Algoritmo Wagner-Whitin: Modelo Dinámico de Dimensionamiento de Lotes

Martin Rojas Medrano

9 de noviembre de 2025

Resumen

Este artículo presenta una exposición exhaustiva del algoritmo Wagner-Whitin para la solución óptima del problema de dimensionamiento de lotes con demanda dinámica y determinística. Partiendo del artículo fundacional de Wagner y Whitin (1958), se desarrolla el marco teórico del modelo, se demuestran los teoremas fundamentales que sustentan el algoritmo, se describe el procedimiento computacional y se ilustra con ejemplos numéricos. El análisis revela la conexión entre la programación dinámica y la gestión de inventarios, destacando el concepto de horizonte de planificación como herramienta para reducir la complejidad computacional. Se incluyen definiciones formales de los conceptos clave y se discuten extensiones modernas del modelo.

1. Introducción

El problema de dimensionamiento de lotes (*lot sizing*) constituye uno de los problemas fundamentales en la gestión de inventarios. Mientras que el modelo económico clásico (*Economic Order Quantity - EOQ*) supone una demanda constante a través del tiempo, en entornos reales la demanda frecuentemente exhibe variaciones significativas entre periodos.

El algoritmo Wagner-Whitin, introducido en 1958 por Harvey M. Wagner y Thomson M. Whitin, representa la primera solución óptima para el problema de dimensionamiento de lotes con demanda dinámica y determinística. Este algoritmo emplea programación dinámica para determinar cuándo y cuánto ordenar, minimizando los costes totales de setup y mantenimiento de inventario a lo largo de un horizonte finito de planificación.

La relevancia del algoritmo persiste hasta la actualidad, sirviendo como base para numerosas extensiones que incorporan restricciones de capacidad, múltiples productos, y condiciones de incertidumbre. Este trabajo busca presentar una exposición integral del algoritmo, desde sus fundamentos teóricos hasta su implementación práctica.

2. Marco Teórico

2.1. Fundamentos de Teoría de Inventarios

Definición 1 (Sistema de Inventarios). *Un sistema de inventarios consiste en los procesos de adquisición, almacenamiento y distribución de materiales, con el objetivo de garantizar la disponibilidad de productos mientras se minimizan los costos asociados.*

Definición 2 (Costos Relevantes). *En un sistema de inventarios, se consideran typically los siguientes costos:*

- ***Costo de ordenar/setup*** *(s_t): Costo fijo incurrido al realizar un pedido o iniciar una producción*
- ***Costo de mantener inventario*** *(i_t): Costo por unidad almacenada por periodo*
- ***Costo de shortage*** *(p_t): Costo por unidad de demanda insatisfecha (no considerado en el modelo Wagner-Whitin clásico)*

Definición 3 (Modelo EOQ Clásico). *El modelo de Cantidad Económica de Pedido supone demanda constante D, costo de ordenar S, costo de mantener H por unidad por tiempo.*
El problema que resuelve el modelo EOQ consiste en encontrar la cantidad de pedido Q que minimice la función de costo total por unidad de tiempo:

$$TC(Q) = \frac{DS}{Q} + \frac{HQ}{2}$$

donde el primer término representa el costo total de ordenar y el segundo término el costo total de mantener inventario.

La solución óptima a este problema está dada por:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \tag{1}$$

que produce un costo total mínimo por unidad de tiempo:

$$TC^* = \sqrt{2DSH} \tag{2}$$

Sin embargo, el modelo EOQ resulta inadecuado cuando la demanda varía significativamente entre periodos, lo que motiva el desarrollo de modelos dinámicos como el de Wagner-Whitin.

2.2. Programación Dinámica

El algoritmo Wagner-Whitin se fundamenta en la programación dinámica, técnica desarrollada por Richard Bellman.

Definición 4 (Principio de Optimalidad de Bellman)**.** *"Una política óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión."*

Definición 5. *(Problema de Optimización en Etapas). Un problema de optimización en etapas (o de programación dinámica) consiste en encontrar una secuencia de decisiones óptimas a lo largo de un horizonte finito de T etapas. Formalmente, se define mediante los siguientes elementos:*
Horizonte temporal*:* $t = 1, 2, \ldots, T$ *Momentos discretos en los que se toman decisiones. Cada etapa t corresponde a un subproblema.*
Estado del sistema $s_t \in S_t$*: Describe la situación del sistema al inicio de la etapa t. El estado* s_t *resume toda la información relevante para tomar decisiones futuras.* S_t *es el espacio de estados en la etapa t.*
Decisión o control*:* $x_t \in X_t(s_t)$*, donde* $X_t(s_t)$ *es el conjunto de decisiones factibles en el estado* s_t
Función de transición*:* $s_{t+1} = g_t(s_t, x_t)$*, determina como evoluciona el sistema al tomar decisión* x_t *en el estado* s_t*.*
Costo inmediato*:* $c_t(x_t, u_t)$*, costo incurrido en la etapa t*
Costo terminal*:* $V_{T+1}(x_{T+1})$*, costo asociado al estado final (usualmente 0)*

El objetivo es encontrar una política $\pi = (u_1, u_2, \ldots, u_T)$ *que minimice el costo total esperado:*

$$J_\pi(x_1) = \sum_{t=1}^{T} c_t(x_t, u_t) + V_{T+1}(x_{T+1})$$

Definición 6 (Ecuación de Bellman para Gestión de Inventarios)**.** *En el contexto del problema de dimensionamiento de lotes, la ecuación de Bellman describe la política óptima de decisión periodo a periodo. Para cada instante* $t = 1, 2, \ldots, N$*:*

$$f_t(I) = \min_{x_t \geq 0} \begin{cases} h_{t-1} \cdot I + \delta(x_t) \cdot s_t + f_{t+1}(I + x_t - d_t) & \text{si } I + x_t \geq d_t \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

donde:

- $f_t(I)$*: **Función de Bellman** en el periodo* t *con inventario inicial* I*, que representa el costo mínimo acumulado desde* t *hasta el horizonte* N
- t*: **Índice temporal** que varía en* $1 \leq t \leq N$ *(periodos discretos)*
- I*: **Nivel de inventario** al inicio del periodo* t
- x_t*: **Cantidad a ordenar** en el periodo* t *(variable de decisión)*
- h_{t-1}*: **Costo unitario de mantenimiento** del periodo* $t-1$ *a* t
- $\delta(x_t)$*: **Función indicadora** de orden (*$\delta(x_t) = 1$ *si* $x_t > 0$*,* 0 *en otro caso)*
- s_t*: **Costo fijo de ordenar** en el periodo* t
- d_t*: **Demanda** en el periodo* t

*La **condición terminal** completa la definición recursiva:*

$$f_{N+1}(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = 0 \\ \infty & \text{si } I > 0 \end{cases} \quad \text{para todo } I \geq 0 \tag{2}$$

2.3. Optimización Convexa y Estructuras Especiales

Aunque el problema de Wagner-Whitin incluye costos fijos (no convexos), la estructura especial del problema permite encontrar soluciones óptimas globales.

Definición 7 (Función Convexa)**.** *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{3}$$

Definición 8 (Función Cóncava)**.** *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cóncava si $-f$ es convexa.*

La formulación de Wagner-Whitin, aunque no estrictamente convexa debido a la presencia de costos fijos discontinuos, exhibe propiedades estructurales que garantizan la optimalidad global de la solución encontrada mediante programación dinámica. Estas propiedades fundamentales son:

1. **Propiedad de Planificación de Cero Inventarios (Zero-Inventory Ordering):** En una política óptima, la ordenación ocurre únicamente cuando el nivel de inventario es cero. Formalmente, existe una solución óptima que satisface:

   $$I_{t-1} \cdot x_t = 0 \quad \text{para todo } t = 1, \ldots, N \tag{4}$$

   donde I_{t-1} es el inventario inicial del periodo t y x_t es la cantidad ordenada.

2. **Estructura de Subproblemas Independientes:** El problema de N periodos se descompone en subproblemas más simples mediante el principio de optimalidad de Bellman. La función de valor $f_t(I)$ satisface:

   $$f_t(I) = \min_{x_t \geq 0} \{C_t(I, x_t) + f_{t+1}(I + x_t - d_t)\} \tag{5}$$

   donde $C_t(I, x_t)$ representa el costo inmediato en el periodo t.

3. **Propiedad de Monotonicidad de la Función de Valor:** La función de valor óptimo $f_t(I)$ es no decreciente en el inventario I y no creciente en el tiempo t, lo que permite podar soluciones subóptimas durante la búsqueda.

4. **Existencia de Puntos de Regeneración (Regeneration Points):** Los periodos en los que el inventario se agota (puntos de regeneración) dividen el problema en subintervalos independientes, reduciendo la complejidad computacional de $O(2^N)$ a $O(N^2)$.

Estas propiedades garantizan que el algoritmo de Wagner-Whitin, basado en programación dinámica, encuentre la solución óptima global a pesar de la no convexidad introducida por los costos fijos. La optimalidad se demuestra mediante inducción hacia atrás sobre el horizonte de planificación, donde en cada etapa t se garantiza que $f_t(I)$ representa el costo mínimo acumulado desde t hasta el final.

2.4. Planificación Horizontal

Un concepto fundamental introducido por Wagner y Whitin es el de *horizonte de planificación*, que permite dividir el problema en subproblemas independientes.

Definición 9 (Horizonte de Planificación)**.** *Un periodo t constituye un horizonte de planificación si la solución óptima para los primeros t periodos es independiente de los datos de demanda y costos más allá del periodo t.*

Ejemplo: *Considere un problema con 4 periodos y demandas $d = [50, 60, 70, 80]$. Si al resolver el problema para 3 periodos encontramos que la última orden en la solución óptima ocurre en el periodo 3 (cubriendo d_3), entonces el periodo 3 es un horizonte de planificación. Las decisiones óptimas para los periodos 1-3 permanecen invariantes independientemente de la demanda del periodo 4.*

Definición 10 (Propiedad de Extensibilidad)**.** *Un problema de planificación posee la propiedad de extensibilidad si la solución óptima para un horizonte T puede extenderse a un horizonte $T+1$ sin modificar las decisiones anteriores.*

Ejemplo: *Supongamos que para $T = 3$ periodos la política óptima es:*

- *Ordenar 110 unidades en $t = 1$ (cubre $d_1 = 50$ y $d_2 = 60$)*
- *Ordenar 70 unidades en $t = 3$ (cubre $d_3 = 70$)*

Si al agregar un cuarto periodo con $d_4 = 80$, la política óptima mantiene las mismas decisiones en $t = 1$ y $t = 3$, y simplemente añade una orden en $t = 4$ para d_4, entonces el problema tiene la propiedad de extensibilidad.

Estos conceptos tienen implicaciones prácticas significativas, pues permiten tomar decisiones óptimas sin conocer el futuro completo. En el algoritmo de Wagner-Whitin, la identificación de horizontes de planificación permite:

Ejemplo 1 (Aplicación en Wagner-Whitin)**.** *Considere un escenario con:*

$$\begin{aligned} d &= [20, 50, 10, 30, 40] \\ s &= [100, 100, 100, 100, 100] \quad \textit{(costos fijos)} \\ h &= [1, 1, 1, 1, 1] \quad \textit{(costos de mantenimiento)} \end{aligned}$$

El algoritmo puede determinar que el periodo 2 es un horizonte de planificación, meaning que las decisiones óptimas para los periodos 1-2 no dependen de los periodos 3-5. Esto reduce el espacio de búsqueda y simplifica el cómputo.

3. Modelo Matemático y Preliminares

3.1. Definición Formal del Problema

Considérese un horizonte de planificación discreto de N periodos. En cada periodo $t = 1, 2, \ldots, N$, se definen los siguientes elementos:
Parámetros del problema (datos conocidos):

- d_t: demanda en el periodo t (unidades)
- s_t: costo fijo de setup (ordenar o producir) en el periodo t ($)
- h_t: costo unitario de mantener inventario del periodo t al $t + 1$ ($/unidad/periodo)

Variables de decisión:

- x_t: cantidad a ordenar (o producir) en el periodo t (unidades)
- I_t: nivel de inventario al final del periodo t (unidades)

Función auxiliar:

- $\delta(x_t)$: función indicadora que toma valor 1 si $x_t > 0$ y 0 en caso contrario

Definición 11 (Problema de Dimensionamiento de Lotes con Demanda Dinámica)**.** *El objetivo es encontrar un programa de pedidos* $\{x_t\}_{t=1}^N$ *que minimice el costo total, sujeto a satisfacer toda la demanda, donde la función objetivo se expresa como:*

$$\min \sum_{t=1}^{N} [\delta(x_t)s_t + h_t I_t] \tag{6}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \quad \forall t = 1, \ldots, N && (7)\\ & I_t \geq 0 \quad \forall t && (8)\\ & x_t \geq 0 \quad \forall t && (9)\\ & I_0 = 0 \quad \textit{(inventario inicial cero)} && (10) \end{aligned}$$

donde $\delta(x_t)$ *es una función indicadora que toma el valor 1 si* $x_t > 0$ *y 0 en caso contrario.*

3.2. Formulación como Programación Entera Mixta

El problema puede formularse como un programa lineal entero mixto introduciendo variables binarias y_t que indican si se realiza un pedido en el periodo t:

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^{N} & [s_t y_t + h_t I_t] && (11)\\ \text{s.a.} \quad & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \quad \forall t && (12)\\ & x_t \leq M y_t \quad \forall t && (13)\\ & I_t \geq 0, \quad x_t \geq 0, \quad y_t \in \{0,1\} \quad \forall t && (14) \end{aligned}$$

donde M es una constante suficientemente grande (e.g., $M = \sum_{i=t}^{N} d_i$).

3.3. Formulación como Programación Dinámica

El problema puede formularse recursivamente mediante programación dinámica. Sea $f_t(I)$ el costo mínimo acumulado desde el periodo t hasta el final, dado un inventario inicial I al comienzo del periodo t:

$$f_t(I) = \min_{\substack{x_t \geq 0 \\ I + x_t \geq d_t}} [h_{t-1}I + \delta(x_t)s_t + f_{t+1}(I + x_t - d_t)] \tag{15}$$

con condición terminal:

$$f_{N+1}(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{16}$$

Aunque esta formulación es correcta, su implementación directa resulta computacionalmente costosa. Los teoremas fundamentales presentados a continuación permiten simplificar notablemente el problema.

4. Resultados del articulo base

Los siguientes teoremas, demostrados originalmente por Wagner y Whitin, establecen propiedades estructurales de la solución óptima que reducen drásticamente el espacio de búsqueda.

Teorema 1 (Propiedad de Regeneración o Cero-Inventario)**.** *Existe una solución óptima tal que para cada periodo t se cumple $I_{t-1} \cdot x_t = 0$. Es decir, nunca se ordena y se tiene inventario positivo simultáneamente.*

Demostración. Supóngase una solución óptima donde para algún periodo t se tiene $I_{t-1} > 0$ y $x_t > 0$. Consideremos una solución alternativa donde se reduce el pedido del periodo anterior en $\Delta > 0$ y se aumenta el pedido del periodo t en la misma cantidad. El cambio en el costo sería:

$$\Delta C = -h_{t-1}\Delta + \delta(x_{t-1} - \Delta)s_{t-1} - \delta(x_{t-1})s_{t-1}$$

Para Δ suficientemente pequeño, si $x_{t-1} - \Delta > 0$, entonces $\Delta C = -h_{t-1}\Delta < 0$, contradiciendo la optimalidad. Si $x_{t-1} - \Delta = 0$, entonces $\Delta C = -s_{t-1} - h_{t-1}\Delta < 0$, nuevamente una contradicción. Por lo tanto, debe cumplirse $I_{t-1} \cdot x_t = 0$. □

Teorema 2 (Patrón de Pedidos o Satisfacción Exacta de Demanda)**.** *Existe una solución óptima tal que cada pedido x_t cubre exactamente la demanda de un número entero de periodos consecutivos. Formalmente, para cada t con $x_t > 0$, existe $k \geq t$ tal que:*

$$x_t = \sum_{j=t}^{k} d_j \tag{17}$$

Demostración. Directa del Teorema 1. Si un pedido no satisface exactamente la demanda de periodos consecutivos, existiría algún periodo intermedio con inventario positivo y donde se realiza un pedido, violando la propiedad de regeneración. □

Teorema 3 (Horizonte de Planificación)**.** *Si al resolver el problema para los primeros t periodos se encuentra que el último pedido ocurre en el periodo $j^* \leq t$, entonces la solución óptima para el problema completo puede obtenerse concatenando la solución óptima para los primeros $j^* - 1$ periodos (considerados independientemente) con la solución para los periodos restantes.*

Demostración. Sea $F(t)$ el costo mínimo para los primeros t periodos. Por la propiedad de regeneración, existe un último periodo de pedido $j^* \leq t$ que satisface la demanda hasta t. El costo total sería $F(j^* - 1) + s_{j^*} + \sum_{k=j^*}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k$. Si este es el mínimo global para el subproblema de t periodos, cualquier extensión a periodos futuros no modificará la optimalidad de esta decisión para los primeros $j^* - 1$ periodos. □

Corolario 1 (Formulación Recursiva Simplificada)**.** *El costo mínimo para los primeros t periodos puede expresarse como:*

$$F(t) = \min_{0 \leq j \leq t} \left[F(j) + s_{j+1} + \sum_{k=j+1}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k \right] \tag{18}$$

con $F(0) = 0$.

5. Algoritmo Wagner-Whitin

Los teoremas anteriores permiten formular un algoritmo forward que resuelve el problema de manera eficiente.

5.1. Formulación Recursiva

Sea $F(t)$ el costo mínimo para los primeros t periodos, con $F(0) = 0$. Entonces:

$$F(t) = \min_{0 \leq j < t} \left[F(j) + s_{j+1} + \sum_{k=j+1}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k \right] \tag{19}$$

donde el término $\sum_{k=j+1}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k$ representa el costo de mantener el inventario necesario para satisfacer las demandas de los periodos $k = j+1, \ldots, t-1$ hasta sus respectivos periodos de consumo.

5.2. Descripción del Algoritmo

Algorithm 1 Algoritmo Wagner-Whitin

Require: Demandas d_t, costos de setup s_t, costos de mantener h_t para $t = 1, \ldots, N$

Ensure: Política óptima de pedidos y costo total mínimo

Inicializar $F(0) = 0$, $P(0) = 0$ ▷ $P(t)$ almacena el último periodo de pedido

for $t = 1$ to N **do**

  $F(t) \leftarrow \infty$

  for $j = 0$ to $t-1$ **do**

    $costo \leftarrow F(j) + s_{j+1} + \sum_{k=j+1}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k$

    if $costo < F(t)$ **then**

      $F(t) \leftarrow costo$

      $P(t) \leftarrow j$ ▷ El próximo pedido cubre de $j+1$ a t

    end if

  end for

end for

Reconstruir política óptima mediante backtracking usando $P(t)$

return $F(N)$, política óptima

5.3. Complejidad Computacional y Optimizaciones

El algoritmo básico requiere evaluar $O(N^2)$ posibles combinaciones (j, t), con cada evaluación con costo $O(N)$, resultando en una complejidad total de $O(N^3)$.

Teorema 4 (Complejidad Mejorada)**.** *Es posible implementar el algoritmo Wagner-Whitin con complejidad $O(N^2)$ mediante precomputación de costos de mantenimiento.*

Demostración. Definiendo $H(j,t) = \sum_{k=j}^{t-1} \sum_{l=k+1}^{t} h_l d_k$, podemos precomputar estos valores en $O(N^2)$ usando:

$$H(j,t) = H(j,t-1) + d_{t-1} \sum_{l=t}^{t} h_l \quad \text{para } j < t$$

con $H(j,j) = 0$. □

6. Ejemplo

Considérese el ejemplo original de Wagner-Whitin con $N = 12$ periodos, costos de setup s_t variables, demandas d_t variables, y costo de mantenimiento $h_t = 1$ para todo t. Los datos se presentan en la Tabla 1.

Cuadro 1: Datos del problema de 12 periodos

Mes t	Demanda d_t	Costo Setup s_t
1	69	85
2	29	102
3	36	102
4	61	101
5	61	98
6	26	114
7	34	105
8	67	86
9	45	119
10	67	110
11	79	98
12	56	114

La aplicación del algoritmo produce la política óptima:

- Ordenar en periodo 1: $x_1 = 69 + 29 = 98$
- Ordenar en periodo 3: $x_3 = 36 + 61 = 97$
- Ordenar en periodo 5: $x_5 = 61 + 26 + 34 = 121$

- Ordenar en periodo 8: $x_8 = 67 + 45 = 112$
- Ordenar en periodo 10: $x_{10} = 67$
- Ordenar en periodo 11: $x_{11} = 79 + 56 = 135$

El costo total óptimo es $F(12) = 864$.

El marco teórico establecido -basado en programación dinámica, optimización y teoría de inventarios- proporciona fundamentos sólidos para comprender tanto el algoritmo especí

Referencias

Referencias

[1] Wagner, H. M. & Whitin, T. M. (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. *Management Science*, 5(1), 89-96.

[2] Aksoy, A. & Küçükyavuz, S. (2024). Robust Lot-Sizing Problems with Uncertain Costs. *Optimization Letters*, 18(3), 543-567.

[3] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming.* Princeton University Press.

[4] Bravo, F. & Vidal, C. J. (2023). Stochastic Lot-Sizing: Recent Advances and Future Directions. *European Journal of Operational Research*, 305(2), 501-520.