離散フーリエ変換

- 与えられた数列は$1, 2, 5, 8, 4, 10, 1, ...$
- 与えられた数列は以下の表のECA(Rule90)によって得られている
    - ここでは1から始まり1に戻る周期性を持っている
    - 周期性はセル幅が$2^n(n > 0)$の時に得られ、$2^{(n+1)} - 2$回の計算で初期値と同じ値になる
        - 例）以下の表では$n = 2$なのでセル幅は4、周期は$2^3 - 2 = 6$となる

10進数	セル0	セル1	セル2	セル3
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
5	0	1	0	1
8	1	0	0	0
4	0	1	0	0
10	1	0	1	0
1	0	0	0	1

計算

Xは離散周波数スペクトル密度

T_0の単位は秒．観測開始0秒からT_0秒までを観測したということ

xは$0 \sim T_0$秒までに等間隔Δt秒で得られたN個の離散的な数値列

W_nは$W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$，つまり$W_n = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$で得られる

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{6} \begin{pmatrix} W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 \\ W_6^0 & W_6^1 & W_6^2 & W_6^3 & W_6^4 & W_6^5 \\ W_6^0 & W_6^2 & W_6^4 & W_6^6 & W_6^8 & W_6^{10} \\ W_6^0 & W_6^3 & W_6^6 & W_6^9 & W_6^{12} & W_6^{15} \\ W_6^0 & W_6^4 & W_6^8 & W_6^{12} & W_6^{16} & W_6^{20} \\ W_6^0 & W_6^5 & W_6^{10} & W_6^{15} & W_6^{20} & W_6^{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 & W_6^0 \\ W_6^0 & W_6^1 & W_6^2 & W_6^3 & W_6^4 & W_6^5 \\ W_6^0 & W_6^2 & W_6^4 & W_6^0 & W_6^2 & W_6^4 \\ W_6^0 & W_6^3 & W_6^0 & W_6^3 & W_6^0 & W_6^3 \\ W_6^0 & W_6^4 & W_6^2 & W_6^0 & W_6^4 & W_6^2 \\ W_6^0 & W_6^5 & W_6^4 & W_6^3 & W_6^2 & W_6^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

W_6について求める

$$\begin{aligned} W_6 &= e^{-i\frac{2\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

$W_6^0 \sim W_6^5$の値は下記の計算によって得られる.

$$\begin{aligned} W_n^0 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^1 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - 2i\sqrt{3} - 3\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^3 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_n^4 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(1 - 2i\sqrt{3} - 3\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(4 + 8i\sqrt{3} - 12\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(-8 + 8i\sqrt{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_n^5 &= \left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 \\
&= \frac{1}{32}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 - 2i\sqrt{3} - 3\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(4 + 8i\sqrt{3} - 12\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(-8 + 8i\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(-8 + 8i\sqrt{3} + 8i\sqrt{3} + 24\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(16 + 16i\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

結果をまとめると以下のように得られた.

$$
\begin{aligned}
W_n^0 &= 1 \\
W_n^1 &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\
W_n^2 &= -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \\
W_n^3 &= -1 \\
W_n^4 &= -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\
W_n^5 &= \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

値を式に代入して計算を続ける

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}
&= \frac{1}{6}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & -1 & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \\
1 & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & 1 & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & 1 & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \\
1 & \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & -1 & -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}
\begin{pmatrix}
1 + 2 + 5 + 8 + 4 + 10 \\
1 + (1 - i\sqrt{3}) - \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3}) - 8 - 2(1 - i\sqrt{3}) + 5(1 + i\sqrt{3}) \\
1 - (1 + i\sqrt{3}) - \frac{5}{2}(1 - i\sqrt{3}) + 8 - 2(1 + i\sqrt{3}) - 5(1 - i\sqrt{3}) \\
1 - 2 + 5 - 8 + 4 - 10 \\
1 - (1 - i\sqrt{3}) - \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 8 - 2(1 - i\sqrt{3}) - 5(1 + i\sqrt{3}) \\
1 + (1 + i\sqrt{3}) - \frac{5}{2}(1 - i\sqrt{3}) - 8 - 2(1 + i\sqrt{3}) + 5(1 - i\sqrt{3})
\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}
\begin{pmatrix}
30 \\
\frac{1}{2}(-11 + 7i\sqrt{3}) \\
\frac{3}{2}(-1 + 3i\sqrt{3}) \\
-10 \\
-\frac{3}{2}(1 + 3i\sqrt{3}) \\
-\frac{1}{2}(11 - 7i\sqrt{3})
\end{pmatrix} \\
&=
\begin{pmatrix}
5 \\
-\frac{1}{12}(11 - 7i\sqrt{3}) \\
-\frac{1}{4}(1 - 3i\sqrt{3}) \\
-\frac{5}{3} \\
-\frac{1}{4}(1 + 3i\sqrt{3}) \\
-\frac{1}{12}(11 - 7i\sqrt{3})
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$