TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

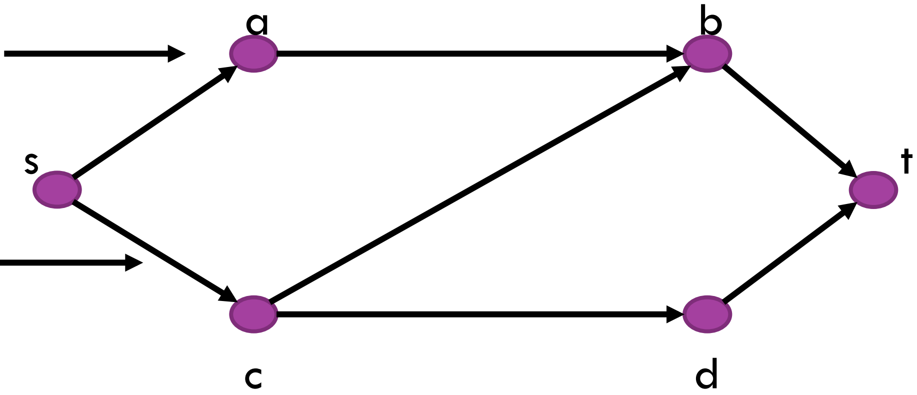
FLUXO EM REDES
ALGORITMO DE FORD E FULKERSON

Prof. Alexei Machado

O que são redes?

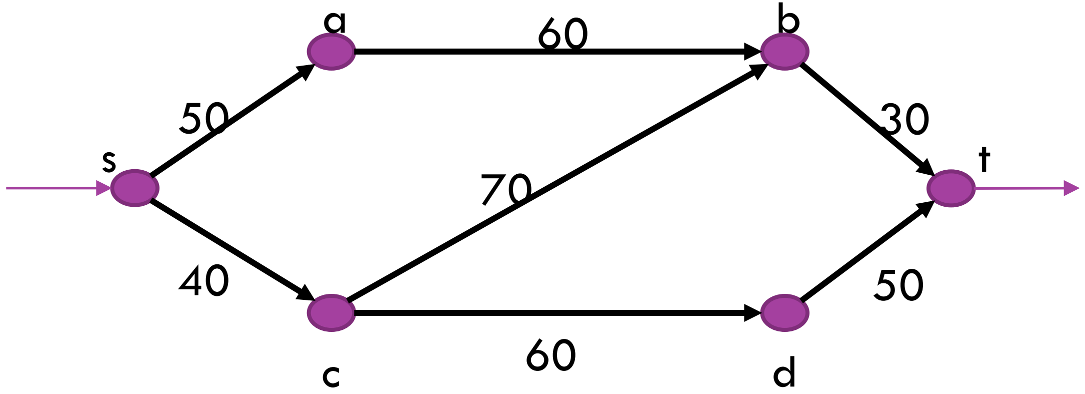
Nó ou
Vértices

Linhas ou
Arestas



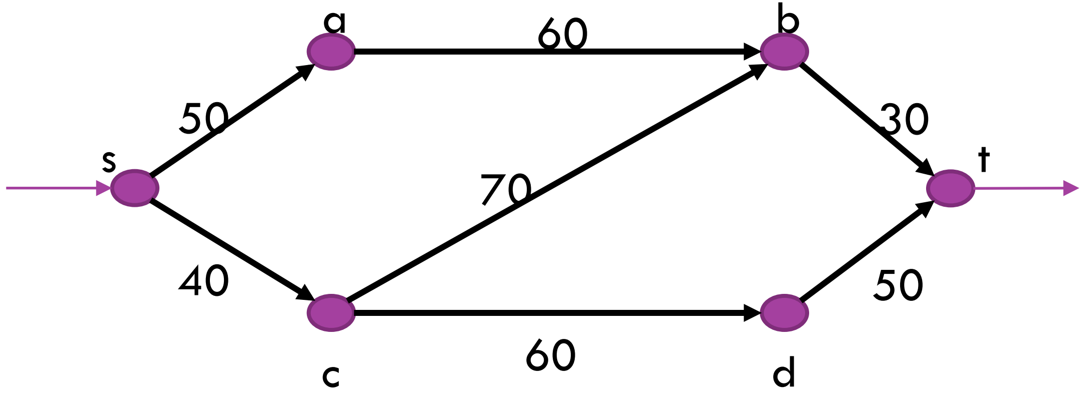
Rede = grafo

Fluxo em grafos



- Exemplo de uma malha rodoviária.
- Os 'pesos' das arestas mostram o número máximo de veículos que podem passar pelos arcos numa determinada unidade de tempo.
- Estes números são chamados de **capacidades**.

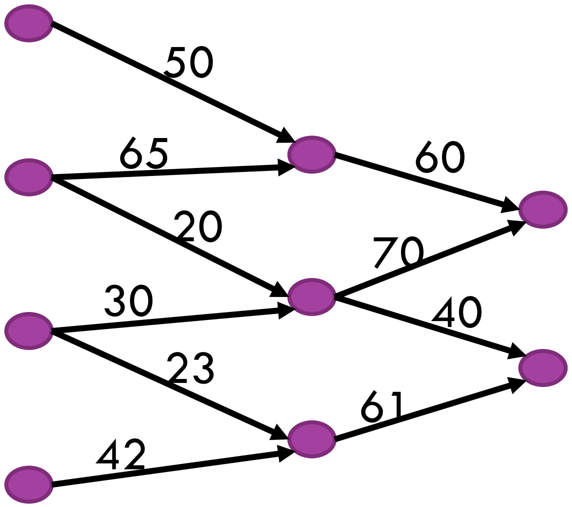
Fluxo em grafos



- s: fonte - emissor de fluxo
- t: terminal - quem consome ou recebe o fluxo

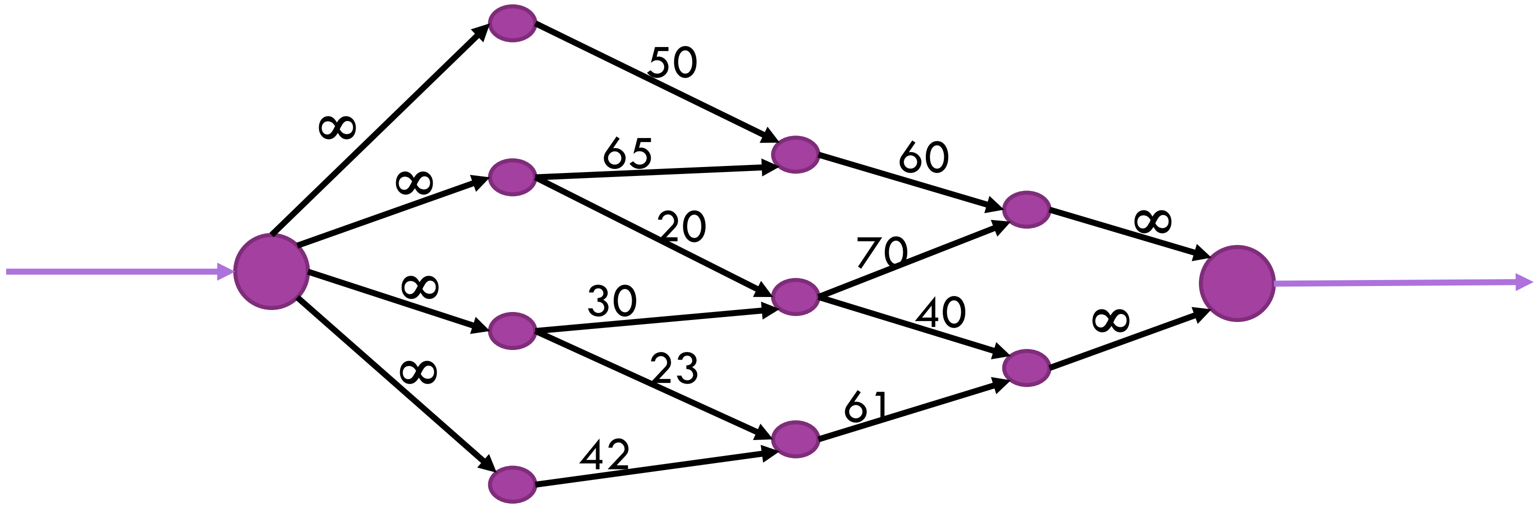
Fluxo em grafos

- Como lidar com múltiplas fontes ou terminais?

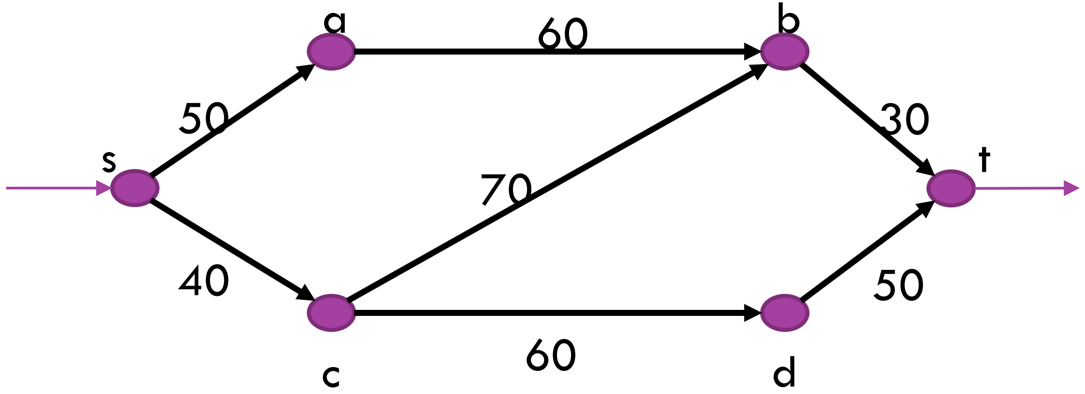


Fluxo em grafos

- Como lidar com múltiplas fontes ou terminais?



Fluxo em grafos



- Qual a capacidade máxima de veículos nesta rede? Ou seja, quanto veículos conseguem sair de s e chegam a t?

Fluxo em grafos

- Problema do fluxo: recursos que se movem por meio dos arcos de um grafo.
- Exemplos:
  - Líquidos em canos
  - Tráfego em rede de computadores
  - Veículos e rodovias
  - Taxa de produção em linha de montagem

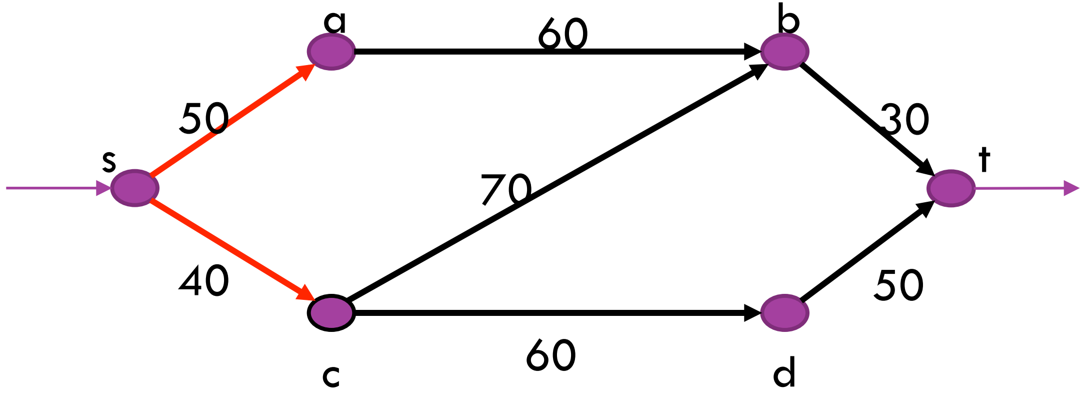
Fluxo em grafos

- Um fluxo f(u,v) na rede de fluxo G = (V,E) é uma função com as restrições:
  - O fluxo não pode exceder a **capacidade** de nenhum arco, para todo arco pertencente a E
  - O fluxo de entrada em um vértice é igual ao fluxo de saída (**conservação** de fluxo)
  - O somatório do fluxo em todos os vértices é o **valor total** do fluxo

O problema do fluxo máximo

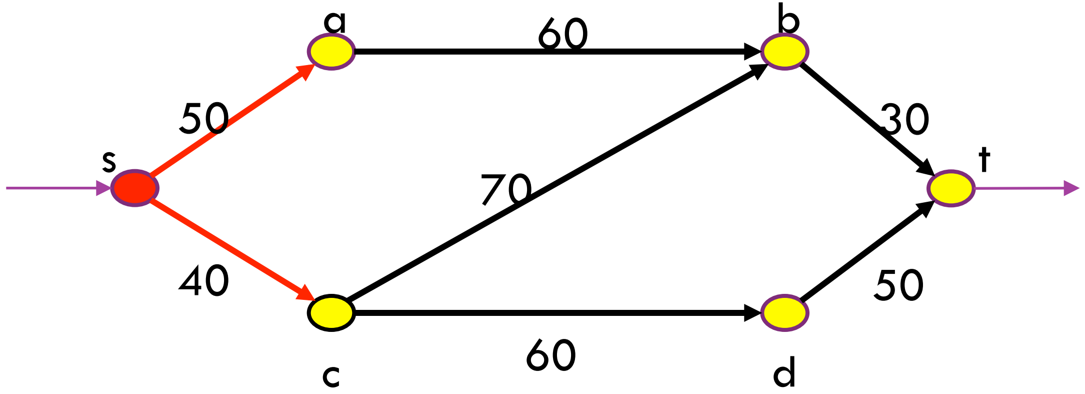
- Corresponde a achar a maior quantidade de fluxo que pode passar por um dado grafo
- Relacionado ao conceito de **corte**:
  - Um corte (S,T) em uma rede de fluxo $G = (V,E)$ é uma partição V em dois conjuntos S e T tais que $s \in S$ e $t \in T$

O problema do fluxo máximo



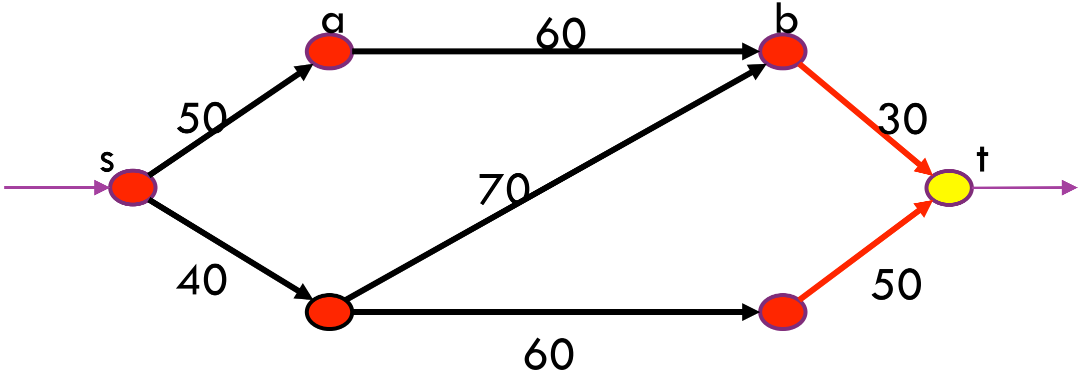
- O conjunto {sa, sc} é um corte com capacidade 90.
- S = {s} e T = {a, b, c, d, t}

O problema do fluxo máximo



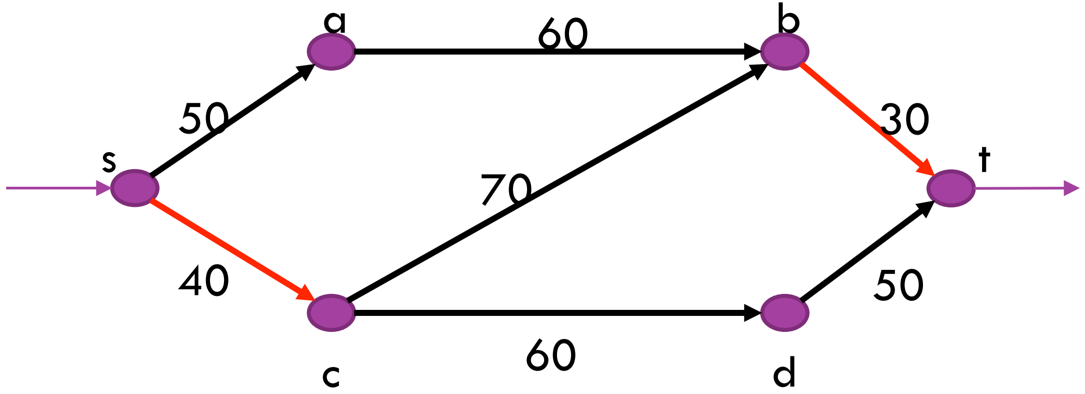
- O conjunto {sa, sc} é um corte com capacidade 90.
- S = {s} e T = {a, b, c, d, t}

O problema do fluxo máximo



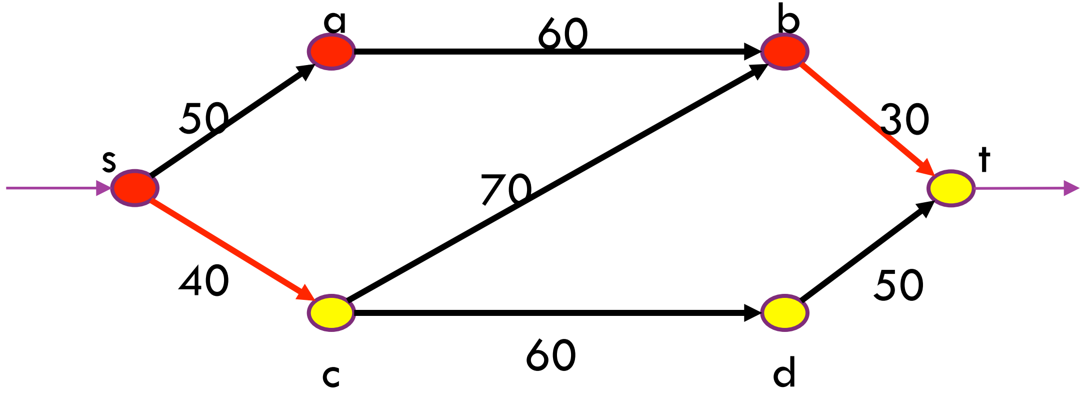
- O conjunto {bt, dt} é um corte com capacidade 80.
- S = {s, a, b, c, d} e T = {t}

O problema do fluxo máximo



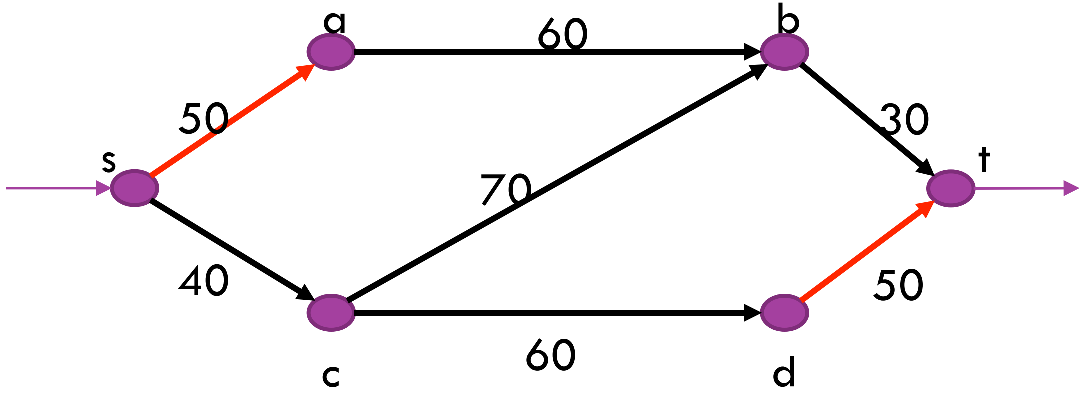
- O conjunto {sc, bt} é um corte com capacidade 70.
- S = {s, a, b} e T = {c, d, t}

O problema do fluxo máximo



- O conjunto {sc, bt} é um corte com capacidade 70.
- S = {s, a, b} e T = {c, d, t}

O problema do fluxo máximo



- O conjunto {sa, dt} **não** é um corte, pois sua retirada não particiona V de maneira que s e t estejam desconectados

Teorema de Ford e Fulkerson

- Partindo de um fluxo nulo, este fluxo terá capacidade menor do que qualquer corte no fluxo.
- Aumentando este fluxo aos poucos, pode-se testar para comparar o seu valor comas as capacidades dos cortes.
- Em um dado momento, o valor se tornará igual a uma das capacidades, e é claro que isso acontecerá com a menor de todas capacidades.

Teorema de Ford e Fulkerson

- Portanto, um corte cuja capacidade possa se tornar igual ao valor de um fluxo é um corte de **mínima capacidade.**
- Veja que **o fluxo não pode mais aumentar**, pois ele passa por todo o corte, e este já estará saturado.
- Portanto, este fluxo será **máximo.**

Teorema de Ford e Fulkerson

- Teorema de Ford e Fulkerson

***max flow-min cut*:**

"O valor do fluxo máximo em um grafo é igual à capacidade do corte de capacidade mínima."

Algoritmo de Ford e Fulkerson

- A capacidade residual de (u, v) é a quantidade de fluxo adicional que podemos enviar de u para v sem ultrapassar a sua capacidade. Ou seja, c(a) – f(a)
- Uma rede residual consiste em arestas que podem admitir mais fluxo

Algoritmo de Ford e Fulkerson

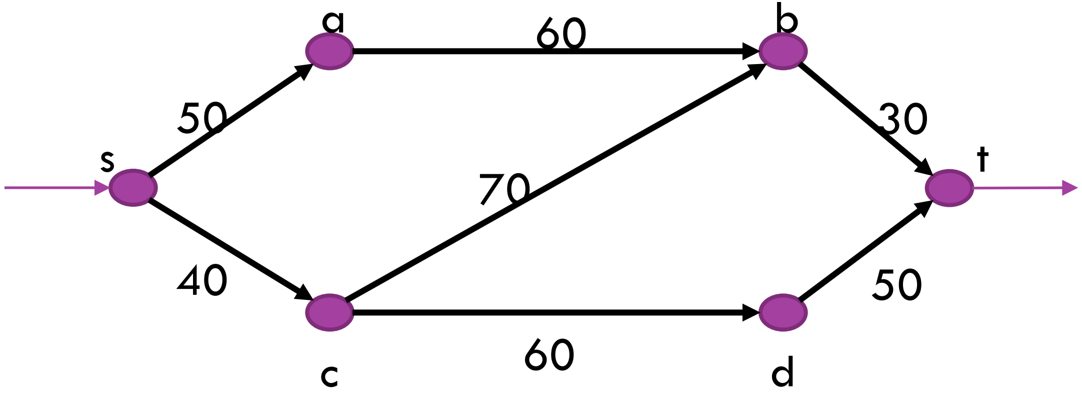
- Dado um digrafo capacitado e um fluxo que respeita a capacidade dos arcos, dizemos que um arco u,v está cheio se o fluxo no arco é igual a sua capacidade.

Algoritmo de Ford e Fulkerson

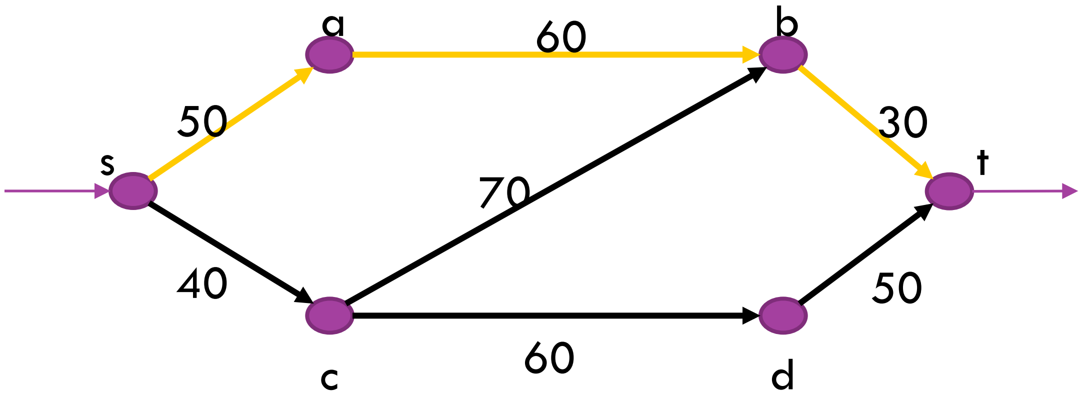
- Assim, em um caminho de s para t no grafo, se nenhum arco do caminho está cheio, então podemos chamá-lo de **Caminho de Aumento**

- A capacidade residual do caminho de aumento é a menor capacidade residual do seus arcos

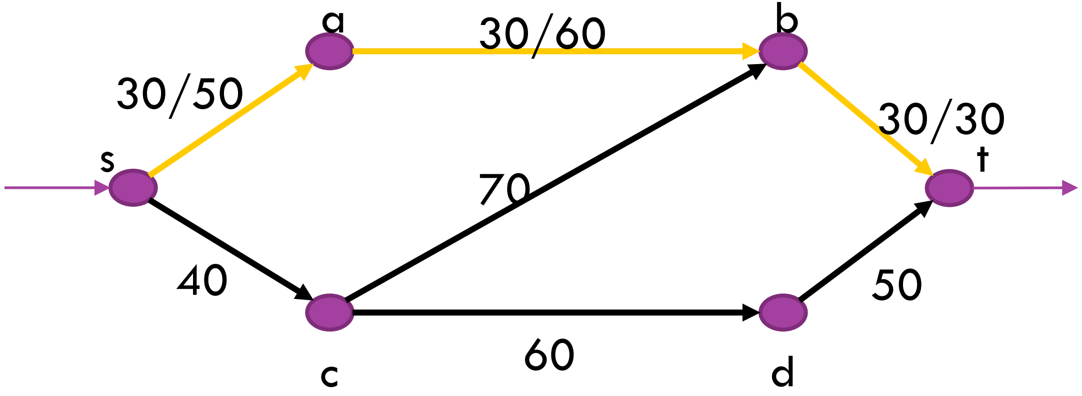
Caminhos de Aumento



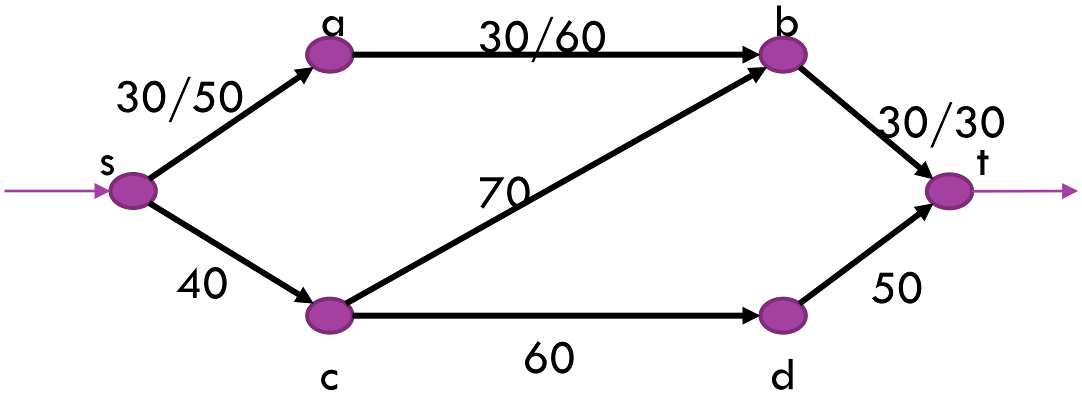
Caminhos de Aumento



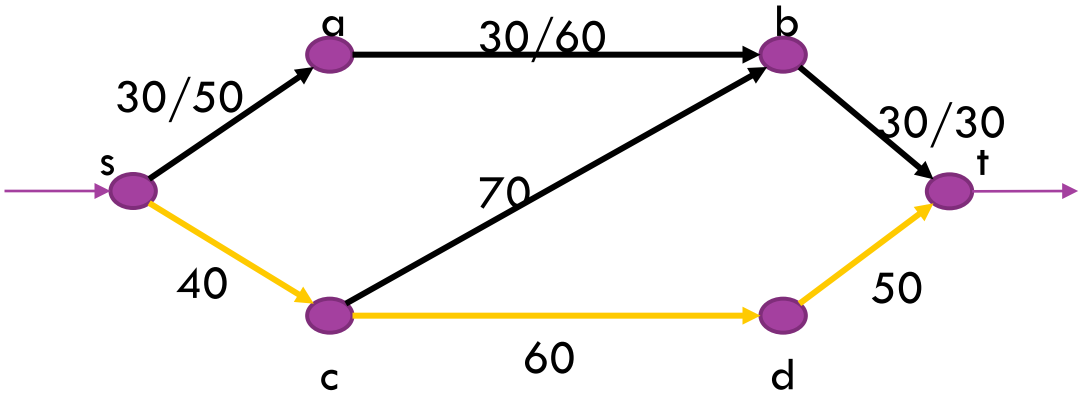
Caminhos de Aumento



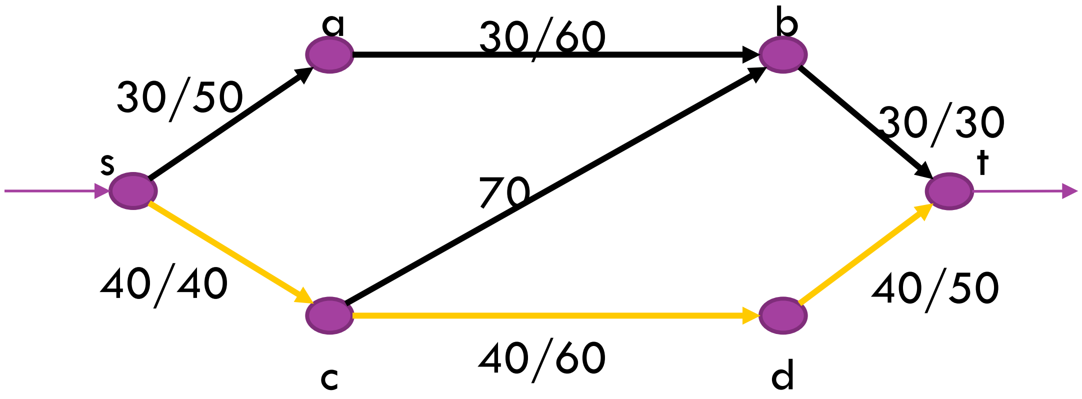
Caminhos de Aumento



Caminhos de Aumento



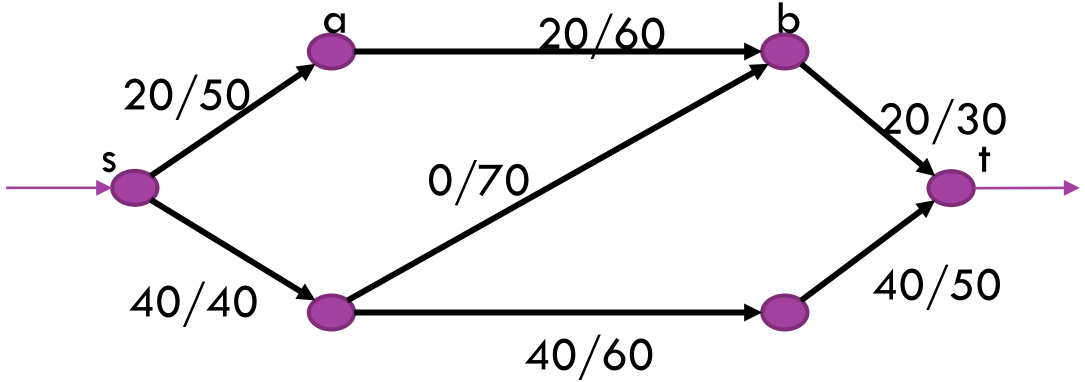
Caminhos de Aumento



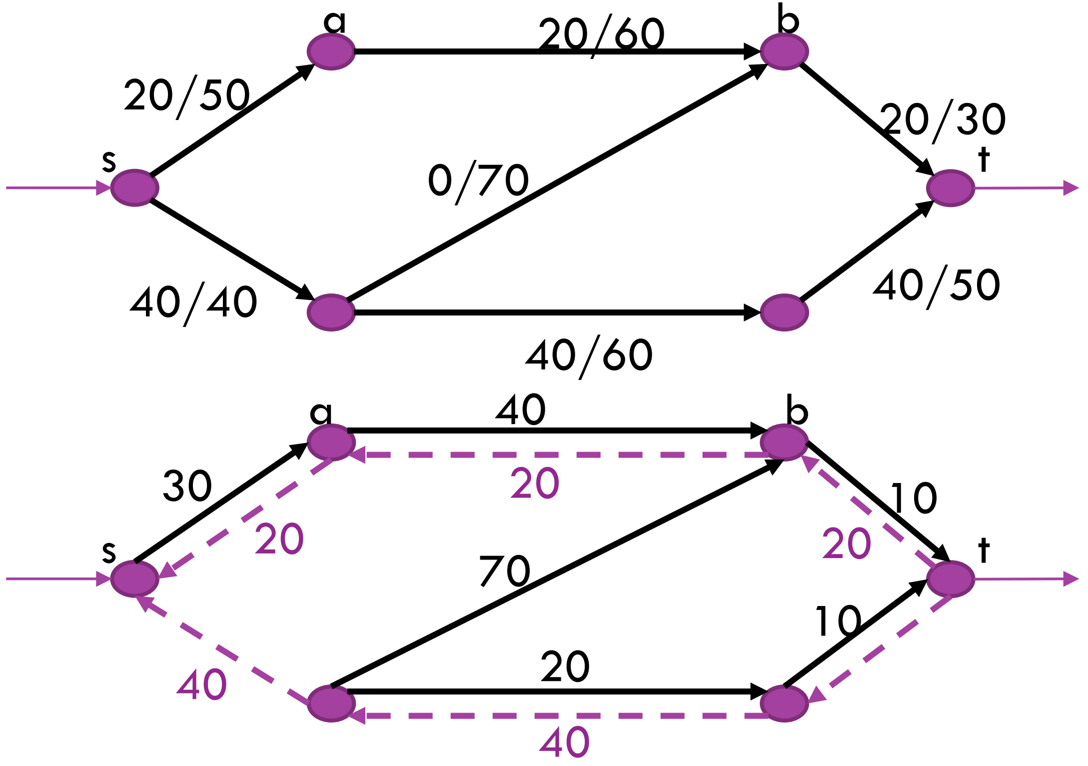
Arcos reversos

- A partir do grafo original, um arco reverso: representa a capacidade de um fluxo “retornar” por aquele caminho, na tentativa de encontrar caminhos com maior capacidade residual

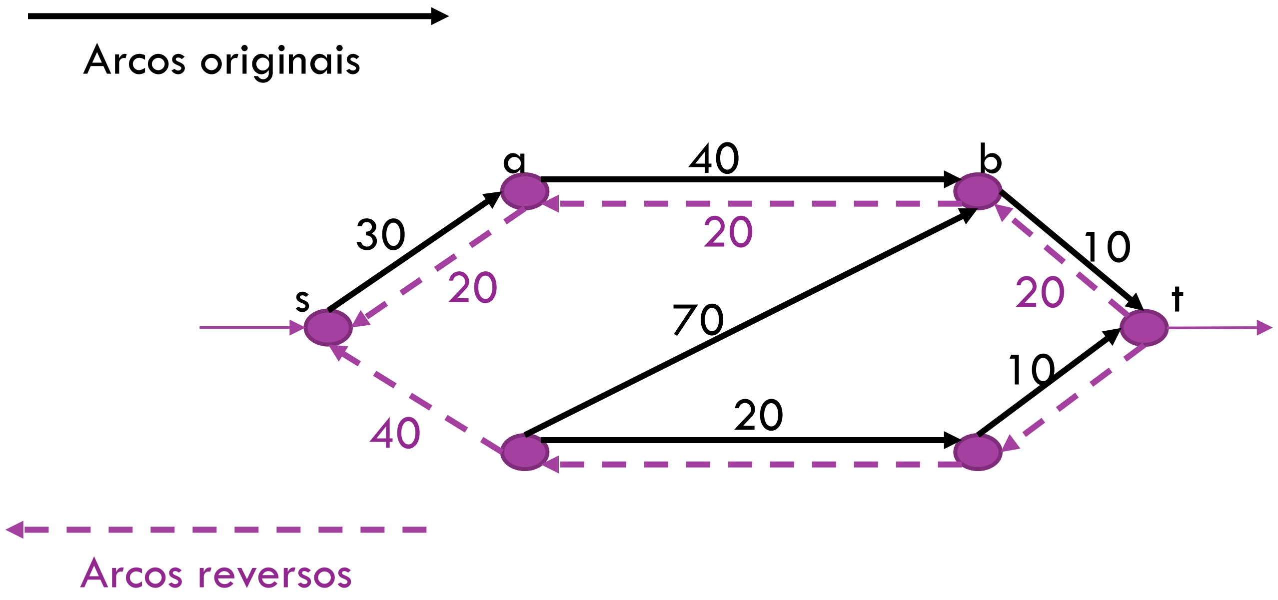
Rede residual e arcos reversos



Rede residual e arcos reversos



Rede residual e arcos reversos



Algoritmos para Fluxo Máximo - Ford-Fulkerson

- Dada uma **rede de fluxos** como calcular o seu fluxo máximo?
- Uma hipótese é usar o **método de Ford-Fulkerson** (chamamos de método porque é uma ideia que pode ser concretizada depois com vários algoritmos)

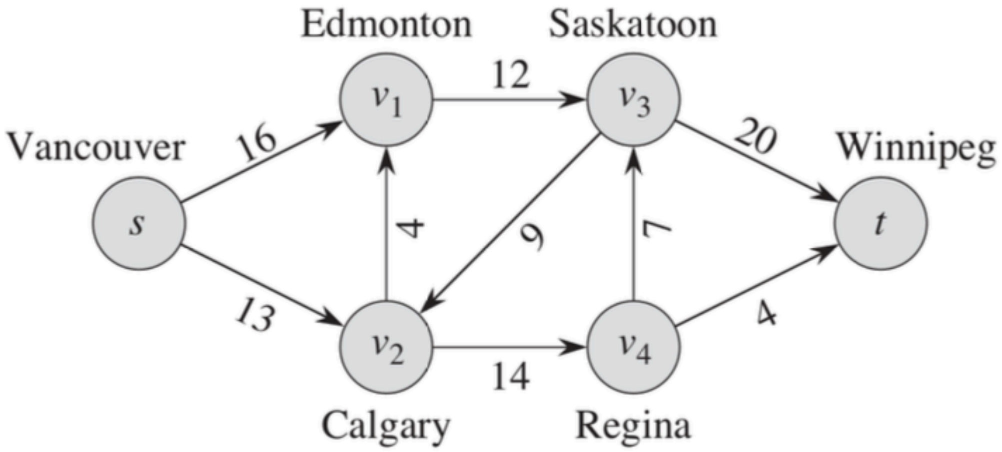
Método de Ford-Fulkerson: fluxo máximo no grafo G, de s para t

Ford-Fulkerson(G, s, t):
  Inicializar fluxo f a zero
  Enquanto existir um *caminho de aumento* p no grafo residual G_f **fazer**:
    aumentar fluxo f ao longo de p
  retornar f

- Um **caminho de aumento** (*augmenting path*) é um caminho pelo qual ainda é possível enviar fluxo
- Um **grafo residual** G_f é um grafo que indica como podemos modificar o fluxo nas arestas de G depois de já aplicado o fluxo f.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Vejamos agora um exemplo do Ford-Fulkerson passo a passo para que possa compreender bem os conceitos usados.

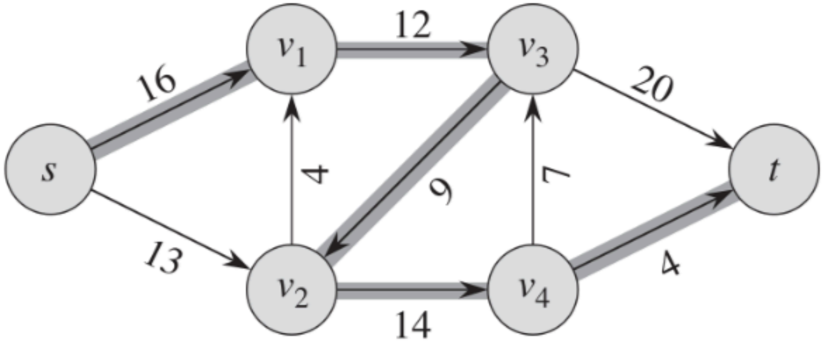


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este é o grafo inicial com as capacidades indicadas nas arestas.

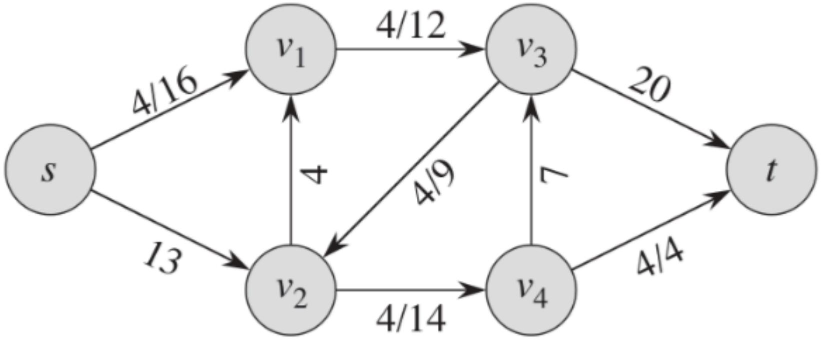
Ford-Fulkerson passo a passo

- Um caminho de aumento é um caminho entre a origem s e o destino t que nos permite adicionar fluxo, ou seja, um caminho onde a capacidade mínima das arestas é maior que 0.
- No caso do nosso grafo existem vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4 \to t$, indicado a cinzento.
- A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 16, 12, 9, 14 e 4), pelo que podemos enviar um fluxo de 4.



Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)



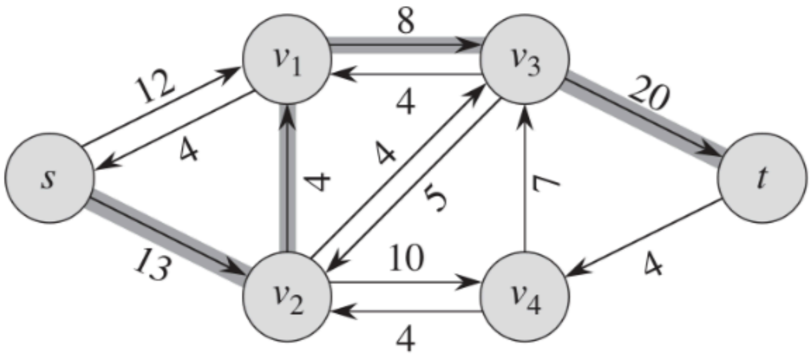
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

Ford-Fulkerson passo a passo

- O grafo residual mostra onde podemos ainda aplicar fluxo.
- Depois de adicionarmos um fluxo $f(a)$ longo de um caminho, o grafo residual é obtido fazendo as seguintes transformações ao longo de cada aresta (u, v) no caminho de aumento que escolhemos:
  - Na direção do caminho que tomamos, reduzimos o peso das arestas em $f(a)$, ou seja, $c(u, v) = c(u, v) - f(a)$. Se $c(u, v)$ ficar a zero, retiramos a aresta. Isto representa a quantidade de fluxo que ainda podemos fazer passar pela aresta na direção original
  - Na direção oposta, aumentamos o peso da aresta em $f(a)$, ou seja, $c(v, u) = c(v, u) + f(a)$. Se a aresta não existia, cria-se. Isto representa que se quisermos podemos "retirar" fluxo ao longo desta aresta, o que pode dar jeito para aumentar depois via outro caminho.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

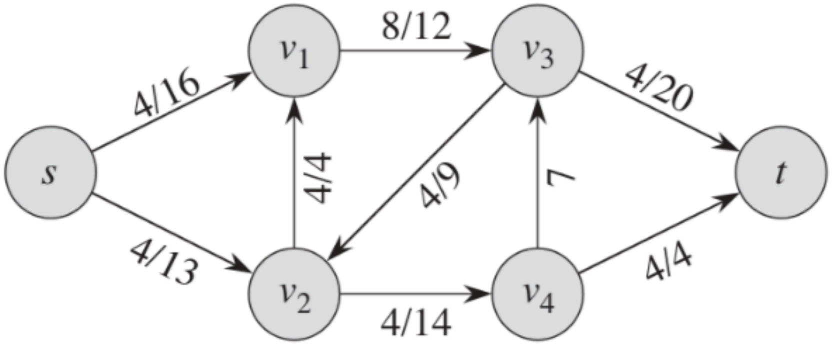


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 13, 4, 8 e 20).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

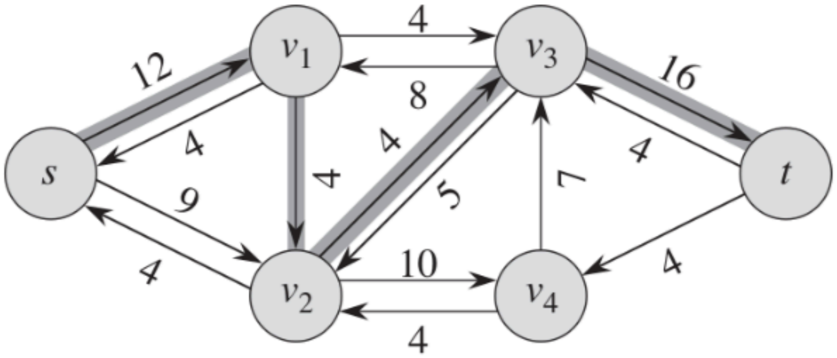


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 8 $(4 + 4)$.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

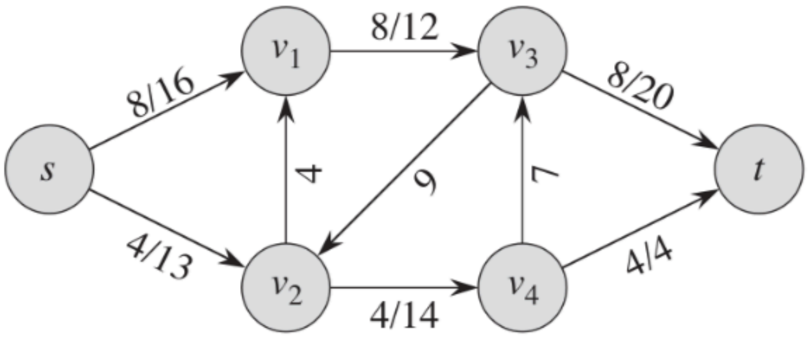


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 12, 4, 4 e 16). Note como está a ser usada a aresta (v_1, v_2) que tinha sido criada anteriormente.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

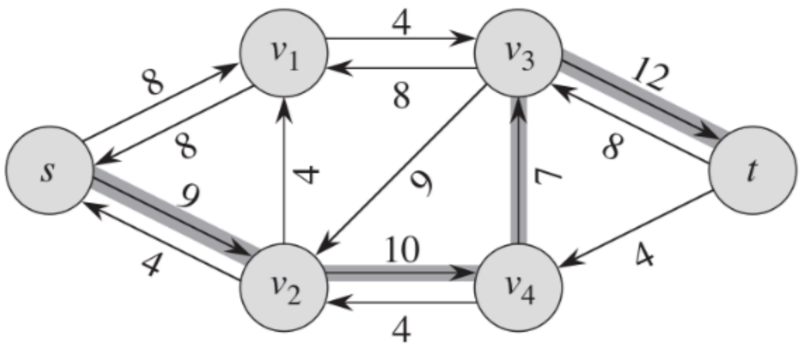


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 12 (8 + 4).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

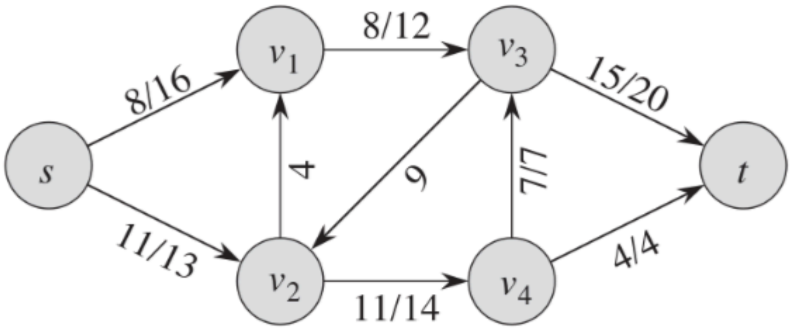


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_2 \to v_4 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 7 (mínimo entre 9, 10, 7 e 12).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 7 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

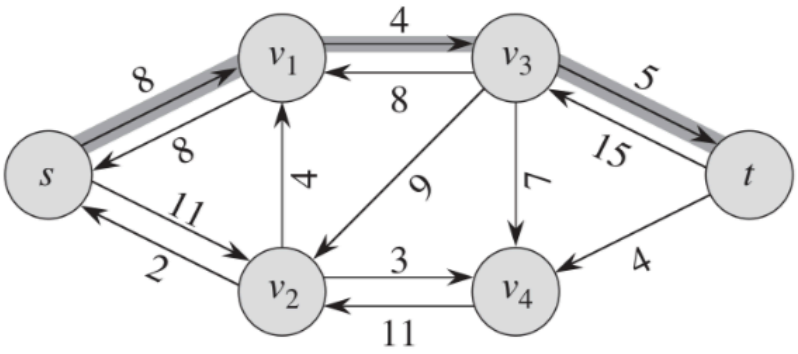


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 19 $(8 + 11)$.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 7 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

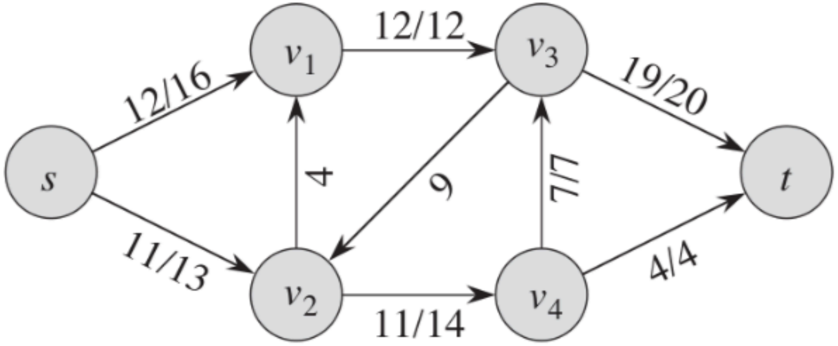


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda um caminhos de aumento: $s \to v_1 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 8, 4 e 5).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

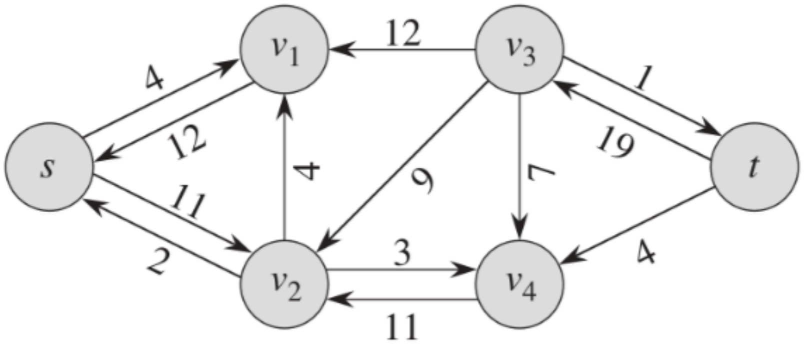


(*imagem de Introduction to Algorithms, 3rd* Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 23 (12 + 11).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

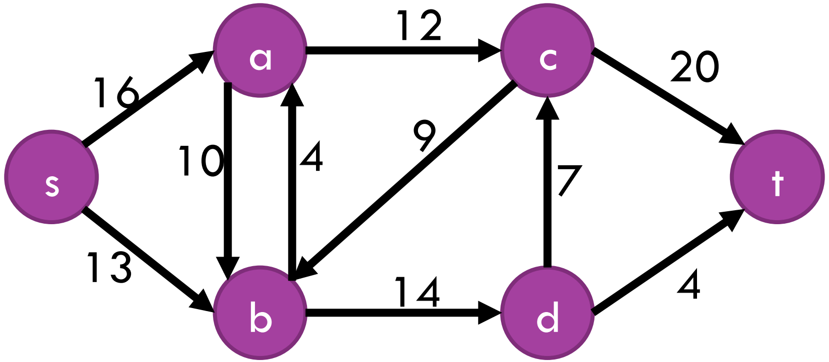


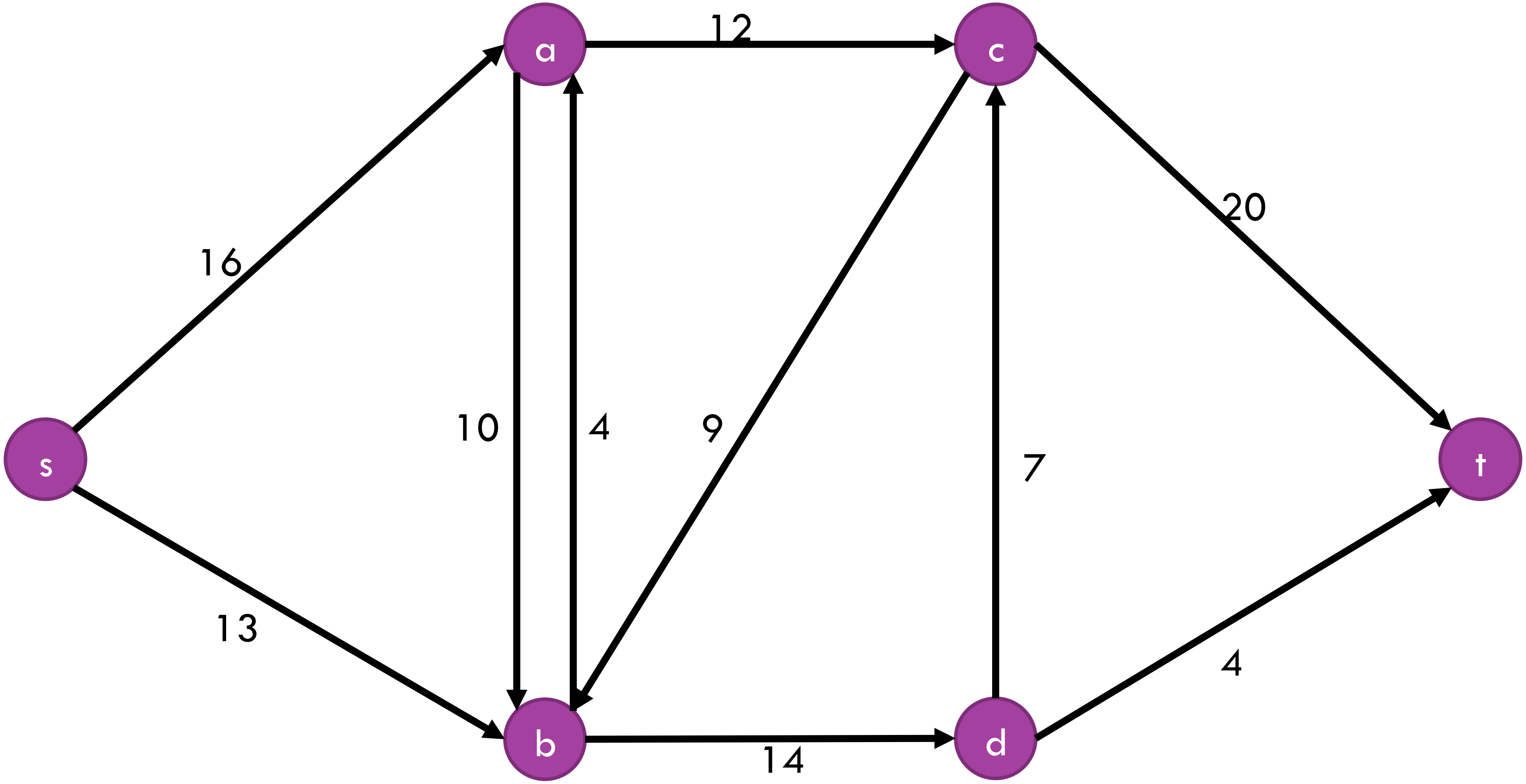
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

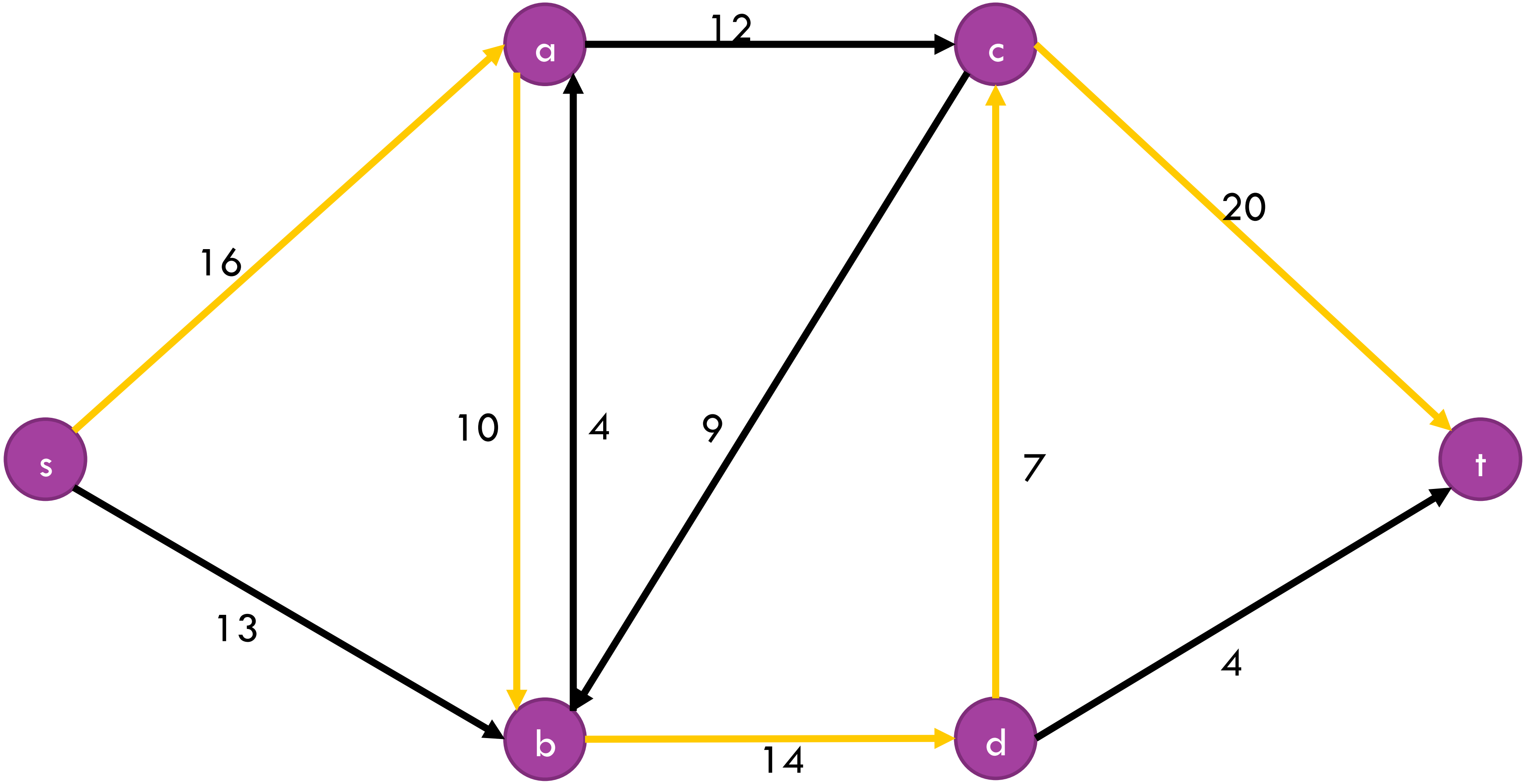
- Este grafo residual já não admite mais caminhos de aumento e o nosso método de Ford-Fulkerson fica por aqui!
- Este é o grafo residual do fluxo máximo que é de 23.

Exemplo: Ford e Fulkerson

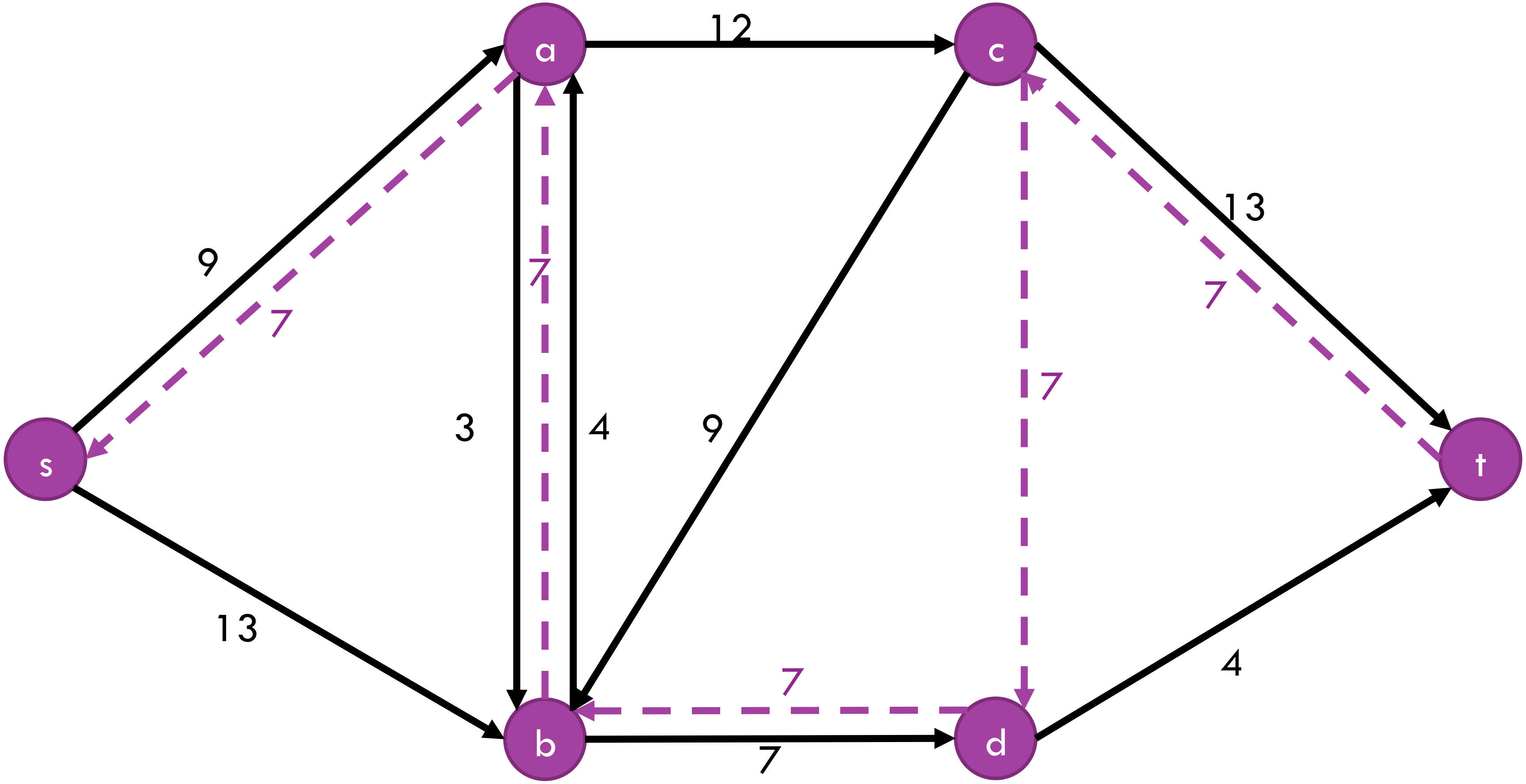
- Encontre o fluxo máximo na rede abaixo:



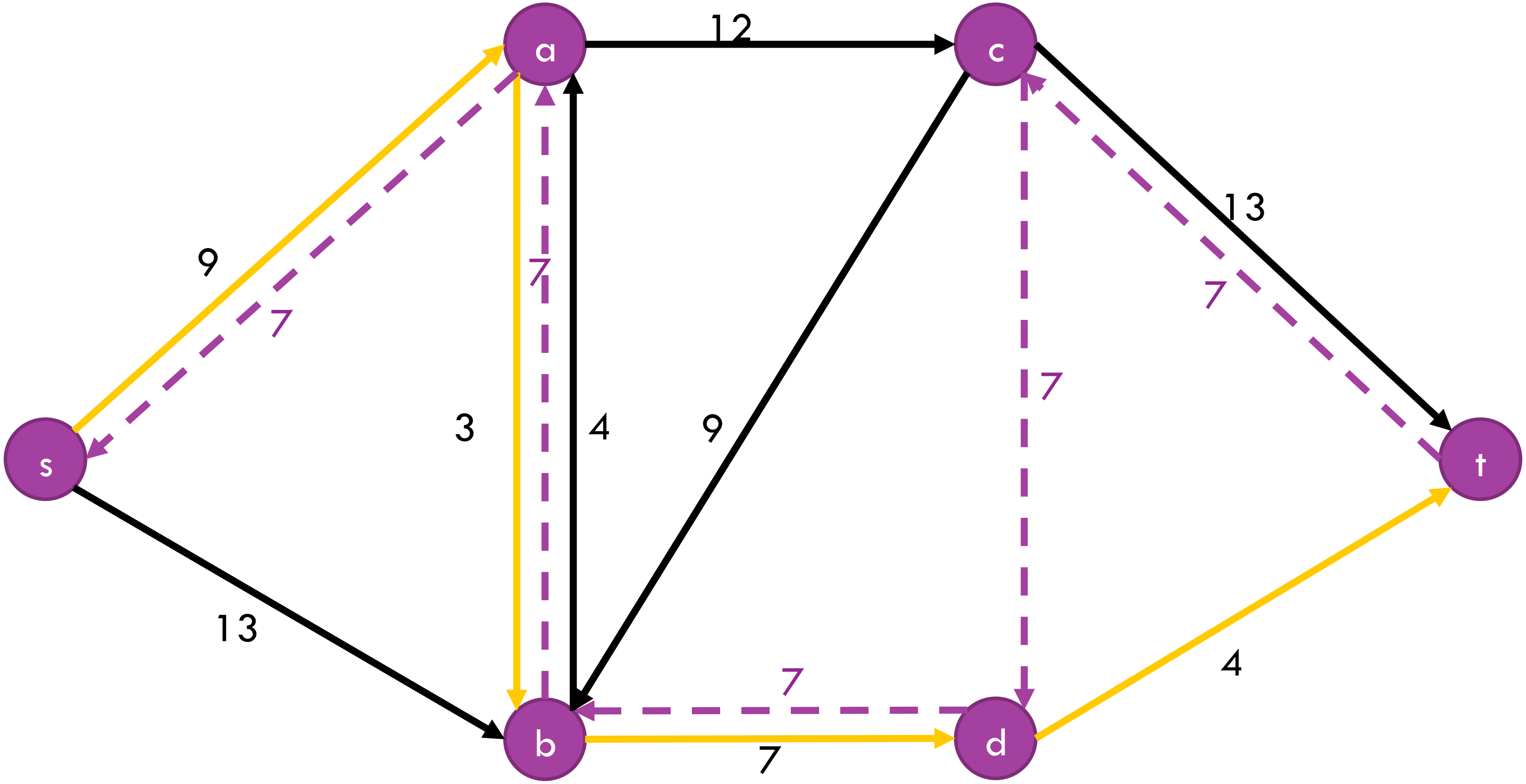

a
c
12
16
20
10
4
9
7
s
t
13
4
b
d
14



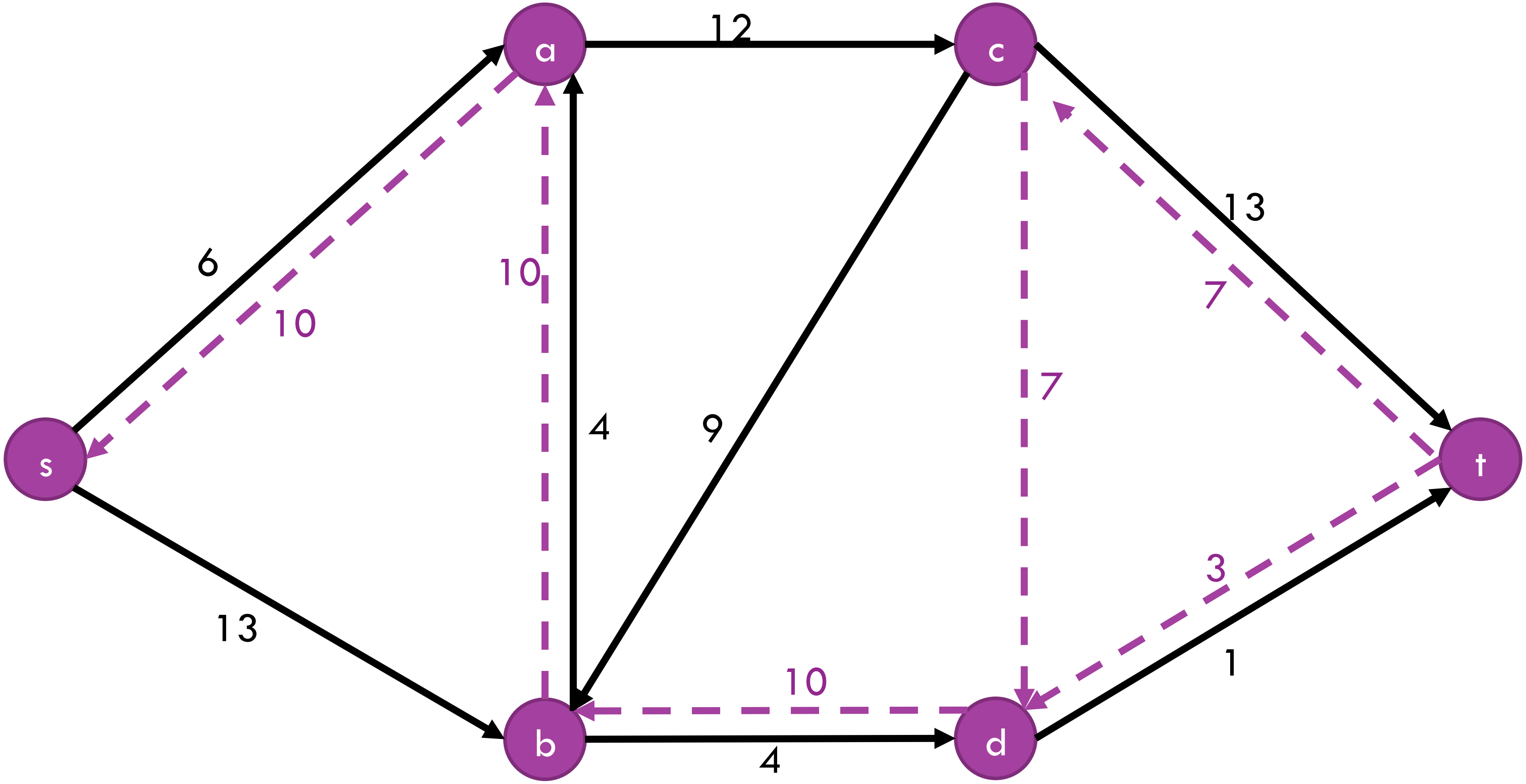
a
c
s
t
b
d
12
16
20
10
4
9
7
13
4
14

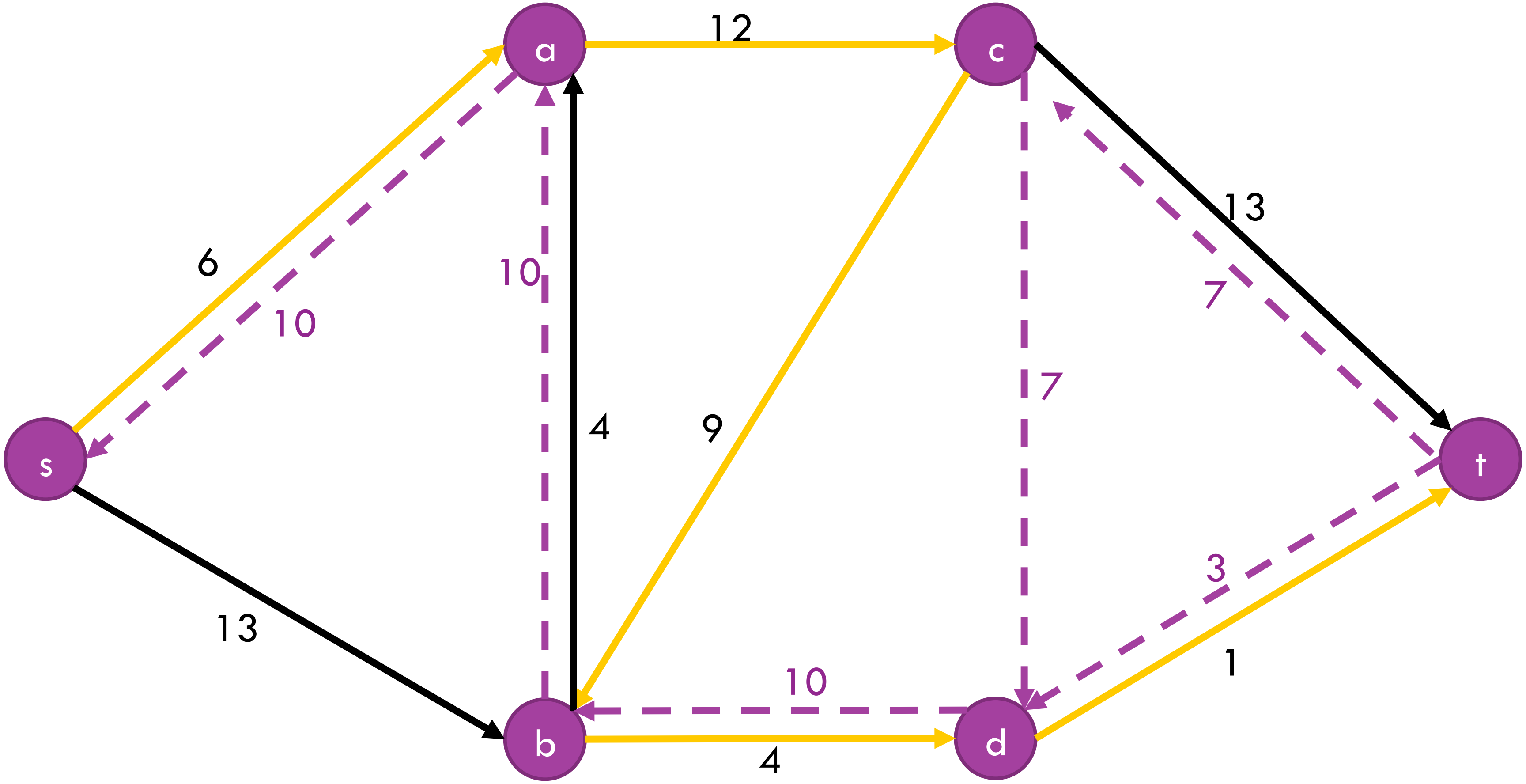


a
c
s
t
b
d
12
9
7
7
3
4
9
7
13
7
13
7
7
4

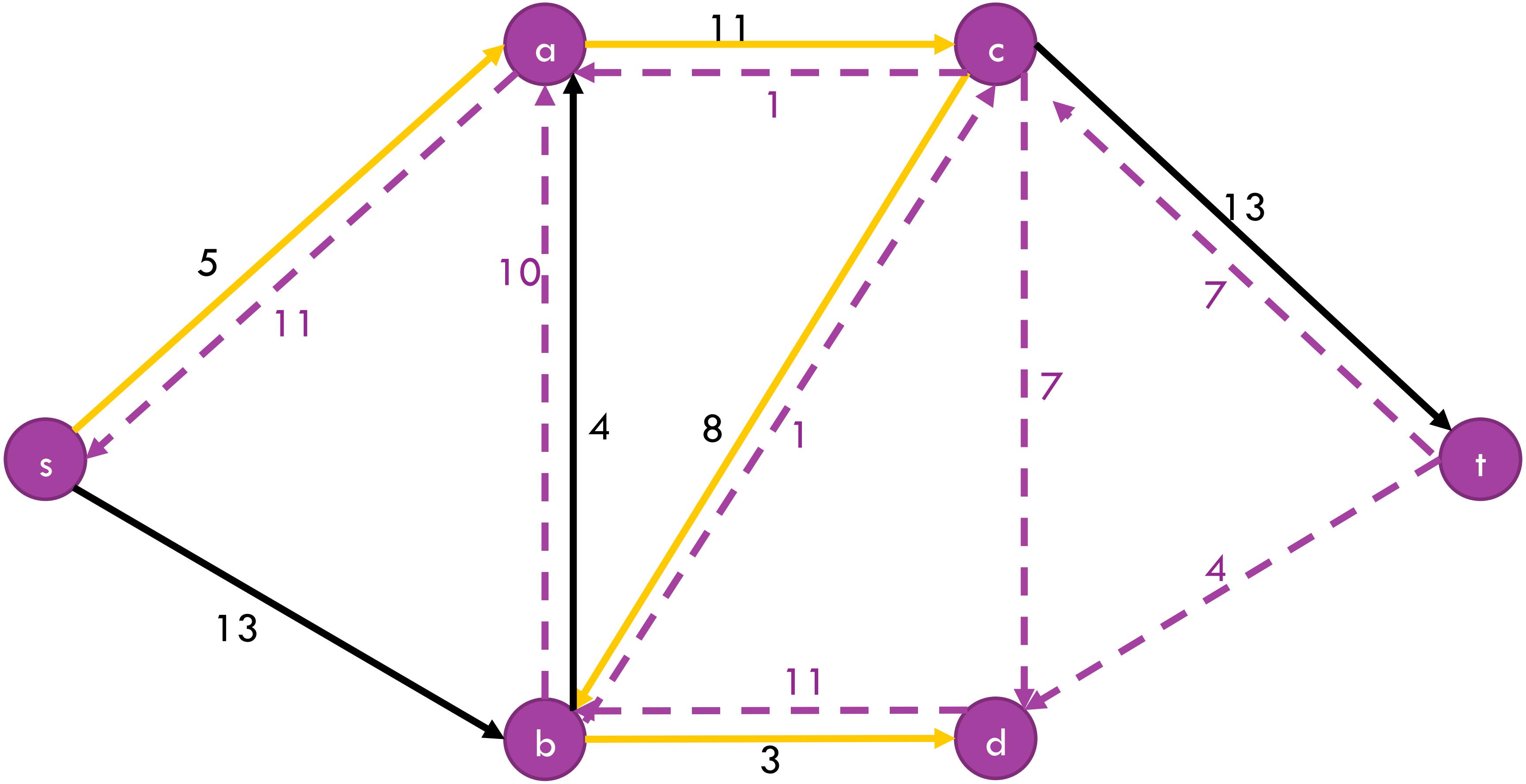


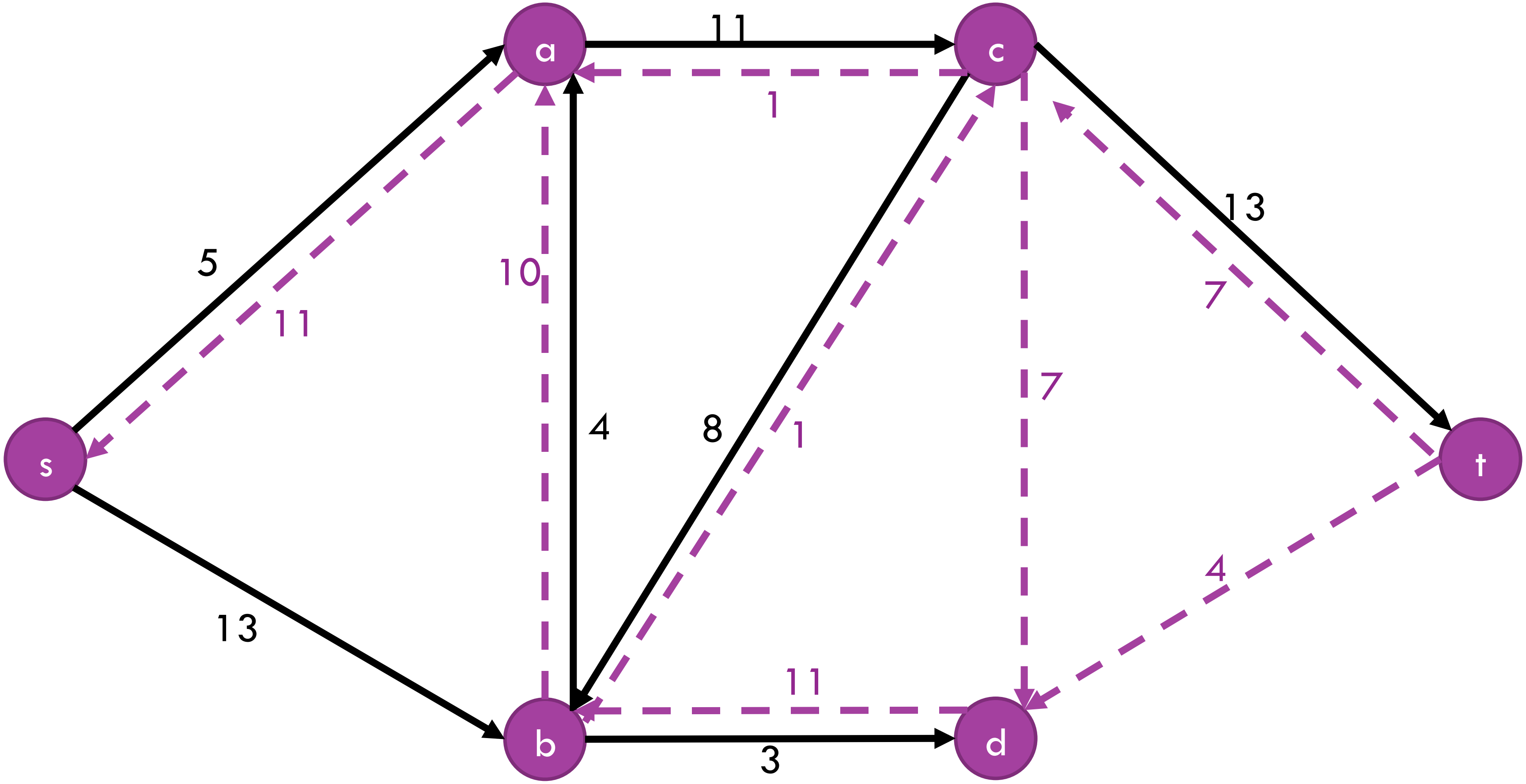
a
c
s
t
b
d
12
9
7
7
3
4
9
13
7
7
13
7
7
4

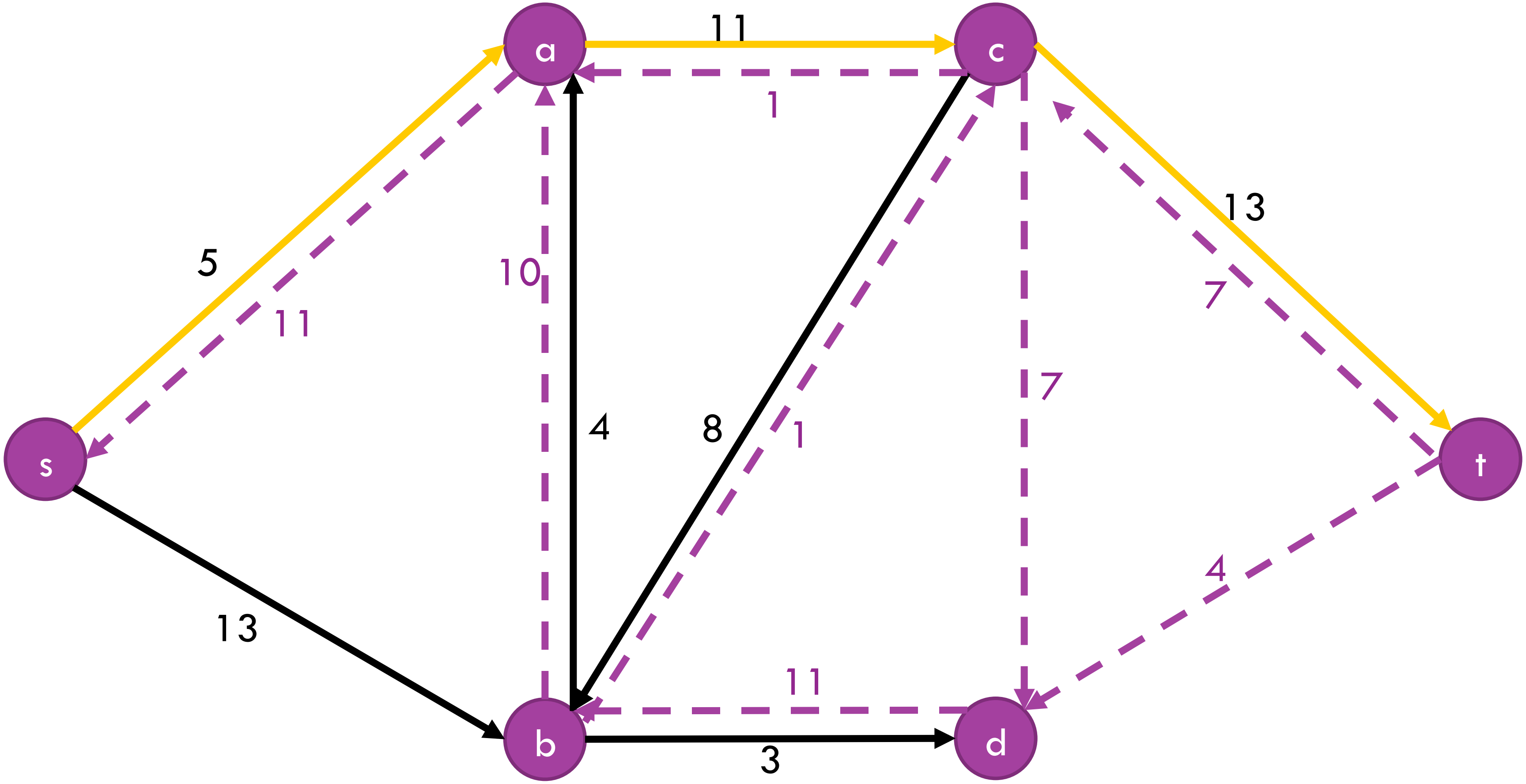

a
c
s
t
b
d
12
6
10
10
4
9
7
7
13
13
3
1
10
4

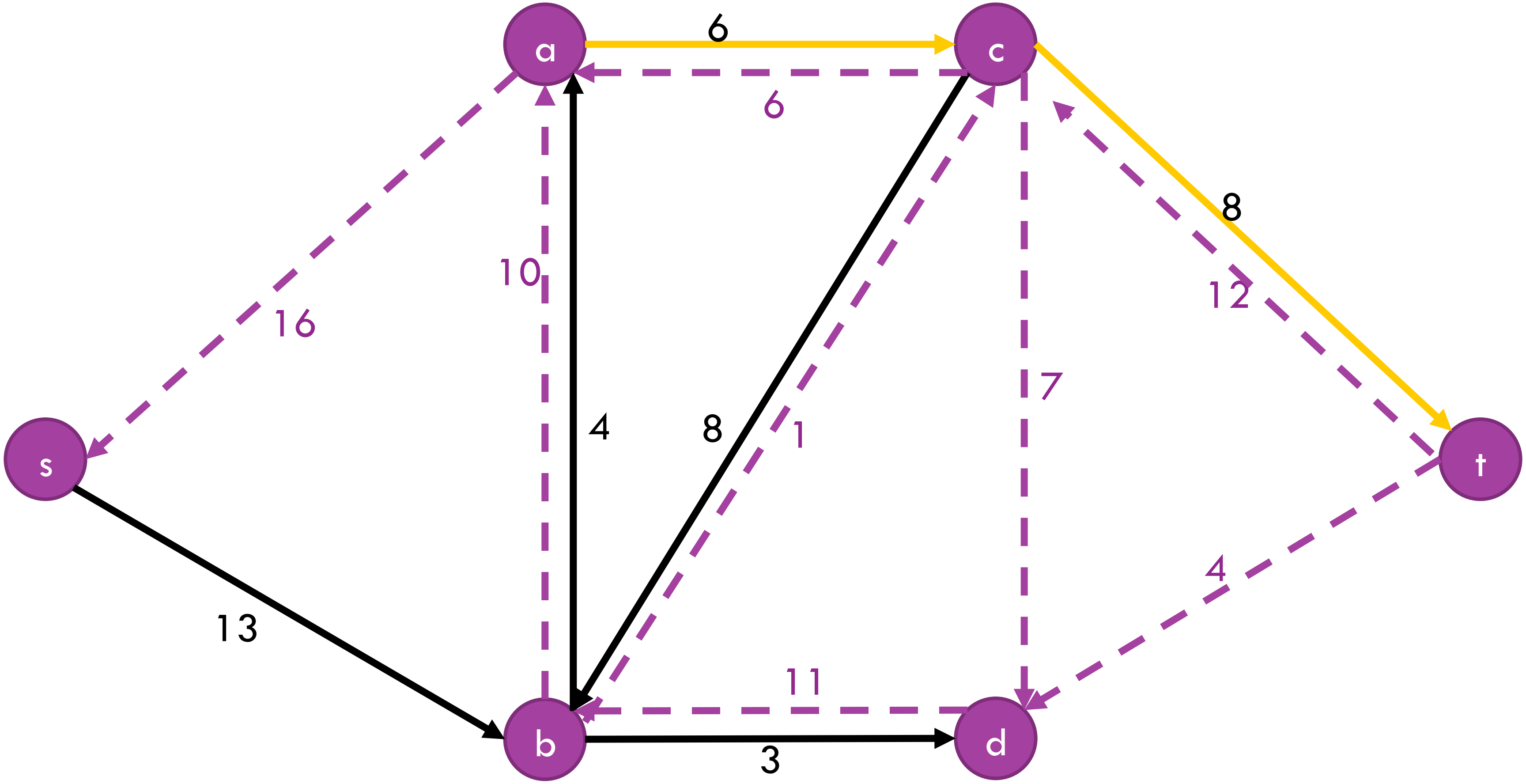


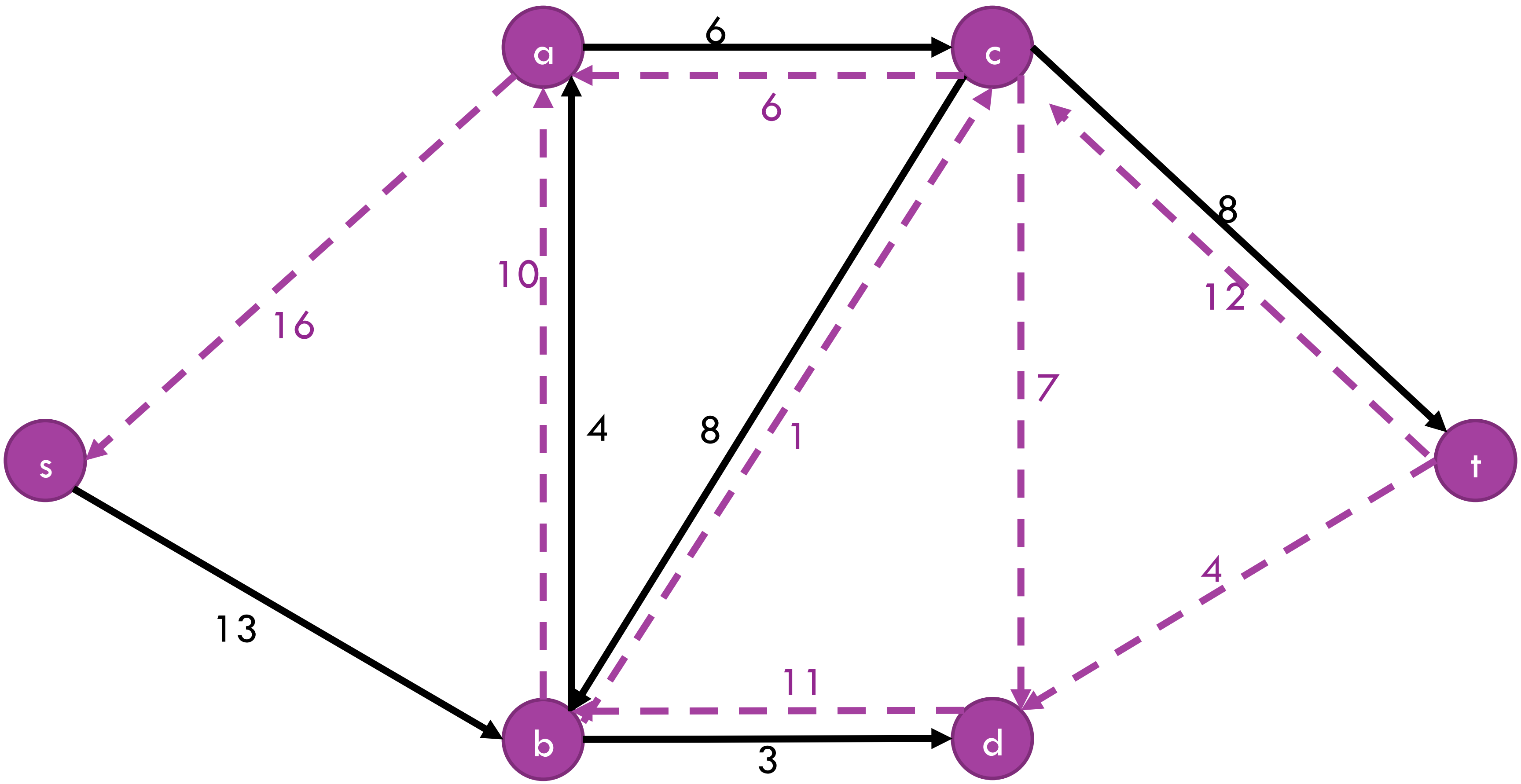
a
c
s
t
b
d
12
6
10
10
4
9
7
13
7
13
3
10
1
4

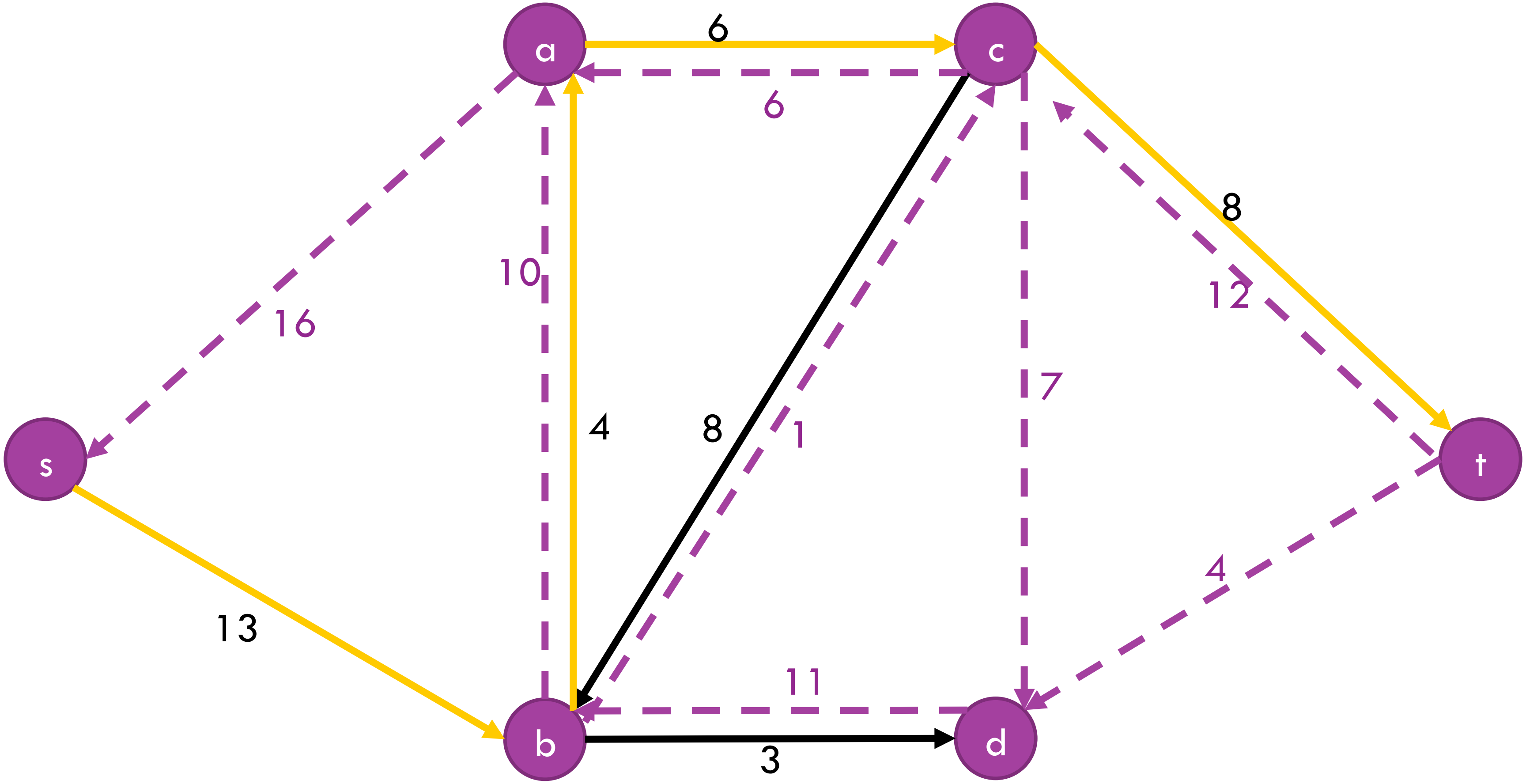

a
c
s
t
b
d
11
1
5
11
10
4
8
1
7
13
7
13
4
11
3

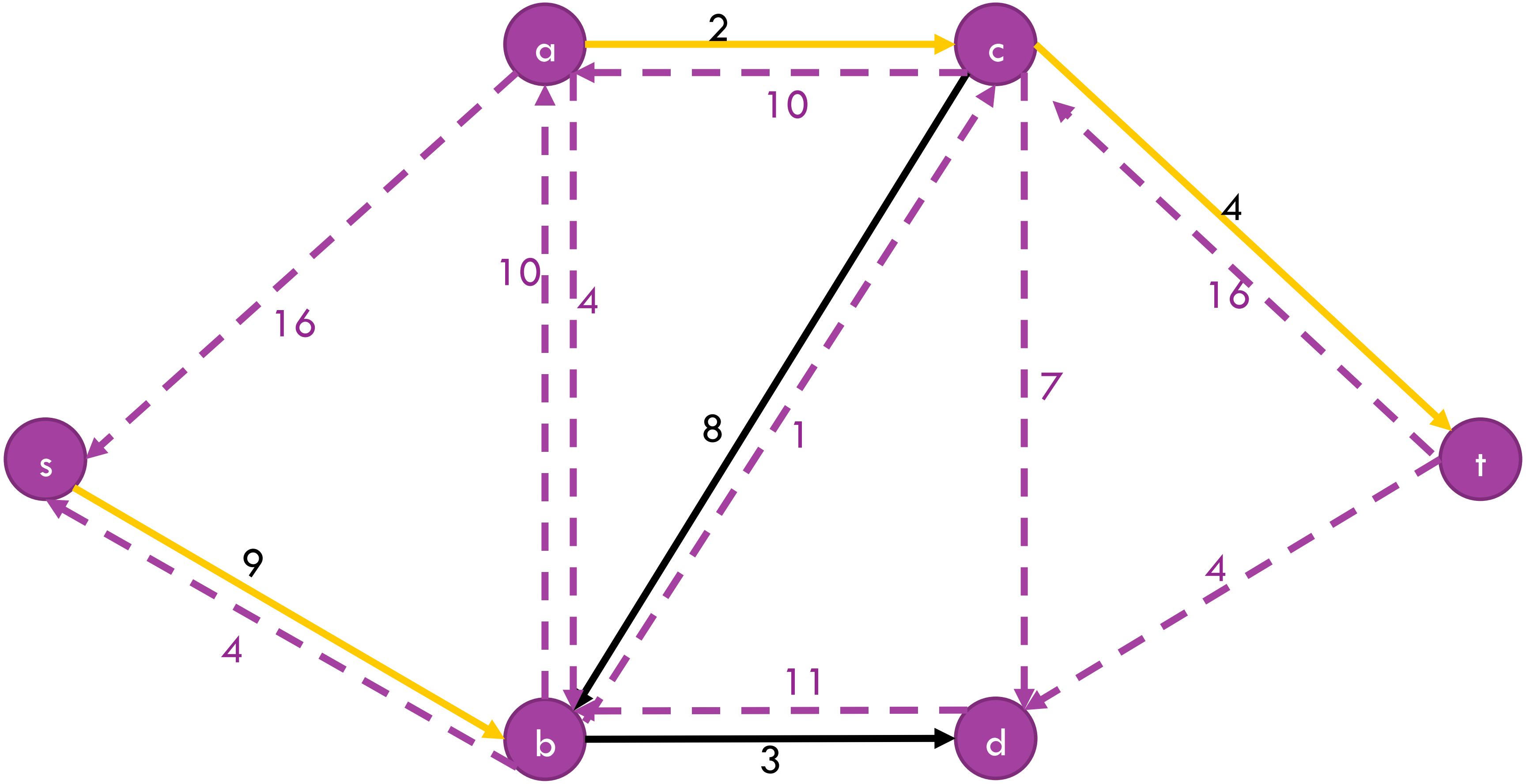

a
c
s
t
b
d
11
1
5
11
10
4
8
1
7
7
13
13
4
11
3


a
c
s
t
b
d
11
1
5
11
10
4
8
1
13
7
7
4
13
11
3

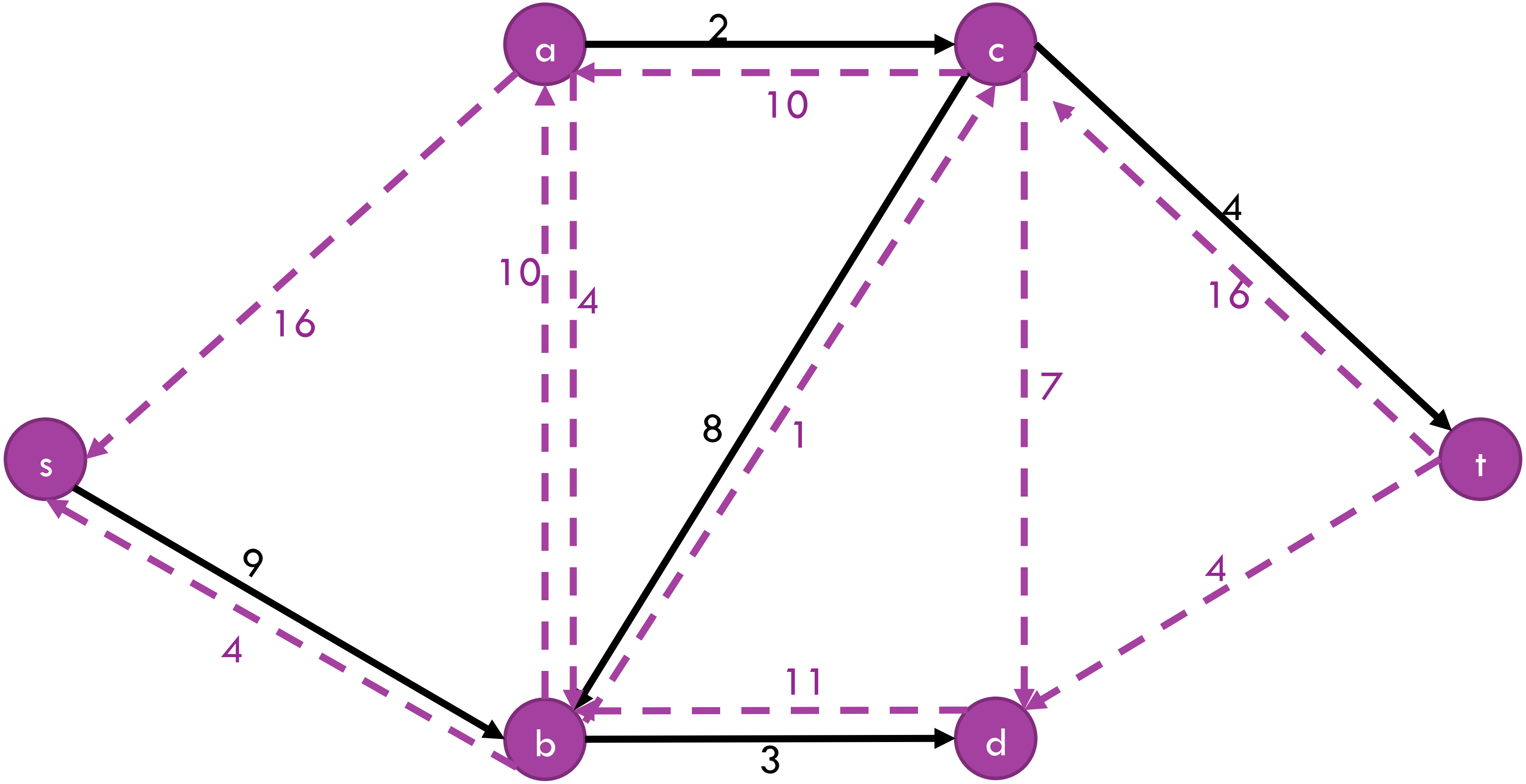

a
c
s
t
b
d
6
6
8
12
16
10
4
8
1
7
4
13
11
3


a
c
s
t
b
d
6
6
8
12
16
10
4
8
1
7
13
4
11
3

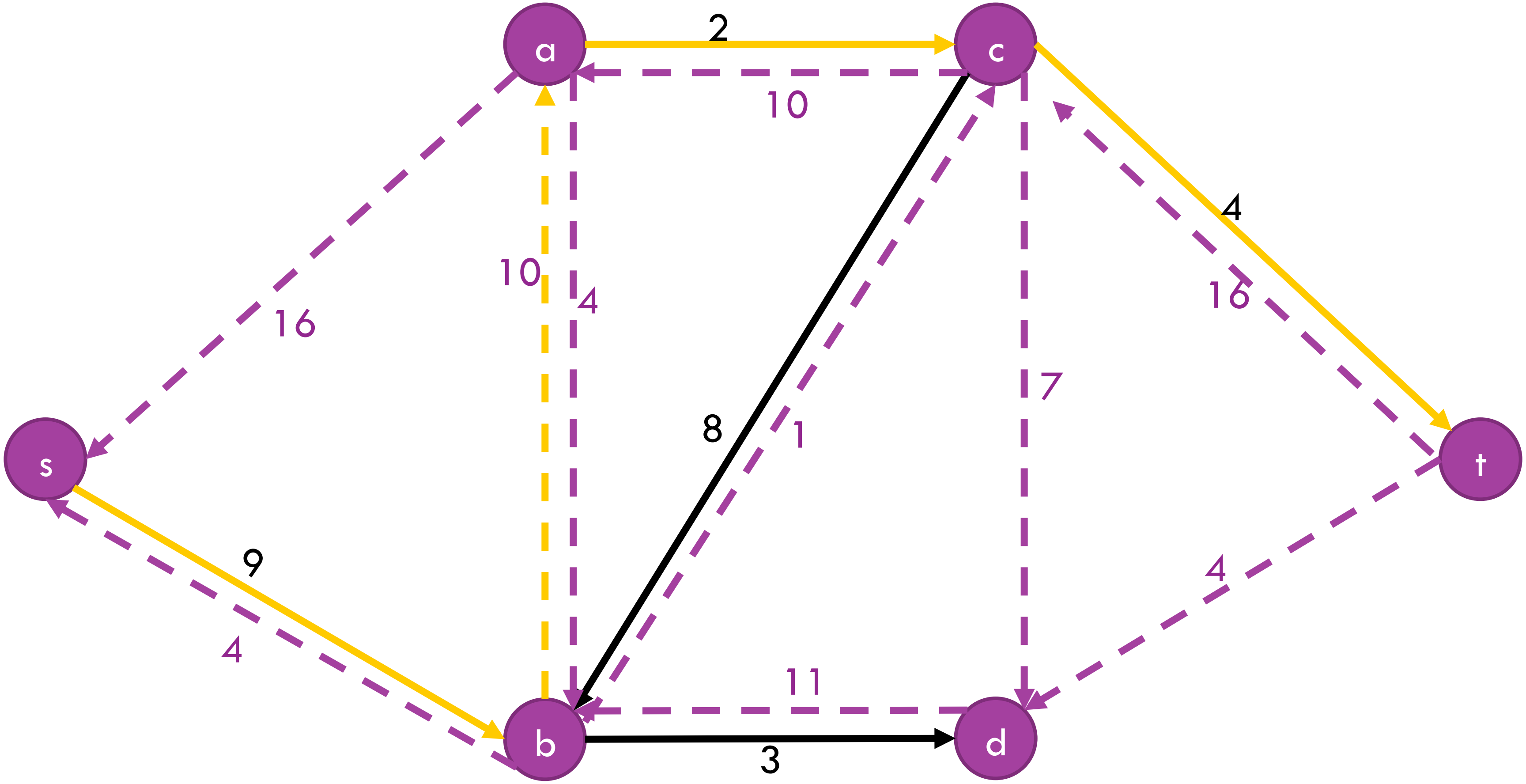

a
c
s
t
b
d
6
6
16
10
4
8
1
7
8
12
13
4
11
3

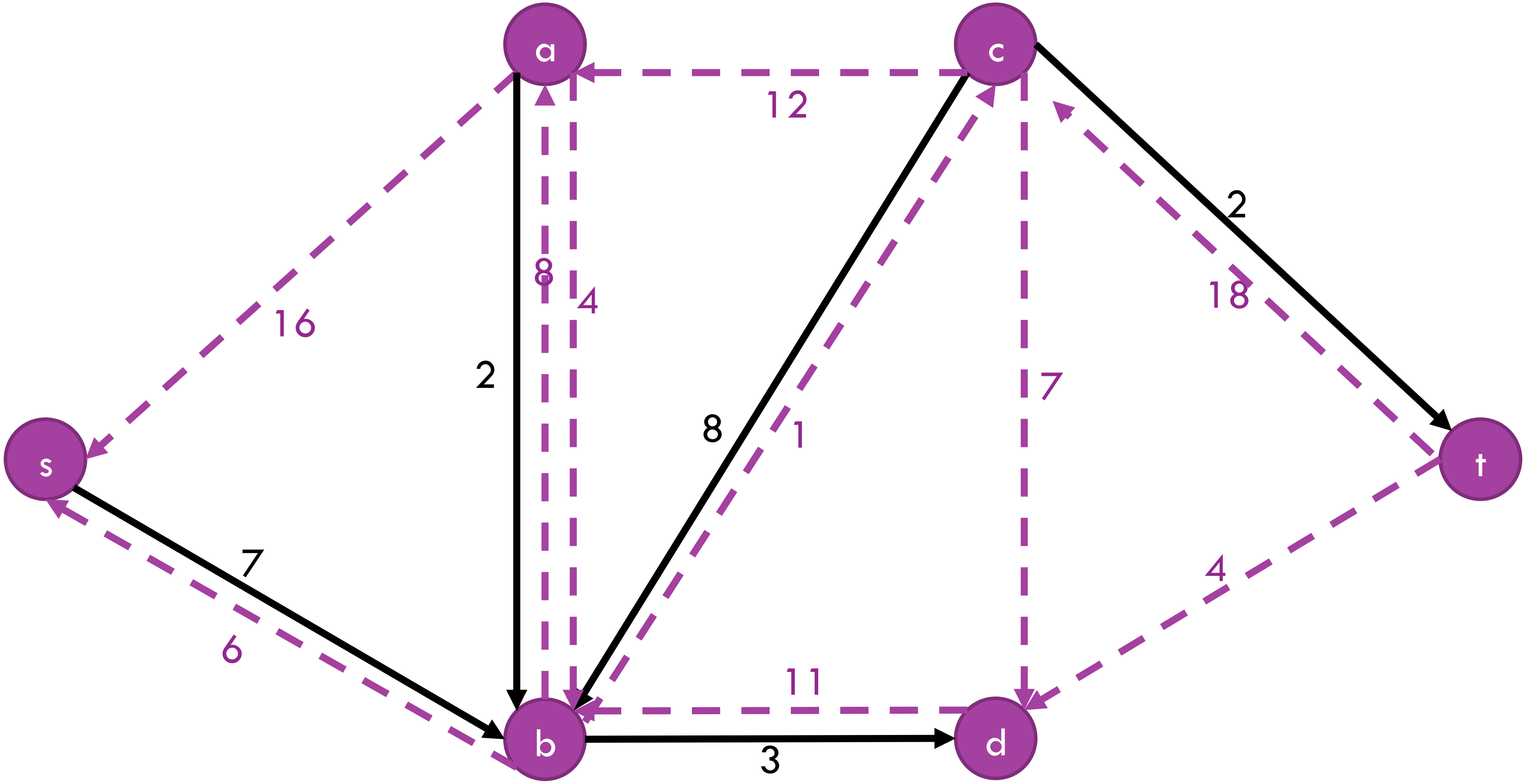


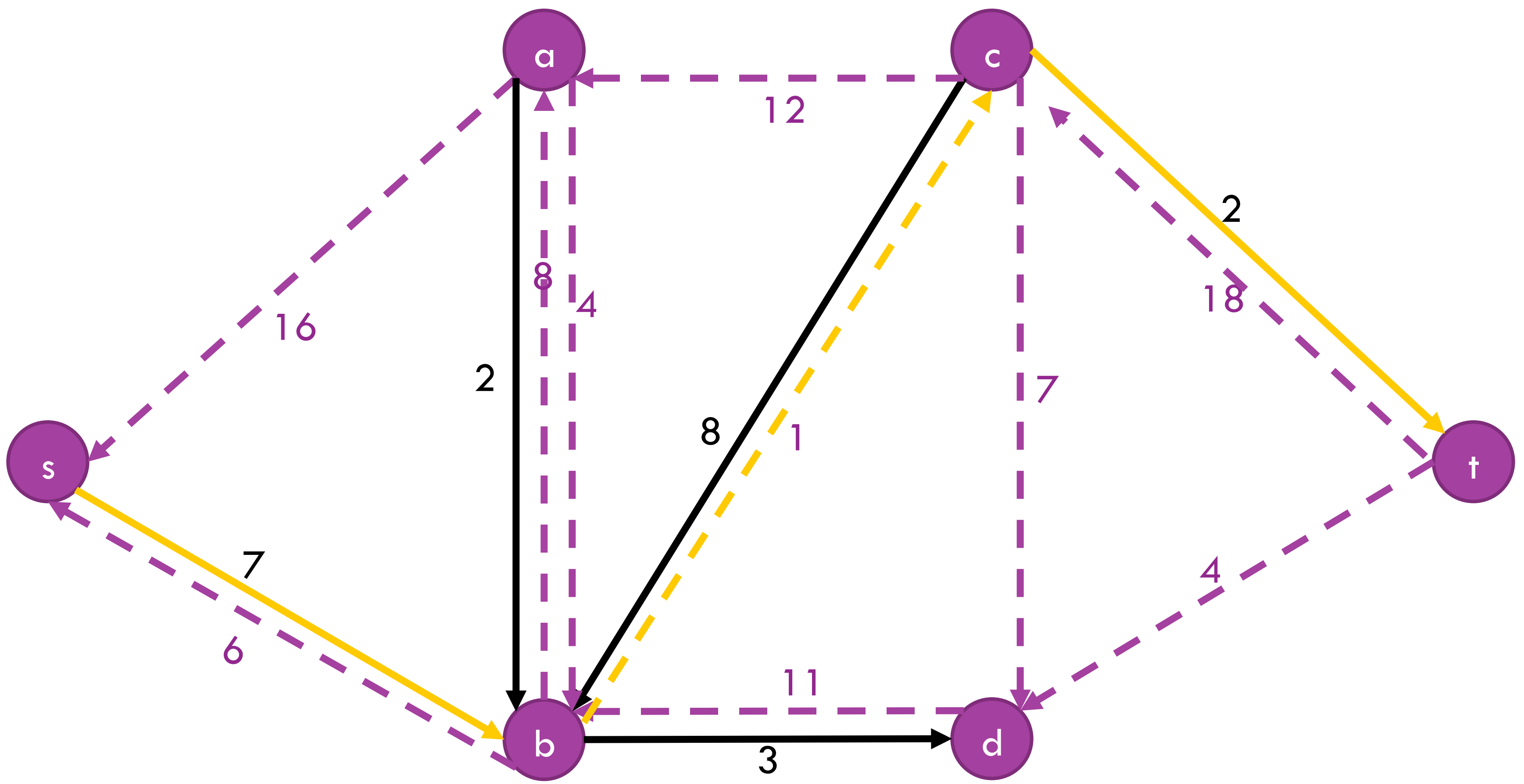
a
c
s
t
b
d
2
10
16
10
4
4
16
8
1
7
9
4
11
4
3

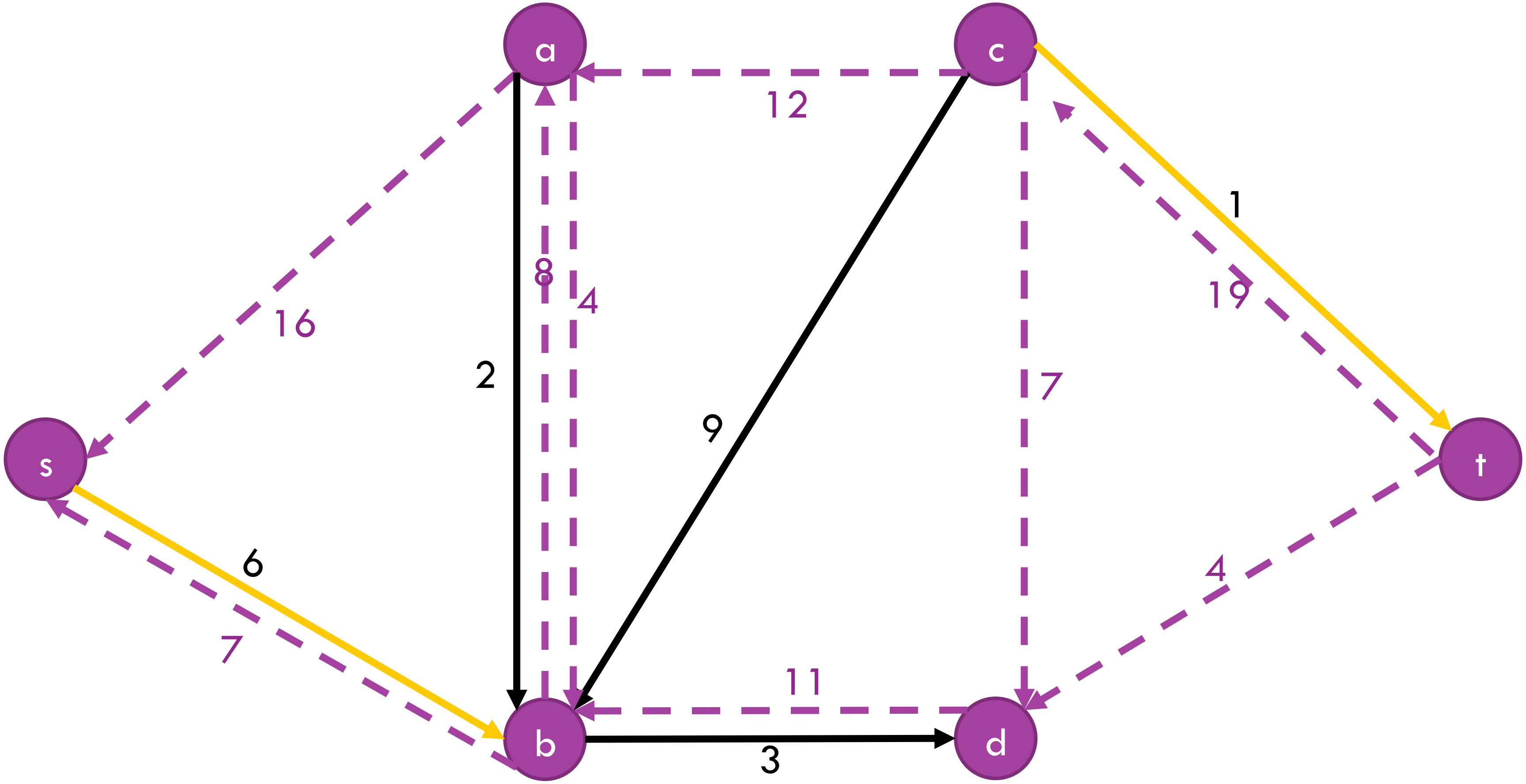


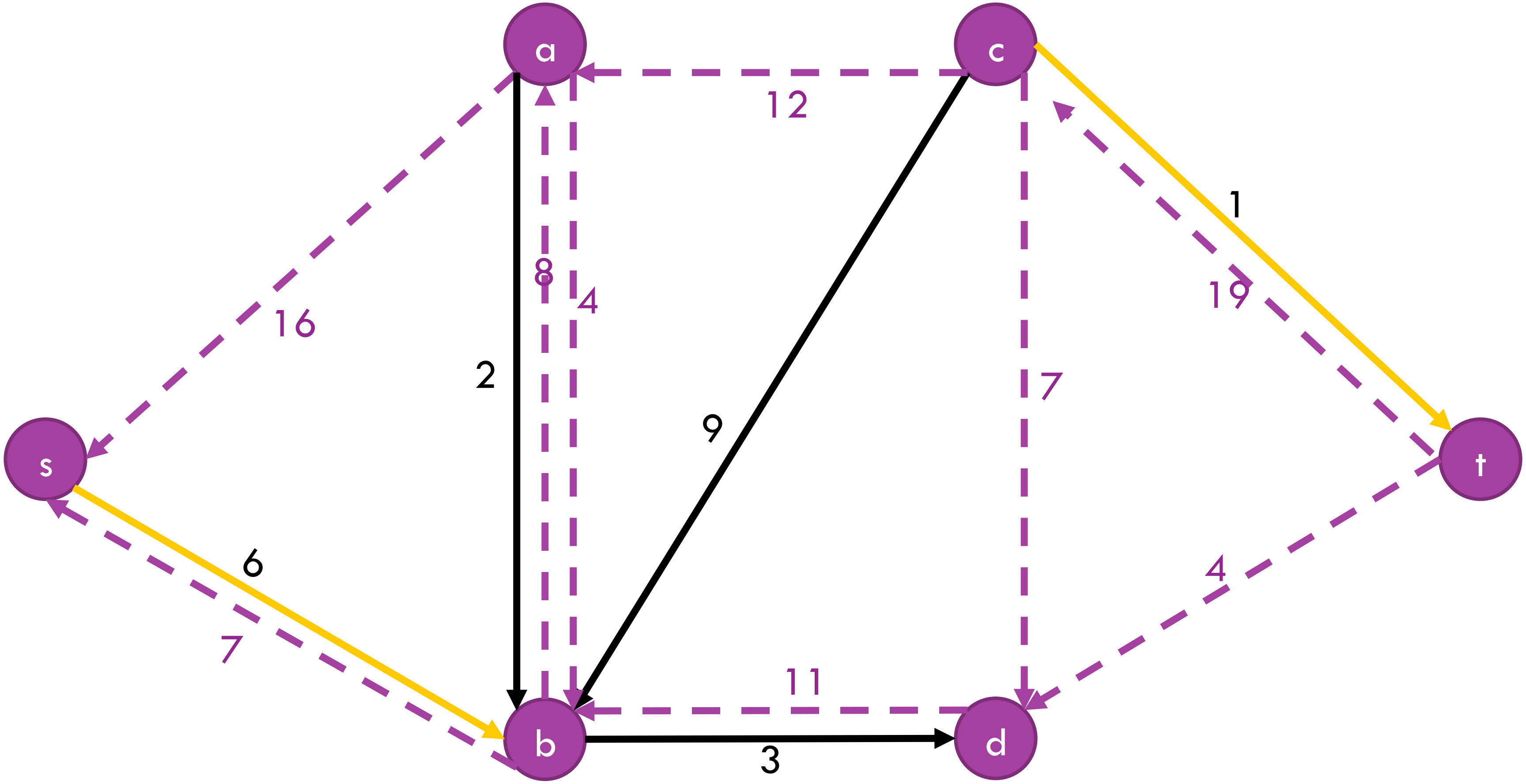
a
c
s
t
b
d
2
10
4
16
10
4
16
8
1
7
9
4
4
11
3

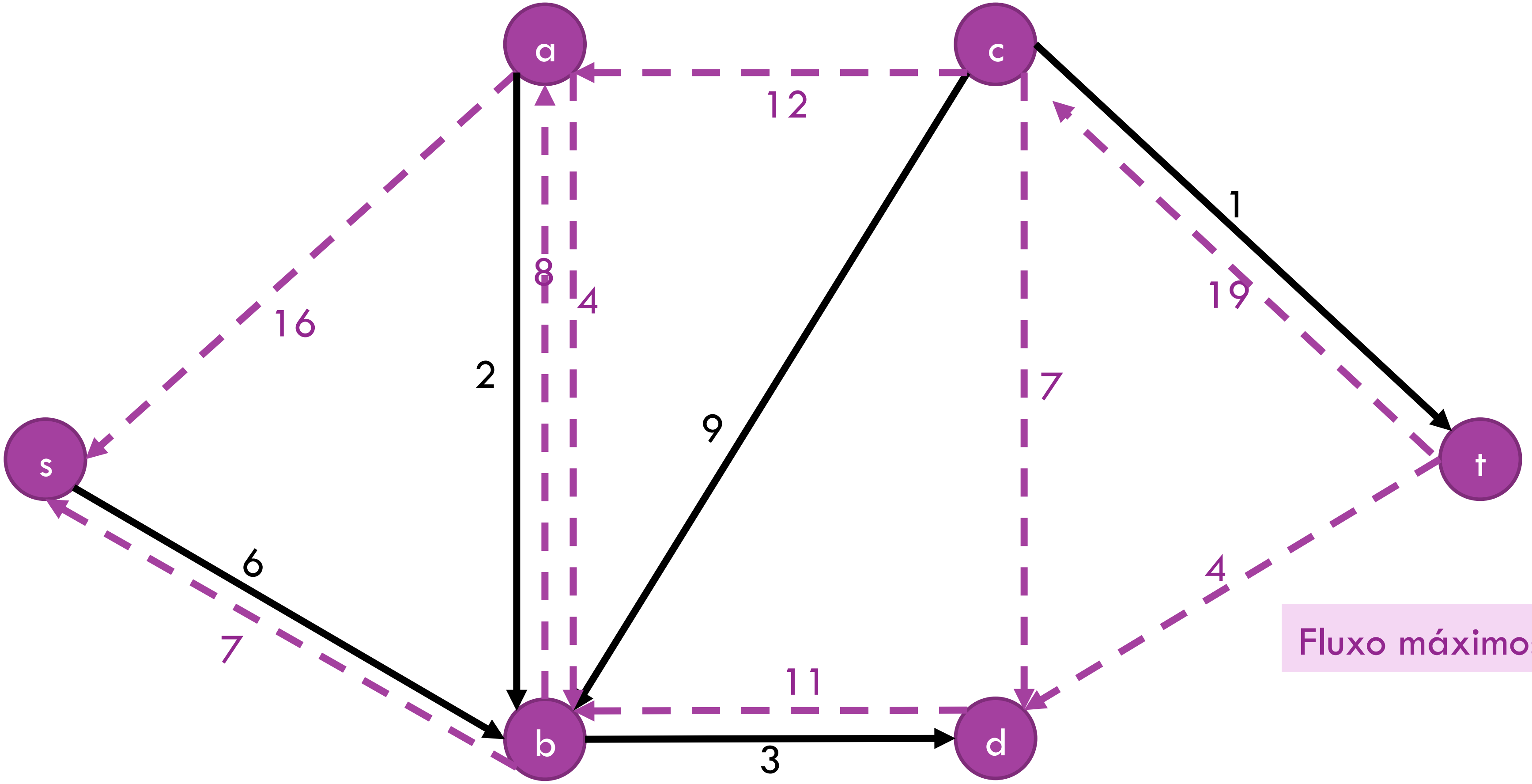

a
c
s
t
b
d
2
10
4
16
10
4
16
8
1
7
9
4
4
11
3


a
c
s
t
b
d
12
2
8
4
16
18
2
8
1
7
7
4
6
11
3


a
c
12
2
8
4
18
16
2
7
8
1
s
t
7
4
6
11
b
d
3


a
c
12
1
8
4
16
19
2
7
9
s
t
6
4
7
11
b
d
3


a
c
s
t
b
d
12
1
8
4
16
19
2
7
9
6
4
7
11
3



Fluxo máximo: 23