

# 완벽하지 않은 논리의 찬란한 미래

김홍진

## Abstract

우리의 논리는 완벽하지 않다. 칸토어와 힐베르트는 수학의 기초가 되는 논리를 밑바닥에서부터 정의하기 위해 많은 노력을 기울였다. 하지만 괴델이 1930년 세상에 발표한 불완전성 정리는 이것이 결국 이루어질 수 없는 목표라는 것을 밝다. 그렇다면 완벽하지 않은 논리를 연구하는 것은 무의미한 일일까? 그렇지 않다. 오히려 완벽한 논리 - 이것이 존재하지 않는다는 것이 증명되었지만 - 를 연구하는 일보다 훨씬 더 값진 일이다. 왜 완벽하지 않은 논리가 완벽한 논리보다 더 좋을까?

많은 사람들은 논리란 완벽한 것이라고 생각한다. 흔히 '논리적인 사람' 이라고 하면 말에 빈틈이 없고, 매사에 합리적인 판단을 통해 최선의 선택을 하는 사람이라고 생각한다. 이와 비슷하게 흔히 '논리' 라고 하면 사람들이 가지고 있는 이미지가 있다. 특히 수학과에 진학해 매일같이 수학의 논리를 배우는 학생들에게 왜 이것을 배우고 있냐고 묻는다면 항상 나오는 대답이 있다. 답이 하나로 정해져 있어서, 수학의 논리는 완벽하니까. 그렇다면 완벽한 논리란 무엇일까? 단순히 생각해 보면, 논리적인 증명을 통해 얻어낸 명제는 항상 옳아야 하고, 내부적인 모순이 없어야만 한다. 또한 참인 명제는 모두 증명해낼 수 있어야 한다. 이를 각각 건전하고, 무모순이고, 완전한 논리 체계라고 한다. 논리 속의 공리 그 자체만으로 이미 모순인 논리나, 참임에도 불구하고 증명해낼 수 없는 명제가 있는 논리는 우리가 생각하는 '완벽한' 모습의 논리가 아니다.

그렇다면 우리가 매일 배우고, 사용하고, 또 만들어가고 있는 논리는 정말로 완벽한 것일까? 힐베르트는 이러한 논리 체계를 가진 수학을 만들어내기 위해 많은 노력을 기울였다. 그는 수학은 완전하고, 무모순이며, 또한 결정 가능한 논리 구조 위에서 이루어질 수 있다고 굳게 믿었다. 그는 실제로 이를 만들어내기 위해 칸토어의 집합론을 기반으로 몇 권에 걸쳐 논리 기호만으로 만들어진 엄청난 양의 증명을 쓰기도 했다. 그러나 그의 노력은 얼마 되지 않아 1930년 쿠르트 괴델에 의해 좌절되고 만다. 현대 수학에서 사용되는 '공리계' 라고 불리는 논리 구조는 무모순인 동시에 완전할 수 없으며, 또한 공리계 이루는 공리가 무모순이라 하더라도 그 공리들만으로는 그 무모순성을 증명할 수 없다는 것을 밝혀낸 것이다. 쉽게 말해서 공리로 된 논리에서 무모순성과 완전성은 양립할 수 없으며, 또한 무모순성을 가진다고 하더라도 이를 공리계 그 자신만으로는 증명할 수 없다는 것이다. 이후에도 앨런 튜링이 튜링 머신의 아이디어를 이용해 현대 수학의 공리계는 결정 가능하지 않다는 것을 증명하였다.

그러면 이런 완전하지도, 결정 가능하지도 않으면서 언제 모순이 터질지 모르는 시한폭탄과도 같은 논리 체계는 우리가 원하던 논리가 아닌 것일까? 물론 그렇게 생각할 수도 있다. 그러나 이 논리 체계가 우리가 원하던 이상적인 논리의 모습은 아닐지라도, 충분히 그 속에 엄청난 보물을 지니고 있다. 비록 완벽한 논리 체계로부터 모든 참인 명제를 증명해 내려던 힐베르트의 꿈은 신기루가 되어 사라졌지만, 아직까지 우리가 앞으로 수학을 발전시켜 나가는데 쓰기에 충분한 공리가 우리에게 남아있다. 사실 우리는 집합론 조차 없는 상태에서 몇 천년간 수학을 잘 발전시켜 오지 않았는가? 기초가 꼭 완벽하지 않더라도 수학은 발전한다. 중간중간에 생기는 허점은 계속해서 후대의 수학자가 보완해 나가면 될 것이다. 해석학의 근간을 이루는 극한의 개념도 처음에는 잘못되어 있었다. 그로 인해 극한의 개념이 엄밀하게 다시 정의되었음에도 불구하고 그때까지 쌓여 있었던 미적분학과 해석학은 크게 바뀌지 않은 채로 지금까지 받아들여지고 있다. 허점이 너무 많이 생겨 수학의 근간이 흔들리는 일이 생기더라도, 언젠가는 그것들을 모두 바로잡고 더 나아갈 것이다.

또한 우리가 사랑한 수학은 완벽한 논리와는 어울리지 않을지도 모른다. 수학자들은 언제나 새로운 수학 문제를 갈구한다. 우리가 컴퓨터 게임을 할 때 엔딩을 보고 나면 새로운 게임을 찾게 되는 것처럼 말이다. 그런데 수학의 논리가 완벽하다는 것은, 언젠가 어떤 명제든지 쉽게 풀어낼 수 있는 방법이 나타날지도 모른다는 것이다. 수학을 연구하는 사람에게 이것은 크나큰 두려움이 아닐 수 없다. 더 이상 수학자가 필요 없어진다는 것이니까. 하지만 이제는 그런 걱정을 할 필요가 없다. 우리의 논리는 완벽하지 않으며, 수학을 '완전히 정복' 한다는 것이 불가능하다는 것이 증명되고 말았다. 우리는 수학이라는 게임의 엔딩을 볼 지도 모른다는 걱정을 평생 할 필요가 없다. 이를 다르게 말하면, 수학의 발전이 멈출 일이 없어졌다는 뜻이다. 우리의 공리계와 수학은 평생 발전할 것이다. 이 얼마나 아름답고 찬란한 미래인가? 지금까지 수학은 완벽을 추구하면서 발전해 왔고, 완벽에 다가갈 수는 있지만 도달할 수 없음이 밝혀진 현재에도, 그리고 미래에도 수많은 사람들이 수학을 발전시켜 나갈 것이다.

아쉽게도 우리 곁에 있는 논리의 모습은 우리가 원하던 그 모습은 아니었다. 그럼에도 불구하고 우리는 이 논리 체계로 우리가 원하던 대부분의 것들을 할 수 있다. 비록 이 공리계 자체가 무모순임을 증명할 수는 없으며, 또한 참임에도 증명할 수 없는 명제들도 몇 있을 것이다. 그럼에도 불구하고 우리가 이 논리 체계를 만들며 얻어내려고 했던 궁극적인 목표인 수학의 발전을 위해서는 이보다 더 좋은 공리계가 없을 것이다. 완벽하지 않은 논리 체계야 말로 수학을 영원히 발전시키는 데 있어서 가장 중요한 요소이다. 완벽하지 않은 논리가 있기에 우리의 논리의 미래, 그리고 수학의 미래는 찬란하게 빛날 것이다.