

# Zusammenfassung Integraltransformationen

Prof. Dr. Gerta Köster

16. November 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Hinweise</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Grundwissen</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Einführung</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Funktionaltransformationen*</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Zeitfunktionen</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Dirac-Stoß</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Faltung von Funktionen</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>komplexe Funktionen</b>	<b>7</b>
5.1	insbesondere Exponentialfunktion, Logarithmus, sin, cos, sinh, cosh, Wurzel, Polynome . . . . .	7
5.2	Grenzwerte für komplexe Funktionen . . . . .	7
5.3	Stetigkeit . . . . .	7
5.4	Differenzierbarkeit, Ableitung . . . . .	7
5.5	Holomorphie . . . . .	7
5.6	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen . . . . .	7
5.7	Potenzreihen, Konvergenz, Konvergenzradius . . . . .	7
5.8	spezielle Laurentreihe und Laurentreihe . . . . .	7
5.9	Potenzreihen und holomorphe Funktionen . . . . .	7
5.10	Taylorentwicklung . . . . .	7
5.11	Laurentreihen und Holomorphie . . . . .	7
5.12	Stammfunktionen und Kurvenintegrale . . . . .	7
5.13	Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen . . . . .	7
5.14	Hauptsatz der Integralrechnung . . . . .	7
5.15	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	7
5.16	Laurent-Koeffizienten und Kurvenintegrale . . . . .	7
5.17	Residuum und Polstellen . . . . .	7
5.18	Residuensatz und Anwendung zur Berechnung von Kurvenintegralen . . . . .	7
<b>IV</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>9</b>
7.1	Definition Fourier-Transformation . . . . .	9
7.2	Definition Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation und wichtige Beispiele, etwa Dirac-Impuls, Rechtecksimpuls, $e^{iat}$	9
7.3	Rechenregeln und Beispielrechnungen . . . . .	9

7.4	Fourier-Sinus-Transformation, Fourier-Cosinus-Transformation . . . . .	9
7.5	Fourier-Integralsatz, Parsevalsche Gleichung . . . . .	9
<b>8</b>	<b>Fourier-Reihen</b>	<b>9</b>
8.1	Darstellung periodischer Funktionen als Fourier-Reihen . . . . .	9
8.2	Fourier-Koeffizienten (als „Inverse“) . . . . .	9
8.3	Orthogonalitätsbeziehung . . . . .	9
8.4	Darstellungssatz - analog Fourier-Integralsatz . . . . .	9
8.5	Gibbsches Phänomen . . . . .	9
8.6	Sinus- und Cosinusreihe für ungerade und gerade Funktionen . . . . .	9
8.7	Rechenregeln und Analogie zur Fouriertransformation . . . . .	9
8.8	Größenordnung der Fourier-Koeffizienten . . . . .	9
8.9	Periodische Faltung . . . . .	9
8.10	Zusammenhang zwischen Fourier-Transformation und Fourier-Reihen . . . . .	9
<b>9</b>	<b>Anwendungen in Signalverarbeitung und Kompression</b>	<b>9</b>
9.1	Signalübertragung: Modulation und Multiplexing . . . . .	9
9.1.1	Phasenmodulation mit QPSK – Quadrature Phase Shif Keying . . . . .	9
9.2	FDM – Frequency Division Multiplexing . . . . .	9
9.3	Digitale Filter und Ideen der mp3-Kompression . . . . .	9
9.3.1	Faltung von Folgen, Faltung und Matrizenmultiplikation . . . . .	9
9.3.2	Tiefpassfilter, Hochpassfilter . . . . .	9
9.3.3	Kompression von Audiosignalen: Bandunterteilung und Idee der psychoakustischen Modelle . . . . .	9
<b>10</b>	<b>Diskrete Fourier-Transformation und Abtasten (Sampling)</b>	<b>9</b>
10.1	Definition der diskreten Fourier-Transformation und Inverse . . . . .	9
10.2	Abtasttheorem nicht-periodischer Fall . . . . .	9
10.3	Abtasttheorem von Shannon-Nyquist für den periodischen Fall . . . . .	9
10.4	Rezept zur Signalrekonstruktion . . . . .	9
10.5	Fast Fourier Transform . . . . .	9
<b>V</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>10</b>
<b>VI</b>	<b>Z-Transformation</b>	<b>11</b>

## Abbildungsverzeichnis

---

## Teil I

# Hinweise

Mit \* gekennzeichnete Abschnitte sind nicht in der Zusammenfassung von Prof. Dr. Gerta Köster explizit erwähnt und wurden hier ergänzt.

---

## Teil II

# Grundwissen

## Teil III

# Einführung

## 1 Funktionaltransformationen\*

Zur Einführung empfehle ich die Videos \*\*\* *Integraltransformationen Einführung Teil 1* von Stephan Mueller <https://youtu.be/9JEUiy8mK0w> und *20.08 Funktionaltransformationen, Fourier, Laplace*, z Jörn Loviscach <https://youtu.be/A6UK5cqSYic>.

Integraltransformationen sind spezielle Funktionaltransformationen.

## 2 Zeitfunktionen

## 3 Dirac-Stoß

## 4 Faltung von Funktionen

## 5 komplexe Funktionen

5.1 insbesondere Exponentialfunktion, Logarithmus,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$ , Wurzel, Polynome

5.2 Grenzwerte für komplexe Funktionen

5.3 Stetigkeit

5.4 Differenzierbarkeit, Ableitung

5.5 Holomorphie

5.6 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

5.7 Potenzreihen, Konvergenz, Konvergenzradius

5.8 spezielle Laurentreihe und Laurentreihe

5.9 Potenzreihen und holomorphe Funktionen

5.10 Taylorentwicklung

5.11 Laurentreihen und Holomorphie

5.12 Stammfunktionen und Kurvenintegrale

5.13 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

5.14 Hauptsatz der Integralrechnung

5.15 Cauchyscher Integralsatz

5.16 Laurent-Koeffizienten und Kurvenintegrale

5.17 Residuum und Polstellen

5.18 Residuensatz und Anwendung zur Berechnung von Kurvenintegralen





## Teil IV

# Fourier-Transformation

## 6 Fourier-Transformation

## 7 Fourier-Transformation

### 7.1 Definition Fourier-Transformation

### 7.2 Definition Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation und wichtige Beispiele, etwa Dirac-Impuls, Rechtecksimpuls, $e^{iat}$

### 7.3 Rechenregeln und Beispielrechnungen

### 7.4 Fourier-Sinus-Transformation, Fourier-Cosinus-Transformation

### 7.5 Fourier-Integralsatz, Parsevalsche Gleichung

## 8 Fourier-Reihen

### 8.1 Darstellung periodischer Funktionen als Fourier-Reihen

### 8.2 Fourier-Koeffizienten (als „Inverse“)

### 8.3 Orthogonalitätsbeziehung

### 8.4 Darstellungssatz - analog Fourier-Integralsatz

### 8.5 Gibbsches Phänomen

### 8.6 Sinus- und Cosinusreihe für ungerade und gerade Funktionen

### 8.7 Rechenregeln und Analogie zur Fouriertransformation

### 8.8 Größenordnung der Fourier-Koeffizienten

### 8.9 Periodische Faltung

### 8.10 Zusammenhang zwischen Fourier-Transformation und Fourier-Reihen

## 9 Anwendungen in Signalverarbeitung und Kompression

### 9.1 Signalübertragung: Modulation und Multiplexing

#### 9.1.1 Phasenmodulation mit QPSK – Quadrature Phase Shift Keying

### 9.2 FDM – Frequency Division Multiplexing

### 9.3 Digitale Filter und Ideen der mp3-Kompression

#### 9.3.1 Faltung von Folgen, Faltung und Matrizenmultiplikation

#### 9.3.2 Tiefpassfilter, Hochpassfilter

#### 9.3.3 Kompression von Audiosignalen: Bandunterteilung und Idee der psychoakustischen Modelle

## 10 Diskrete Fourier-Transformation und Abtasten (Sampling)

---

Teil V

# Laplace-Transformation

---

Teil VI

# Z-Transformation