TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

CONJUNTOS

Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.

- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.

  Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.

Conjuntos

- Um **conjunto** é coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

  Escrevemos

  $$a \in A$$

  para denotar que o elemento *a* pertence ao conjunto *A*.

  Escrevemos

  $$a \notin A$$

  para denotar que o elemento *a* não pertence ao conjunto *A*.

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Formas de definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:
  - $\{Ana, Bia, Carlos\}$
  - $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$
- Especificar uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
  - $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é primo e $x > 431\}$
- Usar uma definição recursiva:
  - $1 \in A$,
    se $x \in A$ e $x + 2 < 10$, então $x + 2 \in A$.

Formas de definir um conjunto

- Especificar uma função característica:

  1. $$\mu_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \boldsymbol{x} = 1, 3, 5, 7, 9, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:
  - $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ é o conjunto dos **números naturais**.
  - $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos **números inteiros**.
  - $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5 ...\}$ é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
  - $Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z, \text{ e } q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais**.
  - R é o conjunto dos **números reais**.
  - R^+ é o conjunto dos **números reais positivos**.
  - C é o conjunto dos **números complexos**.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos. Formalmente, para todos conjuntos *A* e *B*,

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:
    - $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:
    - $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

Subconjuntos

- Um conjunto A é chamado **subconjunto** de um conjunto B sse cada elemento de A também é um elemento de B.

  Usamos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B.

- Formalmente:

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B).$$

- As frases "*A* **está contido** em *B*" e "*B* **contém** *A*" são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

  1. O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
  2. O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)

  3. O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

Subconjuntos próprios

- Um conjunto *A* é **subconjunto próprio** de um conjunto *B* sse cada elemento de *A* está em *B* e existe pelo menos um elemento de *B* que não está em *A*.
- Formalmente:

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x : (x \in B \wedge x \notin A)$$

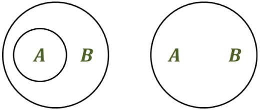
$$\leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \,!\!= B.$$

1. O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.
2. O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

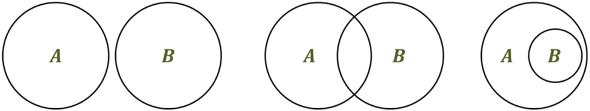
Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

- Exemplo: $A \subseteq B$.



- Exemplo 2: $\sim(A \subseteq B)$.



- Diagramas de Venn não podem ser usados como demonstração!

O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos. Denotamos o conjunto vazio por *{}* ou $\emptyset$.
- Note que *{*$\emptyset$*}* <u>não denota</u> o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.
- **Teorema**: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Prova. Seja *A* um conjunto qualquer. Então

$$\forall x : (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$$

é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa. Logo $\emptyset \subseteq A$.

□

Conjunto potência

- Dado um conjunto A, o **conjunto potência de** A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

  Denotamos por $P(A)$ o conjunto potência de A.

- Exemplos:

  1. Dado o conjunto $S = \{x, y, z\}$, seu conjunto potência é

  $$P(S) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

  2. Dado o conjunto vazio $\varnothing$, seu conjunto potência é

  $$P(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

  Prova. Para formar um subconjunto S qualquer de A, podemos percorrer cada elemento $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$), decidindo se $a_i \in S$ ou se $a_i\, f \in S$.

  Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de n elementos em A, há 2^n maneiras de se formar um subconjunto S de A.

  $\square$

  Logo, $|P(A)| = 2^n$.

Tuplas ordenadas

- Uma *n*-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma coleção ordenada de *n* elementos, em que a_1 é o primeiro elemento, a_2 é o segundo elemento, . . ., e a_n é o *n*-ésimo elemento.

- Algumas *n*-tuplas ordenadas recebem nomes especiais:

  Uma 2-tupla ordenada é chamada de par ordenado

  Uma 3-tupla ordenada é chamada de triplaordenada

- Duas *n*-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são

  iguais sse $x_i = y_i$, para $i = 1, \ldots n.$

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Formalmente:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. O **produto cartesiano** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

é o conjunto de todas n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \ldots N$. Formalmente:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \ldots n\}$$

- Exemplo: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\gamma, \delta\}$.

$$A \times B \times C = \{(0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta),$$
$$(1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta)\}$$

O tamanho de conjuntos finitos

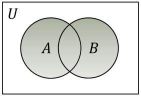
- Seja A um conjunto finito contendo exatamente n elementos distintos. Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de A é n. A notação $|A| = n$ indica que o tamanho de A é n elementos.

Operações em conjuntos

- Sejam *A* e *B* subconjuntos do conjunto universal *U*:

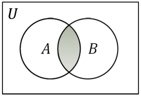
União: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

Alternativamente: $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$



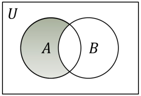
Interseção: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Alternativamente: $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$



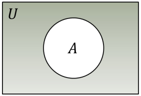
Diferença: $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge \sim(x \in B\}$

Alternativamente: $x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge \sim(x \in B)$



Complemento: $\overline{A} = \{x \in U \mid \sim(x \in A\}$

Alternativamente: $x \in \overline{A} \leftrightarrow \sim(X \in A)$



Operações em conjuntos

- Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

  Considere como conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

  - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $A \cap B = \{1, 5\}$
  - $A - B = \{3, 4\}$
  - $B - A = \{2, 6\}$
  - $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7\}$
  - $\overline{B} = \{0, 3, 4, 7\}$

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A está em B, e cada elemento de B está em A.

- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

  Formalmente:

$$A = B \quad \text{sse} \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Teorema: $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Prova. Escrevendo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ formalmente:

$A = B$

$\equiv \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (definição de igualdade)

$\equiv \forall x : ((x \in A \rightarrow x \in B) \land (x \in B \rightarrow x \in A))$ (definição de $\leftrightarrow$)

$\equiv (\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)) \land (\forall x : (x \in B \rightarrow x \in A))$ (distributividade de $\forall$ sobre $\land$)

$\equiv A \subseteq B \land B \subseteq A$ (definição de $\subseteq$) $\square$

Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U.

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C =$ $A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\sim\sim A = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap B$	
União e interseção com $\varnothing$	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
União e interseção com o complemento	$A \cup \sim A = U$	$A \cap \sim A = \varnothing$
Complementos de U e $\varnothing$	$\sim U = \varnothing$	$\sim\varnothing = U$

Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

  Formalmente:

  $$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing.$$

- **Proposição:** Dados dois conjuntos A e B, $(A - B)$ e B são disjuntos.

  Prova. Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos A e B tais que $(A - B) \cap B \neq \varnothing$. Neste caso existe um elemento x tal que $x \in (A - B) \wedge x \in B$. Note que, em particular, isso significa que $x \in B$.

  Por outro lado, também teremos $x \in (A - B)$, o que, pela definição de diferença, significa que $x \in A \wedge \sim(x \in B)$. Em particular, isso implica que $\sim(x \in B)$.

  Logo chegamos a uma contradição, uma vez que $x \in B$ e $\sim(x \in B)$. $\square$
  Portanto, a proposição deve ser verdadeira.

Partições de um conjunto

- Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \,!\!= j$.

- Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma **partição** do conjunto A sse

  (i) $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, e

  (ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos.

- Exemplo: $\{\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.