

# Zusammenfassung Integraltransformationen

Prof. Dr. Gerta Köster

16. November 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundwissen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
2.1	Funktionaltransformationen* . . . . .	2
2.2	Zeitfunktionen . . . . .	4
2.3	Dirac-Stoß . . . . .	4
2.4	Faltung von Funktionen . . . . .	4
2.5	komplexe Funktionen . . . . .	4
2.5.1	insbesondere Exponentialfunktion, Logarithmus, sin, cos, sinh, cosh, Wurzel, Polynome . . . . .	4
2.5.2	Grenzwerte für komplexe Funktionen . . . . .	4
2.5.3	Stetigkeit . . . . .	4
2.5.4	Differenzierbarkeit, Ableitung . . . . .	4
2.5.5	Holomorphie . . . . .	4
2.5.6	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen . . . . .	4
2.5.7	Potenzreihen, Konvergenz, Konvergenzradius . . . . .	4
2.5.8	spezielle Laurentreihe und Laurentreihe . . . . .	4
2.5.9	Potenzreihen und holomorphe Funktionen . . . . .	4
2.5.10	Taylorentwicklung . . . . .	4
2.5.11	Laurentreihen und Holomorphie . . . . .	4
2.5.12	Stammfunktionen und Kurvenintegrale . . . . .	4
2.5.13	Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen . . . . .	4
2.5.14	Hauptsatz der Integralrechnung . . . . .	4
2.5.15	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	4
2.5.16	Laurent-Koeffizienten und Kurvenintegrale . . . . .	4
2.5.17	Residuum und Polstellen . . . . .	4

2.5.18	Residuensatz und Anwendung zur Berechnung von Kurvenintegralen . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>5</b>
3.1	Fourier-Transformation . . . . .	6
3.2	Fourier-Transformation . . . . .	6
3.2.1	Definition Fourier-Transformation . . . . .	6
3.2.2	Definition Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation und wichtige Beispiele, etwa Dirac-Impuls, Rechtecksimpuls, $e^{iat}$ . . . . .	6
3.2.3	Rechenregeln und Beispielrechnungen . . . . .	6
3.2.4	Fourier-Sinus-Transformation, Fourier-Cosinus-Transformation . . . . .	6
3.2.5	Fourier-Integralsatz, Parsevalsche Gleichung . . . . .	6
3.3	Fourier-Reihen . . . . .	6
3.3.1	Darstellung periodischer Funktionen als Fourier-Reihen	6
3.3.2	Fourier-Koeffizienten (als „Inverse“) . . . . .	6
3.3.3	Orthogonalitätsbeziehung . . . . .	6
3.3.4	Darstellungssatz - analog Fourier-Integralsatz . . . . .	6
3.3.5	Gibbsches Phänomen . . . . .	6
3.3.6	Sinus- und Cosinusreihe für ungerade und gerade Funktionen . . . . .	6
3.3.7	Rechenregeln und Analogie zur Fouriertransformation	6
3.3.8	Größenordnung der Fourier-Koeffizienten . . . . .	6
3.3.9	Periodische Faltung . . . . .	6
3.3.10	Zusammenhang zwischen Fourier-Transformation und Fourier-Reihen . . . . .	6
3.4	Anwendungen in Signalverarbeitung und Kompression . . . . .	6
3.4.1	Signalübertragung: Modulation und Multiplexing . . . . .	6
3.4.1.1	Phasenmodulation mit QPSK – Quadrature Phase Shif Keying . . . . .	6
3.4.2	FDM – Frequency Division Multiplexing . . . . .	6
3.4.3	Digitale Filter und Ideen der mp3-Kompression . . . . .	6
3.4.3.1	Faltung von Folgen, Faltung und Matrizenmultiplikation . . . . .	6

3.4.3.2	Tiefpassfilter, Hochpassfilter . . . . .	6
3.4.3.3	Kompression von Audiosignalen: Bandunterteilung und Idee der psychoakustischen Modelle . . . . .	6
3.5	Diskrete Fourier-Transformation und Abtasten (Sampling) .	6
3.5.1	Definition der diskreten Fourier-Transformation und Inverse . . . . .	6
3.5.2	Abtasttheorem nicht-periodischer Fall . . . . .	6
3.5.3	Abtasttheorem von Shannon-Nyquist für den periodischen Fall . . . . .	6
3.5.4	Rezept zur Signalrekonstruktion . . . . .	6
3.5.5	Fast Fourier Transform . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Z-Transformation</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>References</b>	<b>9</b>

# Kapitel 1

## Grundwissen

# Kapitel 2

## Einführung

### 2.1 Funktionaltransformationen\*

Zur Einführung empfehle ich die Videos *Integraltransformationen Einführung Teil 1* von Stephan Mueller <https://youtu.be/9JEUy8mKOw> und *20.08 Funktionaltransformationen, Fourier, Laplace, z* Jörn Loviscach <https://youtu.be/A6UK5cqSYic>.

Integraltransformationen sind spezielle Funktionaltransformationen.



## 2.2 Zeitfunktionen

## 2.3 Dirac-Stoß

## 2.4 Faltung von Funktionen

## 2.5 komplexe Funktionen

### 2.5.1 INSBESONDERE EXPONENTIALFUNKTION, LOGARITHMUS, SIN, COS, SINH, COSH, WURZEL, POLYNOME

### 2.5.2 GRENZWERTE FÜR KOMPLEXE FUNKTIONEN

### 2.5.3 STETIGKEIT

### 2.5.4 DIFFERENZIERBARKEIT, ABLEITUNG

### 2.5.5 HOLOMORPHIE

### 2.5.6 CAUCHY-RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

### 2.5.7 POTENZREIHEN, KONVERGENZ, KONVERGENZRADIUS

### 2.5.8 SPEZIELLE LAURENTREIHE UND LAURENTREIHE

### 2.5.9 POTENZREIHEN UND HOLOMORPHE FUNKTIONEN

### 2.5.10 TAYLORENTWICKLUNG

### 2.5.11 LAURENTREIHEN UND HOLOMORPHIE

### 2.5.12 STAMMFUNKTIONEN UND KURVENINTEGRALE

### 2.5.13 WEGUNABHÄNGIGKEIT VON KURVENINTEGRALEN





# Kapitel 3

## Fourier-Transformation

### 3.1 Fourier-Transformation

### 3.2 Fourier-Transformation

#### 3.2.1 DEFINITION FOURIER-TRANSFORMATION

#### 3.2.2 DEFINITION FOURIER-TRANSFORMATION UND INVERSE FOURIER-TRANSFORMATION UND WICHTIGE BEISPIELE, ETWA DIRAC-IMPULS, RECHTECKSIMPULS, $e^{iat}$

#### 3.2.3 RECHENREGELN UND BEISPIELRECHNUNGEN

#### 3.2.4 FOURIER-SINUS-TRANSFORMATION, FOURIER-COSINUS-TRANSFORMATION

#### 3.2.5 FOURIER-INTEGRALSATZ, PARCEVALSCHE GLEICHUNG

### 3.3 Fourier-Reihen

6

#### 3.3.1 DARSTELLUNG PERIODISCHER FUNKTIONEN ALS FOURIER-REIHEN

## Kapitel 4

# Laplace-Transformation

# Kapitel 5

## Z-Transformation

## Kapitel 6

## References