SMKS-Ü2 WS 2025/26 Lena-Marie Aßmann Gr. 3

2.1) Überlegen Sie sich, wo im Alltag und in der Wissenschaft Resonanzen eine Rolle spielen.

Wissenschaft: mechanische (schwingende Systeme), elektrische (s. Radioempfang) & akustische Resonanz, NMR, ESR, Absorption, Umlaufzeiten Planeten/Monde, MRT

Alltag: Musikinstrumente, Stimme, Bauwerke (s. Erdbeben), Schaukel

2.2) Was ist eine harmonische Schwingung?

periodische Bewegung, Auslenkung Sin-/Cos-Fkt der Zeit $x(t) = \underbrace{A}_{\text{Amplitude}} \sin(\underbrace{\omega}_{\substack{\text{Kreisfrequenz} \\ \omega = 2\pi f}} t + \underbrace{\varphi}_{\text{Phasenwinkel}})$, Rückstellkraft: proportional zur Auslenkung, entgegengesetzt (Hooke'sches Gesetz) $F = -kx$, Energie: $E_{ges} = const.$, pendel zwischen E_{pot} & E_{kin}

2.3) Rekapitulieren Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation! → Zerlegung Signal $f(t)$ in Frequenzanteile

- Linear $F(a \cdot f + b \cdot g) = a\,F(f) + b\,F(g)$, · Stetig, · Faltung: zwei Fkt. durch Fourier-Transformation in Multiplikation $\mathbb{R}$ überführbar

2.4) Wie hängen Dämpfung und spektrale Breite zusammen?

→ Abklingen einer Schwingung mit der Zeit → endliche spektrale Breite

$\Delta\nu \cdot \tau = \frac{1}{2\pi}$ bzw. $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ → Energie-Zeit-Unschärfe

→ Dämpfung Signal ⇒ Verbreiterung Spektrallinie (keine def. Frequenz mehr)

2.5) Wodurch werden die spektralen Lagen von Resonanzen in der Quantenmechanik festgelegt?

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{diskret gequantelte Energieniveaus} \quad H\psi = E\psi \\ \rightarrow \text{Resonanzbedingung} \quad h\nu = \Delta E \text{ bestimmt spektrale Lage} \end{array}\right\}$ spektrale Lage $\sim \Delta E = E_{angeregt} - E_{Grund}$

2.6) Wovon hängt die Stärke einer quantenmechanischen Resonanz ab? → Wahrscheinlichkeit Übergang zw. zwei Energiezuständen

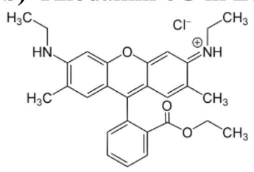
- Übergangsdipolmoment → je größer, desto stärker Übergang
- Auswahlregeln → Abhängig von Symmetrie & Typ Übergang

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die folgenden Moleküle aus den angegebenen Extinktionskoeffizienten die molekularen Absorptionsquerschnitte und vergleichen Sie diese mit aus den Strukturen abgeschätzten physikalischen Querschnittsflächen der Chromophore. Kommentieren Sie ihr Ergebnis in Bezug auf quantenmechanische Oszillatorstärke (Erlaubtheit des elektronischen Übergangs)

a) Benzol: $\varepsilon = 204$ L mol^{-1} cm^{-1} bei $\lambda = 254$ nm

b) Rhodamin 6G in Ethanol: $\varepsilon = 1{,}05 \times 10^5$ L mol^{-1} cm^{-1} bei $\lambda = 530$ nm



$E(\lambda) = \varepsilon(\lambda) c d$

$\alpha(\lambda) = \ln(10)\,\varepsilon(\lambda) c$ α: Absorptionskoeffizient

$\alpha = N\sigma$ N: Teilchendichte

$N = \frac{c \cdot N_A}{1000}$ σ: Absorptionsquerschnitt

$\rightarrow \underbrace{\sigma(\lambda)}_{\left[\frac{cm^2}{Molekül}\right]} = \frac{\alpha(\lambda)}{N} = \varepsilon(\lambda) \underbrace{\frac{\ln(10) \cdot 1000}{N_A}}_{3{,}823 \cdot 10^{-21}}$

a) $\sigma(254\,nm) = 3{,}823 \cdot 10^{-21} \cdot 204 \frac{L}{mol \cdot cm} = 7{,}80 \cdot 10^{-19} \frac{cm^2}{Molekül}$ → kleines F: schwacher Übergang $f \sim 10^{-3}$

physik. Querschnittsfläche $A_{geo} \approx L \times w$ $L_{Benzol} \sim 0{,}7-1\,nm$, $w_{Benzol} \sim 0{,}7\,nm$ → $A_{geo} \sim 0{,}5-0{,}7\,nm^2 \triangleq 0{,}5-0{,}7 \cdot 10^{-14}\,cm^2$

$\sigma_{Benzol} \sim A_{geo,Benzol} \cdot 10^{-4}$

b) $\sigma(530\,nm) = 3{,}823 \cdot 10^{-21} \cdot 1{,}05 \cdot 10^5 \frac{L}{mol \cdot cm} = 4{,}01 \cdot 10^{-16} \frac{cm^2}{Molekül}$ $f \sim 0{,}6-1{,}2$ → starker Übergang

$L_{Rhodamin} \sim 1{,}5\,nm$ $w_{Rhodamin} \sim 0{,}5-0{,}6\,nm$ → $A_{geo} \sim 0{,}75-0{,}90\,nm^2 \triangleq 7{,}5-9{,}0 \cdot 10^{-15}\,cm^2$

$\sigma_{Rhodamin} \sim A_{geo,Rhodamin} \cdot 10$

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie den Weg zur Lösung der Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators (viskos gedämpftes Federpendel)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\rho\frac{dx}{dt}+\omega_0^2\cdot x=0$$

für den Fall der schwachen Dämpfung. Hinweise zur Lösung:

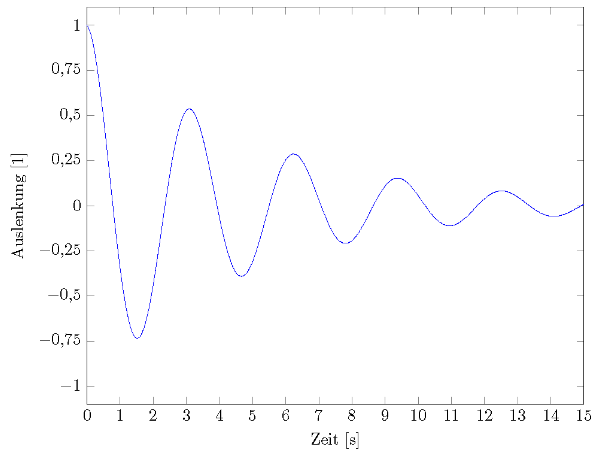
Lösungsfunktion: $x(t)=x_0\cdot e^{-\rho\cdot t}\cdot\cos(\omega_S\cdot t)$. Bestimmen Sie die Konstante ω_s. Weg: Bestimmen Sie alle Ableitungen für die obige Dgl.

b) Stellen Sie die Lösung

$$x(t)=x_0\cdot e^{-\rho\cdot t}\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^{\,2}-\rho^2}\cdot t\right)=x_0\cdot e^{-\rho\cdot t}\cdot\cos(\omega_S\cdot t)$$

im Zeitbereich von 0 bis 15 s für ω_0 = 2 s^{-1}, ρ = 0,2 s^{-1} und x_0 = 1 sowie die einhüllende Exponentialfunktion graphisch dar (z.B. mit Excel).

b)



a) $\frac{d^2}{dt^2}x+2\rho\frac{d}{dt}x+\omega_0^2x=0$ $\qquad x(t)=x_0e^{-\rho t}\cos(\omega_s\cdot t)$

$\frac{d}{dt}x=x_0\frac{d}{dt}(e^{-\rho t}\cos(\omega_st))=x_0(-e^{-\rho t}\rho\cos(\omega_st)-e^{\rho t}\sin(\omega_st)\omega_s=-x_0e^{-\rho t}(\rho\cos(\omega_st)+\sin(\omega_st)\omega_s)$

$\frac{d^2}{dt^2}x=\frac{d}{dt}(-x_0e^{-\rho t}(\rho\cos(\omega_st)+\sin(\omega_st)\omega_s)=\frac{d}{dt}(-x_0e^{-\rho t}\rho\cos\omega_st)+\frac{d}{dt}(-x_0e^{-\rho t}\sin(\omega_st)\omega_s)$

$\frac{d}{dt}(-x_0e^{-\rho t}\rho\cos(\omega_st))=-x_0\rho\frac{d}{dt}(e^{-\rho t}\cos(\omega_st))=-x_0\rho(-\rho e^{\rho t}\cos(\omega_st)-e^{\rho t}\sin(\omega_st)\omega_s)=x_0\rho e^{-\rho t}(\rho\cos(\omega_st)+\sin(\omega_st)\omega_s)$

$\frac{d}{dt}(-x_0e^{-\rho t}\sin(\omega_st)\omega_s)=-x_0\omega_s\frac{d}{dt}(e^{-\rho t}\sin(\omega_st))=-x_0\omega_s(-\rho e^{\rho t}\sin(\omega_st)+e^{\rho t}\cos(\omega_st)\omega_s)=x_0\omega_se^{-\rho t}(\rho\sin(\omega_st)-\cos(\omega_st)\omega_s)$

$\frac{d^2}{dt^2}x=x_0\rho e^{-\rho t}(\rho\cos(\omega_st)+\sin(\omega_st)\omega_s)+x_0\omega_se^{-\rho t}(\rho\sin(\omega_st)-\cos(\omega_st)\omega_s)=x_0e^{-\rho t}(\rho^2\cos(\omega_st)+\rho\omega_s\sin(\omega_st)+\rho\omega_s\sin(\omega_st)-\omega_s^2\cos(\omega_st))$

$=x_0e^{-\rho t}((\rho^2-\omega_s^2)\cos(\omega_st)+2\rho\omega_s\sin(\omega_st))$

$\Rightarrow x_0e^{-\rho t}((\rho^2-\omega_s^2)\cos(\omega_st)+\cancel{2\rho\omega_s\sin(\omega_st)})-2\rho^2\cos(\omega_st)\cancel{-2\rho\omega_s\sin(\omega_st)}+\omega_0^2\cos(\omega_st))=0$

$x_0e^{-\rho t}\cos(\omega_st)(\rho^2-\omega_s^2-2\rho^2+\omega_0^2)=\underbrace{x_0e^{-\rho t}}_{\neq 0}\underbrace{\cos(\omega_st)}_{=0\text{ wenn }\omega_s=\frac{\pi}{2t}}\underbrace{(-\rho^2-\omega_s^2+\omega_0^2)}_{=0\text{ wenn }\omega_s=\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}}=0$

Aufgabe 8

Die Fourier-Transformation ist ein wichtiges Werkzeug in der Spektroskopie und wir werden sie auch in der Vorlesung anwenden. Sie kann z.B. dazu benutzt werden, ein zeitabhängiges Signal $x(t)$ in ein Spektrum $\tilde{x}(\omega)$ mit den Frequenzen ω zu transformieren. Dabei entsprechen charakteristische Periodizitäten jeweils einer Frequenz.

$$\tilde{x}(\omega)=F(x(t))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Zur Einstimmung und Auffrischung der Kenntnisse aus der Mathe-Vorlesung veranschaulichen Sie sich bitte die Bedeutung dieser Funktion anhand des folgenden Problems:

Gegeben ist folgende zeitabhängige Auslenkung $x(t)$ eines schwingungsfähigen Systems:

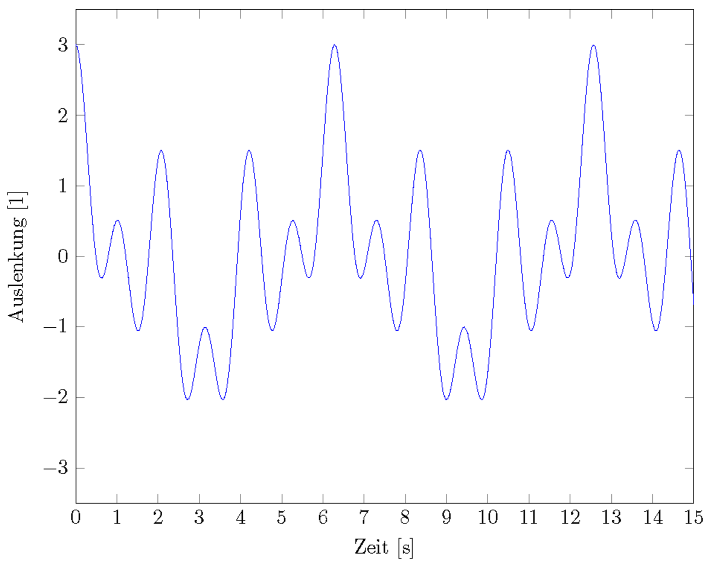
$x(t)=\cos(s^{-1}\,t)+\cos(3\,s^{-1}\,t)+\cos(6\,s^{-1}\,t)$.

a) Stellen Sie die Funktion graphisch dar (z.B. mit Excel).

b) Geben Sie die Fouriertransformierte (Realteil) der Funktion an. Hierbei ist keine Rechnung nötig.

c) Welche Einheit hat die Fouriertransformierte?

a)



b) $\omega=\{1;3;6\}$

c) $[s^{-1}]$

Aufgabe 9

Formulieren Sie das Lambert Beer'sche Gesetz mit dem molaren dekadischen Extinktionskoeffizienten ε [cm^{-1} M^{-1}] als stoffspezifische Konstante. Bei einer in der Physik häufig benutzten Variante dieses Gesetzes wird der Absorptionsquerschnitt σ [cm^2] eingesetzt. Bitte geben Sie diese Formulierung an. Welche anschauliche Bedeutung hat σ (1 Satz)? Wie werden ε und σ ineinander umgerechnet?

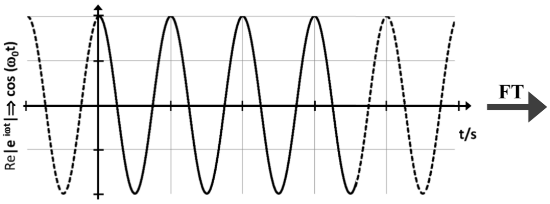
$E(\lambda) = \varepsilon(\lambda)\cdot c\cdot d = \sigma\cdot N\cdot d \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon\cdot c}{N}\ ;\ \varepsilon = \frac{\sigma\cdot c}{N}$

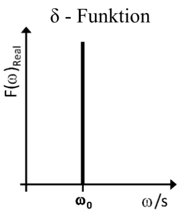
Absorptionsquerschnitt (Teilchendichte

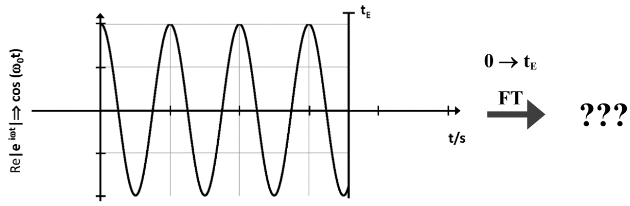
Absorptionsquerschnitt: Fläche, auf die das Licht trifft & absorbiert wird

Aufgabe 10

Eine elektromagnetische Welle der Kreisfrequenz ω_0, $A(t) = A_0\cdot e^{i\cdot\omega_0 t}$, ohne zeitlichen Anfang und Ende hätte ein exakt monochromatisches Spektrum (δ-Funktion).







Da es eine solche Welle nicht gibt, sind streng genommen alle Wellen polychromatisch. Dies lässt sich über Fouriertransformation zeigen. Hierzu betrachten wir das zeitliche Verhalten einer Welle, die nur im Intervall $0 \le t \le t_E$ ungleich null ist (siehe Zeichnung).

Errechnen Sie die Fouriertransformation gemäß

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_E} A(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

Separieren Sie den Realteil der Fouriertransformierten, der eine Funktion von ω und t_E ist. Nutzen Sie dazu $e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$. Stellen Sie das Ergebnis für $\omega_0 = 2\pi\ s^{-1}$, $A_0 = 1$ und $t_E = 10$ s bzw. 20 s graphisch dar. Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_E} A(t)e^{-i\omega t}dt \qquad A(t) = A_0 e^{i\omega_0 t}$

$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$

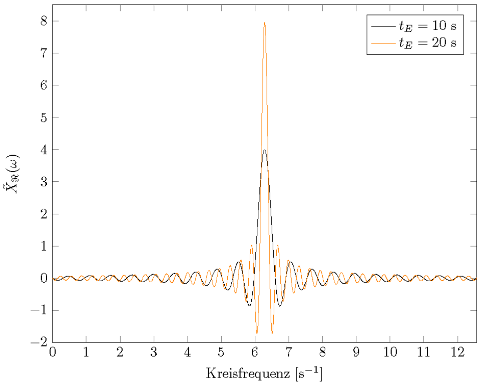
$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_E} A_0 e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_E} e^{it(\omega_0-\omega)}dt$

$= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\left(e^{it_E(\omega_0-\omega)} - e^{i\cdot 0\cdot(\omega_0-\omega)}\right) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\left(e^{it_E(\omega_0-\omega)} - 1\right)$

$= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\left(\cos((\omega_0-\omega)t_E) + i\sin((\omega_0-\omega)t_E) - 1\right)$

$= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\left(\cos(t_E(\omega_0-\omega)) - 1\right) + \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cancel{i}\sin(t_E(\omega_0-\omega))}{\cancel{i}(\omega_0-\omega)}$

$= \underbrace{\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}(\omega_0-\omega)i}\cdot\left(\cos(t_E(\omega_0-\omega)) - 1\right)}_{\text{Imaginärteil}} + \underbrace{\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(t_E(\omega_0-\omega))}{\omega_0-\omega}}_{\text{Realteil}}$



→ Erhöhung Zeitintervall → geringere Periodendauer
→ höhere Frequenz
→ größere Amplitude

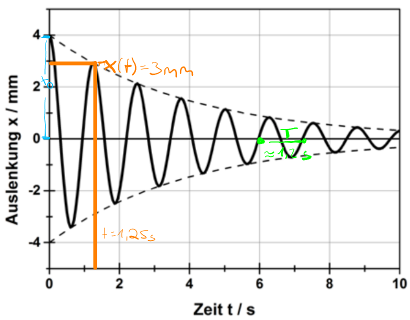
Aufgabe 11

Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf der Auslenkung $x(t)$ bei einer gedämpften Schwingung.

a) Lesen Sie aus dem Diagramm folgende Größen ab: Amplitude x_0, Kreisfrequenz ω_s, Dämpfungskonstante ρ, Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0.

b) Zeichnen Sie ein Diagramm des Realteils der Fourier-Transformierten von $x(t)$ (korrekter Verlauf der Funktion, keine Skizze).

c) Mit welcher Zeitkonstante klingt die Gesamtenergie des Oszillators im Mittel ab? Zu welchen Zeitpunkten ist die Abnahme der Energie besonders groß?



a) $x_0 = 4\,mm$

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}25} = 5{,}24\,s^{-1}$

ρ: $x(t) = x_0 e^{-\rho t} \to \frac{x(t)}{x_0} = e^{-\rho t} \to \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = -\rho t$

$\rho = -\frac{\ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)}{t} = -\frac{\ln\left(\frac{3mm}{4mm}\right)}{1{,}25s} = 0{,}230\,s^{-1}$

ω_0: $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_s^2 + \rho^2} = \sqrt{(5{,}24\,s^{-1})^2 + (0{,}230\,s^{-1})^2} = 5{,}21\,s^{-1}$

b) $x(t) = x_0 e^{-\rho t}$ $\qquad \cos(\omega_s t) = \frac{1}{2}(e^{-i\omega_s t} + e^{i\omega_s t})$

$\tilde{x}(t) = \tilde{F}t(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x(t)\cdot e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x_0 e^{-\rho t}\cos(\omega_s t)e^{-i\omega t}dt$

$= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\rho t}\cdot\frac{1}{2}(e^{-i\omega_s t} + e^{i\omega_s t})e^{-i\omega t}dt = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{+(-\rho-i\omega-i\omega_s)t} + e^{+(-\rho-i\omega+i\omega_s t)}dt$

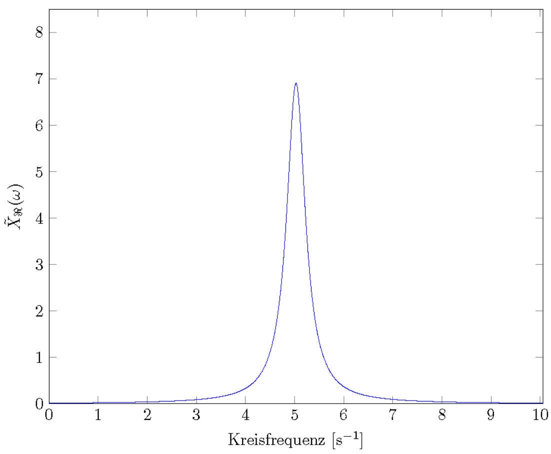
$= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-\rho+i\omega_s+i\omega}e^{+(-\rho-i\omega-i\omega_s)} + \left(\frac{1}{-\rho+i\omega-i\omega_s}\right)e^{+(-\rho-i\omega+i\omega_s)}\right]_0^\infty$

$= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{\frac{1}{\rho+i\omega_s+i\omega}}_{=0} + \frac{1}{\rho-i\omega_s+i\omega}\right] = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\rho-i\omega_s+i\omega}$

$= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\rho-i\omega_s+i\omega}\left(\frac{\rho-i\omega+i\omega_s}{\rho-i\omega+i\omega_s}\right) = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\rho-i\omega+i\omega_s}{\rho^2-(\omega-\omega_s)^2} = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\rho-i(\omega-\omega_s)}{\rho^2-(\omega-\omega_s)^2}$

$\tilde{x}(t)_R = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\rho}{\rho^2-(\omega-\omega_s)^2}$

b)



c) $2\rho = \frac{1}{\tau} \to \tau = \frac{1}{2\rho} = \frac{1}{2\cdot 0{,}230\,s^{-1}} = 2{,}17\,s$

Abnahme Energie maximal am Wendepunkt