

# 불완전성 정리와 인간의 이성

박수빈

2022.09.16.

## Abstract

불완전성 정리는 증명할 수 없는 명제의 존재성을 통해 인간 이성의 한계를 제시했다. 우리는 무엇이든, 증명이란 무엇인지 깊이 고민해 볼 필요가 생겼고, 인간의 한계는 근본적으로 무한을 이해할 수 없다는 것임이 나타난다. 많은 역설들이 무한 그 자체나 자기 참조, 즉 무한 재귀와 연관되어 있다. 그래서, 증명이란 과정은 무한이 연관된 사실들을 인간의 뇌가 이해할 수 있도록 유한한 과정으로 줄이는 것이라 볼 수 있고, 이러한 관점을 제시하여 불완전성 정리를 직관적으로 이해할 수 있게 되었다. 그러나 앞으로 불완전성 정리가 우리의 인지와 지성에 주는 의미를 철학적으로 탐구해 볼 필요가 있다.

세상에는 참이지만 그것을 증명할 수 없는 명제가 존재한다. 이는 오스트리아-헝가리 제국 출신 수학자 쿠르트 괴델(Kurt Gödel, 1906-1978)이 1931년에 발표한 내용으로, 불완전성 정리로 널리 알려져 있다. 당시 수학의 무모순성을 증명하기 위해 노력했던 다비트 힐베르트(David Hilbert, 1862-1943) 등의 수학자들에게 타격을 줬을 뿐만 아니라, 인간의 이성에 한계가 있다는 사실로 사회 전체에 큰 충격을 주었다. 수학은 더 이상 완벽하지 않고, 우리에게 어떻게 해도 알 수 없는 것들이 나타난다.

그렇게 되면, 이제는 안다는 것이 과연 무엇인가에 대한 고민거리가 생긴다. 다음과 같은 이야기를 생각해 보자. 전지전능한 신이 있고, 한 수학자가 그와 몰래 이야기할 수 있는 기회를 받았다. 수학자가 리만 가설이 참인지 묻자, 신이 그렇다고 답했다. 수학자가 혹시 그 증명까지 알려줄 수 있는지 묻자, 신이 의아한 표정으로 답하길, “그냥 다 해봤더니 맞던데?” 결국 수학자는 난제의 답을 알았지만 사실 아무것도 얻은 것이 없었고, 수학과 인간 사회에도 물론 아무런 변화가 없었다. 결국 ‘진실’과 ‘증명’은 별개라는 이야기이다. 이 이야기를 통해 생각한 것은 증명이란 과정이 인간에게만, 그리고 인간이기에 필요하다는 것이다. 안타깝게도 인간에게는 유한한 뇌 용량과 유한한 시간만이 주어졌기에, 무한히 많은 경우를 확인해볼 수 없다. 인간에게 무한과 관련된 어떤 명제가 사실임을 알 방법은 오직 증명 뿐이다. 우리는 오직 증명을 통해서만 ‘알 수’ 있고, 그런 이유로 증명할 수 없는 명제가 존재한다는 사실이 우리에게 큰 충격인 것이다.

모든 문제는 자기 자신이 적용되는 곳에서 발생하는 것처럼 보인다. 이발사의 역설에서는 이발사 자기 자신이 이발을 해야 하는지 말아야 하는지에 대한 모순이 생기고, 정치 문제도 어떤 프로그램에 자기 자신을 입력으로 넣는 경우를 가정하여 모순을 보이고, 괴델의 불완전성 정리 역시 대략적으로 말하면 어떤 명제에 그 명제 자기 자신의 괴델 수를 적용했을 때 모순이 생김을 보인다. 결국에는 괴델의 제2 불완전성 정리에 의해 어떤 공리계는 자기 자신이 모순이 없음을 증명할 수 없다는 것이 밝혀진다. 참이지만 증명 불가능한 명제가 존재하고, 결국엔 그것이 자기 자신과 관련이 있을 때라는 사실이 우리의 직관과는 멀게, 그리고 묘하게 느껴진다. 애초에 우리가 느끼기에 자기 자신을 출력하는 프로그램이나 자기 자신을 해석하는 프로그램 같은 건 그냥 이상하지 않은가?

좀 벗어난 얘기지만, 이것은 오랫동안 항상 미묘하게 생각해왔던 사실과도 연관이 있어 보인다. 모든 생명체는 원자로 이루어져 있는데, 그저 원자의 집합체인 인간이 원자에 대해 연구하고 알게 된다는 것이 묘하지 않은가? 마찬가지로, 결국 모든 생명체는 유전자 발현의 결과일 뿐인데, 유전자의 노예인 인간이 유전자를 연구하고 조작하게 되는 것이 묘하지 않은가? 이를 좀 더 추상적으로 생각해본다면, 원자의 법칙으로 가동되는 인간이 원자의 법칙을 규명한다는, 즉 원자의 법칙으로 원자의 법칙을 증명하는 묘한 일이 벌어지고 있는 것이다. 아직 원자의 법칙에 대한 많은 부분은 미지의 영역이지만, 어쩌면 우리가 원자로 이루어져 있다는 그 사실 때문에 애초에 원자에 대해서 알 수 없게 되어 있는 것은 아닌가 하고 상상해 본다. 비약이 심하지만, 공리계의 명제들로는 공리계를 증명할 수 없는 것처럼 말이다.

위와 같은 논의를 통해 점점 더 명확해지는 사실은, 이전에 완벽하다고 생각했던 인간의 이성과 논리는 그저 하나의 작은 한계에 갇혀 있었다는 것이다. 우리가 그저 유한한 원자로 이루어진 생명체라는 그 사실 말이다. 증명을 더 이상 보편적인 개념이 아닌, 인간이라는 특정 종에 필요한 것이라고 생각하면 모든 것이 명확해진다. 증명이란, 무한히 많은 사실을 압축해서 유한한 인간의 뇌에 들어가도록 만들어주는 도구이다. 인간의 유한한

뇌는 무한히 많은 사실을 검증해 볼 수도 없고, 무한히 꼬리를 무는 자기 참조나 무한히 깊은 재귀를 생각할 수 없기 때문이다.

결론적으로, 증명이 불가능하다는 것은, 단순히 무한히 많은 사실을 유한하게 압축할 수 없음을 의미한다. 직관적으로 생각해도 자연스럽다. 무한히 많은 사실을 항상 유한하게 압축할 수 있다는 보장은 어디에도 없다. 증명은 단순히 인간을 위한 개념이기 때문이다. 이것이 묘한 것은, 우리 뇌의 물리적 한계를 고려해서 내린 결론이란 것이다. 이전에 수많은 모순을 낳은 바로 그 자기 참조를 통해서 말이다. 괴델의 불완전성 정리는 논리와 수학의 채울 수 없는 구멍에 대해 지적해냈지만, 그것이 우리의 뇌와 지성에 있어서 무엇을 의미하는지 철학적으로 생각해 볼 가치가 아직 남아있는 것 같다.