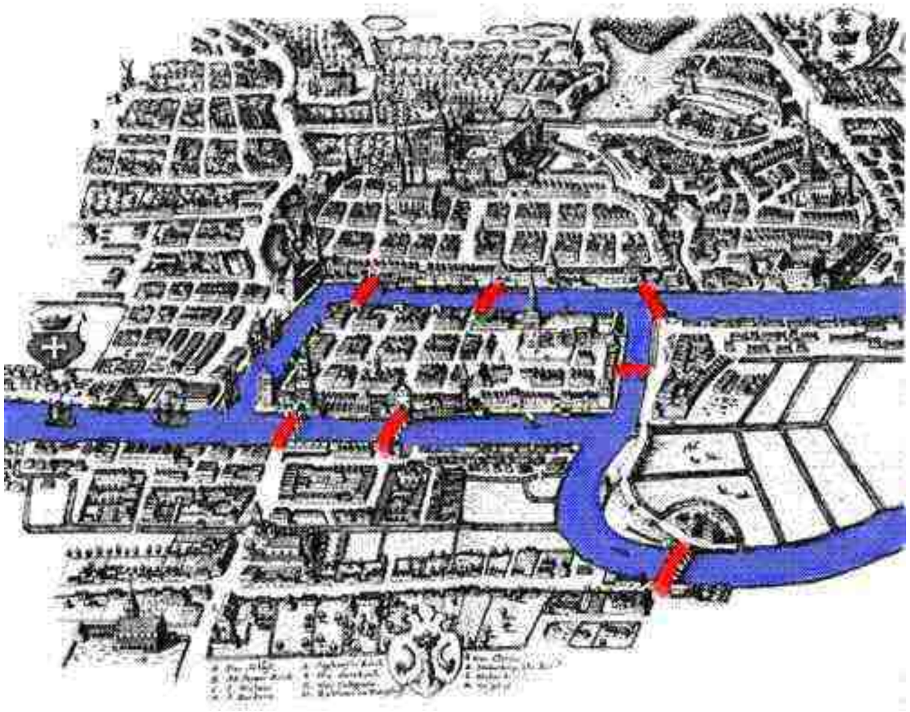
TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

Grafos Eulerianos e Unicursais

Prof. Alexei Machado

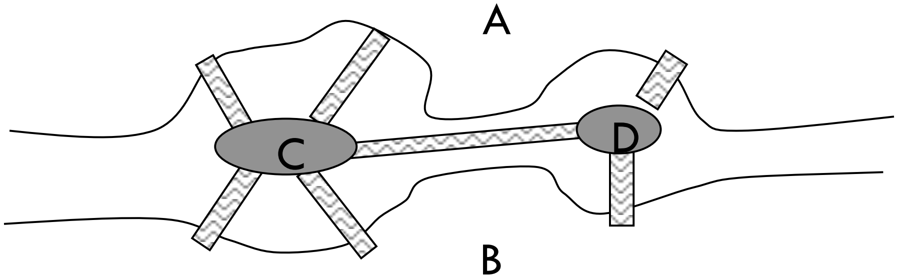
Grafos Eulerianos



- As pontes de Königsberg.
- É possível sair de um ponto, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?

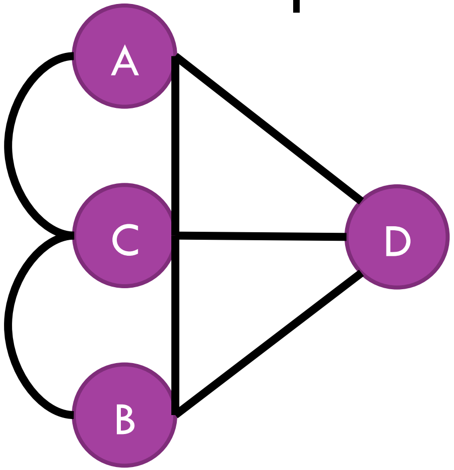
Grafos Eulerianos

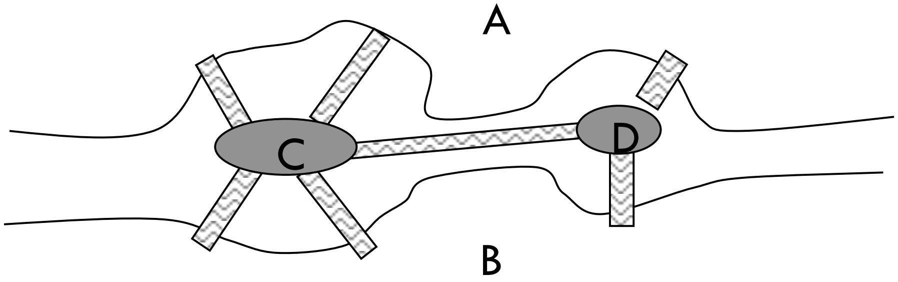
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes



Grafos Eulerianos

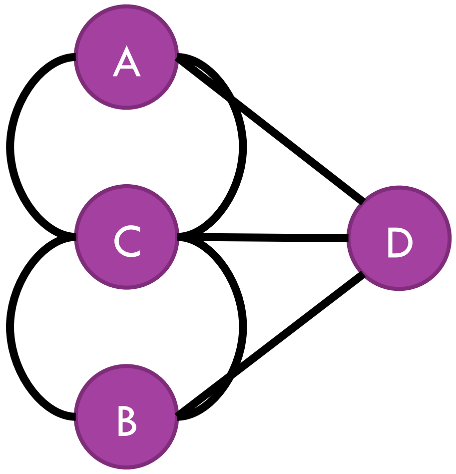
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes





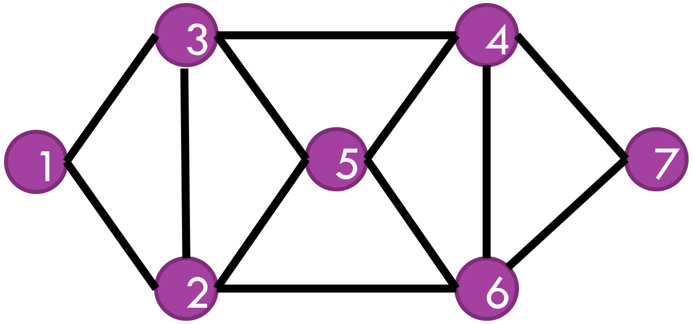
Grafos Eulerianos

- É possível sair de uma região, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?
- Problema: encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez



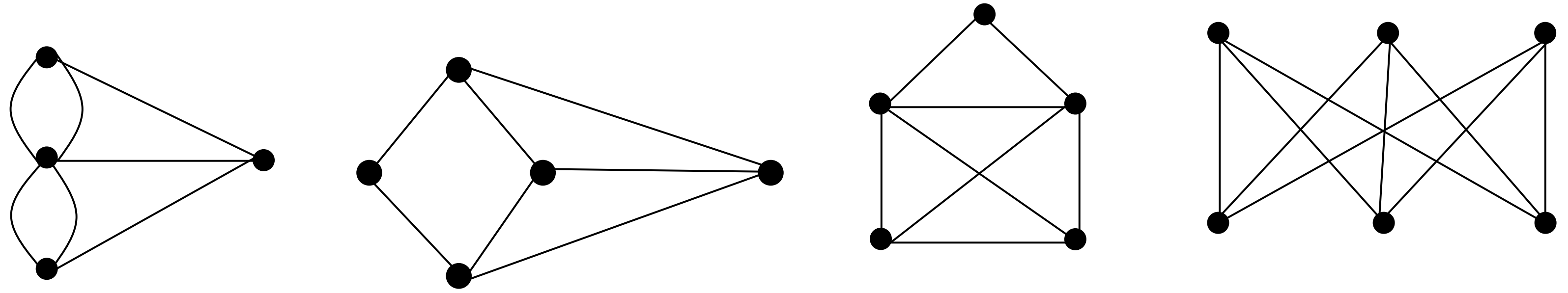
Grafos Eulerianos

- Problema do Explorador: um explorador deseja explorar todas as estradas entre um número de cidades. É possível encontrar um roteiro que passe por cada estrada apenas uma vez e volte a cidade inicial?
- Vértices: cidades
- Arestas: estradas



Grafos Eulerianos

- **Problema:** encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez



(a) (b) (c) (d)

Grafos Eulerianos

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez, dizemos que G é um ***grafo euleriano***

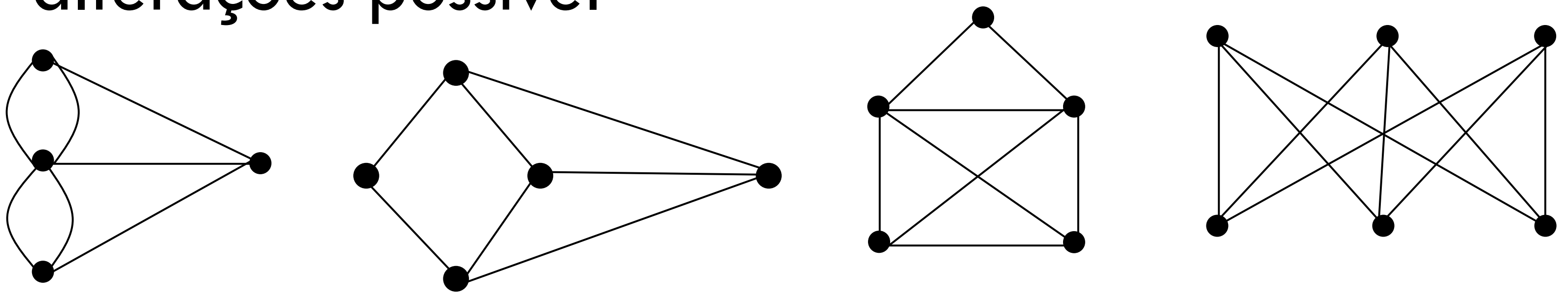
Grafos Eulerianos

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez, dizemos que G é um ***grafo euleriano***

- **TEOREMA**: Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau par

Exercício

- Encontre um caminho fechado que passe por todos os arcos. Se não for possível, induza um subgrafo para que ele se torne euleriano com o menor número de alterações possível



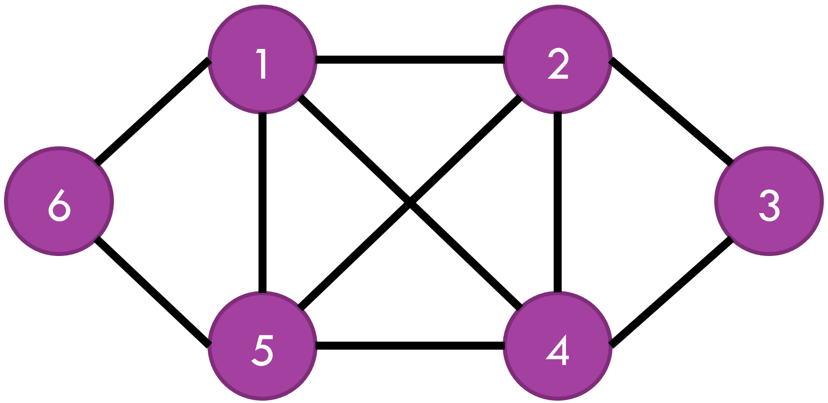
(a) (b) (c) (d)

Algoritmo de Hierholzer (1873)

- Partindo do princípio que um grafo G é euleriano
  - Escolher um vértice **v** aleatório de G
  - Atravessar uma aresta aleatória ***v,w***
  - Repetir o processo a partir de ***w*** até formar um caminho fechado C
  - Remover as arestas pertencentes a C
  - Se não sobram arestas, encontramos o caminho euleriano

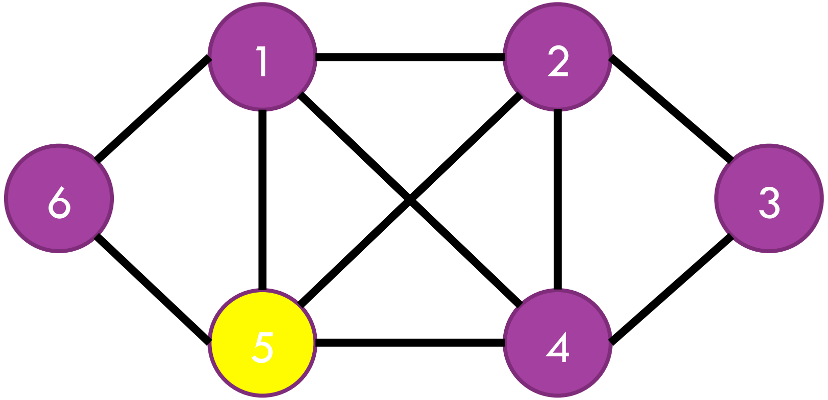
Algoritmo de Hierholzer (1873)

- Caso contrário, escolher um vértice v’ pertencente a C e com grau > 0 e repetir o processo para achar um novo caminho fechado C’
- ***<u>Unir</u>*** C’ a C
- Repetir os passos até não sobrarem arestas



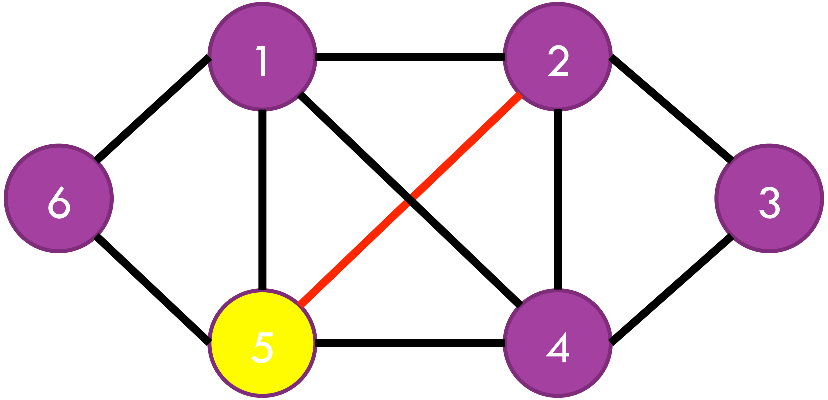
CAMINHO:

C:



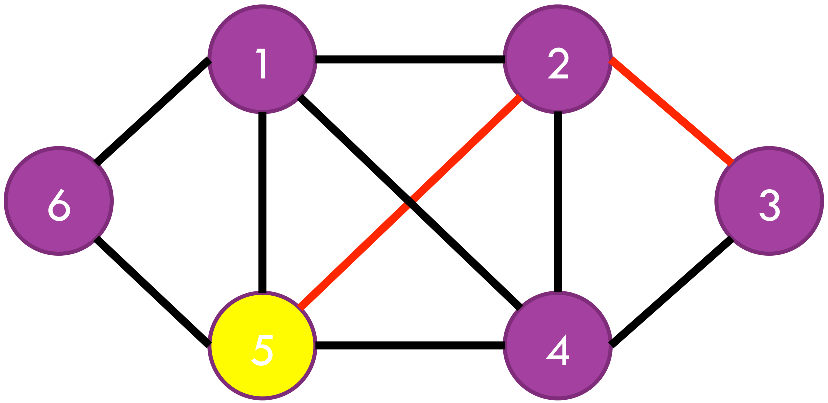
CAMINHO:

C:



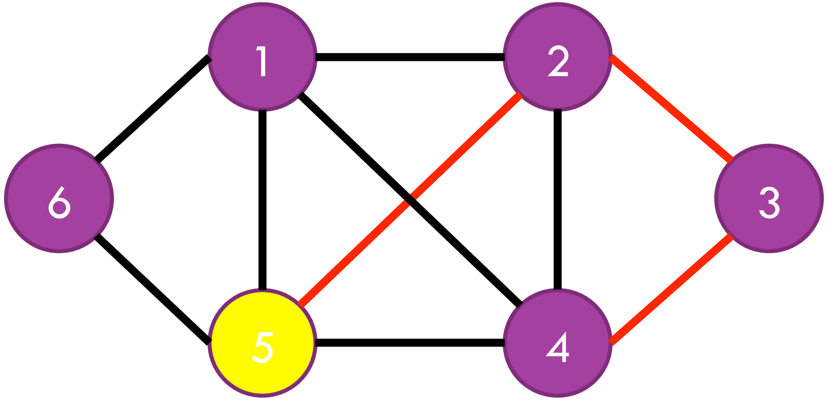
CAMINHO:

C: 5-2



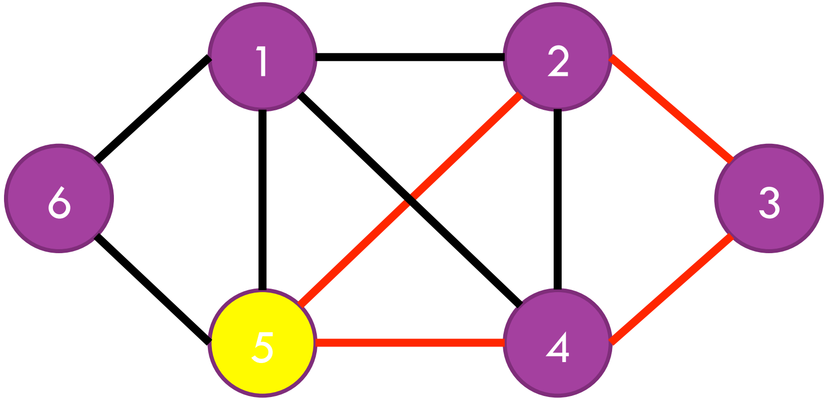
CAMINHO:

C: 5-2-3



CAMINHO:

C: 5-2-3-4

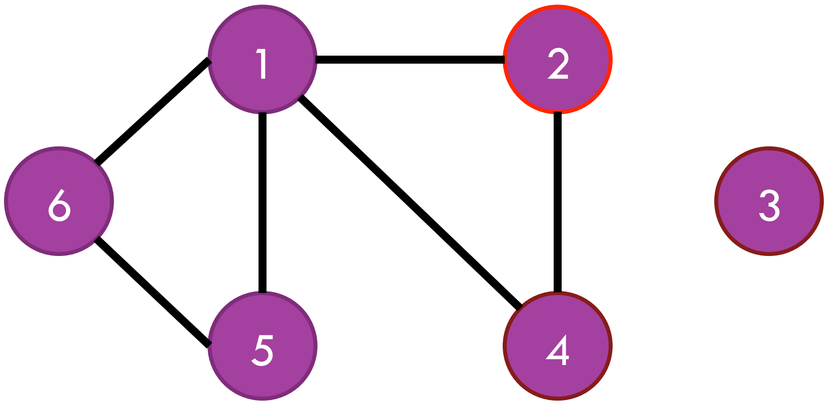


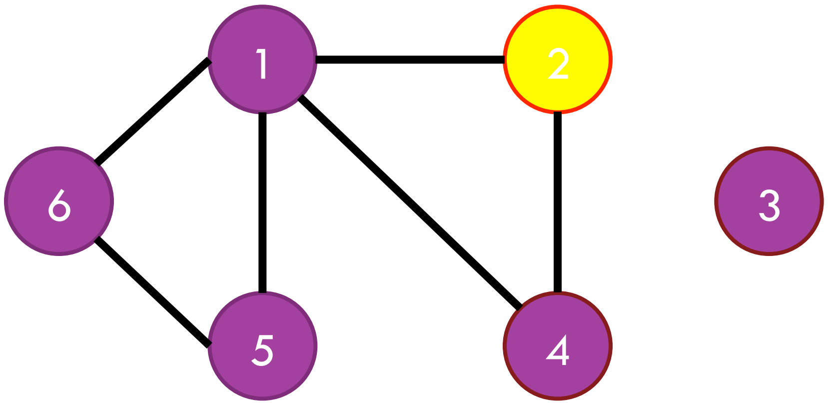
CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

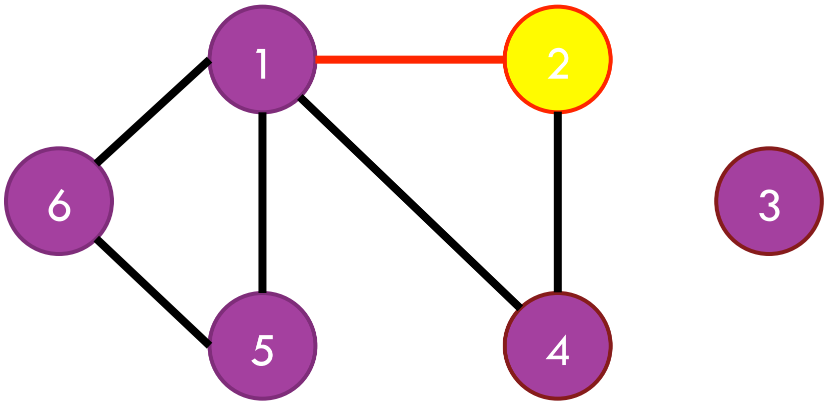




CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

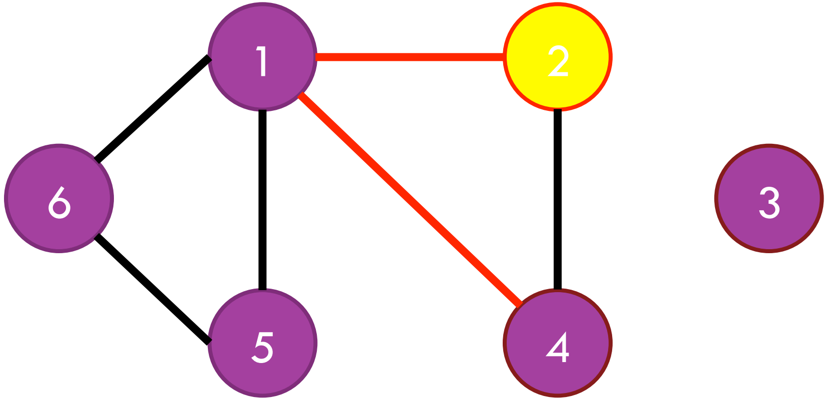
C': 2



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

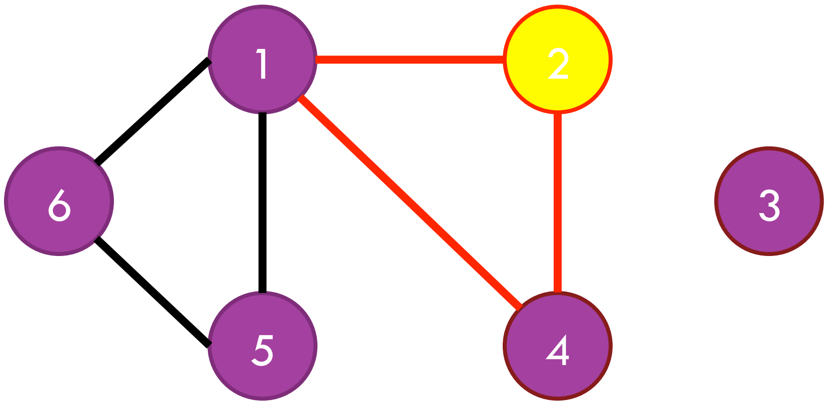
C': 2-1



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

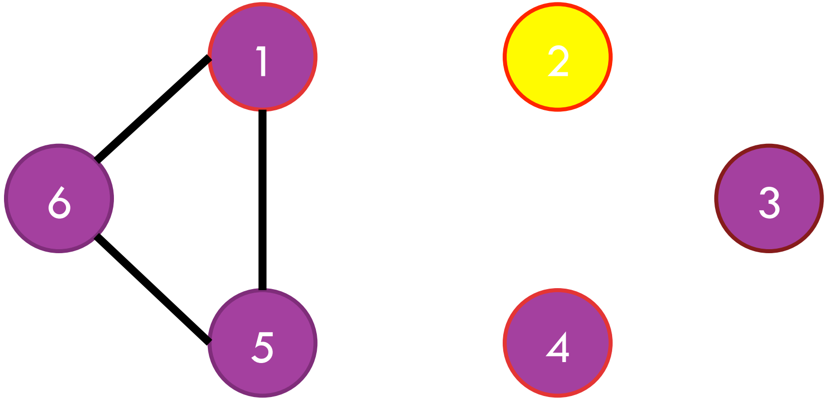
C’: 2-1-4



CAMINHO:

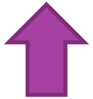
C: 5-2-3-4-5

C’: 2-1-4-2

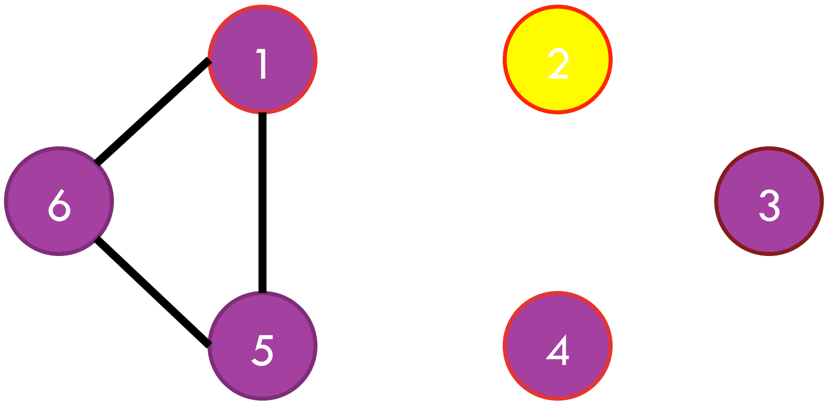


CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

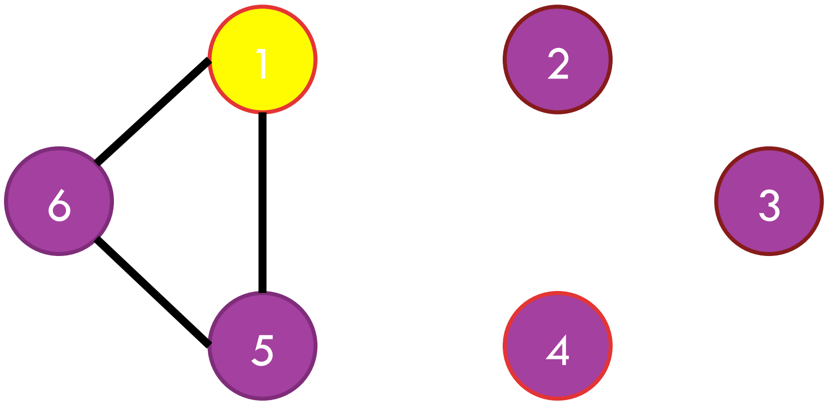


C’: 2-1-4-2



CAMINHO:

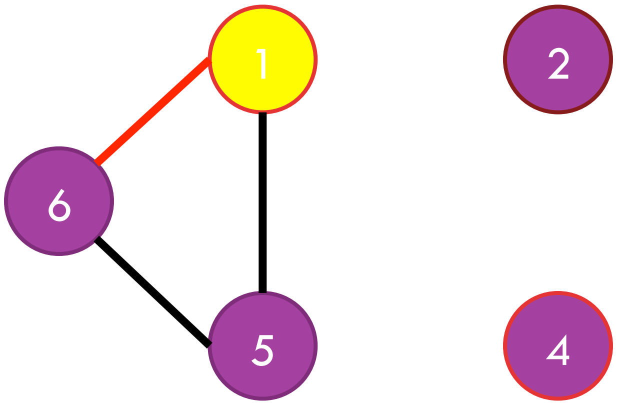
C: 5-2-1-4-2-3-4-5



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

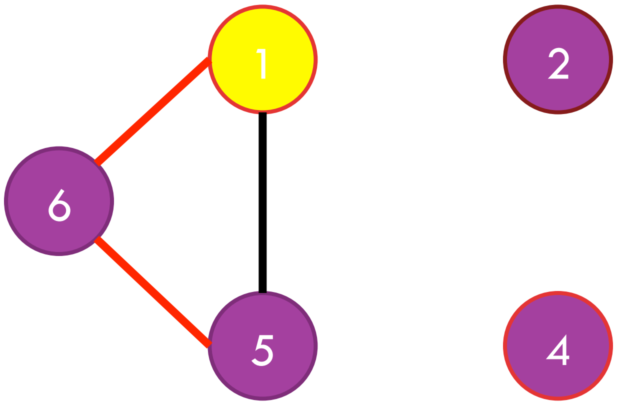
C':1



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

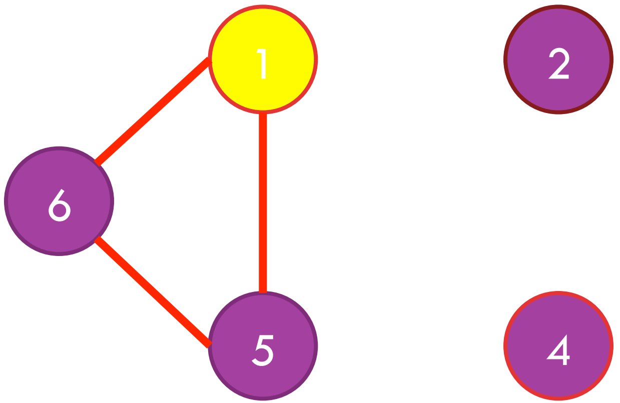
C':1-6



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

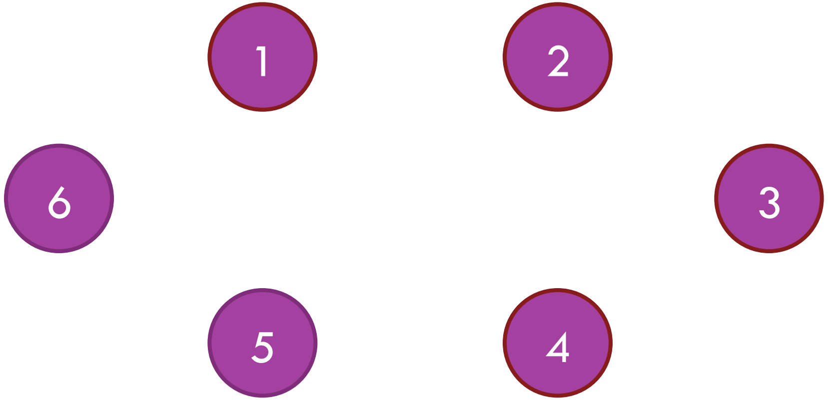
C’:1-6-5



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

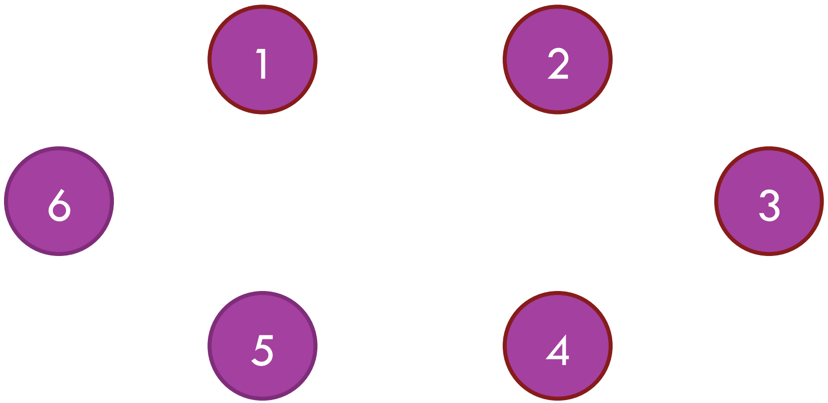
C’:1-6-5-1



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

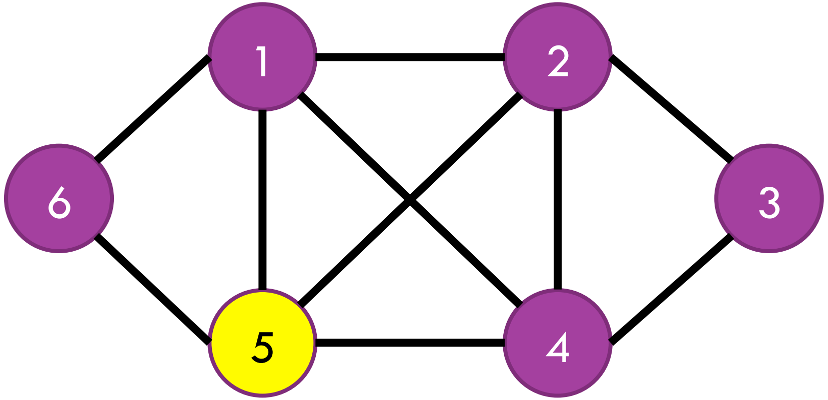
C’:1-6-5-1



CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5

C':1-6-5-1



CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5

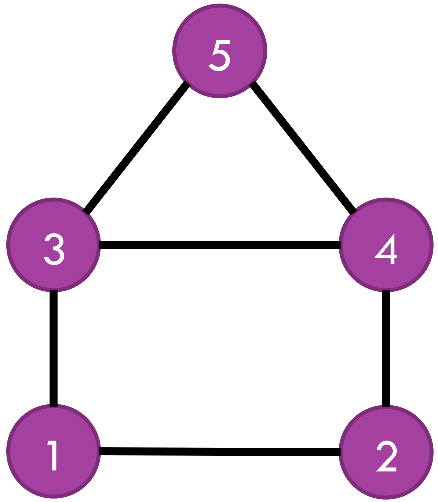
Mapa do Departamento de Matemática

- A figura abaixo ilustra o mapa do Departamento de Matemática de uma importante Universidade. A entrada principal está na parte norte do Departamento. Determine se é possível que uma pessoa possa andar pelo Departamento passando através de cada porta exatamente uma vez e terminando onde começou.

.

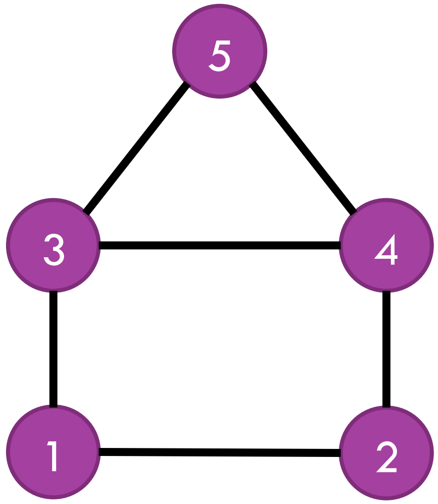
Grafos semieulerianos ou unicursais

- Um grafo é dito semieuleriano se existe um caminho aberto que passe por todas as arestas



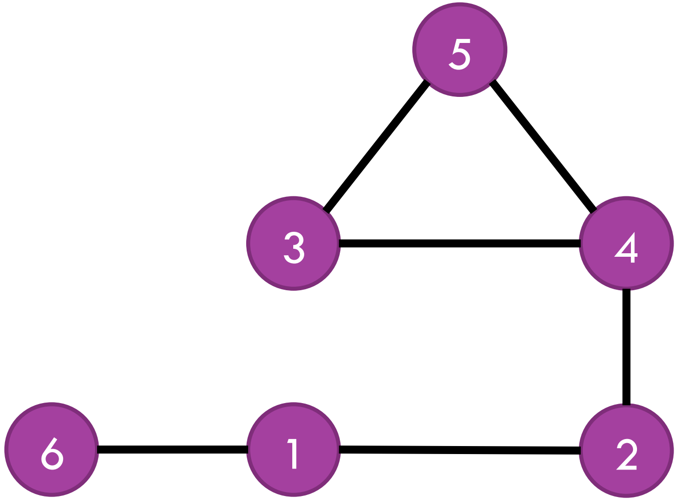
Grafos unicursais

- TEOREMA: um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



Grafos unicursais

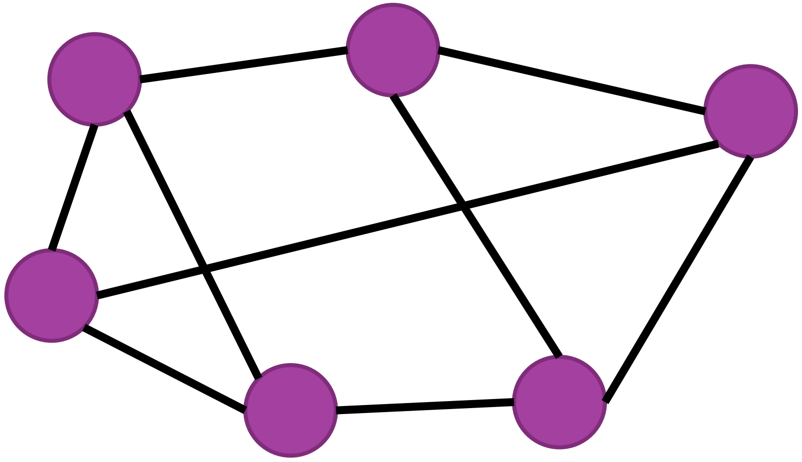
- TEOREMA: um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



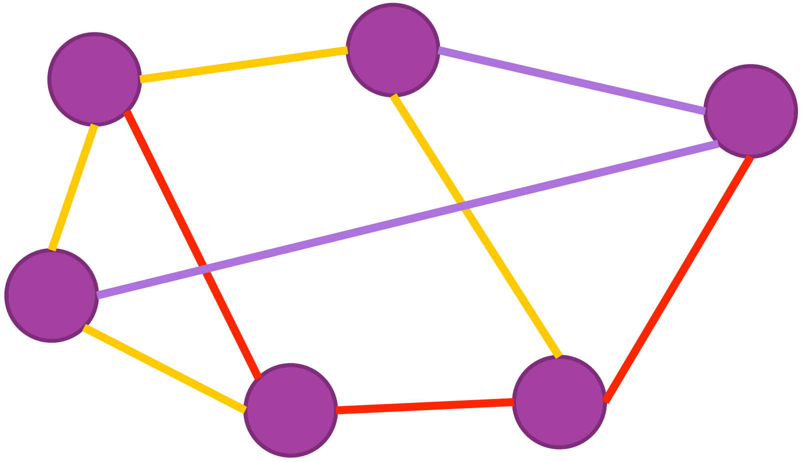
Grafos unicursais

- TEOREMA: Em um grafo conexo G com exatamente 2K vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G

Grafos unicursais



Grafos unicursais

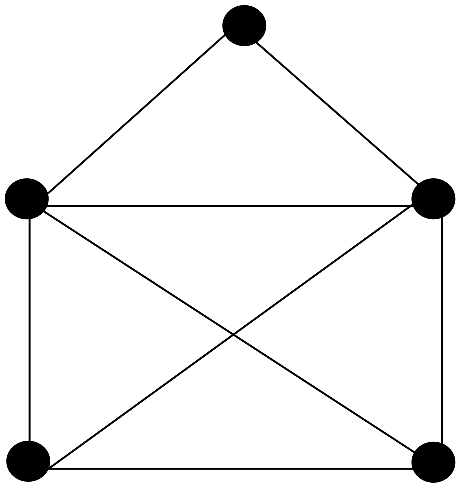


Grafos, em resumo

- Grafo euleriano: todos os vértices de grau par
- Grafo unicursal: dois vértices de grau ímpar
- Grafo qualquer: 2K vértices de grau ímpar *(k-traçável)*

Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?
- É possível fazer a mesma coisa terminando no ponto de partida?