TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

FUNÇÕES

Funções: Introdução

- Frequentemente temos que associar cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.

  Por exemplo, podemos:

  1. Associar cada aluno de Matemática Discreta a um conceito A, B, C, D, E ou F.
  2. Associar cada inteiro ao seu quadrado.
  3. Associar cada país ao seu chefe de Estado.

- O conceito de **função** formaliza este tipo de associação.

- Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:
  - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
  - no estudo de complexidade de algoritmos,
  - na produção de algoritmos recursivos,

  . . .

Funções

- Sejam A e B conjuntos não-vazios.

  Uma **função** f de A para B é uma associação de exatamente um elemento de B a cada elemento de A.

  Escrevemos

$$f(a) = b$$

  se b for o único elemento de B associado através de f ao elemento a de A.

Funções

- Se f é uma função de A para B, escrevemos

  $$f : A \to B$$

  para denotar o **tipo** da função.

  O conjunto A é chamado de **domínio** de f .

  O conjunto B é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de f . A **imagem** de f é o conjunto de valores que f pode assumir:

  $$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

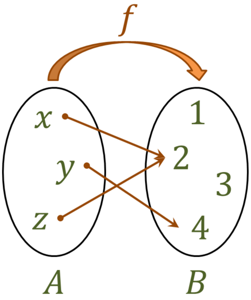
  A **imagem inversa** de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ que são mapeados a b via f :

  $$\text{imagem inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Funções: Exemplos

- Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

  Seja a função $f : A \rightarrow B$ definida pelo diagrama abaixo.



$f(z) = 2$

$f(x) = 2$

$f(y) = 4$

- <u>Imagem inversa</u> de 1: $\varnothing$
- <u>Imagem inversa</u> de 2: $\{x, z\}$
- <u>Imagem inversa</u> de 3: $\varnothing$
- <u>Imagem inversa</u> de 4: $\{y\}$

- <u>Domínio</u> de f : $\{x, y, z\}$
- <u>Co-domínio</u> de f : $\{1, 2, 3, 4\}$
- <u>Imagem</u> de f : $\{2, 4\}$

- A função f pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$

Funções: Exemplos

- Exemplo: Outros exemplos de funções:
  - Função quadrado $f : R \to R$:

    $$f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto x^2$$

  - Função sucessor $f : Z \to Z$:

    $$f(n) = n + 1 \quad \text{ou} \quad f : n \mapsto n + 1$$

  - Função constante $f : Q \to Z$:

    $$f(r) = 2 \quad \text{ou} \quad f : r \mapsto 2$$

  - Função pai $f : P \to P$, onde P é o conjunto de todas as pessoas:

    $$f : p \mapsto p^j, \text{ onde } p^j \text{ é pai de } p$$

Igualdade de funções

- Duas funções f e g são **iguais** sse elas:
  - têm o mesmo domínio
  - têm o mesmo codomínio
  - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \to B$

$$f = g \quad \text{sse} \quad \forall a \in A : f(a) = g(a).$$

- Exemplo: Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$.

Então $f = g$, pois $\forall x \in R$:

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Função injetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \mathrel{!=} a_2 \quad \rightarrow \quad f(a_1) \mathrel{!=} f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \rightarrow \quad a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- Exemplo: Seja $f : R \rightarrow R$ em cada caso abaixo. Então:

  - $f(x) = x + 1$ <u>é injetiva;</u>
  - $f(x) = x/10$ <u>é injetiva;</u>
  - $f(x) = x^2$ <u>não é injetiva;</u>

Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo $b \in B$ é possível achar um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.
- Exemplo: Seja $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ em cada caso abaixo. Então:
  - $f(x) = x + 1$ é sobrejetiva;
  - $f(x) = x/10$ é sobrejetiva;
  - $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva;

Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse f é injetiva e sobrejetiva.

- Exemplo: Seja $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ em cada caso abaixo. Então:

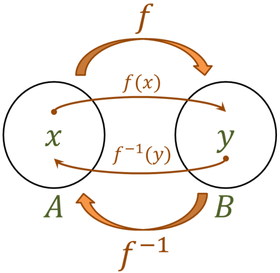
  - $f(x) = x + 1$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
  - $f(x) = x/10$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
  - $f(x) = 2^x$ não é bijetiva (é injetiva mas não é sobrejetiva);
  - $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ não é bijetiva (é sobrejetiva mas não é injetiva);

Função inversa

- Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva.

  A **função inversa** de f é $f^{-1} : B \to A$ tal que

  $$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$



- Exemplo: A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

  $$f^{-1}(x) = x - 1$$

- Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é invertível porque ela não é bijetiva: $f(2) = f(-2) = 4$, logo $f^{-1}(4)$ não é definido.

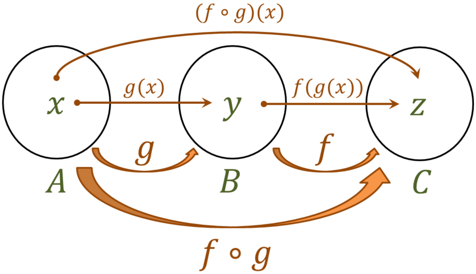
Composição de funções

- Sejam $g : A \to B'$ e $f : B \to C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f, i.e., $B' \subseteq B$.

  A **função composta** de f com g, denotada por $f \circ g : A \to C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

  A função $f \circ g$ é chamada de **composição de f e g**.



Composição de funções

- Exemplo 9: Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \qquad \text{e} \qquad g(n) = n^2.$$

É verdade que $f \circ g = g \circ f$?

Solução. $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 = n^2 + n + 1,$$

Logo $f \circ g \mathrel{!=} g \circ f$.

- O exemplo acima mostra que a composição de funções não é comutativa.