微积分 A（1）第 6 周习题课

二．函数极限

1.　用定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$；　（2）$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

证明：（1）$\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|=\left|2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right|$

$$<\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}<\frac{1}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，则对于 $\forall x>N$，有 $\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

（2）$\forall\varepsilon>0(0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2})$，要使不等式

$$\left|\arctan\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{1-x}<\varepsilon\qquad(x<1)$$

成立，解得 $1-x<\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}$．取 $\delta=\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}$，于是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}>0,\forall x\in(1-\delta,1),\text{有}\left|\arctan\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

2.　（1）讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 是否存在；

解：左右极限不等，极限不存在。

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=0+1=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=2-1=1$$

于是$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，

求证：$f(x)=f(1), x\in(0,+\infty)$。

证明：$x\in(0,1)$ 时，$f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n}),\quad n\in\mathbb{N}$，而 $\lim_{n\to+\infty}x^{2^n}=0$，故

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x^{2^n})=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(1)$$

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n}),\quad n\in\mathbb{N}$，而 $\lim_{n\to+\infty}x^{2^n}=+\infty$，

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x^{2^n})=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$$

故 $f(x)=f(1), x\in(0,+\infty)$。

4. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$，求证：$\forall a>0$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。

证明：（1）$1\le a\le 2$ 时，由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增性，

$$1=\frac{f(x)}{f(x)}\le\frac{f(ax)}{f(x)}\le\frac{f(2x)}{f(x)}\to 1(x\to+\infty)$$

由夹逼定理，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。

（2）$2<a\le 4$ 时，$\frac{f(2x)}{f(x)}\le\frac{f(ax)}{f(x)}=\frac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}\cdot\frac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}=1\text{（由（1）证得）}$$

故由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。

（1） 同理可证 $\forall a>2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。

（2） $0<a<1$时，$\frac{f(ax)}{f(x)}=\frac{f(ax)}{f(\frac{1}{a}\cdot ax)}$，而$\frac{1}{a}>1$，由（1），$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{1}{a}\cdot ax)}{f(ax)}=1$，所以

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。

5. 求$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)$。

解：令$y=\frac{1}{x-1}$，则 $y\to+\infty\ (x\to1^-)$。

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}=\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\to0,\ (x\to1^-)$$

故$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=0$。

6. 求$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$。（习题 2.3 题 8（6），p.51）

解：我们将函数$(2\sin x+\cos x)^{1/x}$写作$(2\sin x+\cos x)^{1/x}=\left(1+f(x)\right)^{\frac{g(x)}{f(x)}}$，其中

$$f(x)=2\sin x+\cos x-1\to0,\ (x\to0)$$

$$g(x)=\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}\to2,\ (x\to0)。$$

于是$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}=e^2$。

7. 求$\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$。

解：在考虑极限问题$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，通过变量替换将$x_0$转化成$0$或$+\infty$通常比较方便。这是因为许多标准极限是以$x\to0$或$x\to+\infty$的方式给出。对于本题也是这样。

令 $y = x - \pi/4$，则 $y \to 0\ (x \to \pi/4)$。于是

$$(\tan x)^{\tan 2x} = \left(\tan(y+\pi/4)\right)^{\tan(2y+\pi/2)} = \left(\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\right)^{-1/\tan 2y}$$

再将上式最右端的函数写作如下形式 $\left(\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\right)^{-1/\tan 2y} = \left(1+f(y)\right)^{\frac{g(y)}{f(y)}}$，其中

$$f(y) = \frac{2\tan y}{1-\tan y} \to 0\text{，}\quad (y \to 0)$$

$$g(y) = \frac{2\tan y}{1-\tan y}\frac{-1}{\tan 2y} \to -1\text{，}\quad (y \to 0)$$

于是 $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x} = \lim\limits_{y\to 0}(1+f(y))^{\frac{g(y)}{f(y)}} = e^{-1}$。

8. 设 $a > 0$，确定 p 的值，使得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(a^{1/x} - a^{1/(x+1)})$ 存在。（习题 2.4 题 12，p.57）

解：如果 $a=1$，则所考虑的极限对任何 p 均存在，且极限值为零。以下设 $a \neq 1$。

由于 $a^y \to a^0 = 1\ (y \to 0)$，所以有 $a^{1/x} \to 1\ (x \to +\infty)$。

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(a^{1/x} - a^{1/(x+1)})$ 存在，当且仅当极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(1 - a^{-1/x(x+1)})$ 存在。并且当这两个极限存在时，它们的极限值相同。回忆标准极限

$$\frac{a^y - 1}{y} \to \ln a\text{，}\quad y \to 0\text{，}\quad（a > 0）$$

我们有 $x^p(1 - a^{-1/x(x+1)}) = \dfrac{a^{-1/x(x+1)} - 1}{-1/x(x+1)}\dfrac{x^p}{x(x+1)}$。根据

$$\frac{a^{-1/x(x+1)} - 1}{-1/x(x+1)} \to \ln a\text{，}\quad（x \to +\infty），$$

以及 $\dfrac{x^p}{x(x+1)} \to \begin{cases} +\infty, & p > 2 \\ 1, & p = 2 \\ 0, & p < 2 \end{cases}$，（$x \to +\infty$）。

因此，当 $p \le 2$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(a^{1/x} - a^{1/(x+1)})$ 存在。并且当 $p = 2$ 时，极限值为 $\ln a$；并且当 $p < 2$ 时，极限值为 0。

9.　书上 P.65，总复习题，第 11 题

（1）求常数 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$；

（2）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$ 存在，求常数 c 及极限值。

解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+(1-x^2))}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$，

所以当 $x\to1$ 时，分母 $x^2+ax+b\to0$，即 $1+a+b=0$。

此时 $x^2+ax+b=(x-1)(x+a+1)$，

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to1}\frac{-1-x}{x+a+1}=-\frac{2}{a+2}=-\frac{1}{2}$$

所以 $a=2$。

（2）$(x^3+x^2)^c-x=x^{3c}(1+\dfrac{1}{x})^c-x$。要使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$ 存在，$3c=1,c=\dfrac{1}{3}$。此时

$$\lim_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left((1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{3x}\right)=\frac{1}{3}.$$

二．连续函数

10.　设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ B ）。

(A)可去间断点。(B)跳跃间断点。(C) 无穷间断点。(D) 震荡间断点。

解 ：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{3+2e^{-\frac{2}{x}}}=0$，　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{1}{2}$，因此答案为(B)。

11.　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\in C(-\infty,+\infty)$，求 a,b。

解：根据 x 的不同范围，$f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x>1\\ \frac{1+a+b}{2}, x=1\\ ax^2+bx, -1<x<1\\ \frac{-1+a-b}{2}, x=-1\\ \frac{1}{x}, x<-1\end{cases}$$

在 $x=1$ 点函数连续，$a+b=1$；

在 $x=-1$ 点函数连续，$a-b=-1$；

故 $a=0,b=1$。

12. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b) \qquad (*)$$

证明 $f\in C(a,b)$。

证明：$\forall x_0\in(a,b)$，因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，如果 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，x_0 为第一类间断点，假设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=B$。要证 $A=B=f(x_0)$。

在（*）式，取 $y=x_0$，$f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(x_0)}{2}$,

$$\lim_{x\to x_0^+}f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)+f(x_0)}{2},$$

$$B\le f(x_0)$$

同理可证，$A\le f(x_0)$。

另外，在（*）式，取 $x=x_0-h, y=x_0+h$，

$$f\left(\frac{x_0-h+x_0+h}{2}\right)=f(x_0)\le\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2},$$

$$f(x_0)\le\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2}=\frac{A+B}{2},$$

故 $A=B=f(x_0)$。

13. 设 $f \in C(R)$，且 $\forall x, y \in R, f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：$\exists a \in R, f(x)=ax$。

类似的：$\forall x, y \in R, f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$？

$$f(xy)=f(x)+f(y)？$$

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y)？$$

14. 设 $f \in C[a,b]$，且存在 $q \in (0,1)$，使得 $\forall x \in [a,b]$，$\exists y \in [a,b]$，满足 $|f(y)| \le q|f(x)|$。

证明：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

证明：因为 $f \in C[a,b]$，所以 $|f| \in C[a,b]$。

有界闭区间上的连续函数 $|f(x)|$ 有最小值，设 $|f(x_0)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$。

若 $f(x_0) \ne 0$，由已知条件知，$\exists y_0 \in [a,b]$，满足 $|f(y_0)| \le q|f(x_0)| < |f(x_0)|$，与 $|f(x_0)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ 矛盾。

所以 $f(x_0)=0$，可取 $\xi = x_0$，$f(\xi)=0$。

15. 设 $f \in C[a,b]$，$m(x)=\inf\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}, M(x)=\sup\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$，求证 $m(x), M(x) \in C[a,b]$。

证明：只证 $m(x) \in C[a,b]$。

$\forall x_0 \in [a,b]$，不失一般性，只证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x)=m(x_0)$。

因为 $f \in C[a,b]$，由最值定理知，$\exists x_0 \in [a,x_0]$，使得 $m(x_0)=f(x_0)$。并且

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时，记 $m(x)=f(x), x\in[a,x]$，显然 $m(x) \le m(x_0)$。下面讨论 x 的不同情况：

（I）若 $x \in [a, x_0]$，则 $m(x)=m(x_0)$；

（II）若 $x \in [x_0, x]$，则 $m(x_0)-\varepsilon \le f(x_0)-\varepsilon < m(x) \le m(x_0)$。

所以当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时，$f(x_0)-\varepsilon < m(x) \le m(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x)=m(x_0)$。

16. 书上 P.64，第 10 题

设 $f\in C(\mathrm{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明 f 在 R 上存在最小值。

证明：因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，所以 $\exists M>0,\forall x:|x|>M, f(x)>f(0)$。

又因为 $f\in C[-M,M]$，所以 $\exists x_0\in[-M,M],\forall x\in[-M,M], f(x)\ge f(x_0)$。

显然 $f(0)\ge f(x_0)$，所以 $\forall x\in$□$, f(x)\ge f(x_0)$，即 f 在□ 上存在最小值 $f(x_0)$。

17. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$。**用什么定理？**

证明：记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F\in C[a,b]$。

若 $F(a)\cdot F(b)=0$，则 $F(a)=0$ 或 $F(b)=0$，$\xi=a$ 或 b；

若 $F(a)\cdot F(b)\ne 0$，则因为 $f([a,b])\subset[a,b]$，$F(a)>0, F(b)<0$，所以 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0, f(\xi)=\xi$。

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续，且满足 $f(0)=f(2a)\ne f(a)$，试证明存在 $x_0\in(0, a)$，使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$。**如何构造辅助函数？**

证明：考虑辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0, a]$ 上连续，并且

$F(0)=f(0)-f(a)\ne 0$，$F(a)=f(a)-f(2a)\ne 0$，

$F(0)+F(a)=f(0)-f(2a)=0$，因此必有 $F(a)=-F(0)$，由连续函数的零点定理，

存在 $x_0\in(0, a)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

19. 书上 P.64，总复习题，第 7 题

设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right)$$

解：因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，所以

$$
\begin{aligned}
&a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\\
&\quad=a_1(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})+a_2(\sin\sqrt{x+2}-\sin\sqrt{x})+\cdots+a_n(\sin\sqrt{x+n}-\sin\sqrt{x})\\
&\quad=2\left(a_1\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}+a_2\sin\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+a_n\sin\frac{\sqrt{x+n}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+n}+\sqrt{x}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{k}{2(\sqrt{x+k}+\sqrt{x})}=0,\quad k=1,2,\cdots,n$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right)=0\,.$$

20. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，且 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$。$|\forall x_1\in[a,b]$，记 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)],n=1,2,\ldots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 有极限 x_0，且 $f(x_0)=x_0$。

证明：因为 $f([a,b])\subset[a,b]$，所以 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]\in[a,b],n=1,2,\ldots$。

下面证明数列 $\{x_n\}$ 单调。

（I）若 $x_1\ge f(x_1)$，则 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}[f(x_1)-x_1]\le 0$。由数学归纳法证明此时数列 $\{x_n\}$ 单调减：

设 $x_{k+1}\le x_k$，由条件 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$ 可得

$$
\begin{aligned}
x_{k+2}-x_{k+1}&=\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)+\frac{1}{2}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\\
&\le\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)+\frac{1}{2}|x_{k+1}-x_k|=0
\end{aligned}
$$

（II）若 $x_1<f(x_1)$，同样可得数列 $\{x_n\}$ 单调增。

所以数列 $\{x_n\}$ 有极限，记为 x_0，则在等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$ 两边取极限，可得 $f(x_0)=x_0$。

21. 书上 P.65，总复习题，第 10 题

若对于 $x\in(-1,1)$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|$，求证 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\le 1$。

证明：因为对于 $x\in(-1,1)$，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|$，所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{x}\right| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1.$$

取极限 $x \to 0$，由极限的保序性，$\left|\lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{x}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right| \le 1$。