SMKS-Ü 5 WS 2025/26 Lena-Marie Aßmann Gr. 3

Wiederholungsfragen

5.1) Wie kommt es zur Dopplerverbreiterung? Welche Linienprofile können unter welchen Randbedingungen experimentell beobachtet werden?

- unterschiedliche Bewegung Moleküle relativ zu Detektor => scheinbare Verschiebung der emittierten/absorbierten Frequenzen
- niedriger Druck, geringe Stoßrate: gaußförmig; hoher Druck/starke Relaxationsprozesse: Lorentz-Profil; beide Effekte: Voigt-Profil

5.2) Wo macht man sich die Druckverbreiterung von Spektrallinien technisch zu Nutze?

Gaslaser, Gasentladungslampen => Verbreiterung Verstärkungsbereich -> Verstärkung mehr Übergänge

Spektrallampen & Kalibrationsquellen => stabilere & intensivere Referenzlinien

5.3) Wodurch ist die kinetische Energie der Rotation klassisch gegeben?

$E = \frac{1}{2} I \omega^2$ I: Trägheitsmoment, ω: Winkelgeschwindigkeit

$E = \frac{L^2}{2I}$ L: Drehimpuls

5.4) Welche Formel beschreibt die Energieeigenwerte eines starren zweiatomigen Moleküls? Welche Auswahlregel gilt für die MW-Absorption?

$E(J) = BJ(J+1)$ $B = \frac{h}{8\pi I c}$

MW-Absorption: $\Delta J = +1$

Aufgabe 20: Dopplerverbreiterung

Ein Astronom spektroskopiert das Licht eines Sterns. In seinem Spektrum liegt die H_α-Linie des Wasserstoffatoms bei einer Wellenlänge von 656,61 nm. Die H_α-Linie weist auf der Erde eine Wellenlänge von 656,28 nm auf. Wie schnell bewegt sich der Stern relativ zur Erde? Die Linie weist eine Breite von $\Delta\tilde{\nu} = 0{,}8\ \mathrm{cm^{-1}}$ auf. Wir nehmen an, dass diese Breite allein durch den Dopplereffekt verursacht wird. Welche Temperatur hat das Gas?

$$\nu_{H_\alpha}(\text{Erde}) = \frac{c}{\lambda_{H_\alpha}(\text{Erde})} \qquad \nu_{H_\alpha}(\text{Stern}) = \frac{c}{\lambda_{H_\alpha}(\text{Stern})} \quad \rightarrow v = \left(\frac{\nu_{H_\alpha}(\text{Erde})}{\nu_{H_\alpha}(\text{Stern})} - 1\right) c = \left(\frac{656{,}61 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{656{,}28 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - 1\right) c = 1{,}504 \cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta\nu = \Delta\tilde{\nu} c = \frac{\nu_{H_\alpha}(\text{Stern})}{c} \sqrt{\frac{8 k_B T \ln(2)}{m}} \quad \rightarrow T = \frac{\Delta\nu^2 c^2 m}{8 k_B \ln(2)\, \nu^2_{H_\alpha}(\text{Stern})} = 5{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{K}$$

Aufgabe 21: Doppler-Verbreiterung (Herleitung der Gleichung)

Leiten Sie aus der Beziehung (21.1) für die Dopplerverschiebung der Frequenz den Ausdruck (21.2) her, der die Dopplerverbreiterung von Absorptionslinien aufgrund thermischer Bewegung der absorbierenden Moleküle beschreibt. Hinweis: Nutzen sie die eindimensionale Maxwell-Boltzmann-Verteilung für die Geschwindigkeit.

$$\nu_B = \nu_0\left(1 \pm \frac{|v|}{c}\right) \quad (21.1) \qquad \Delta\nu = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{8 k_B T \ln 2}{m}} \quad (21.2)$$

$$\nu_B = \nu_0\left(1 \pm \frac{|v|}{c}\right) \rightarrow v = \frac{\nu_B - \nu_0}{\nu_0} c \qquad v_p = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}$$

$$f(v) = \frac{m}{2\pi k_B T} e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2} = \frac{m}{2\pi k_B T} e^{-\frac{v^2 m}{2 k_B T}} = \frac{m}{2\pi k_B T} e^{-\frac{(\nu_B - \nu)^2 m c^2}{2 k_B T \nu_0^2}}$$

$$\text{bei } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{k_B T \nu_0^2}{c^2 m} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{k_B T \nu_0^2}{c^2 m}}$$

$$\Delta\nu = 2\sqrt{2\ln(2)}\,\sigma = 2\sqrt{2\ln(2)} \sqrt{\frac{k_B T \nu_0^2}{c^2 m}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{8 k_B T \ln(2)}{m}}$$

Aufgabe 22: Rotationsspektroskopie des HI (Energien der Niveaus)

Wie lauten die Energien der ersten vier Rotationsniveaus eines HI-Moleküls, das frei in drei Dimensionen rotieren kann (Angabe in J, $\mathrm{s^{-1}}$ und $\mathrm{cm^{-1}}$)? Verwenden Sie für das Trägheitsmoment $I = \mu R^2$ mit $\mu = m_H m_I/(m_H + m_I)$ und $R = 160$ pm.

für $^1H\,^{127}I$

$$E_{rot}(J) = \frac{\hbar^2}{2I}(J^2 + J) = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}(J^2+J) = \frac{\hbar^2 (m_H + m_I)}{2 m_H m_I R^2}(J^2 + J) \qquad \nu = \frac{E}{h} \qquad \tilde{\nu} = \frac{E}{hc}$$

$m_H = 1 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $m_I = 127 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $R = 160 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$

$E_{rot}(0) = 0\ \mathrm{J}$	$E_{rot}(1) = 2{,}637 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J}$	$E_{rot}(2) = 7{,}848 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J}$	$E_{rot}(3) = 1{,}582 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$
$\nu_{rot}(0) = 0\ \mathrm{Hz}$	$\nu_{rot}(1) = 3{,}979 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Hz}$	$\nu_{rot}(2) = 1{,}194 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}$	$\nu_{rot}(3) = 2{,}388 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}$
$\tilde{\nu}_{rot}(0) = 0\ \mathrm{cm^{-1}}$	$\tilde{\nu}_{rot}(1) = 13{,}27\ \mathrm{cm^{-1}}$	$\tilde{\nu}_{rot}(2) = 39{,}82\ \mathrm{cm^{-1}}$	$\tilde{\nu}_{rot}(3) = 79{,}64\ \mathrm{cm^{-1}}$