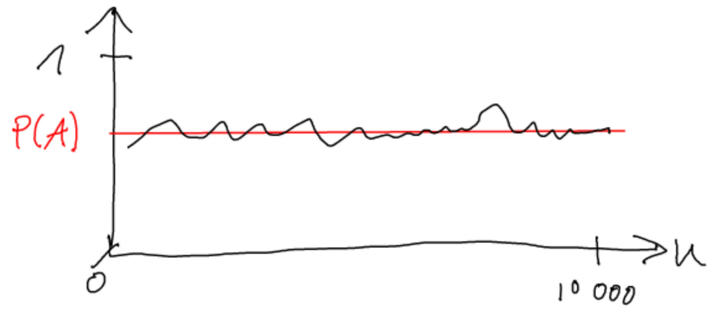

Abbildung 2: Das Diagramm zeigt beispielhaft, was unter Stabilisierung gemeint ist.

4.6 Übung 4.2 (Buch)

Lotto 6 aus 49. Die ersten 2058 Ziehungen enthielten 198 mal die 13 und 248 mal die 43 ($\Omega = \{(a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6) : 1 \leq a_i \leq 49\}$). Der Datenvektor hat die Länge $n = 2058$.
A_{13} : "13 wird gezogen", $r(A_{13}) = \frac{198}{2058} = 0.096$
A_{43} : "43 wird gezogen", $r(A_{43}) = \frac{248}{2058} = 0.120$
Wie groß ist die relative Häufigkeit einer Zahl, wenn jede Zahl gleich oft gezogen wird?
Gezogene Kugeln: $6 \cdot 2058$
Jede gleich oft: $\frac{6 \cdot 2058}{49} = 252 \Rightarrow r_(A_k) = \frac{252}{2058} = \frac{6}{49}$

5 Deskriptive Statistik

5.1 Stabdiagramm

Bundestagswahl mit $n = 43371190$ gültigen Zweitstimmen. Dabei entsteht das folgende Stabdiagramm (Abb. 3).

„Beispiel aus dem Buch (Seite 24)“

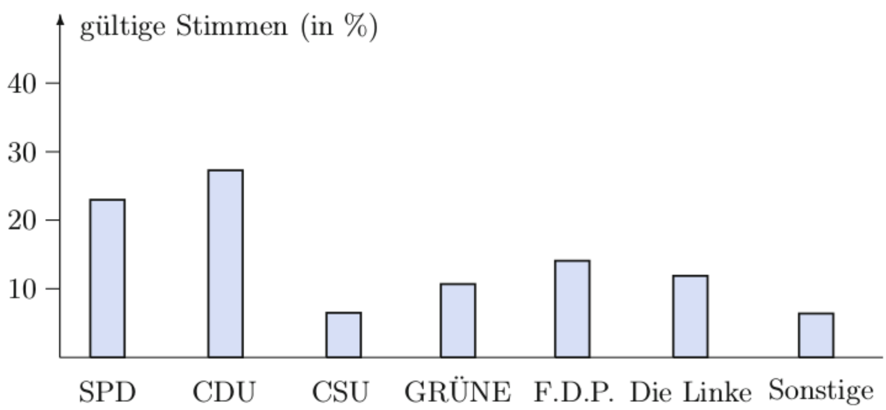

Abbildung 3: Aufteilung der Parteien in % (Quelle: Buch)

5.2 Histogramm

Bei 1000 Glühbirnen wurde die Lebensdauer getestet.

Stunden	ausgefallene Glühbirnen	relative Häufigkeit	Höhe
0-50	20	0.02	0.0004
50-200	80	0.08	0.00053
200-400	120	0.12	0.0006
400-600	180	0.18	0.0009
600-800	500	0.5	0.0025
800-1000	100	0.1	0.0005

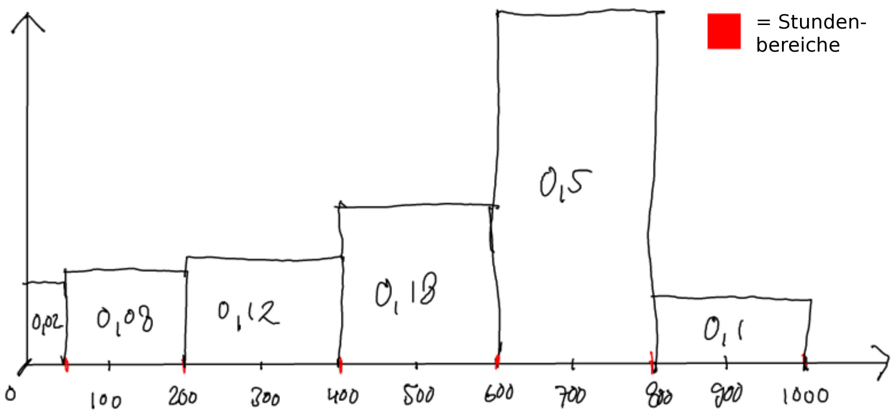

Abbildung 4: Rechteckfläche = relative Häufigkeit, Höhe × Breite = relative Häufigkeit, Höhe = $\frac{\text{relative Häufigkeit}}{\text{Breite}}$

5.3 Lagemaße

$x_1, ..., x_n$ Zahlen. Suche Zahl l für die "grobe Lage".
Forderung: $l(x_1 + a, x_2 + a, ..., x_n + a) = l(x_1, ..., x_n) + a$
arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ Forderung erfüllt!

Aufgabe Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{i=1}^{n}(x_i - t)^2$ minimal? Für $t = \overline{x}$! Wegen:
$f(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - t)^2$
$f'(t) = -\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - t) = 0$
$\sum_{i=1}^{n}(x_i - t) = 0$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot t$
$t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$

5.4 Gewichtetes Mittel

Werte	a_1	a_2	...	a_n
Gewichte	g_1	g_2	...	g_n

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}$

Beispiel Schulnoten Noten: 2,4,6,3,4,2,5
Gewicht: 1,5,1,3,3,5,1
Endnote $= \frac{1\cdot2+5\cdot4+1\cdot6+3\cdot3+3\cdot4+5\cdot2+1\cdot5}{1+5+1+3+3+5+1} = 3.37$

5.5 Der empirische Median

Die Stichprobe ist der Größe nach sortiert, also $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Der Median $x_{\frac{1}{2}} = x_{0.5} = x_{50\%} = x_{\frac{n+1}{2}}$, falls ungerade und $x_{0.5} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$

5.5.1 Beispiel

1. $3, 4, 5, 6, 7 \Rightarrow x_{0.5} = 5$
2. $3, 4, 5, 6, 7, 8 \Rightarrow x_{0.5} = 5.5$
3. $3, 3, 4, 5, 6, 20 \Rightarrow x_{0.5} = 4.5$; vgl. dazu das arithmetische Mittel: $\overline{x} = \frac{3+3+4+5+6+20}{6} = 6.8$

Der Median unempfindlich gegen Ausreißer, das arithmetische Mittel nicht.
Minimiere $\sum_{j=1}^{n} |x_j - t|$. Bei welchem t minimal? Beim Median: 3 3 4 | 5 6 7

5.5.2 Verallgemeinerung

Für den Median $x_{0.5}$ gilt:

„Links und rechts vom Median sind gleich viele Werte."

- Mindestens 50% der Werte sind $\leq x_{0.5}$
- Mindestens 50% der Werte sind $\geq x_{0.5}$

Der p Quantil x_p

- Mindestens $p \cdot 100\%$ der Werte sind $\leq x_p$
- Mindestens $100\% - p \cdot 100\%$ der Werte sind $\geq x_p$

5.6 Streuungsmaße

σ Streuungsmaß
Formel: $\sigma(x_1, ..., x_n) = \sigma(a + x_y, a + x_2, ..., a + x_n)$

5.6.1 Die empirische Varianz

Daten: $x_1, ..., x_n$
arithmetische Mittel: $\overline{x}$
Varianz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_j - \overline{x})^2$
empirische Standardabweichung: $\sqrt{s^2}$

5.6.2 Beispiel

$5, 5, 7, 8, 9$
$\overline{x} = \frac{1}{5}(5 + 5 + 7 + 8 + 9) = 6.8$
$s^2 = \frac{1}{4}[(5 - 6.8)^2 + (5 - 6.8)^2 + (6 - 6.8)^2 + (7 - 6.8)^2 + (8 - 6.8)^2] = 3.2$
$s = \sqrt{3.2} = 1.78$
Einheiten:
Meßwerte, Mittel, Standardabweichung: m
Varianz: m^2

5.6.3 Beispiele für andere Streuungsmaße

1. mittlere absolute Abweichung: $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x_j-\overline{x}|$
2. Medianabweichung: $x_1, ..., x_n$, Median: $x_{0.5}$
   $|x_1-x_{0.5}|, |x_2-x_{0.5}|, ..., |x_n-x_{0.5}|$ und davon wählt man nun den Median.

5.6.4 Beispiel Medianabweichung

$5, 5, 7, 8, 9 \Rightarrow x_{0.5} = 7$
Abstände: $|5-7|, |5-7|, |7-7|, |8-7|, |9-7|$, also $2, 2, 0, 1, 2 \Rightarrow 0, 1, 2, 2, 2 \Rightarrow$
Median ist $2 \rightarrow$ Medianabweichung: 2

6 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

endliche Ergebnismenge: Ω
Potenzmenge von $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$: P
$A \rightarrow P(A)$
mit

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$

P heißt Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung. P(A) heißt Wahrscheinlichkeit von A. Also: Jede Teilmenge von Ω bekommt eine Wahrscheinlichkeit.

6.1 Einfache Folgerungen

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\sum_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $Aus A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

Beweis.
1. $P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
2. Induktionsbeweis
3. $1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$
4. $1 = P(A) + P(\overline{A})$
5. $B = A + B \setminus A, P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6. $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$
   $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$
   $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$
   $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. richtig für $n = 2$, Induktionsbeweis

$\square$

6.2 Wie gibt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an?

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
Kennt man $P(\{\omega_1\}), ..., P(\{\omega_n\})$ - Abkürzung: $P(\{\omega_1\}) = p(\omega_1)$ -, so kennt man ganz P.
$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\})$.
Weiter muss gelten: $p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_n) = 1$
Man zeigt: $0 \leq p(\omega_1) \leq 1$ beliebig mit $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)$ so hat man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

6.3 Beispiel

$\Omega : 2, 3, 5, 6, 7$
$p : 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3$
$A = \{3, 5\} \Rightarrow P(A) = 0.1 + 0.2 = 0.3$

6.4 Verteilung einer Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ Auf Ω haben wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P.
$W = X(\Omega)$ Wertemenge von X.
$W = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
Auf W haben wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^x:
$B \subset W$
$P^x(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega \in B)\}) = P(X \in B)$ (Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert von B annimmt.)
P^x heißt die Verteilung von X.
Für $B \subset \mathbb{R}$ kann man schreiben: $P^x(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$

6.4.1 Beipiel

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Ω	1	2	3	4	5	6
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
X	0	5	5	10	1	0

mit $\omega = \{0, 1, 5, 10\}$

$P^x(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{1, 6\}) = \frac{2}{6}$
$P^x(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$
$P^x(\{5\}) = P(X = 5) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{6}$
$P^x(\{10\}) = P(X = 10) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$
Neues Zufallsexperiment: $\Omega = \{0, 1, 5, 10\}$
Wahrscheinlichkeit P auf Ω: $p(0) = \frac{2}{6}, p(1) = \frac{1}{6}, p(5) = \frac{2}{6}, p(10) = \frac{1}{6}$

6.4.2 Übung 6.10

Konstruiere (Ω, P) mit (A, B) und $P(A \cap B) \geq 9 \cdot P(A) \cdot P(B)$ mit $\Omega = \{1, 2, ..., n\}, p(i) = \frac{1}{n}$.
$P(A \cap B) = \frac{t}{n}$, $P(A) = \frac{s+t}{n}$, $P(B) = \frac{t+u}{n}$
$\frac{t}{n} \geq 9 \cdot \frac{s+t}{n} \cdot \frac{t+u}{n} | n^2$
$t \cdot n \geq 9(s + t)(t + u)$
$n \geq \frac{9(s+t)(t+u)}{t}$
z.B. $s = 2, t = 2, u = 2 \Rightarrow n \geq \frac{9 \cdot 4 \cdot 4}{2} \Rightarrow n \geq 72$
Also: $\Omega = \{1, 2, ..., 72\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$

7 Laplace-Modelle

Laplace-Experiment: endlich viele Ausgänge/Ergebnisse mit derselben Wahrscheinlichkeit. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
$P(\{\omega_i\}) = p(\omega_i) = \frac{1}{n}$
$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl alle Fälle}}$

„Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich.“

7.1 Beispiel Zweimal Würfeln

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 5 ist?
$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}, |\Omega| = 36$
$X(i, j) = i + j$
$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

7.2 Beispiel Zwei farbige Würfel

Zwei weiße Würfel werden gleichzeitig geworfen. $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6 \text{ und } i \leq j\}$. Aber nicht jeder Ausgang ist gleich wahrscheinlich! $\Rightarrow$ kein Laplace-Experiment. Nun denken wir uns die Würfel grün (i) und rot (j) $\Rightarrow \Omega' = \{(i,j) 1 \leq i,j \leq 6\}$.
$P(5 \text{ und } 6) = P\{(5,6),(6,5)\} = \frac{2}{36}$
$P(6 \text{ und } 6) = P(6,6) = \frac{1}{36}$

7.3 Beispiel Drei Würfel

Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Gesucht wird $P(\text{Augensumme } 5)$.
$P(\{(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1)\}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

7.4 Beispiel Faires Spiel

A, B spielen ein faires Spiel. Einsatz 10 Taler. Wer zuerst 6 mal gewonnen hat, bekommt den Einsatz. A hat 5 Runden gewonnen, B 3 Runden. Es kommt zu einer Spielunterbrechung. Wie kann man nun den Einsatz von 20 Talern fair verteilen?
Nun stellen wir uns vor, dass das Spiel dreimal fortgesetzt wird:

A gewinnt: AAA, BAA, ABA, AAB, ABB, BAB, BBA
B gewinnt: BBB

Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da jeder Ausgang gleich wahrscheinlich ist nämlich: $\frac{1}{8} \Rightarrow$
P(B gewinnt) $= \frac{1}{8}$, P(A gewinnt) $= \frac{7}{8}$. Wir teilen den Einsatz entsprechend der Wahrscheinlichkeiten auf. Wenn man das Spiel n mal fertig spielt, wird in $\approx \frac{1}{8}$ der Fälle B den Einsatz bekommen, in $\approx \frac{7}{8}$ der Fälle A.

Aufteilung: B bekommt $\frac{20}{8} = 2,50$ Taler und A 17,50 Taler.

7.5 Hausaufgabe Ziegenproblem

In Amerika gab es eine Show, da konnte man etwas gewinnen. Es gab drei Tore mit Gewinnen dahinter, eines mit einem Ferrari und zwei Ziegen. Der Teilnehmer wählt ein Tor. Der Quizmaster hilft und öffnet ein Tor mit einer Ziege. Der Quizmaster fragt, ob der Teilnehmer sein Tor beibehalten oder wechseln will. Wie soll sich der Teilnehmer entscheiden?

7.6 Lösung Ziegenproblem

Der Kandidat wählt Tor 1. Der Showmaster öffnet Tor 3 und man sieht eine Ziege. Was ist besser, bei 1 bleiben oder auf 2 wechseln?
Der Standhafte bleibt bei 1. $P(\text{gewinnt}) = \frac{1}{3}$
Der Wechsler wechselt zu 2. $P(\text{gewinnt}) = P(\text{hinter 1 ist eine Ziege}) = \frac{2}{3}$

7.7 Übung 7.5

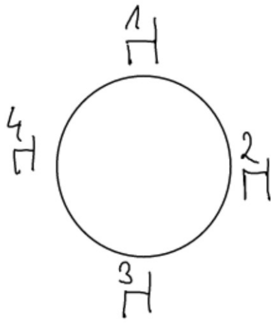

Abbildung 5: Beispiel vier Stühle

Zwei Ehepaare nehmen zufällig an einem runden Tisch mit vier Stühlen Platz (Abb. 5). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ehepaare jeweils nebeneinander sitzen.
Wir setzen A auf 1. Für das zweite A hat man gleich 3 Möglichkeiten. ⇒ alle Fälle: 3, günstige Fälle: 2 ⇒ $P = \frac{2}{3}$.

8 Kombinatorik

k-Tupel: $(a_1, a_2, ..., a_k)$
j_1 Möglichkeiten für a_1
j_2 Möglichkeiten für a_2
...
j_k Möglichkeiten für a_k
⇒ insgesamt: $j_1 \cdot j_2 \cdot ... \cdot j_k$ Möglichkeiten.

Auf wieviele Arten kann man die Zahlen 1 bis n anordnen?
z.B. $n = 5 : (2, 1, 5, 4, 3) \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

allgemein $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$
Menge M $= \{1, 2, ..., n\}$. Wieviele Teilmengen mit genau k Elementen hat sie?
Abkürzung: $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient.

8.1 Anzahl der k-Tupel ohne Wiederholungen

$(.,.,.,.) \Rightarrow n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$. Zu einer ungeordneten Teilmenge gehören k! geordnete Tupel.
$\binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$
$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

8.2 Beispiele

1. $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$
2. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$
3. 10 Leute trinken Sekt. Jeder stößt mit jedem an. Wie oft klingen die Gläser? Wie viele zweielementige Teilmengen hat M? Das sind: $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$

Satz 8.1. *Es gilt:* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, k = 1, 2, ..., n, M = \{1, 2, ..., n+1\}$. *Wie viele Teilmengen mit k Elementen?*
Teilmengen, die (n+1) enthalten: $\binom{n}{k-1}$
Teilmengen, die (n+1) nicht enthalten: $\binom{n}{k}$
$\Rightarrow \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

8.3 Pascalsches Dreieck

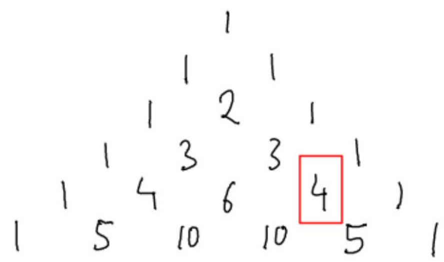

Abbildung 6: Pascalsches Dreieck: Zeilen: 0,1,2,3,...; Spalten: 0,1,2,3,...; Im Beispiel $\binom{4}{3} = 4$

Das kann man auch mit dem Binomialkoeffizienten ausrechnen: $\binom{\text{Zeile}}{\text{Spalte}}$

8.4 Binomische Formel

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

Beweis. $(x+y)(x+y)(x+y) \cdot ... \cdot (x+y)$ mit n Faktoren. Ausmultiplizieren: Aus jeder Klammer ein x oder y auswählen, z.B.: $x \cdot x \cdot y \cdot x \cdot ... \cdot y$ n Faktoren. alle Möglichkeiten: 2^n Summanden. Man fasst alle die Summanden mit gleich vielen x-en zusammen: $x^k \cdot y^{n-k}$: $\binom{n}{k}$ solche Produkte $k = 0, 1, ..., n$.
$\binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$ □

8.5 Beispiel

$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k y^{3-k} = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 = y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3$

8.6 Permutationen

Menge M mit n Elementen. k-Permutationen aus M (mit Wiederholungen): $Per_k^n(\text{m.W.}) = \{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_j \in M\}$

k-Permutationen aus M (ohne Wiederholungen): $Per_k^n(\text{o.W.}) = \{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_i \neq a_j\}$

Bei Kombinationen kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Sie werden deshalb der Größe nach sortiert angegeben. K-Kombinationen ohne Wiederholungen: $Kom_k^n(\text{o.W.}) = \{(a_1, ..., a_k) \,|a_1 < a_2 < ... < a_k\}$

K-Kombinationen mit Wiederholungen: $Kom_k^n(\text{m.W.}) = \{(a_1, ..., a_k) \,|a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k\}$

k-Perm: es kommt auf die Reihenfolge an
k-Kom: Reihenfolge egal.

Satz 8.2. *1.* $|Per_k^n\,(m.W.)| = n^k$

2. $|Per_k^n\,(o.W.)| = n(n-1)\cdot ...\cdot (n-k+1) = n^{\underline{k}}$

3. $|Kom_k^n\,(m.W.)| = \binom{n+k-1}{k}$ *(müssen wir noch beweisen)*

4. $|Kom_k^n\,(o.W.)| = \binom{n}{k}$

Beweis. Wir zeigen: Es gibt eine bijektive Abbildung φ von Kom_k^n (m.W.) $\rightarrow$ $Kom\binom{n+k-1}{k}$ (o.W.). Damit gleich viele. Für *rechts* haben wir die Formel. Sei $(a_1, a_2, ..., a_k)$ aus $Kom_k^n(mW)$.
Also $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_k \leq n$
$1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < ... < a_k + k - 1 \leq n + k - 1$
$\varphi Kom_k^n(mW) \rightarrow_k^{n+k-1} (oW)$
$(a_1, a_2, ..., a_k) \rightarrow (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, ..., a_k + k - 1)$
φ **ist injektiv** (verschiedene Tupel haben verschiedene Bilder)
φ **ist surjektiv** geg.: Tupel von rechter Seite: $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_k \leq n + k - 1$
$1 \leq a_1 \leq a_2 - 1 \leq a_3 - 2 \leq ... \leq a_k - (k-1) \leq n$ (Tupel von links)
$\Rightarrow$ bijektiv $\Rightarrow$ Die gesuchte Anzahl ist nach Ziffer 4 des letzten Satzes: $\binom{n+k-1}{k}$ □

8.7 Das Stimmzettelproblem

Wir haben eine Wahl zwischen zwei Kandidaten A und B. Es gibt n Stimmen, a für A und b für B. $a + b = n$ und $a > b$. Also hat A gewonnen. Die Stimmzettel werden nacheinander ausgezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (W), dass der Kandidat A während der ganzen Auszählung in Führung liegt?

Stimmzettel: 1 für A und -1 für B. $\Omega = \{(c_1, c_2, ..., c_n) : c_i = 1/-1$, a mal 1, b mal -1$\}$ sind die möglichen Auszählungen und kann man auch so schreiben: $\sum_{j=1}^n I\{c_j = 1\} = a, \sum_{j=1}^n I\{c_j = -1\} = b$ (I ist die Indikatorfunktion). Gleichverteilung auf Ω. Jede Auszählung ist gleich wahrscheinlich. $\Omega = \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$
$D = \{(c_1, ..., c_n) \in \Omega : c_1 + c_2 + ... + c_k \geq 1$ für $k = 1, 2, ..., n\}$. Wir müssen das D zählen.

„Das ist aber gar nicht so leicht.“

$E = \{(c_1, ..., c_n) \in \Omega : c_1 = -1\}$ erster Stimmzettel für B.
$F = \{(c_1, ..., c_n) \in \Omega : c_1 = 1$ und $c_1 + c_2 + ... + c_k \leq 0$ für ein k$\}$ erster Stimmzettel für A, aber A nicht immer in Führung.

$$\Omega = \underbrace{D}_{\text{A immer in Führung}} + E + \underbrace{F}_{\text{A nicht immer vorne}}$$

Es ist $|E| = \binom{n-1}{a}$
Es gilt: $|E| = |F|$ (vgl. Abb. 7)
$\Rightarrow |\Omega| = |D| + 2\,|E|$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - 2|E|}{|\Omega|} = 1 - 2\frac{|E|}{|\Omega|} = 1 - 2\frac{\binom{n-1}{a}}{\binom{n}{a}} = 1 - 2\left(\frac{(n-1)!a!(n-a)!}{a!(n-1-a)!n!}\right) = 1 - 2\frac{n-a}{n} = 1 - 2\frac{b}{a+b} = \frac{a+b-2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

$P(D) = \frac{a-b}{a+b}$, P(D) ist die Steigung der Geraden vom Startpunkt (0,0) zum Endpunkt (n,a-b) vgl. Abb. 7, z.B.: $n = 100, a = 70, b = 30, P(D) = \frac{70-30}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$

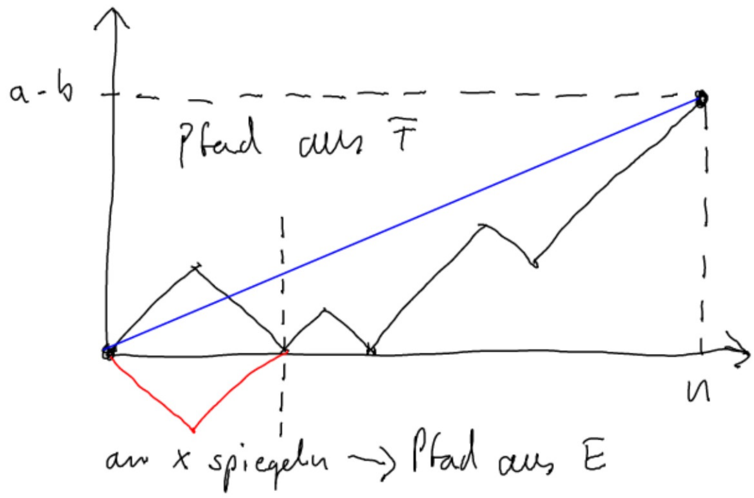

Abbildung 7: Veranschaulichung der bijektiven Abbildung zwischen E unf F

9 Urnenmodell, Teilchen-Fächer-Modell

9.1 Urnenmodell

In einer Urne sind n Kugeln (bezeichnet mit 1 bis n). Wir ziehen k Kugeln. Wir zählen die Möglichkeiten.

1. **Mit Reihenfolge, mit Rücklegen:**
   $\{(a_1, ..., a_k) : 1 \leq a_i \leq n\}, Per_k^n(mW) = n^k$
2. **Mit Reihenfolge, ohne Rücklegen:**
   $\{(a_1, ..., a_k) : a_i \neq a_j\}, Per_k^n(oW) = n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = n^{\underline{k}}$
3. **Ohne Reihenfolge, mit Rücklegen:**
   $\{a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k\}, Kom_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k}$
4. **Ohne Reihenfolge, ohne Rücklegen:**
   $\{a_1 < a_2 < ... < a_k\}, Kom_k^n(oW) = \binom{n}{k}$

9.2 Teilchen-Fächer-Modell

Wir haben n Fächer bezeichnet mit 1 bis n. Wir haben k Kugeln, die wir auf die Fächer verteilen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auf die Fächer zu verteilen?

1. unterscheidbare Kugeln (Farben, Nummern z.B. 1 bis k). Mehrfachbesetzungen sind zugelassen.
   $$\left\{ \left(\underbrace{a_1}_{\text{Kugel 1 in Fach a2}}, a_2, ..., a_k \right) : 1 \leq a_i \leq n \right\}, Per_k^n(mW) = n^k$$

2. unterscheidbare Kugeln, Mehrfachbesetzung verboten.
$$\left\{\left(\underbrace{a_1}_{\text{Kugel 1 in Fach a1}}, ..., a_k\right) : a_i \neq a_j\right\}, Per_k^n(oW) = n(n-1)...(n-k+1)$$

3. Nicht unterscheidbare Kugeln (alle weiß). Mehrfachbesetzung erlaubt.
$$\left\{\underbrace{a_1}_{\text{Kugel im Fach a1}} \leq \underbrace{a_2}_{\text{Kugel im Fach a2}} \leq ... \leq a_k : 1 \leq a_i \leq n\right\}, Kom_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k}$$

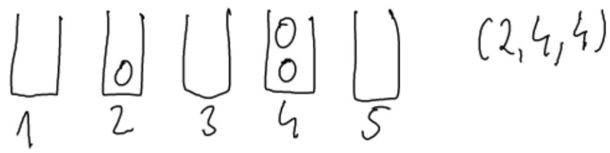

Abbildung 8: Fünf Fächer mit nicht unterscheidbaren Kugeln. Die Mehrfachbesetzung ist in diesem Fall erlaubt.

4. Nicht unterscheidbare Kugeln, Mehrfachbesetzungen verboten.
$$\left\{\underbrace{a_1}_{\text{Kugel im Fach a1}} < ... < a_k\right\} Kom_k^n(oW) = \binom{n}{k}$$

Abbildung 9: Fünf Fächer mit nicht unterscheidbaren Kugeln. Die Mehrfachbesetzung ist in diesem Fall erlaubt.

9.3 Die Semmelaufgabe

In einem Teig sind 7 Rosinen. Aus dem Teig werden 10 Semmeln gemacht. Eine Semmel wird ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau zwei Rosinen enthält? Die Fächer entsprechen den Semmeln, die Teilchen den Rosinen. Das Fach 1 wird ausgewählt.

„Das machen wir mit dem Teilchen-Fächer-Modell.“

9.3.1 Modell: Teilchen unterscheidbar

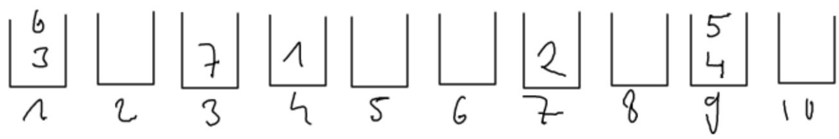

Abbildung 10: Modell: Teilchen unterscheidbar

Alle Fälle: 10^7
günstige Fälle: $\binom{7}{2}9^5$
$\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 9^5}{1 \cdot 2 \cdot 10^7} = 21 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \frac{1}{100} = 0.1240$

9.3.2 Modell: Teilchen nicht unterscheidbar

„Nicht mehr unterscheidbar, also lauter weiße Kugeln.“

Formel: $\binom{n+k-1}{k}$
alle Fälle: $\binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7}$
günstige Fälle: $\binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ $\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{9 \cdot 6 \cdot 7}{16 \cdot 15 \cdot 14}$
$= 0.1125$

9.3.3 Auswertung Ergebnisse

Wir bekommen verschiedene Ergebnisse. Welches ist nun richtig? Das 1. Modell, also die unterscheidbaren Teilchen ist richtig, weil die Ausgänge nicht gleich wahrscheinlich sind.

9.4 Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln

Die Abbildung 11 zeigt, wann die Ausgänge gleich wahrscheinlich sind und wann nicht.

9.5 Übung 9.5

K Personen werden anonym nach ihrem Geburtsmonat gefragt. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es?
Wir brauchen 12 Fächer. K gleiche Kugeln werden verteilt. Mehrfachbelegung ist erlaubt. Wir nutzen die Formel: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{12+k-1}{k}$, z.B. $k = 30$ Personen: $\binom{41}{30} = \binom{41}{41-30} = \binom{41}{11}$

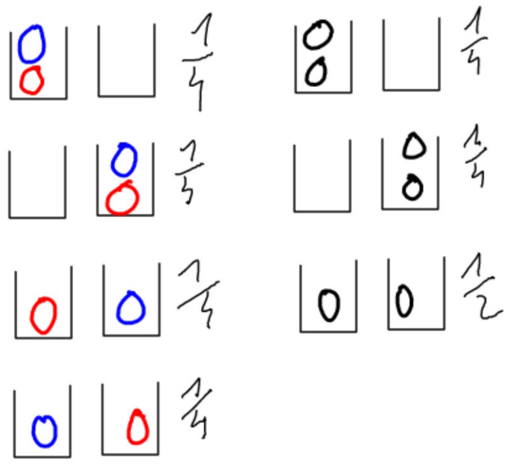

Abbildung 11: Beispiel: 2 Fächer, 2 Kugeln und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten je nachdem, ob die Kugeln unterscheidbar sind oder nicht.

10 Erste Kollision

Lotto: 6 aus 49. Bei der 3016 Ziehung wurden zum ersten Mal 6 Zahlen gezogen, die schon einmal gezogen wurden. Es gibt $n = \binom{49}{6} = 13983816$ mögliche Ziehungen und Fächer. Wir nummerieren die Teilchen: Teilchen 106 = 106. Ziehung. Die Teilchen werden der Reihenfolge nach (1,2,3,...) auf die Fächer verteilt. Beim Teilchen 3016 trat zum ersten mal eine Kollision ein.
Also: Fächer 1 bis n. Unterscheidbare Teilchen (1,2,3,...) werden nacheinander auf die Fächer verteilt.
Zufallsgröße X: Zeitpunkt der ersten Kollision, $2 \leq X \leq n+1$
$P(X \geq k+1) = P(\text{In den ersten k Belegungen keine Kollision}) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}}$
$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \Rightarrow P(X \leq k) = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} = 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot ... \cdot \frac{(n-1+k)}{n} = 1 - \left[\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot ... \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$

Unsere Formel: $P(X \leq k) = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$

In unserem Beispiel $n = 13983816, P(X \leq 3016) = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \left(1 - \frac{j}{13983816}\right)$ $= 0.2775$

10.1 Beispiel: Schulklasse

Wir haben eine Klasse mit k Kindern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 2 Kinder am gleichen Tag (ohne Jahr) Geburtstag haben. Es gibt also $n = 365$ Fächer. Es werden Kugeln auf die Fächer verteilt.
$P(X \leq k) = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right)$, z.B.: $P(X \leq 23) = 1 - \prod_{j=1}^{22} \left(1 - \frac{j}{365}\right) = 0.507$

11 Die Siebformel

11.1 Beispiel

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P([A \cup B] \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P([A \cup B] \cap C)$ mit $P([A \cup B] \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$
$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

11.2 Siebformel allgemein

Ereignisse: $A_1, A_2, ..., A_n$
$S_r = \sum P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r}), 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n$ $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} s_r$

Beweis. per Induktion
Richtig für $n = 1, 2, 3$, Schluss von n auf n+1:
$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}) = P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) + P(A_{n+1}) - P[\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})] \underbrace{=}_{I.V.} \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_r + P(A_{n+1}) + \sum_{m=1}^n (-1)^m \tilde{S}_r = \left[\text{ mit } \tilde{S_m} = \sum P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_m} \cap A_{i_n+1}) \right]$
$= \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} S_r$ □

11.3 Beispiel Siebformel mit vier Mengen

$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(B \cap C) + P(B \cap D) + P(C \cap D)] + [P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C \cap D) + P(A \cap B \cap D) + P(B \cap C \cap D)] - P(A \cap B \cap C \cap D)$

11.4 Sonderfall

$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r})$ nur abhängig von r. Dann heißen die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ austauschbar. Siebformel: $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r)$

11.5 Aufgabe Permutationen der Zahlen von 1 bis n

Wir haben eine Abbildung (Permutation): $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$ oder nur die Reihenfolge (2,5,3,1,4).
Fixpunkt: hier 3.
Es gibt n! Permutationen.
Ω alle Permutationen, jede gleich wahrscheinlich.
Man zieht eine. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wenigstens einen Fixpunkt hat?
$A_i = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : j \text{ Fixpunkt}, a_j = j\}$
$A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ wenigstens ein Fixpunkt.
$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!}$
$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!n!} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{1}{r!}$
$= P(A)$

$P(\text{kein Fixpunkt}) = P(B) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$
$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!} \approx e^{-1} = \frac{1}{3}$
$P(B) = \frac{|B|}{n!}$
$|B| = n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!} \approx n! \frac{1}{e}$
$P(B) \approx \frac{1}{e} = 0.37, P(A) = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$

„Wenn n groß ist, dann ist die Näherung recht genau."

11.6 Beispiel Glücksspiel

Wir haben zwei identische Kartenstapel. Jeder ist für sich gemischt. Die beiden oberen Karten werden abgehoben. Bei zwei gleichen Karten gewinnt die Bank, sonst der Spieler. Wir nummerieren den einen Stapel von 1 bis 32 durch. Im anderen Stapel kommen genau die gleichen Zahlen vor, allerdings in einer anderen Reihenfolge (Permutation). Zwei gleiche Zahlen hat man, wenn die Permutation einen Fixpunkt hat.

$P(\text{Fixpunkt}) = P(A) \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.63$ oder exakt: $P(A) = 1 - \sum_{r=0}^{32} (-1)^r \frac{1}{r!}$. Mit 63 % Wahrscheinlichkeit gewinnt die Bank.

11.7 Beispiele 5 Briefe und 5 Umschläge

Wir haben 5 Briefe und 5 Umschläge. Die Briefe werden zufällig in die Umschläge gesteckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Brief richtig ankommt?

$P(\text{Fixpunkt}) \approx 63\%$, exakt: $P(A) = 1 - \sum_{r=0}^{5} (-1)^r \frac{1}{r!} = 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$
$= 0.633$

12 Erwartungswert

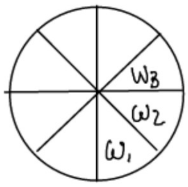

Abbildung 12: Glücksrad mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, ..., \omega_s\}$

Glücksrad mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, ..., \omega_s\}$ (Abb. 12). Gegeben ist $P(\{\omega_1\})$. Bei ω_i erhält man den Gewinn $X(\omega_i)$. Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn? Wir drehen n mal:
h_1 mal ω_1, $h_1 + h_2 + ... + h_s = n$
h_2 mal ω_2
$\vdots$
h_s mal ω_s
Gesamtgewinn: $\sum_{j=1}^{s} X(\omega_j) \cdot h_j$
Durchschnittsgewinn: $\sum_{j=1}^{n} X(\omega_j) \cdot \underbrace{\frac{h_j}{n}}_{\text{relative Häufigkeit von } \omega_j \approx P(\{\omega_j\})}$

Definition 12.1. *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist Zufallsgröße. Erwartungswert von $X = EX$ $= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$*

12.1 Beispiel Würfeln

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X : \omega \to \omega^2$
$EX = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = 15.17$

12.2 Andere Berechnung des Erwartungswertes

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Der Wertebereich von X sei: $\{x_1, ..., x_s\}$.
$EX = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \sum_{X(\omega_j)=x_i} P(\{\omega_j\}) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{X(\omega_j)=x_i} x_i \cdot P(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^{n} X(\omega_j) \cdot P(\{\omega_j\})$

12.3 Beispiel Würfeln mit zwei Würfeln

$X(\omega_1, \omega_2) = max\,\{\omega_1, \omega_2\}$
$EX = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4.47$

12.4 Satz

„Wichtiger Satz!“

Satz 12.1. *$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen, $A \subset \Omega$*

1. $E(X + Y) = EX + EY$
2. $E(a \cdot X) = a \cdot EX$

3. $E(I_A) = P(A)$

4. *Aus* $X \leq Y$ *folgt* $EX \leq EY$ $[X(\omega) \leq Y(\omega), \forall \omega \in \Omega]$

Beweis. des o.g. Satzes.

1. $E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega}(X+Y)(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot p(\omega) + \sum_{\omega} Y(\omega) \cdot p(\omega)$ $= EX + EY$

2. analog 1.

3. $E(I_A) = \sum_{\omega} I_A(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{\omega \in A} 1 \cdot p(\omega) = P(A)$

4. klar.

□

Es folgt: $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = EX_1 + EX_2 + ... + EX_n$ Es seien $A_1, A_2, ..., A_n$ Ereignisse. Zählvariable ist X:
$X(\omega) =$ Anzahl der A_i in denen ω liegt. $X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$

12.5 Beispiel Rekorde

Ω : Permutationen der Zahlen 1 bis n $(a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n)$
$X(\omega) =$ Anzahl der Rokorde von ω, $A_j : \{(a_1, ..., a_n) : a_j$ ist Rekord$\}$, $\Rightarrow X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$

„a_j ist ein Rekord, falls alle vorderen kleiner sind.“

Wir berechnen $P(A_j)$: $\{(a_1, a_2, ..., a_j)\}, 1 \leq a_s \leq n$
alle: $\binom{n}{j} \cdot j!$
günstige: $\binom{n}{j} \cdot (j-1)!$

„Wir brechen das Tupel bei a_j ab.“

Wahrscheinlichkeit von A_j (Abzählformel): $P(A_j) = \frac{\binom{n}{j} \cdot (j-1)!}{\binom{n}{j} \cdot j!} = \frac{1}{j}$
Also: $EX = EI_{A_1} + EI_{A_2} + ... + EI_{A_n} = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

z.B.: $n = 7$ Permutationen der Zahlen 1 bis 7. $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2.6$

12.6 Näherungsformel

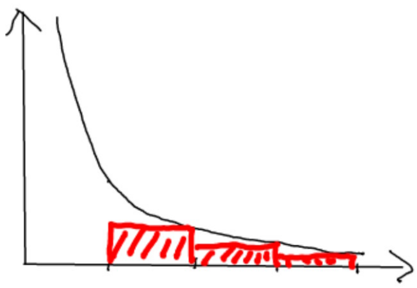

Abbildung 13: $f(x) = \frac{1}{x}$

Wir berechnen die Flächen der Rechtecke (Abb. 13). $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$
$= [\ln x]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n$
Permutationen der Zahlen 1 bis n. X: Anzahl der Rekorde $\Rightarrow EX \leq 1 + \ln n$
z.B.: $n = 100 \Rightarrow EX = 5.6$
$n = 1000000 \Rightarrow EX = 14.8$

12.7 Sortieralgorithmus

Wir haben die verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$. Wir betrachten die Permutationen dieser Zahlen. Eine Permutation $(a_1, ..., a_n)$ soll sortiert sortiert werden (von klein nach groß). Vorgehen:

- a_1 lassen
- Ist a_2 kleiner als a_1, dann vertauschen.
- Dann a_3 durch Vertauschen einsortieren.
- $\vdots$
- bis a_n

12.8 Beispiel

(13,10,15,11)

1. (10,13,15,11)
2. (10,13,11,15)
3. (10,11,13,15), fertig!

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Vertauschungen. $X(13, 10, 15, 11) = 3$

Wir wollen EX berechnen Y_j Einsortieren von a_j (Anzahl der Vertauschungen), $2 \leq j \leq n$
$Y_j(a_1, ..., a_j, ..., a_n) =$ Anzahl der a_i mit $a_i < a_i, i < j$. Das kann man auch so ausrechnen: $Y_j = \sum_{i=1}^{j-1} I\{a_j < a_i\}$
$X(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=2}^{n} Y_j \cdot (a_1, ..., a_n)$
Wir brauchen $P(a_j < a_i)$ ist $\frac{1}{2}$ (plausibel), also:

„Wieviele Werte vor a_j sind größer als a_j? So viele muss ich vertauschen.“

„Die Indikatorfunktion I zählt auch die Anzahl der Vertauschungen.“

„Die Wahrscheinlichkeit der Indikatorfunktion ist immer die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse a_i“

$EY_j = \sum_{i=1}^{j-1} P(a_j < a_i) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2} = (j-1) \cdot \frac{1}{2}$
$\Rightarrow EX = \sum_{j=2}^{n} EY_j = \sum_{j=2}^{n} (j-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2-n}{4}$. Der Erwartungswert EX wächst quadratisch mit n. Für $n = 10 \Rightarrow EX = \frac{100-10}{4} = 22.5$, $n = 30 \Rightarrow EX = 217.5$

12.9 Transformationsformel

Wir betrachten die Zufallsgröße $g \circ X$, $[(g \circ X)(\omega) = g(X(\omega))]$. $x_1, ..., x_k$ ist der Wertebereich von X.
$E(g \circ X) = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \cdot P(X = x_j)$. Speziell für $g = id$ folgt: $EX = \sum_{j=1}^{k} x_j P(X = x_j)$ (schon bekannt).

Beweis. Zerlegung von Ω: $A_j = \{\omega \in \Omega : x(\omega) = x_j\}$
$E(g(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) \cdot p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\omega \in A_j} g(X(\omega)) \cdot p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \cdot \sum_{\omega \in a_j} p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \cdot P(X = x_j)$ $\square$

12.10 Beispiel würfeln mit zwei Würfeln

X: größere Augenzahl, $g(x) = x^2$, gesucht: $E(g(X))$
$E(g \circ X) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = ... = 22.0$

13 Stichprobenentnahme

Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln. Die roten Kugeln sind nummeriert mit $1, 2, ..., r$ und die schwarzen Kugeln mit $r+1, ..., r+s$. Es werden nacheinander (Stichprobe) n Kugeln ohne Rücklegen gezogen. Der mögliche Grundraum ist $\Omega = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \text{ verschieden}\}$. Das Ereignis A_j bedeutet jede j-te Kugel ist rot, also muss $a_j \leq r$.

$P(A_j) = \frac{r}{r+s}$ ist plausibel. Wir machen trotzdem eine formale Rechnung:
alle Fälle: $(r+s)^{\underline{n}}$
günstige Fälle: Kugel 1 an Stelle j: $(r+s-1)^{\underline{n-1}}$
$\vdots$
Kugel r an Stelle j: $(r+s-1)^{\underline{n-1}}$
$P(A_j) = \frac{r \cdot (r+s-1)^{\underline{n-1}}}{(r+s)^{\underline{n}}} = \frac{r \cdot (r+s-1) \cdot (r+s-2) \cdot \ldots \cdot (r+s-n+1)}{(r+s)(r+s-1) \cdot \ldots \cdot (r+s-n+1)} = \frac{r}{r+s}$

„Wir machen das mit der Abzählregel.“

„Beispiel: $7^{\underline{3}} = 6 \cdot 6 \cdot 5$“

Satz 13.1. *r rote, s schwarze Kugeln. n Stück ziehen ohne Rücklegen. $X(\omega)$ = Anzahl der roten Kugeln in der Ziehung. Die Verteilung von X heißt hypergeometrische Verteilung. Es gilt:*

1. $EX = n \cdot \frac{r}{r+s}$
2. $P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$

Beweis. 1. $X = \sum_{j=1}^{n} I_{A_j}$ $EX = \sum_{j=1}^{n} EI_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{r}{r+s}$ $= n \cdot \frac{r}{r+s}$

2. Modell wechseln! Ω = Alle Teilmengen mit genau n Kugeln.
Alle Fälle: $\binom{r+s}{n}$
Günstige Fälle: genau k rote Kugeln $\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$, also: $P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$

□

13.1 Lotterie Keno

Aus den Zahlen 1 bis 70 werden 20 gezogen. Man kann 2 bis 10 Zahlen ankreuzen, z.B. kreuzen wir 9 Zahlen an. Es gibt aber feste Gewinnquoten. Man kann 0 bis 9 Richtige haben:

Richtige	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Quote	50000	1000	20	5	2	0	0	0	0	2

Wir spielen mit 1 EUR Einsatz: Die Zufallsgröße Y ist der ausbezahlte Betrag. Wir suchen EY. Die gezogenen 20 Kugeln malen wir rot an und legen sie in die Trommel zurück. Wir ziehen jetzt $n = 9$ Kugeln ohne Rücklegen. Die Zufallsgröße X entspricht nun der Anzahl der roten Kugeln in der Ziehung. X ist hypergeometrisch (Stichprobenverteilung) verteilt.

$g(x)$ ist die Quote, z.B. $g(7) = 20$. $\Rightarrow Y = g(X)$, $P(X = k) = \frac{\binom{2}{0}k \cdot \binom{5}{0}9-k}{\binom{7}{0}9}$,
$EY = 2 \cdot P(X = 0) + 2 \cdot P(X = 5) + 5 \cdot P(X = 6) + 20 \cdot P(X = 7) + 1000 \cdot P(X = 8) + 50000 \cdot P(X = 9) = 0.510$

angekreuzte Zahlen	10	9	8	7	6	5	4	3	2
EY	0.49	0.51	0.49	0.49	0.49	0.50	0.49	0.50	0.47

14 Mehrstufige Experimente

14.1 Beispiel

Urne mit 1 roten und 3 schwarzen Kugeln.

1. Stufe: Kugel ziehen, Kugel + eine weitere Kugel der gleichen Farbe zurücklegen.

2. Stufe: Wieder eine Kugel ziehen.

14.1.1 Modellierung durch einen Baum

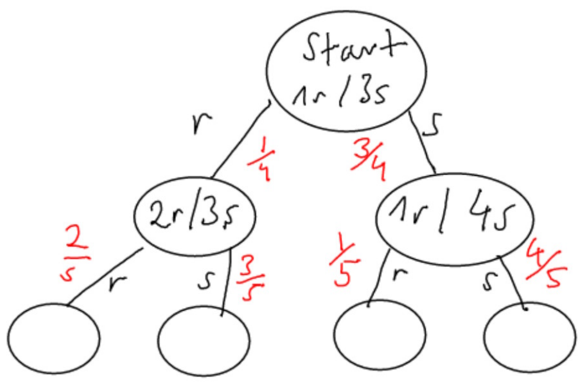

Abbildung 14: Modellierung mittels Baum. Die relativen Wahrscheinlichkeiten stehen an den Ästen

Die Pfade sind die möglichen Ausgänge. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Pfade? Zum Beispiel ungefähre relative Häufigkeit von (r,r) ist $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$. Die relativen Häufigkeiten sind ungefähr die Wahrscheinlichkeiten.

14.1.2 Wahrscheinlichkeit eines Pfades

Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu erhalten, muss man die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren. Das nennt sich die erste Pfadregel. Die Wahrscheinlichkeiten der Pfade in der Abb. 14 sind also: $P(r,r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$, $P(r,s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$, $P(s,r) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$, $P(s,s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade ist 1. P(2. Kugel rot) $= P(r,r) + P(s,r)$ $\frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ (2. Pfadregel).

14.2 Modellierung mehrstufiger Experimente

Ergebnismenge: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$
Startverteilung: $p(a_1)$ mit $a_1 \in \Omega_1$
2. Stufe: Für jedes $a_1 \in \Omega_1 : P(a_2|a_1)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω_2
3. Stufe: $p(a_3|a_1, a_2)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω_3
usw.
n. Stufe: $p(a_n|a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω_n

$p(\omega) = p(a_1, a_2, ..., a_n) = P(a_1) \cdot P(a_2|a_1) \cdot P(a_3|a_1, a_2) \cdot ... \cdot P(a_n|a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ „Wie beim Baum, 1. Pfadregel).“

14.3 Sonderfall: unabhängige Experiemente

z.B. $p(a_2|a_1)$ unabhängig von a_1, $p(a_n|...)$ unabhängig von ... . $p(a_1, a_2, ..., a_n) = p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot ... \cdot p(a_n)$, z.B. dreimal würfeln: $p(2, 3, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

14.4 Das Polyasche Urnenschema

Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln. Eine Kugel ziehen, zurücklegen und c Kugeln der gleichen Farbe hineinlegen. ($c < 0$ heißt herausnehmen). Den Vorgang wiederholen wir (n-1) mal und nennen das n-stufiges Experiment mit den Sonderfällen $c = 0$ ziehen mit Rücklegen und $c = 1$ ziehen ohne Rücklegen. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.

Verteilung von X? EX? Wir definieren: 1$\widehat{=}$ rot, 0$\widehat{=} schwarz$.
Start: $P_1(1) = \frac{r}{r+s}, P_1(0) = \frac{s}{r+s}$
Züge $1, 2, ..., j-1$ schon gemacht. Darunter seien genau l Einsen: $a_1 + a_2 + ... + a_{j-1} = l$
$P_j(1|a_1, a_2, ..., a_{j-1}) = \frac{r+l\cdot c}{r+s+(j-1)c}$, $P_j(0|a_1, a_2, ..., a_{j-1}) = \frac{s+(j-1-l)c}{r+s+(j-1)c}$
Die Wahrscheinlichkeiten sind nur von der Anzahl der Einsen abhängig, nicht von der Reihenfolge.

$$P(\underbrace{a_1, a_2, ..., a_n}_{\text{Zähle die Einsen. Es sind k Stück.}}) = \text{entlang des Pfades multiplizieren} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(r+j\cdot l)\cdot\prod_{j=0}^{n-k-1}(s+j\cdot l)}{\prod_{j=0}^{n-1}(r+s+j\cdot l)}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(r+j\cdot l)\cdot\prod_{j=0}^{n-k-1}(s+j\cdot l)}{\prod_{j=0}^{n-1}(r+s+j\cdot l)}$$

$c = -1$: ohne Rücklegen $\Rightarrow$ hypergeometrische Verteilung
$c = 0$: mit Rücklegen $\Rightarrow$ Binomialverteilung

Wir setzen jetzt einfach mal $c = 0$: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1} r \cdot \prod_{j=0}^{n-k-1} s}{\prod_{j=0}^{n-1}(r+s}$ mit $p = \frac{r}{r+s}$ folgt $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

14.5 Beispiel

Wir haben $r = 1, s = 3, c = 1$ Kugeln. Wir ziehen $n = 4$ mal. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich genau zwei rote Kugeln hab, also: $P(X = 2)$.

„c sind die Kugeln, die wir wieder zurücklegen. “

$\prod_{j=0}^{n-1}(r + s + j \cdot c) = \prod_{j=0}^{3}(5 + j) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$
$\prod_{j=0}^{k-1}(r + j \cdot c) = \prod_{j=0}^{1}(2 + J) = 2 \cdot 3 = 6$
$\prod_{j=0}^{n-k-1}(s + j \cdot c) = \prod_{j=0}^{1}(3 + j) = 3 \cdot 4 = 12$
$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$
$P(X = 2) = 6 \cdot \frac{6 \cdot 12}{1680} = 0.257$

Wir wollen den Erwartungswert von X berechnen, also wie viele rote Kugeln durchschnittlich gezogen werden. Dazu schauen wir uns das Ereignis A_j an (Menge aller Ziehungen), also: $A_j = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_j = 1\}$, $P(A_1) = \frac{r}{r+s}$ (klar). Es gilt aber für jedes j: $P(A_j) = \frac{r}{r+s}$, z.B. $n = 3$: $P(A_1) = p(\mathbf{1}, 0, 0) + p(\mathbf{1}, 0, 1) + p(\mathbf{1}, 1, 0) + p(\mathbf{1}, 1, 1) = p(0, \mathbf{1}, 0) + p(0, \mathbf{1}, 1) + p(1, \mathbf{1}, 0) + p(1, \mathbf{1}, 1)$ $= P(A_2)$
Es gilt sogar: Die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ sind austauschbar, d.h. $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}$, z.B.$n = 4$: $P(A_1 \cap A_2) = p(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0) + p(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 1) + p(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) + p(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1) = p(0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + p(1, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + p(0, 1, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + p(1, 1, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ $= P(A_3 \cap A_4)$

Also: $X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$, $EX = \sum_{j=1}^{n} E(I_{A_j}) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{r}{r+s}$ $= \underline{n\frac{r}{r+s}} = EX$
In unserem Beispiel: $r = 1, s = 3, c = 1, n = 4$, $EX = 4 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{8}{5} = 1.6$ (rote Kugeln im Durchschnitt)

14.6 Beispiel

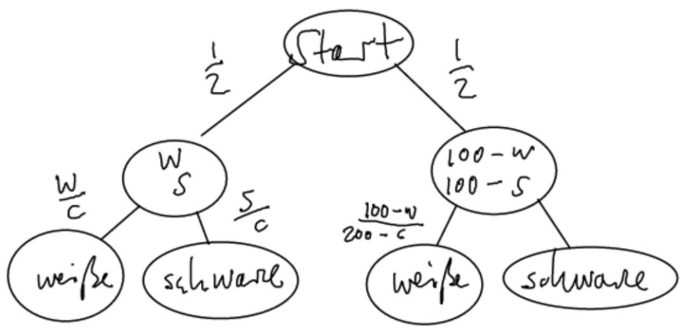

Abbildung 15: Beispiel Schachteln: $w + s = c, c \leq 100$

100 weiße und 100 schwarze Kugeln werden auf 2 Schachteln (keine leer) verteilt. Schachteln wählen, Kugeln ziehen. Man gewinnt, wenn die Kugel weiß ist. Idee: Wir legen eine weiße Kugel in eine Schachtel und die restlichen 99 weißen Kugeln und die 100 schwarzen in die andere Schachtel (Abb. 15).
P(weiße Kugeln) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100-w}{200-c}$, **maximiere:** $\frac{w}{c} + \frac{100-w}{200-c} = f(w)|c$ Konstante.

$f(w) = \frac{1}{c} \cdot w + \frac{100}{200-c} - \frac{1}{200-c} \cdot w = w \underbrace{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{200-c}\right)}_{>0} + \frac{100}{200-c}$ (Geradengleichung)

$\Rightarrow$ w möglichst groß wählen, also $w = c$.

maximiere: $\underbrace{\frac{c}{c}}_{1} + \underbrace{\frac{100-c}{200-c}}_{\text{maximal}}$

minimiere: $\frac{200-c}{100-c}$ $\frac{100-c+100}{100-c} = \frac{100-c}{100-c} + \frac{100}{100-c} = 1 + \frac{100}{100-c}$ minimal bei $c = 1$.

Optimal: $c = 1, w = 1$ in eine Schachtel eine weiße Kugel. P(weiße Kugel) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{100-1}{200-1} = \frac{1}{2} + \frac{99}{2 \cdot 199} \approx 0.75$

15 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P. Experiment wird durchgeführt. Man bekommt die Information, dass das Ereignis A eingetreten ist (Ausgang $\omega \in A$). Damit konstruieren wir eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung P_A (bedingte Wahrscheinlichkeit). Versuchsserie mit n (groß) Einzelversuchen:
$r_n(B|A) =$ relative Häufigkeit von B unter der Bedingung $= \frac{\text{absolute Häufigkeit von} A \cap B}{\text{Häufigkeit von A}}$
$\underbrace{=}_{\text{teilen durch n}} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(A)}$. Die relative Häufigkeiten entsprechen den Wahrscheinlichkeiten. Mit dieser Vorlage definieren wir:

Definition 15.1. (Ω, P) *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.* $P(A) > 0$.
$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ *bedingte Wahrscheinlichkeit (ist neue Wahrscheinlichkeitsverteilung).*

„$P(B|A)$ sprich: Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.“

Ist das überhaupt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
$0 \leq P_A(B) \leq$ klar!
$P_A(\Omega) = 1\checkmark$
$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ (disjunkt):

Beweis. $P_A(B_1+B_2) = \frac{P((B_1+B_2)\cap A)}{P(A)} = \frac{P((B_1 \cap A)+(B_2 \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)}$
$= P_A(B_1) + P_A(B2)$ □

15.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit für einzelne Ausgänge

$$P_A(\{\omega\}) = p_A(\omega) = \begin{cases} \frac{p(\omega)}{P(A)}, \text{ falls } \omega \in A \\ 0, \text{ falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Jedes $\omega in A$ wird mit Faktor $\frac{1}{P(A)}$ multipliziert. Die anderen ω werden auf 0 gesetzt.

15.2 Beispiel

ω	1	2	3	4	5	6
p	0.1	0.1	0.2	0.4	0.1	0.1

$A = \{1, 2, 3\}$ ist eingetreten. $\frac{1}{P(A)} = \frac{1}{0.4} = 2.5$

ω	1	2	3	4	5	6
$P_A)$	0.25	0.25	0.5	0	0	0

15.3 Beispiel

Urne mit 2 roten, 2 schwarzen und 2 blauen Kugeln. Man vereinbart: Ziehen ohne Rücklegen, Mitteilung, wann zum ersten mal eine blaue gezogen wurde. Das Experiment wird durchgeführt und man bekommt die Mitteilung: „Erste blaue Kugel beim 3. Zug. “Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden gezogenen Kugeln rot waren?
Wir modellieren:

- rote Kugeln 1/2

- blaue Kugeln 3/4
- schwarze Kugeln 5/6

$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : 1 \leq a_i \leq 6, a_1 \neq a_2 \neq a_3\}$
$A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \Omega : a_3 \in \{3, 4\}, a_1, a_2 \in \{1, 2, 5, 6\}\}$
$B = \{(a_1, a_2, a_3) \in \Omega : \{a_1, a_2\} = \{1, 2\}\}$
apriori Wahrscheinlichkeit von B: Pfadregel: $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
$|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
$|A| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
$|A \cap B| = 2 \cdot 2 = 4$
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{120}}{\frac{24}{120}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

„Zu Erinnerung: $P(B|A)$ sprich: Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.“

15.4 Umstellung der Formel

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
Das kann man nun Verallgemeinern. $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$

„Der Beweis kann mittels Induktion durchgeführt werden.“

15.5 Beispiel

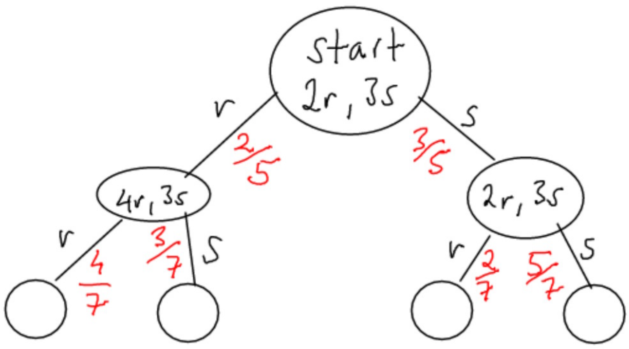

Abbildung 16: Beispiel Urne mit 2 roten und 3 schwarzen Kugeln

Urne mit 2 roten und 3 schwarzen Kugeln. Kugel ziehen, Kugel zurück und zusätzlich zwei Kugeln derselben Farbe. Wieder eine Kugel ziehen. Fertig.
Man bekommt die Information: 2 gezogene Kugeln sind rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 1. gezogene Kugel rot ist (Abb. 16)?
Bedingungen A: 2. rot, Ereignis B: 1. rot; $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8+6}{35} = \frac{14}{35}$
$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$
$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{14}{35}} \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

15.6 Bayes-Formel

Ω ist Wahrscheinlichkeitsraum, $A_1, A_2, ..., A_n$ eine Zerlegung von Ω, B Ereignis.

„Zerlegung: Disjunkte Vereinigung von Teilmengen. “

a) $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$

b) $P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

Beweis. **a)** $P(B) = = P(\Omega \cap B) = P((\sum_{j=1}^{n} A_j) \cap B) = P(\sum_{j=1}^{n} (A_j \cap B))$
$= \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$
b) $P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$ □

15.7 Beispiel Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich

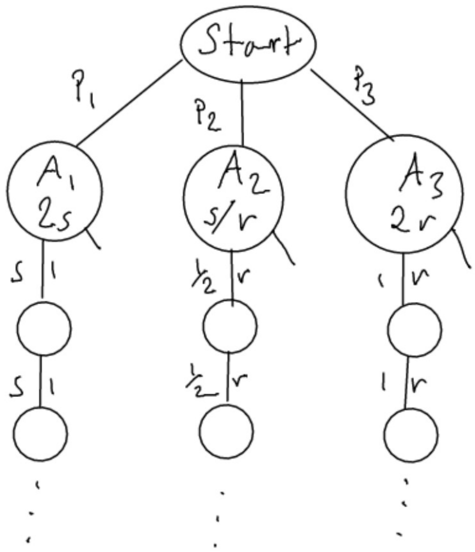

Abbildung 17: Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich

Urne mit 2 Kugeln, n mal ziehen mit Rücklegen, 3 Fälle möglich (Abb. 17):

1. A_1: 2 schwarze
2. A_2: 1 rote, 1 schwarze
3. A_3: 2 rote

Man bekommt die Information B: Nur rote Kugeln wurden gezogen. Berechne $P(A_1|B), P(A_2|B), P(A_3|B)$. Ergebnis: Alle Pfade
$P(A_1|B) = 0$
$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3} \xrightarrow{n \to \infty} 0$
$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_3}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

Mit der Formel von Bayes $P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$
Nenner: $p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3 \cdot 1 = p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3$
Zähler: $k = 1 : 0$, $k = 2 : p_2 \cdot rbr\frac{1}{2}^n$, $k = 3 : p_3 \cdot 1$
$P(A_1|B) = 0$
$P(A_2|B) = \frac{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3}$
$P(A_3|B) = \frac{p_3}{p_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_3}$

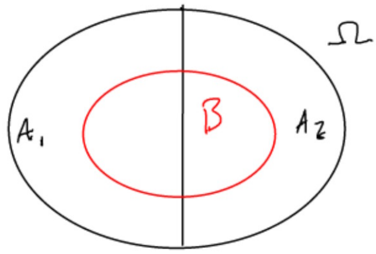

Abbildung 18: Beispiel Würfeln: B: Augensumme ≥ 8, A_1: kein Sechser, A_2: mindestens ein Sechser

15.8 Beispiel Würfeln

Es werden zwei Würfel geworfen. Wir bekommen die Information: Augensumme ≥ 8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens einen Sechser haben (Abb. 18)?
Exakt: Es muss vor dem Würfeln ausgemacht werden: Man bekommt die Information Augenzumme ≥ 8 <u>oder</u> Augensumme < 8.
$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
$P(B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$

15.9 Beispiel Test auf Krankheit

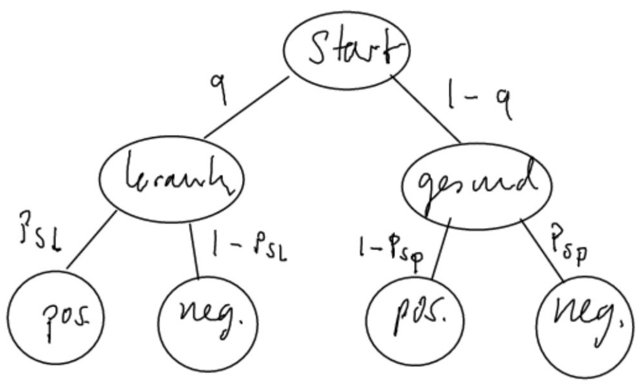

Abbildung 19: Beispiel Test auf Krankheit: A: Person krank, B: Test zeigt positiv

Test positiv $\Rightarrow$ krank
Test negativ $\Rightarrow$ gesund
P_{sl} Wahrscheinlichkeit(Test zeig positiv — Person krank)
P_{sp} Wahrscheinlichkeit(Test zeig negativ — Person gesund)

ELISA-Test auf HIV: $P_{sl} = P_{sp} = 0.998$
Person wird getestet. Test zeigt positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person krank ist? q sei die apriori Wahrscheinlichkeit, dass die Person

krank ist ($q \cdot 100\%$ der Bevölkerung hat HIV, vgl. Abb. 19)
$P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)} = \frac{q \cdot P_{sl}}{q \cdot P_{sl} + (1-q)(1-P_{sp}}$
Hier: $P(A|B) = \frac{q \cdot 0.998}{q \cdot 0.998 + (1-q) \cdot 0.002}$

q	0.001	0.01	0.1
$P(A\|B)$	0.333	0.834	0.982

15.10 Verblüffende Beispiele

1) Eine Familie hat 2 Kinder. Man bekommt die Information „Mindestens ein Junge“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 2 Jungen sind?
A: 2 Jungen
B: mindestens ein Junge
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

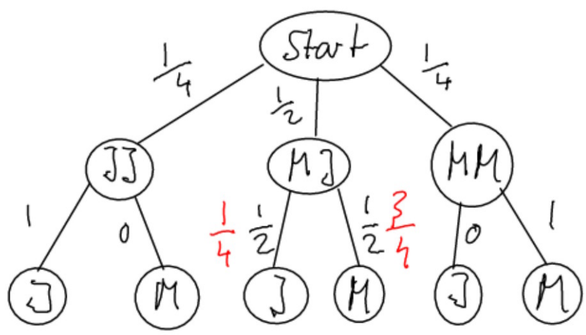

Abbildung 20: Beispiel Familie mit zwei Kindern

2) Familie mit 2 Kindern. Die 2 Kinder spielen im Haus. Eines schaut aus dem Fenster heraus. Es ist ein Junge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Junge ist?
$P(\text{JJ}|\text{Junge schaut heraus}) = \frac{P(JJ \cap J_{sh})}{P(J_{sh})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
Mädchen sind nun neugieriger als Jungen (vgl. rote Wahrscheinlichkeiten in Abb. 20). $P(JJ|J_{sF}) = \frac{P(JJ \cap J_{sF})}{P(J_{sF})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

16 Stochastische Unabhängigkeit

$P(A|B) = \frac{A \cap B}{P(B)}$
$P(A|B) = P(A) \Rightarrow$ A ist von B unabhängig.
$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition 16.1. *Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, wenn gilt:* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition 16.2. *Drei Ereignisse A,B,C heißen unabhängig, wenn gilt:*
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Definition 16.3. *$A_1, ..., A_n$ heißen unabhängig, wenn: $P(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} P(A_j)$ für jede Teilmenge T aus $\{1, 2, ..., n\}$.*

16.1 Beispiel

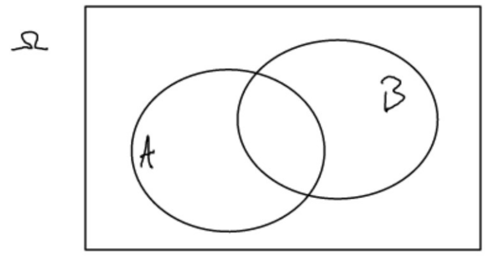

Abbildung 21: Beispiel Unabhängigkeit

A und B sind unabhängig. Dann sind auch A und $\overline{B}$ unabhängig (Abb. 21).
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B))$
$= P(A) \cdot P(\bar{B})$

Satz 16.1. *Sind A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 unabhängig, dann auch z.B. $A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4, \overline{A_5}$ unabhängig (ohne Beweis).*

16.2 Unabhängigkeit bei Produktexperimenten

Es gibt n unabhängige Experimente (Ω_i, P_i) und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$. Dann ist der Produktwahrscheinlichkeitsraum: $p(\underbrace{a_1}_{\in\Omega_1}, \underbrace{a_2}_{\in\Omega_2}, ..., a_n) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2) \cdot ... \cdot p_n(a_n)$
$A_j = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_j \in A_j^*\right\}, A_j^* \subset \Omega_j$
$P(A_j) = P_j(A_j^*)$
Dann sind $A_1, A_2, ..., A_n$ unabhängig.

16.3 Beispiel 3mal würfeln

$A_1^* = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$ Im ersten Wurf 1, 2 oder 3. A_1 hingegen wäre $A_1 = (1/2/3, ., .)$.
$A_2^* = \{5, 6\} \Rightarrow$ Im zweiten Wurf 5 oder 6.
$A_3^* = \{4, 5, 6\} \Rightarrow$ Im dritten Wurf 4, 5 oder 6.
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{12}$

16.4 Vergröberung

Es seien Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_{10}$ unabhängig. Diese werden in zwei Blöcke unterteilt (1. Block: $A_1, ..., A5$, 2. Block: $A_6, ..., A10$). Aus jedem Block ein Ereignis konstruieren, z.B.: $B = (A_1 \cup A_3) \cap \overline{A_5}$, $C = (A_7 \cap \overline{A_9}) \cap A_{10}$. Dann sind B und C unabhängig.

16.5 Beispiel Lotto 6 aus 49

Ein Spieler gibt jede Woche k verschiedene Reihen ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in n Wochen mindestens einen *Sechser* hat?
Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{49}{6}$

Wahrscheinlichkeit in einer Woche einen *Sechser* zu haben, ist: $P(k) = \frac{k}{\binom{49}{6}}$
Wahrscheinlichkeit in n Wochen keinen *Sechser*: $(1 - P(k))^n$ (unabhängig)
P(In n Wochen mindestens einen Sechser) $= 1 - (1 - P(k))^n$ mit z.B.: $n = 2000$ (Wochen), $k = 10$ (Spiele) $\underline{= 0.00142}$

16.6 Beispiel Gruppenscreening

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Krankheit sei p (klein z.B. 0.02). Mit einer Blutuntersuchung kann man das feststellen:

- Einzeluntersuchung
- Gruppenuntersuchung: Das Blut von k Personen wird gemischt. Falls gesund $\Rightarrow$ fertig, falls krank $\Rightarrow$ noch k Einzeluntersuchungen.

Finde die optimale Gruppengröße. Wir definieren die Zufallsgröße Y als *Anzahl der Untersuchungen*. Zwei Werte sind hier möglich: $Y = 1$ und $Y = 1 + k$.
$P(Y = 1) = (1 - p)^k$
$P(Y = 1 + k) = 1 - (1 - p)^k$
$EY = 1 \cdot (1 - p)^k + (1 + k) \cdot [1 - (1 - p)^k] = (1 - p)^k + (1 + k) - (1 + k)(1 - p)^k$
$= (1 - p)^k [1 - (1 + k)] + (1 + k) = (1 + k) - k(1 - p)^k$

minimiere: $\frac{EY}{k}$ ist die durchschnittliche Anzahl an Untersuchungen pro Person.
$\frac{EY}{k} = \frac{1+k}{k} - (1 - p)^k = \frac{1}{k} + 1 - (1 - p)^k$

16.7 Beispiel

$P = 0.1, k = 4 \Rightarrow \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{4} - (1 - 0.1)^4 = 0.59$ also Ersparnis von 41%.
$P = 0.01, k = 11 \Rightarrow \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{11} - (1 - 0.01)^{11} = 0.20$ also Ersparnis von 80%.

16.8 p gegeben. Gruppengröße ausrechnen.

$f(k) = \frac{EY}{k} = 1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k$ minimieren:

p	0.2	0.1	0.01
opt. k	3	4	11
Ersparnis	18%	41%	80%

17 Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

(Nur) Eine Zufallsvariable X:

Wertebereich von X	1	2	3
p^x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Zwei Zufallsvariablen X, Y (Abb. 22):
Wertebereich von X: $x_1, x_2, ..., x_r$
Wertebereich von Y: $y_1, y_2, ..., y_s$

Verteilung von XY
$P^{(X,Y)}(x_i, y_j) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = x_i \text{ und } Y(\omega) = y_i\})$

„Man sagt auch gemeinsame Verteilung von X und Y.“

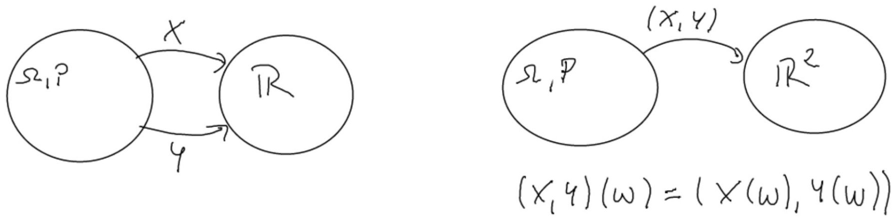

Abbildung 22: Zwei Zufallsvariablen kann man unterschiedlich darstellen

X/Y	y_1	y_2	y_3	...	y_s	Verteilung von X
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1s}	$\sum$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2s}	$\sum$
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}		p_{3s}	$\sum$
...						$\sum$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	p_{r3}		p_{rs}	$\sum$
Verteilung von Y	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	

17.1 Beispiel 2 mal würfeln

X: Augenzahl im 1. Wurf, Y: maximale Augenzahl, $\Omega : \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$.
$(X,Y)(3,1) = (3,3)$

X/Y	1	2	3	4	5	6	$\sum$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
$\sum$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	**1**

17.2 Funktionen von Zufallsvariablen/-größen

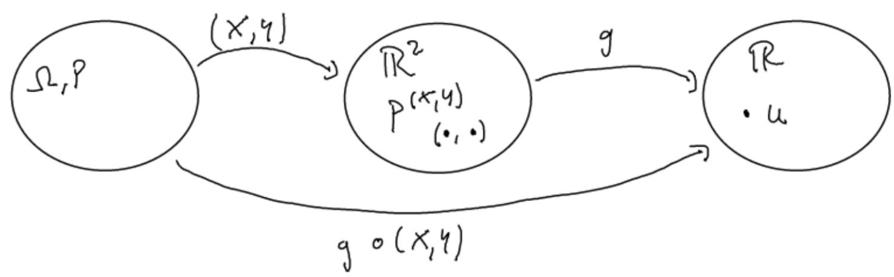

Abbildung 23: Funktionen von Zufallsvariablen/-größen: $P(g \circ (X,Y) = u) = P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega), Y(\omega)) = u\}$

$P(g \circ (X,Y) = u) = P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega), Y(\omega)) = u\}$
$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) = y_j) = g(x_i, y_j) = u$
$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = g(x_i, y_j) = u$
$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P^{(X),Y}(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) = u$
Für die Verteilung $g \circ (X,Y)$ braucht man also nur $P^{(X,Y)}$ auf $\mathbb{R}^2$. Wir berechnen den Erwartungswert von $g \circ (X,Y)$. Es gibt drei Möglichkeiten diesen auszurechnen:

1. $E[g \circ (X,Y)] = \sum_{\omega \in \Omega} g \circ (X,Y)(\omega) \cdot p(\omega)$
2. $E[g \circ (X,Y)] = \sum_{i=1,\ldots,r j=1,\ldots,s} P^{(X,Y)}(x_i, y_j) \cdot g(x_i, y_j)$
3. $E[g \circ (X,Y)] = \sum_{u \in \text{ Wertebereich von } g \circ (X,Y)} u \cdot P^{g \circ (X,Y)}$

17.3 Beispiel 2 mal würfeln

X: erste Augenzahl, Y: maximale Augenzahl, Verteilung und Erwartungswert von $X \cdot Y = Z, g(x,y) = x \cdot y$

Mit Verfahren 2)
$EZ = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot$

$\frac{1}{36}+9\cdot\frac{3}{36}+12\cdot\frac{1}{36}+15\cdot\frac{1}{36}+18\cdot\frac{1}{36}+16\cdot\frac{4}{36}+20\cdot\frac{1}{36}+24\cdot\frac{1}{36}+25\cdot\frac{5}{36}+30\cdot\frac{1}{36}+36\cdot\frac{6}{36}=\frac{616}{36}=17.11$

Mit Verfahren 3)

Wertebereich von Z	1	2	3	4	5	6	8	9	...
Verteilung von Z	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	...

also: $EZ = 1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{2}{36}+8\cdot\frac{1}{36}+9\cdot\frac{3}{36}+...$

Mit Verfahren 1)

ω	X	Y	$X\cdot Y$
(1,1)	1	1	1
(1,2)	1	2	2
(1,3)	1	3	3
(1,4)	1	4	4
(1,5)	1	5	5
(1,6)	1	6	6
(2,1)	2	2	4
(2,2)	2	2	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$P(\omega)=\frac{1}{36},\ \frac{1}{36}(1+2+3+4+5+6+4+4+...)$

17.4 Unabhängigkeit von 2 Zufallsvariablen

X,Y heißen unabhängig, wenn für alle u,v gilt: $P(X=u,Y=v)=P(X=u)\cdot P(Y=v)$

17.4.1 Beispiel

X/Y	1	2	3	4	$\sum$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Für unabhängige ZV X und Y gilt dann:
$P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$
ohne Beweis:
$A=\{1,2\}, B=\{3,4\}$ $P(X\in A)=\frac{2}{3}$, $P(Y\in B)=\frac{1}{4}$
$P(X\in A)\cdot P(Y\in B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{4}{24}$
Multiplikationsregel: Es seien X,Y unabhängige ZV.
$E(X\cdot Y)=EX\cdot EY$, $E(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_iy_j\cdot P(X=x_i,Y=y_j)$
$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_iy_j\cdot P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)=[\sum_{i=1}^{r}x_i\cdot P(X=x_i)]\cdot[\sum_{j=1}^{s}y_j\cdot P(Y=y_j)]=EX\cdot EY$ „x_i, y_i stehen in der Tabelle."

Immer gilt: $E(X+Y)=EX+EY$

17.5 Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen

$P(X = +Y = u) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(X = x_i, Y = y_j)$ mit $x_i + y_i = u = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ mit $x_i + y_i = u$

17.6 Beispiel

Zweimal würfeln mit X erste Augenzahl, Y zweite Augenzahl. Wertebereich von $X + Y$: 2,3,...,12
$P(X + Y = u) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{6}\frac{1}{6}$ mit $i + j = u$
$P(X + Y = 10) = \frac{1}{36}$ mit $i + j = 10$, also 4 6, 5 5 und 6 4 $\Rightarrow$ kommt drei mal vor $= \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{3}{36}$

$X+Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X+Y) = \frac{1}{36}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1)$
$= 7$
Das geht auch einfacher, denn den Erwartungswert kann man auch zerlegen. Bei + ist es, im Gegensatz zu $\cdot$, auch egal ob die zufallsgrößen unabhängig sind oder nicht: $E(X + Y) = EX + EY = 3.5 + 3.5 = 7$

17.7 Standardmodell

Wir haben zwei Zufallsexperimente: $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2)$
Zusammen: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P(\{\omega\}) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\})$
$X : \Omega \to \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \to ...$, hängt nur von ω_1 ab.
$Y : \Omega \to \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \to ...$, hängt nur von ω_2 ab.
Dann sind X und Y unabhängig.

18 Binomial- und Multinomialverteilung

Ein Zufallsexperiment habe 2 Ausgänge (Treffer 1, Niete 0). Trefferwahrscheinlichkeit p, Nietenwahrscheinlichkeit $1 - p = q$. So ein Experiment nennt man auch Bernoulli-Experiment. Das Experiment wird n mal wiederholt, was man Bernoullikette nennt.
$P(\{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)\}) = p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot ... \cdot q \cdot p = p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \cdot q^{n - \sum_{i=1}^{n} \omega_i}$
A_i Ereignis: im Versuch i ein Treffer.
$Y = \sum_{i=1}^{n} I\{A_i\}$ Zählvariable. I ist die Indikatorfunktion.
$Y(\omega_1, ..., \omega_n) =$ Anzahl der Einser.

Exkurs: Binomialverteilung $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$
Y ist binomialverteilt.
$EY = E\left(\sum_{i=1}^{n} J\{A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} EI\{A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p \underline{= n \cdot p}$
$\underline{EY = n \cdot p}$

Satz 18.1. (Ω, P) *Wahrscheinlichkeitsraum.* $A_1, A_2, ..., A_n$ *unabhängige Ereignisse mit* $P(A_i) = p$
Dann ist $Z = \sum_{j=1}^{n} I\{A_j\}$ *binomialverteilt* $Bin(n, p)$
$Z(\omega)$ *ist die Anzahl der* A_j*, in denen* ω *ist.*

18.1 Verallgemeinerung zur Multinomialverteilung

Ein Zufallsexperiment habe s Ausgänge.

	1	2	3	...	s
Wahrscheinlichkeit	p_1	p_2	p_3		p_s

$p_1 + P_2 + ... + p_s = 1$. Es wird n mal wiederholt.
$P(\{(3,4,1,1,5)\}) = p_3 \cdot p_4 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_5, n = 5$
$X_1(\omega)$: Anzahl der Einser in ω.
$X_2(\omega)$: Anzahl der Zweier in ω.
$\vdots$
$X_s(\omega)$: Anzahl der s in ω.
$X = (X_1, X_2, ..., X_s)$ ist multinomialverteilt.
$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_s = i_s) = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot ... \cdot p_s^{i_s} = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot ... \cdot i_s!}$

18.2 Beispiel

n Kugeln, in s Farben, i_1 rot, i_2 blau, ..., i_s gelb.
Auf wie viele Arten kann man die Kugeln anordnen? $(= k)$
$n! = k \cdot i_1! \cdot i_2 \cdot ... \cdot i_s!$
$k = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2 \cdot ... \cdot i_s!}$ ist der Multinomialkoeffizient.

18.3 Beispiel

Experiment mit 3 Ausgängen A_1, A_2, A_3 und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Es wird $n = 7$ mal wiederholt. $P(X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 1)$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} \cdot 105 = 0.102$ $\approx 10\%$

19 Pseudozufallszahlen

Zufallsgenerator: liefert Folge von Zufallszahlen $x_1, x_2, ...,$ aus dem Intervall $[0,1]$. Diese sollen zufällig und gleichverteilt sein. Die Zufallsgrößen $X_1, X_2, ...,$ sollen unabhängig sein und $P(X_i \in (a,b)) = b - a$
Der Generator liefert Pseudozufallszahlen, d.h. abhängig vom Startwert immer die gleiche Folge. Diese Folge sollte möglichst gut sein.
Wir machen das mit einem linearen Kongruenzgenerator und rechnen dafür modulo m (möglichst groß): $Z_{j+1} = a \cdot Z_j + b, 0 < a, b < m, 0 \leq z_j < m.$
$x_j = \frac{z_j}{m}$

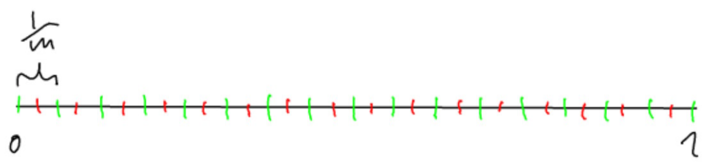

Abbildung 24: Zufallszahlen zwischen 0 und 1: $x_j = \frac{z_j}{m} + \frac{1}{2 \cdot m}$

z.B. $m = 100, a = 18, n = 11$, Startwert: $z_0 = 40$ (Abb. 24)
$z_1 = 18 \cdot 40 + 11 = 31$ $z_2 = 18 \cdot 31 + 11 = 69$
$z_3 = 18 \cdot 69 + 11 = 53$
$z_4 = 18 \cdot 53 + 11 = 65$
$z_5 = 18 \cdot 65 + 11 = 81$
$z_6 = 18 \cdot 81 + 11 = 69$
$53, 65, 81, 69, 53, 65, 81, ...$ schlecht, weil sehr schnell Wiederholungen. Nun stellt sich die Frage: Wie bekommt man einen guten Generator?

19.1 Simulation eines Experiments mit Hilfe des Pseudozufallgenerators

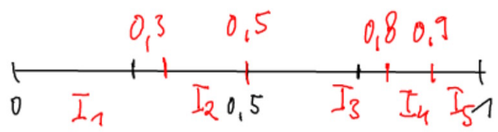

Abbildung 25: Simulation eines Experiments: $xinI_k \Leftrightarrow \omega_k$ ist das Ergebnis des Experiments.

Wir haben 5 Ausgänge des Experiments (Abb. 25): $\omega_1 p(\omega_1) = 0.3$
$\omega_2 p(\omega_2) = 0.2$
$\omega_3 p(\omega_3) = 0.3$
$\omega_4 p(\omega_4) = 0.1$
$\omega_5 p(\omega_5) = 0.1$

$xinI_k \Leftrightarrow \omega_k$ ist das Ergebnis des Experiments.

20 Varianz

EX gibt einen Mittelwert der Zufallsgröße X an. Die Varianz ist ein Streuungsmaß von X, das wie folgt definiert wird:
$Var(X) = V(X) = E[(X - EX)^2] = \sigma^2(X)$. Mittelwert der quadratischen Abweichungen von EX. Die Wurzel der Varianz nennt man Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Bemerkung: Hat die Zufallsgröße X die Einheit Meter, so haben Erwartungswert EX und Standardabweichung $\sigma(X)$ dieselbe Einheit, die Varianz $\sigma^2(X)$ aber Quadratmeter. Nimmt X die Werte $x_1, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_n$ an, dann ist die Varianz $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 \cdot p_i$.

20.1 Beispiel

$EX = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$
$Var(X) = \frac{1}{6}\left[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2\right]$
$= 2.916$
$\sigma(X) = \sqrt{2.916} = 1.707$

20.2 Varianz der Indikatorfunktion $I_A = I\{A\}$

$EI_A = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A)$
$Var(I_a) = [1 - P(A)]^2 \cdot P(A) + [0 - P(A)]^2 \cdot (1 - P(A)) = \left[1 + P(A)^2 - 2P(A)\right] \cdot P(A) + P(A)^2 \cdot (1 - P(A)) = P(A) + P(A)^3 - 2P(A)^2 + P(A)^2 - P(A)^3 \underline{= P(A) - P(A)^2}$
$= Var(I_A)$

20.3 Rechenregeln der Varianz

Satz 20.1. *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ zufallsgröße. Dann gilt:*

1. $Var(X) = E[(X - a)^2] - [(EX) - a]^2, a \in \mathbb{R}$
2. $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$
3. $Var(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2]$
4. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
5. $Var(X) \geq 0$
   $Var(X) = 0 \Rightarrow$ *Es gibt* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $P(X = a) = 1$

Beweis.

1. „ned mitschreiben“ deswegen: siehe Abb. 26.
2. setze $a = 0$: $Var(X) = E[X^2] - (EX)^2$
3. $a \Rightarrow E[(\underbrace{X}_{\text{minimal bei } a=EX} - a)^2] = Var(X) + [(EX) - a]^2$
4. $V(aX+b) = E[(aX+b-aEX-b)^2] = E[a^2(X-EX)^2] = a^2 E[(X-EX)^2]$
   $= a^2 Var(X)$

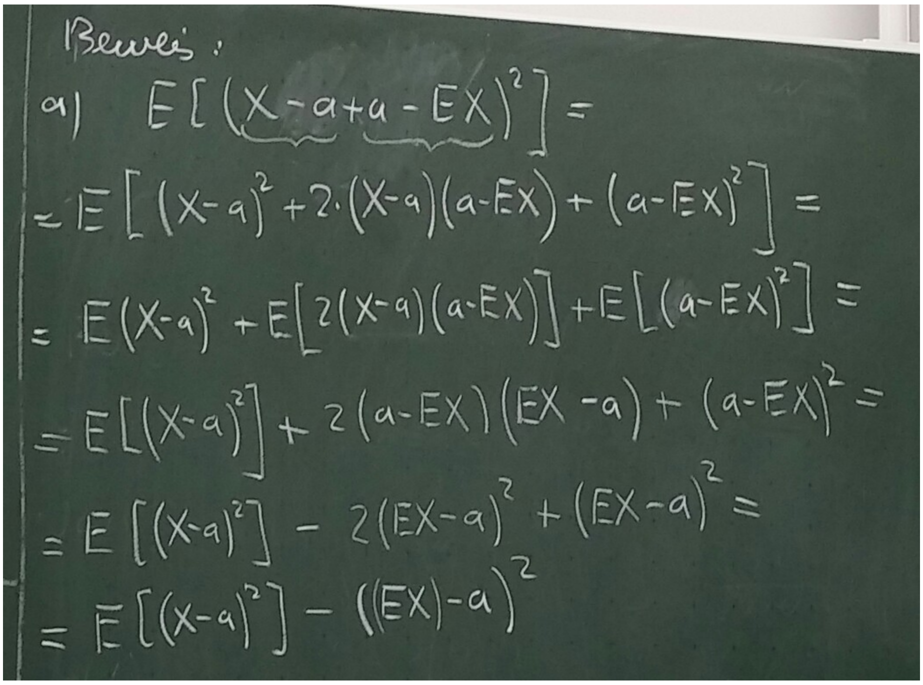

Abbildung 26: Beweis: Foto weil „nicht mitschreiben“

5. $Var(X) \geq 0$ klar.
   $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\underbrace{x_j - EX}_{0 \text{ bei } x_j=EX})^2 \cdot p(x_j) \stackrel{!}{=} 0$
   $\Leftrightarrow P(X = EX) = 1$

$\square$

21 Standardisierung einer Zufallsgröße

$X^* = \frac{X-EX}{\sigma(x)}$ mit $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$
$EX^* = \frac{1}{\sigma(x)} \cdot E[X-EX] = \frac{1}{\sigma(x)} \cdot [EX-EX] = 0$

$Var(X^*) = Var[\frac{1}{\sigma(x)} \cdot (X-EX)] = \frac{1}{\sigma^2(x)} \cdot Var(X-EX) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \cdot Var(x) = 1$

21.1 Die Tschebyschow-Ungleichung

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:
$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \;\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot Var(X)$

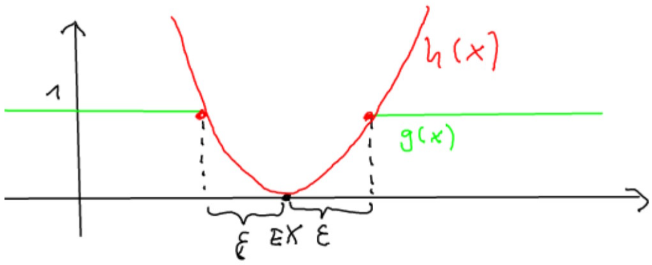

Abbildung 27: Beweis

Beweis. $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x-EX| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (vgl. Abb. 27)
$h(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (x-EX)^2$ (vgl. Abb. 27)
Es ist $g(x) \leq h(x)$ für alle x. Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$
Es ist $g(X(\omega)) \leq h(X(\omega))$

$P(|X-EX| \geq \varepsilon) = P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - EX| \geq \varepsilon\}) = P(\{\omega : g(X(\omega)) = 1\})$
$= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \cdot g(X(\omega))$

$\frac{1}{\varepsilon^2} Var(X) = \sum_\omega \left[(X(\omega) - EX)^2 \cdot p(\omega)\right] \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \sum_\omega \frac{1}{\varepsilon^2}(X(\omega) - EX)^2 \cdot p(\omega) =$
$\sum_\omega h(X(\omega) \cdot p(\omega) \Rightarrow \underbrace{\sum_\omega g(X(\omega)) \cdot p(\omega)}_{\text{linke Seite}} \leq \underbrace{\sum_\omega h(X(\omega)) \cdot p(\omega)}_{\text{rechte Seite}}$ □

21.2 Beispiel

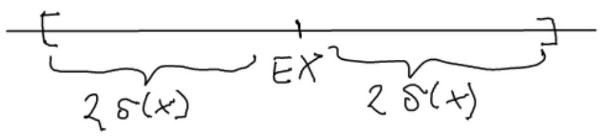

Abbildung 28: Beispiel

Setze $\varepsilon = k \cdot \sigma(x)$
$P(|X - EX| \geq k \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{k^2 \cdot \sigma^2(x)} \cdot \sigma^2(x) = \frac{1}{k^2}$
$P(|X - EX| \leq k \cdot \sigma(x)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$
z.B. $k = 2$
$P(|X - EX| \geq 2 \cdot \sigma(x)) \leq \frac{1}{4}$
$P(|X - EX| \leq 2 \cdot \sigma(x)) \geq \frac{3}{4}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert in diesem Intervall (Abb. 28) annimmt, ist $\geq 75\%$.

21.3 Aufgabe 1

X nimmt die Werte $1, 2, ..., k$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an. Berechne EX und $Var(x)$.
$EX = \frac{1}{k}(1 + 2 + 3 + ... + k) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$

$E(X^2) = \frac{1}{k}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) \underbrace{=}_{F.S.} \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$

„F.S.: Aus der Formelsammlung"

$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} = ... = \frac{k^2-1}{12}$

21.4 Aufgabe 2

Wir würfeln n mal mit einem Würfel. Die Zufallszahl Y_n ist die größte Augenzahl. Berechne Varianz und Erwartungswert.
$P(Y_n = 1) = \frac{1}{6^n}$
$P(Y_n = 2) = \frac{2^n-1}{6^n}$

„Lauter 1er $\Rightarrow$ -1"

$P(Y_n = 3) = \frac{3^n-2^n}{6^n}$

„Wir müssen die abziehen, wo kein 3er vorkommt (2^n)."

$P(Y_n = 4) = \frac{4^n-3^n}{6^n}$
$P(Y_n = 5) = \frac{5^n-4^n}{6^n}$
$P(Y_n = 6) = \frac{6^n-5^n}{6^n}$
$EY_n = \frac{1}{6^n} \cdot 1 + \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right] \cdot 2 + \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right] \cdot 3 + \left[\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right] \cdot 4 + \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right] \cdot$
$5 + \left[1^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \cdot 6 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} EY_n = 6$
$EY_n^2 = \frac{1}{6^n} \cdot 1^2 + \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right] \cdot 2^2 + \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right] \cdot 3^2 + \left[\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right] \cdot 4^2$
$+ \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right] \cdot 5^2 + \left[1^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \cdot 6^2 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} EY_n^2 = 6^2 = 36$
$Var(Y_n) = E(Y_n^2) - [EY_n]^2 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} Var(Y_n) = 36 - 36 = 0$

21.5 Aufgabe 3

X nehme nur Werte im Intervall $[b, c]$ an. Zeige:

1. $Var(X) \leq \frac{1}{4}(c - b)^2$
2. $Var(X) = \frac{1}{4}(c - b)^2 \Leftrightarrow P(X = b) = P(X = c) = \frac{1}{2}$

Beweis. zu 1.) Es gilt: $Var(X) = E[(X - a)^2] - [(EX) - a]^2, a \in \mathbb{R}$
$(X - a)^2 \leq \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \Rightarrow E[(X - a)^2] \leq \frac{(c-b)^2}{4}$
$E[(X - a)^2] \geq Var(X) \Rightarrow \frac{(c-b)^2}{4} \geq Var(X)$

zu 2.) $Var(X) = \frac{(c-b)^2}{4} \Leftrightarrow E[(X - a)^2] = \frac{(c-b)^2}{4}$ und $E(X) - a = 0$, also $EX = a$

Abbildung 29: Beweis: Für a nehmen wir die Mitte, also $a = \frac{c-b}{2}$.

$\Leftrightarrow EX = a$ und $(x_1 - a)^2 \cdot p_1 + (x_2 - a)^2 \cdot p_2 + \vdots + (x_n - a)^2 \cdot p_n = \frac{(c-b)^2}{4}$
$(x_i - a)^2 \leq \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$ für alle i.
also $(x_i - a)^2 = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$
also $x_i =$ b oder c.
weil $EX = a$ ist $P(X = b) = P(X = c) = \frac{1}{2}$

□

22 Kovarianz

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen
$V(X+Y) = E[(X+Y-E(X+Y))^2] = E[((X-EX)+(Y+EY))^2] = E[\underbrace{(X-EX)^2}_{Var(X)} + \underbrace{(Y-EY)^2}_{Var(Y)} + 2(X-EX)(Y-EY)] = Var(X)+V(Y)+2\cdot \underbrace{E[(X-EX)(Y-EY)]}_{\text{Kovarianz von X und Y}}$

„auch: $cov(X,Y), C(X,Y)$"

Definition 22.1. $C(X,Y)4 = E[(X-EX)(Y-EY)]$
$V(X+Y) = Var(X)+V(Y)+2\cdot C(X,Y)$

Satz 22.1.
1. $C(X,Y) = E(X\cdot Y) - (EX)\cdot(EY)$

2. $C(X,Y) = C(Y,X), C(X,X) = V(X)$

3. $C(X+a, Y+b) = C(X,Y)$

4. X, Y *unabhängig* $\Rightarrow C(X,Y) = 0$

5. $C(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_i Y_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j C(X_i, Y_j)$

6. $V(X_1+X_2+...+X_n) = \sum_{j=1}^n V(X_j) + 2\sum_{1\le i<j\le j} C(X_i,X_j)$

Beweis.
1. $C(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E[X\cdot Y - XEY - YEX + EX\cdot EY] = E(X\cdot Y) - EX\cdot EY - EY\cdot EX + EX\cdot EY] = E(X\cdot Y) - EX\cdot EY$

2. klar

3. $C(X+a,Y+b) = E[(X+a-EX-a)(Y+b-EY-b)] = E[(X-EX)(Y-EY)] = C(X,Y)$

„Jetzt verwenden wir die Unabhängigkeit. Sind sie unabhängig ist die Kovarianz 0. Umgekehrt gilt das nicht!"

4. mit 1.) $C(X,Y) = E(X\cdot Y) - (EX)\cdot(EY) = (EX)\cdot(EY) - (EX)\cdot(EY) = 0$

5. $C(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_i Y_i) \underbrace{=}_{\text{mit 1.)}} E[\sum_{i=1}^m a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^n b_i Y_i)] - E[\sum_{i=1}^m a_i X_i] \cdot E[\sum_{j=1}^n b_i Y_i)] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_i E(X_i\cdot Y_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_i EX_i \cdot EY_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_i [E(X_i\cdot Y_j) - EX_i\cdot EY_j] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_i C(X_i, Y_j)$

6. $V(X_1+X_2+...+X_n) = C(X_1+...+X_n, X_1+...+X_n) \underbrace{=}_{\text{mit 5.)}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(X_i, X_j)$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n V(X_j)}_{\text{Das sind die, bei denen gilt: } i=j} + 2\sum_{1\le i<j\le n} C(X_i,X_j)$$

□

22.1 Folgerung

Sind $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängig, so ist $V(X_1+X_2+...+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+ ... + V(X_n)$ (nach 6.) und 4.))

22.2 Beispiel

Aus $C(X, Y = 0)$ (d.h. unkorreliert) folgt nicht, dass X und Y unabhängig sind, z.B.: 2 mal Würfeln: X ist die erste Augenzahl, Y ist die zweite Augenzahl.
$C(X+Y, X-Y) = C(X,X) - C(X,Y) + C(Y,X) - C(Y,Y) = V(X) - V(Y)$
$= 0$, **also** $(X+Y), (X-Y)$ unkorreliert.

Die Wahrscheinlichkeit zwei 6er zu würfeln: $P(X+Y=12, X-Y=0) = \frac{1}{36}$
$\neq P(X+Y=12) \cdot P(X-Y=0) = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{36}$
$\Rightarrow$ also unabhängig

„Das Komma muss man als und lesen.“

22.3 Varianz einer Indikatorsumme

$C(I_A, I_B) \underbrace{=}_{\text{mit 1.)}} E(I_A \cdot I_j) - EI_A \cdot EI_B = E(I_{A\cap B}) - EI_A \cdot EI_B = P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)$

$V(I_{A_1}+I_{A_2}+...+I_{A_n}) \underbrace{=}_{\text{mit 6.)}} \sum_{j=1}^{n} V(I_{A_j}) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} C(I_{A_i}, I_{A_j}) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)(1 - P(A_j)) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}[P(A_i \cap A_j) - P(A_i)\cdot P(A_j)] = I_{A_1} + ... + I_{A_n}$. Zählvariable (zählt in wie vielen A_i ω liegt)

Sonderfall $P(A_j)$ alle gleich und $P(A_i \cap A_j)$ auch alle gleich.
$V(I_{A_1} + ... + I_{A_n}) = n \cdot P(A_1) \cdot (1 - P(A_1)) + n(n-1)[P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)^2]$

22.4 Beispiel Binomialverteilung Bin(n,p)

Wir haben n unabhängige Ereignisse. $A_1, A_2, ..., A_n$. $P(A_i) = p$. X zählt, wieviele Ereignisse eingetreten sind. X ist Bin(n,p)-verteilt. $X = I_{A_1}+I_{A_2}+...+I_{A_n}$.

$V(X) = n \cdot P(A_1)(1 - P(A_1)) + n(n+1) \cdot 0$
$V(X) = np(1-p)$, $EX = np$

22.5 Beispiel hypergeometrische Verteiltung

Wir haben r rote und s schwarze Kugeln in einer Urne. Es werden n Kugeln ohne Rücklegen gezogen: X ist die Anzahl der roten Kugeln, A_j das Ereignis: bei jeder j-ten Ziehung rot $(a_1, a_s, ..., \underbrace{a_j}_{\text{hier rot}}, ..., a_n)$

$X = I_{A_1} + ... + I_{A_n}$
$P(A_j) = \frac{r}{r+s}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)}$
$V(I_{A_1} + ... + I_{A_n}) = n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \left(1 - \frac{r}{r+s}\right) + n(n-1)\left[\frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2\right] = ...$
$= n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right)$
Mit $p = \frac{r}{r+s}$
$V(X) = n \cdot p(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right)$
$[[EX = n \cdot p]]$
Vergleich zur Binomialverteilung $EX = np, V(X) = np(1-p)$

22.6 Beispiel Permutationen

Betrachte die Permutationen der Zahlen 1 bis n. X ist die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation.
A_j : {Permutationen ω : Fixpunkte bei j}
$X = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$
$P(A_j) = \frac{1}{n}$
$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, auch möglich: $= \frac{(n-2)!}{n!}$
$V(X) = nP(A_1)(1 - P(A_1)) + n(n-1)\left[P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)^2\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + (n-1)\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n-1} - \frac{n-1}{n} = 1$
$Var(X) = 1$, von früher: $EX = 1 \Rightarrow$ unabhängig von n.

22.7 Korrelationskoeffizient

Definition 22.2. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$
$r(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$ *heißt Korrelationskoeffizient von X und Y*

Problem: $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir kennen $X(\omega)$ und wollen $Y(\omega)$ schätzen. $Y \approx g(X), Y \approx a + bX$ (Gerade). Wie berechnet man a und b, damit man Y möglichst gut schätzt?
Der Schätzfehler $Y(\omega) - a - bX(\omega)$ ist eine Zufallsgröße.
Minimiere $E\left[(Y(\omega) - a - bX(\omega))^2\right]$. Dieses Optimierungsproblem hat die Lösung:
$b^* = \frac{C(X,Y)}{V(X)}, a^+ = EXY - b^* EX$.
Der Minimalwert M^+ von $*$ ist: $M^+ = V(Y) \cdot \left[1 - r^2(X,Y)\right]$
Beweis: $Z = Y - bX$; $E\left[(Y - a - bX)^2\right] = \underbrace{E\left[(Z-a)^2\right]}$

$= \left[V(X) = \underbrace{E\left[(X-a)^2\right]} - [EX - a]^2\right] = Var(Z) + [EZ - a]^2$
minimal bei: $EZ = a; E(Y - bX) = a; EY - bEX = a$

„Abkürzung: $\tilde{Y} = Y - EY, \tilde{X} = X - EX$“

minimiere: $V(Z) = V(Y - bX) = E\left[(Y - bX - EY + bEX)^2\right] = E\left[(\tilde{Y} - b\tilde{X})^2\right]$
$= E\left[\tilde{Y}^2 - 2b\tilde{X}\tilde{Y} + b^2\tilde{X}^2\right] = V(Y) - 2bC(X,Y) + b^2V(X) = h(b) \Rightarrow$ **minimal beim Scheitel:** $h'(b) = -2C(X,Y) + 2bV(X) = 0$
$bV(X) = C(X,Y)$
$b = \frac{C(X,Y)}{V(X)}$
Also: $b^* = \frac{C(X,Y)}{V(X)}, a^* = EY - b^*EX$

$M^* = E\left[(Y - a^* - b^*X)^2\right] = E\left[(Y - EY + b^*EX - b^*X)^2\right] = E\left[((Y - EY) - b^*(X - EX))^2\right]$
$= E\left[((Y - EY)^2 - b^{*2}(X - EX)^2 - 2b^*(x - EX)(Y - EY)\right] = V(Y) + b^*V(X) - 2b^*C(X,Y) = V(Y) + \frac{C(X,Y)^2 \cdot V(X)}{V(X)^2} - 2 \cdot \frac{C(X,Y)}{V(X)} \cdot C(X,Y) = V(Y) + \frac{C(X,Y)^2}{V(X)} - 2 \cdot \frac{C(X,Y)^2}{V(X)} = V(Y) - \frac{C(X,Y)^2}{V(X)} = V(Y) - V(Y) \cdot \frac{C(X,Y)^2}{V(X) \cdot V(Y)} = V(Y) \cdot \left[1 - r(X,Y)^2\right]$

22.8 Folgerungen

1. $[C(X,Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$
2. $|r(X,Y)| \leq 1$
3. $|r(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow M^* = 0 \Leftrightarrow Y = a + bX$

Stichwortverzeichnis