Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria de Grafos e Computabilidade
Prof. Alexei Machado

LISTA DE EXERCÍCIOS NO 2

1. Qual é o número mínimo de arestas necessárias para garantir que um grafo simples seja conexo. Justifique. k(n-1)(n-2)

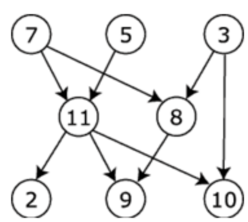
2. Construa todos os grafos simples não isomorfos de 3 vértices.

3. Podemos afirmar que se existirem exatamente 2 vértices de grau ímpar em um grafo `G`, então existe um caminho entre esses dois vértices? Justifique sua resposta.

4. Considere um grafo `G` que é complementar a um grafo bipartido conectado. Responda às seguintes questões sobre `G` e justifique.
   a) Quando `G` será desconexo?
   b) Quantas arestas `G` possui?
   c) `G` é sempre uma árvore?

5. Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
   a) `G` tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3.
   b) `G` é simples, conexo e regular com 15 arestas.
   c) `G` tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3.

6. Mostre os vértices topologicamente ordenados para o grafo abaixo:

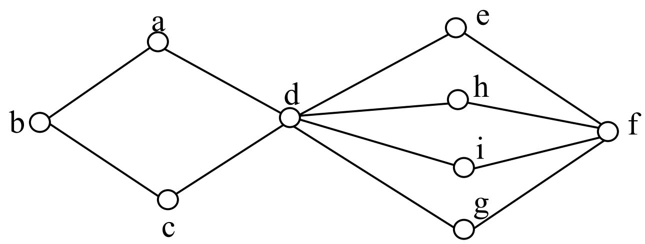


7. Suponha que o seguinte método para verificar se um grafo é euleriano:

```
bool TGrafo::VerificaEuleriano() {
   int i;
   if (NumeroComponentes() == 1) {
      for (i = 1; i < n; i++)
         if (GrauVertice(i) % 2 != 0)
            return false;
      return true;
   } else return false;
}
```

Observe que o *loop* do comando "for" está começando de 1 e não de 0. Comente a repercussão deste fato. A função continuará se comportando da maneira esperada? Justifique.

8. Um grafo euleriano é arbitrariamente traçável a partir de um vértice `v` se, sempre que começamos de `v` e caminhamos no grafo de forma arbitrária utilizando uma aresta não visitada, sempre obtemos o ciclo de Euler.
   a) Mostre que o grafo abaixo é arbitrariamente traçável a partir de algum vértice. Qual é esse vértice? Vértice d



   b) Dê exemplo de um grafo que é arbitrariamente traçável a partir de todos os seus vértices.
   c) Dê exemplo de um grafo euleriano que não é arbitrariamente traçável a partir de nenhum de seus vértices. Justifique suas respostas.
   d) Qual é a condição que um vértice `v` deve satisfazer para que um grafo euleriano seja arbitrariamente traçável a partir de `v`?
   e) Porque um grafo arbitrariamente traçável é adequado para o *layout* de um museu?

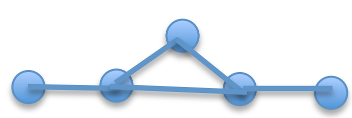
9. Seja `V` o produto cartesiano `{1,2,...,a} X {1,2,...,b}` isto é, o conjunto de todos os pares ordenados `<i,j>` com `i` em `{1,2,...,a}` e `j` em `{1,2,...,b}`. Dois elementos `<i,j>` e `<i',j'>` de `V` são adjacentes se:

   `i = i' e |j - j'| = 1 ou j = j' e |i - i'| = 1`

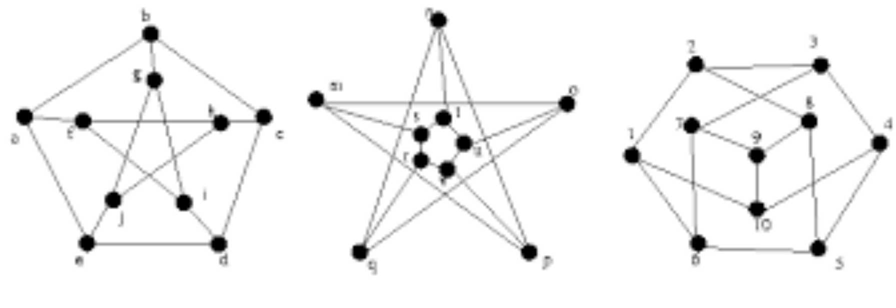
   Essa relação de adjacência define um grafo sobre o conjunto `V` de vértices. Esse grafo é conhecido como grade `a`-por-`b`.

   a) Faça uma figura da grade 3-por-4.
   b) Quantas arestas tem a grade `a`-por-`b`? Justifique.
   c) Para quais valores de `a` e `b` o grafo da grade `a`-por-`b` é Hamiltoniano? Justifique.
   d) Para quais valores de `a` e `b` o grafo da grade `a`-por-`b` é bipartido? Justifique.
   e) Para quais valores de `a` e `b` o grafo da grade `a`-por-`b` é uma árvore? Justifique.

10. Um grafo simples G é dito ser auto-complementar se ele e seu complementar são isomorfos. Mostre que o grafo abaixo é auto-complementar.

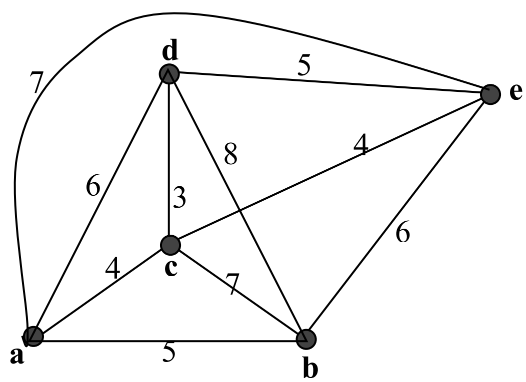


11. Verifique se existem grafos isomorfos dentre os abaixo.



(a) (b) (c)

12. Encontre a solução para o Problema do Caixeiro Viajante para o grafo abaixo.



13. Podemos dizer que toda árvore é um grafo bipartido? Justifique sua resposta.

Sim. Porque consegue-se colocar uma árvore de maneira que altera os níveis dela.

14. Quais árvores são grafos bipartidos completos? Justifique sua resposta.

Quando é bipartido e planar. O grafo é acíclico, conexo e se uma aresta for removida, deixará de ser conexo, quando for acíclico, conexo de aresta(n) - 1

15. Uma floresta é um grafo no qual todos os componentes são árvore.

a) Seja G uma floresta com n vértices e k componentes. Quantas arestas G possui? n - 1, árvores não possui ciclo

b) Construa uma floresta com 12 vértices e 9 arestas

c) Podemos afirmar que toda floresta com k componentes tem pelo menos $2k$ vértices de grau 1? Explique sua resposta.

16. Dizemos que G é uma quase-árvore se existir exatamente uma aresta cuja remoção torna G uma árvore. Responda às seguintes questões sobre um grafo G que é uma quase-árvore e justifique.

a) Quantas arestas existem em G?

b) G é Hamiltoniano?

c) G é Euleriano?

d) G é bipartido?

17. Considere um grafo simples com peso nas arestas no qual os vértices representam casas e as arestas caminhos entre as casas. O peso das arestas varia de 0 a 100 e significa a porcentagem de ovos transportados que serão quebrados (perdidos) se um transportador de ovos percorre esse trajeto.

    a) Mostre com um contra-exemplo que a aplicação do algoritmo de Dijkstra sobre este grafo não necessariamente devolve o caminho entre duas casas pelo qual o menor número de ovos serão perdidos.
    b) Adapte o algoritmo de Dijkstra para calcular o caminho pelo qual menos ovos serão perdidos.

18. É possível visitar todas as casas de um tabuleiro 4×4 com movimentos de cavalo, sem passar duas vezes pela mesma casa e voltando à casa inicial? Modele este problema utilizando teoria dos grafos e proponha uma solução para ele. O grafo gerado é bipartido?

Se Cn for auto-complementar, então Cn deve ter o mesmo número de vértices que seu complemento.

19. Determine todos os valores de n para os quais o grafo circuito, C_n, possui complementar euleriano. Justifique sua resposta.

20. Tertuliano Gonçalves havia prometido casamento a Josefina das Graças. O evento deveria ser realizado, segundo ele, assim que acabasse o contrato de trabalho recém assinado com uma empresa encarregada de pavimentar toda a rede de estradas que ligava Santana do Caixa Prego (cidade onde morava Josefina) às cidades da região. O trabalho iria começar em Santana e prosseguir em continuidade, sem parar, estrada após estrada, terminando, segundo explicou Tertuliano, na própria Santana. A rede de estradas poderia ser representada pela matriz de adjacência que se segue, na qual a cidade de Santana é representada pelo número 1.

Sabemos que Cn possui n arestas e que o complemento deve ter uma quantidade de arestas idêntica, que pode ser expressa pela quantidade de arestas de Kn −n (quantidade de arestas do grafo completo menos a quantidade de arestas de Cn)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		x	x		x					
2	x		x	x	x					
3	x	x			x	x				
4		x			x		x			x
5	x	x	x	x		x	x	x	x	
6			x		x			x		x
7				x	x			x		x
8					x	x	x		x	x
9					x			x		x
10				x		x	x	x	x	

    a) Modele este problema utilizando teoria dos grafos e proponha uma solução para ele que responda se Tertuliano estava sendo sincero com Josefina.
    b) Caso Tertuliano esteja sendo sincero, mostre como ele poderia provar isso para Josefina. Caso Tertuliano não esteja sendo sincero, mostre qual seria a menor mudança na matriz de adjacência de forma a tornar verdadeira a sua promessa.

Não é possível começar e terminar na cidade 1 sem repetir o trajeto, pois, há 4 vértices ímpares. (1, 5, 9, 10). Caso elimine os vértices ímpares, seria possível sair e retomar ao ponto 1, tornando assim um grafo euleriano.