# 수학은 충분히 완벽하다

박해준

2022.09.06.

**Abstract**

칸토어의 무한과 집합에 대한 제안은 수학이 그 근본적 기초를 다시 돌아보게 되는 계기를 마련하였다. 힐베르트가 제시한 형식 체계를 거치며 수학은 완전성(completeness), 일관성(consistency), 결정 가능성(decidablity)을 가질 것으로 보였으나 실제는 그렇지 않았다. 즉 우리가 모르는 수많은 것들 중 어떤 것들은 어쩌면 알 수 없다. 그렇지만 그를 찾아내는 과정 속에서 우리는 컴퓨터와 같이 세상을 바꿀 영감을 받을 수 있다. 이미 발전한 수학만으로도 충분히 많은 인류 문명의 발전을 야기할 수 있다. 수학 형식 체계의 잠재적 붕괴 가능성은 과학, 나아가서는 문명의 발전에 큰 영향을 주지 않을 것이다. 그렇기에 수학은 여전히 가치 있고, 유효하며, 현대 사회를 이끄는 기조가 된다.

역사적으로 수학은 가장 완벽하고 아름다운 학문으로 여기어져 왔다. 불의 발견 이래 인류가 발전하며 다양한 자연 현상을 정확하고 타당하게 분석하는 일이 미덕으로 간주되었고, 이는 과학이라는 개념의 탄생으로 이어진다. 과학은 수학이라는 언어를 통하여 엄밀하게 기술될 수 있었다. 수학은 그 자체로 다른 하나의 학문으로 발전하여 다시 과학의 발전에 기여하기도, 순수하게 그 자신을 통찰하기도 하였다.

후자는 흥미로운 역사를 가지고 있다. 대각선 논법으로 유명한 수학자 칸토어의 집합과 무한에 대한 제안은 비유클리드 기하학과 더불어 수학이 그 자신의 근본적인 기초를 다시 돌아보게 되는 계기를 마련하였다. 직관주의자(intuionist)와 형식주의자(formalist)의 첨예한 대립이 이어지며 수학의 본질에 대한 여러 탐구가 이루어졌고, 수학자 러셀이 집합론의 오류를 정의를 통해 해결하였듯 형식주의 수학자 힐베르트는 새로운 증명 시스템을 개발하여 수학의 기초를 다지기를 원했다. 그는 엄격한 규칙들로 이루어진 논리적 기호 집합을 통해 수학적 명제를 기술할 수 있는 증명 가능한 형식 체계를 마련하였다. 흥미롭게도 이는 그 형식 체계 자체를 증명할 수도 있었다. 힐베르트는 이를 통해 수학에 관한 세 가지 기대감을 품고 있었다. 완전성(completeness), 일관성(consistency), 그리고 결정 가능성(decidability)이었다.

그러나 수학(의 증명 체계)는 완전하지도, 결정 가능하지도 않음이 밝혀졌다. 형식 체계 그 자신의 일관성조차도 증명될 수 없었다. 이는 괴델의 불완전성 정리와 튜링의 정지 문제로 증명되었다. 핵심은, 수학이 '완벽' 하지 않았다는 점이다. 우리가 모르는 수많은 것들 중 어떤 것들은 어쩌면 알 수 없다는 결론과도 상통한다. 이는 많은 학자들을 절망에 빠뜨렸고, 우리의 발전에 한계가 있을지도 모름을 암시했다.

비관론자들이 모든 것을 허무로 되돌리려 할 때, 어떤 들은 탐구를 멈추지 않았다. 그 탐구는 두 가지의 방향으로 나뉘었다. 첫째는 불가능 그 자체에 대한 탐구였고, 둘째는 기존의 수학을 이용한 탐구였다.

불가능에 대한 탐구는 세상을 바꿀 영감을 제공했다. 결정 가능성에 대한 탐구에서 도입된 정지 문제와 튜링 기계(Turing machine)의 개념은 현대 컴퓨터의 시초를 마련하였다. 튜링 머신은 1937년에 고안되었는데, 이는 현 2022년에서 100년이 채 되지 않은 짧은 기간이다. 최초의 컴퓨터로 흔히 알려진 에니악(ENIAC, Electronic Numerical Integrator And Computer)이 현대의 기계 장치보다 비교도 되지 않을 만큼 느리다는 점에서 기술의 발전 속도가 어떠한 지점을 넘어 초월적으로 빨라졌음을 생각할 수 있다. 컴퓨터가 과학의 발전에 끼친 영향을 생각해 보면 흥미롭다. 과학의 언어였던 학문(수학)이 스스로의 결함(결정 불가능성)을 찾다 나온 부산물이 과학을 발전시킨 셈이다.

기존의 수학, 다시 말해 형식 체계에 대한 증명 등을 논하지 않아도 충분한 분야의 수학은 어떨까? 이러한 수학은 원래의 취지였던 과학의 언어를 넘어 독자적인 하나의 학문으로 개척되었으며, 오히려 과학이 수학의 모든 내용을 적용하지 못할 정도가 되어 버렸다. 엄밀한 형식 체계를 차치하고서라도 수학은 이미 과학이 필요로 하는 만큼의 '유창함'을 지녔다고 생각한다. 애초에 그러한 형식 체계는 과학에 적용될 여지가 없다. 형식 체계의 결함이 수많은 수학자의 마음을 아프게 했음에는 유감을 표하고 싶지만, 실용적인 면에서 의미가 없는 이야기이기도 하다.

수학은 충분히 '완벽'하다. 과학이 발전하더라도 현대의 수학만으로 감당할 수 있다. 바꾸어 말하면 수학이 지금 과학에 사용되는 방향–미적분 등–으로 더 이상 발전하지 않아도 인류의 발전에 큰 영향이 없을지도 모름을

시사한다. 형식 체계와 수학 그 자체에 대한 관한 깊은 고찰이 체계의 붕괴를 암시할 때, 더 실용적이고 공학적인 용도로서의 수학은 묵묵히 제자리에서 할 일을 하고 있다. 언젠가 진짜로 그 형식 체계가 붕괴하더라도 미래의 발전에는 별 지장이 없다는 점이 재미있다고 생각한다.

수학에서 과학, 과학에서 공학, 공학에서 문명으로 이어지는 개념의 연결 다리에서 이는 파격적인 제안으로 다가온다. 일관성으로 되돌아가자. 일관성을 증명할 수 없음은 어쩌면 현재까지 수학 체계가 해온 모든 것들이 일관성이 없다는 모순을 불러일으킬지도 모른다. 그렇지만 그러한 깊은 곳의 수학이 품고 있는 잠재적 문제점은 과학에, 나아가 문명의 발전에 영향을 주지 않는다. 컴퓨터의 사례처럼 때로는 불가능을 향한 탐구가 영감을 주어 오히려 발전을 가속하기도 한다. 인류의 발전에 있어 수학은 충분히 유창하고, 완벽하며, 비록 형식 체계가 붕괴하고 수학이 스스로의 모순을 직면하더라도 지금까지의 수학이 이룬 발전은 전혀 무의미하지 않다. 현재까지의 수학이 여전히 가치 있고, 유효하며, 현대 사회를 이끄는 기조가 되는 이유이고, 우리가 지금까지의 수학을 배워야 하는 이유이기도 하다.