TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE
DEFINIÇÕES E REPRESENTAÇÃO

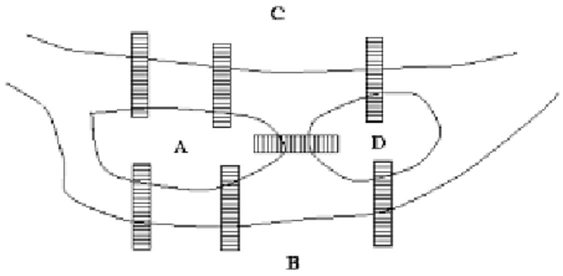
Prof. Alexei Machado

PUC MINAS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Problema das Pontes de Königsberg

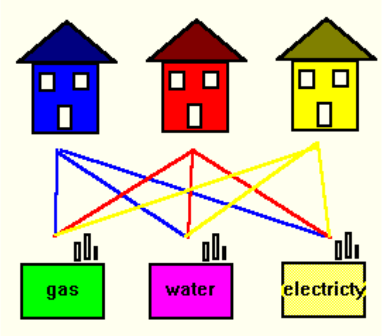
No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas (**A** e **D**) entre si e as ilhas com as margens (**B** e **C**)



Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível **cruzar as sete pontes** numa caminhada contínua **sem passar duas vezes** por qualquer uma delas

O Problema das 3 Casas e 3 Serviços

- Suponha que tenhamos três casas e três serviços, a exemplo de:



É possível conectar cada serviço a cada uma das três casas sem que haja cruzamento de tubulações?

Problemas de Transporte

- **Problema de Conectividade**: dadas as direções das vias, é possível ir da cidade **A** até a cidade **B**, sem andar na contramão?
- **Problema de Fluxo Máximo**: dada a capacidade de fluxo em cada via, qual é a quantidade de mercadoria que podemos mandar de uma cidade **A** a uma cidade **B**?
- **Problema de Menor Caminho**: Dados os comprimentos de cada via, qual o percurso mais rápido para sair de uma cidade **A** e chegar a uma cidade **B**?

Grafo

- Um par G = (V, E), sendo V um conjunto finito e E um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V (Scheinerman, 2011)

- Chamamos os elementos de V de *vértices*
- Chamamos os elementos de E de *arestas* (*edges*)

Grafo

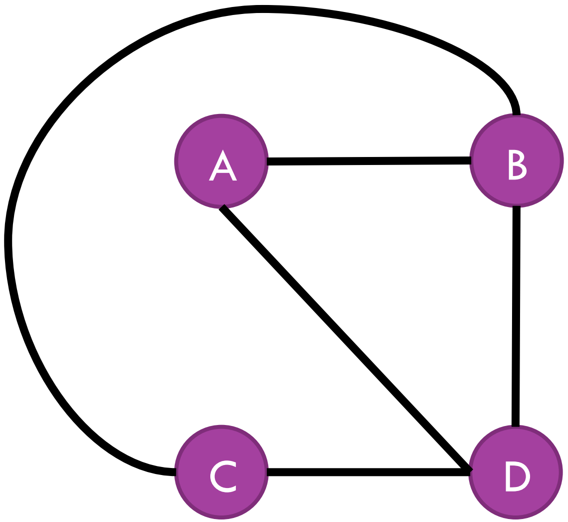
- Modelo que formaliza relações de interdependência entre os elementos de um conjunto (Goldbarg,2012)
- Vértices são objetos simples que podem ter nomes e outros atributos
- Arestas são conexões entre dois vértices

Grafo

- V = { A, B, C, D }
- E = { (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) }

Grafo

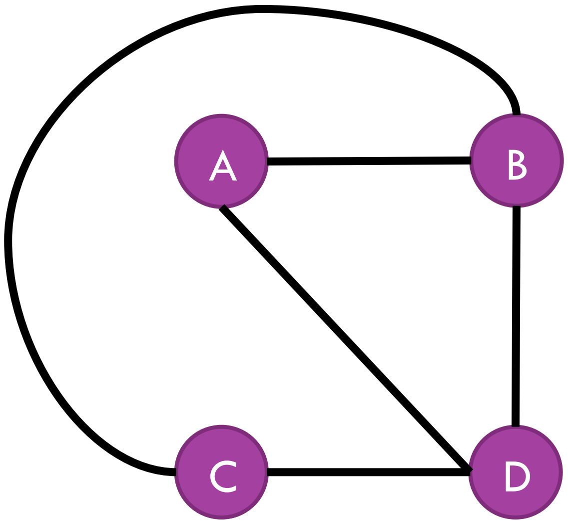
- V = { A, B, C, D }
- E = { (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) }



Grafo

Há duas jarras, uma com capacidade de 4L e outra com capacidade de 3L. Precisa-se deixar 2L na jarra com capacidade de 4L e a jarra com capacidade de 3L, deverá ficar vazia. Qual o menor caminho?

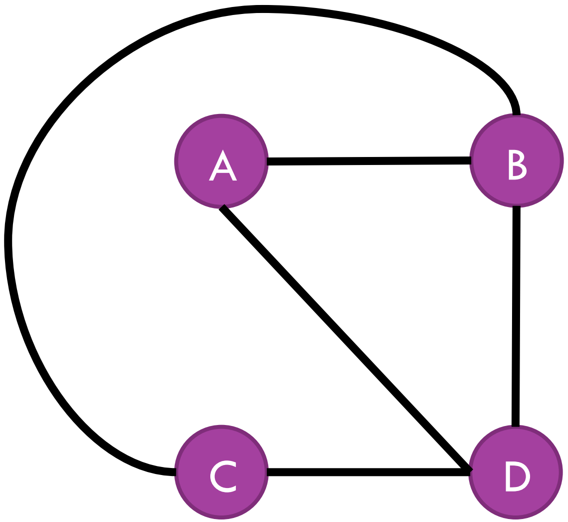
- V = { A, B, C, D }
- E = { (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) }



- Vértices: cidades
- Arestas: rodovias entre as cidades

Grafo

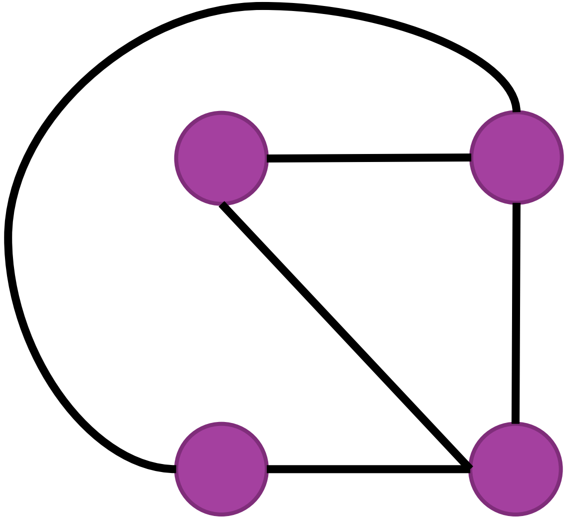
- V = { A, B, C, D }
- E = { (A;B), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) }



- Vértices: autores
- Arestas: autores que publicaram livros ou artigos em conjunto

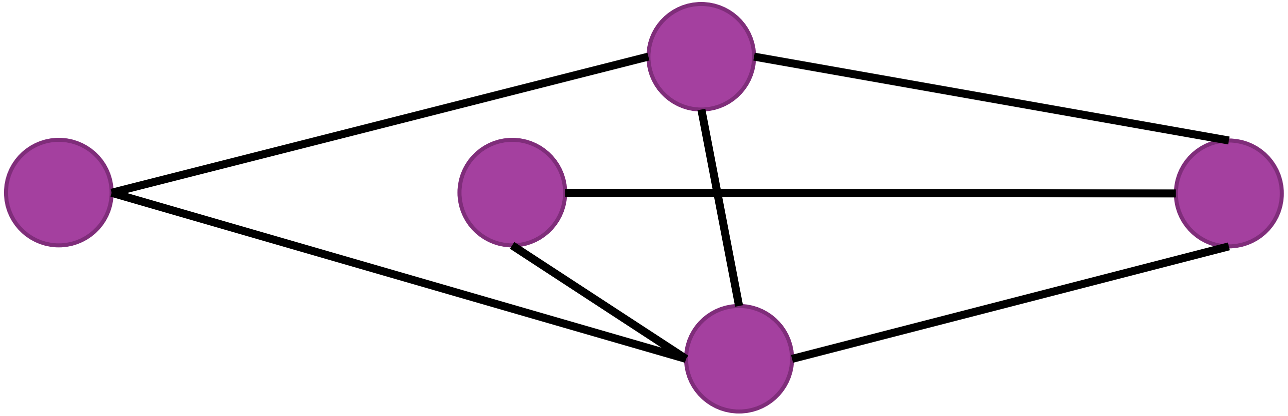
Ordem e tamanho

- A ordem de um grafo G é a cardinalidade de V
- O tamanho de um grafo G é a cardinalidade de E



Ordem e tamanho

- A ordem de um grafo G é a cardinalidade de V
- O tamanho de um grafo G é a cardinalidade de E



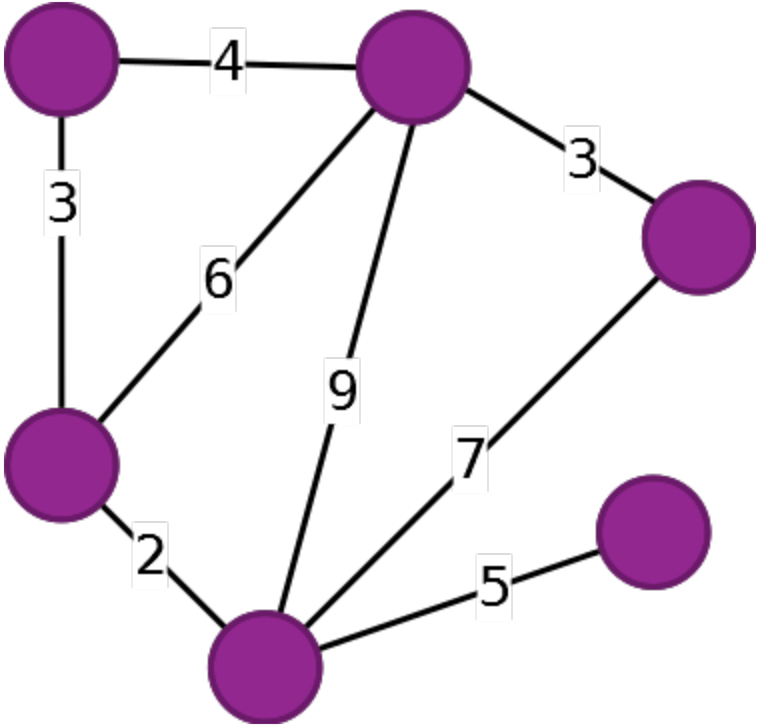
Grafo valorado / ponderado

- Um grafo G é dito *valorado* se existem valores associados a seus vértices ou arestas

- Tais valores são denominados ***pesos***

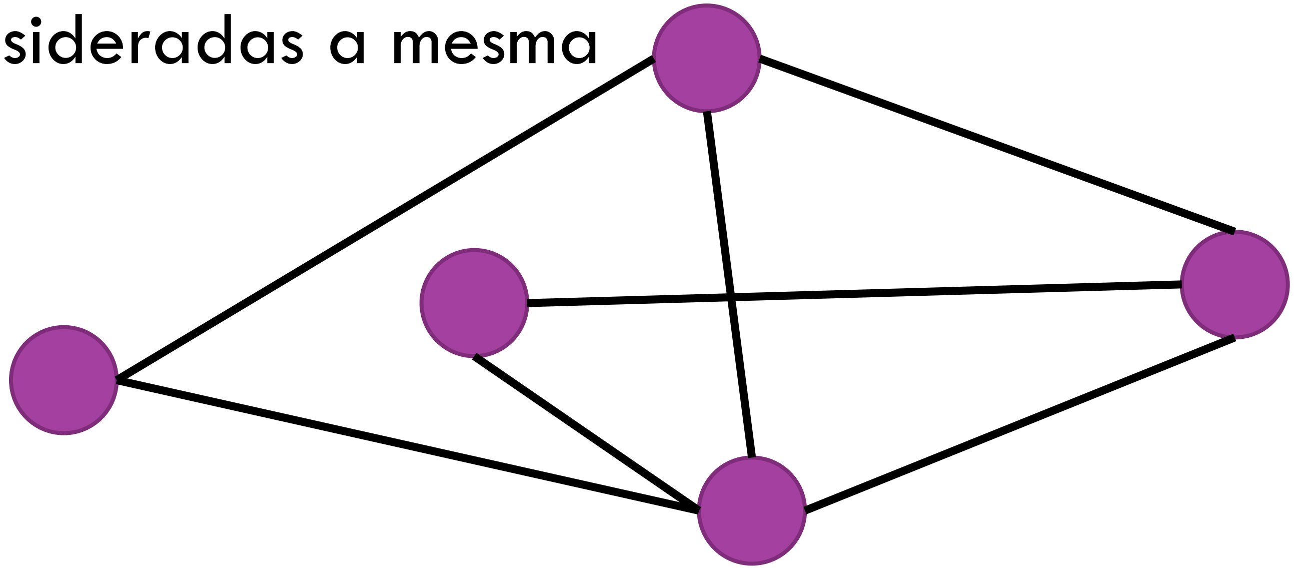
Grafo valorado / ponderado

- Ex: custo de se movimentar entre dois pontos



Grafo não direcionado / não orientado

- Por padrão, duas arestas (v_a, v_b) e (v_b, v_a) são consideradas a mesma

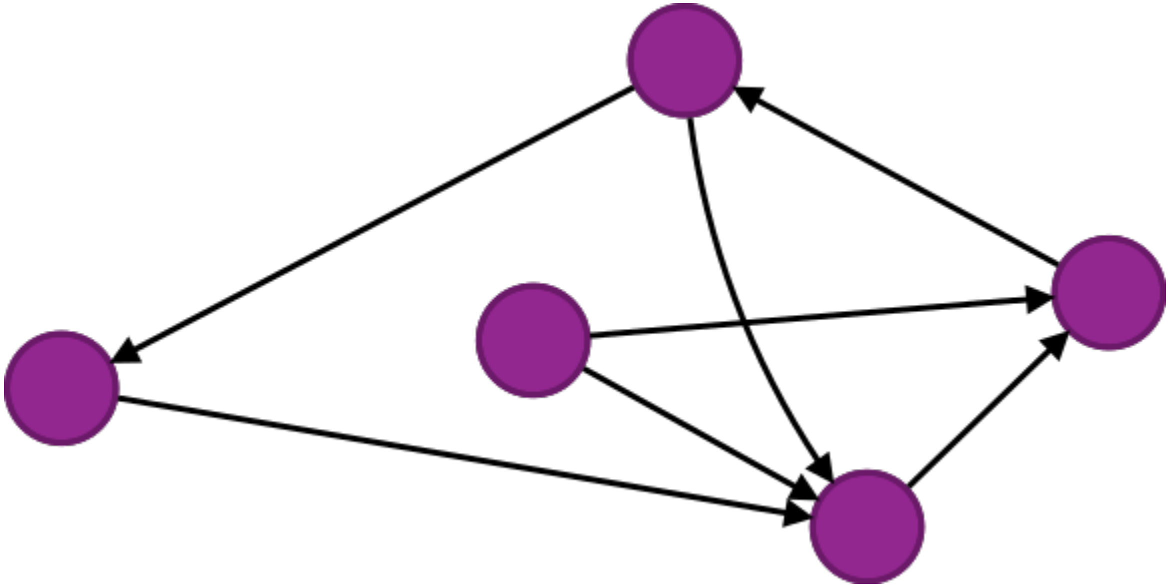


Grafo direcionado / orientado / digrafo

- Já em um grafo direcionado, o conjunto E de arestas é uma relação binária em V
- $(v_a, v_b) \neq (v_b, v_a)$ e podem ter significados diferentes
- O *sentido* da aresta importa e é indicado
- Arestas, neste caso, podem ser chamadas de *arcos*

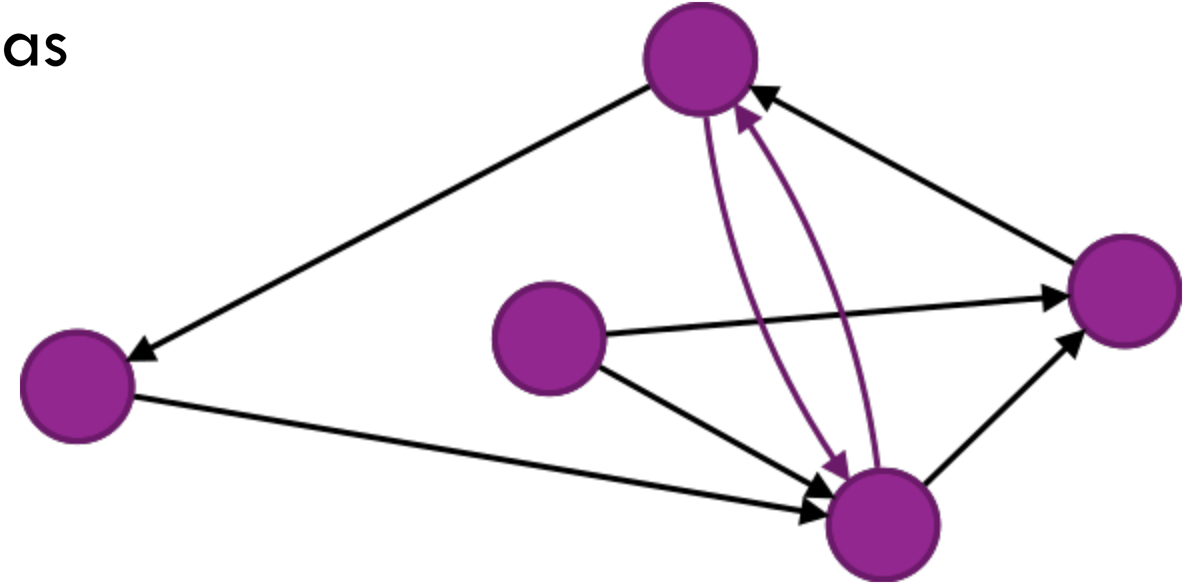
Arco = unidirecional
Aresta = bidirecional

Grafo direcionado / orientado / dígrafo



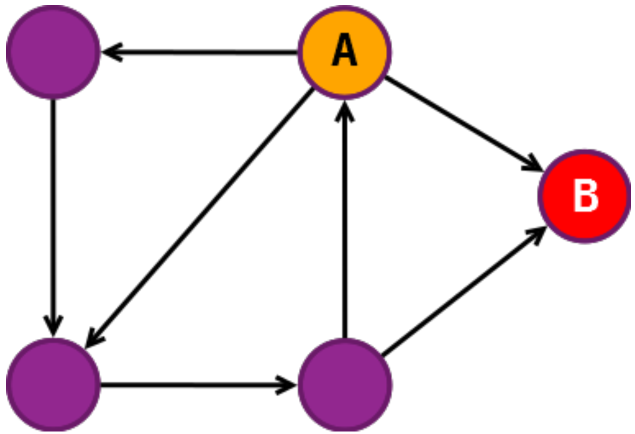
Grafo direcionado / orientado / dígrafo

- Se há correspondência em ambos os sentidos, duas arestas



Vértices sucessores e antecessores

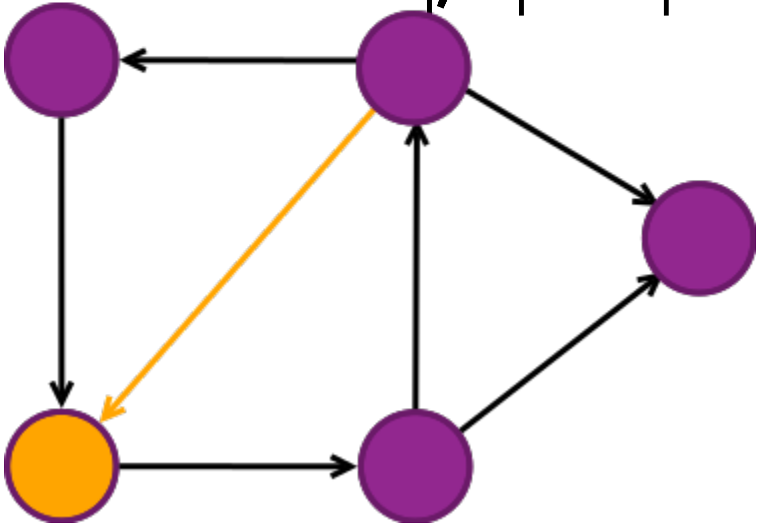
- Em grafos direcionados, podemos falar de sucessores e antecessores de um vértice



  - B é sucessor de A
  - A é antecessor de B

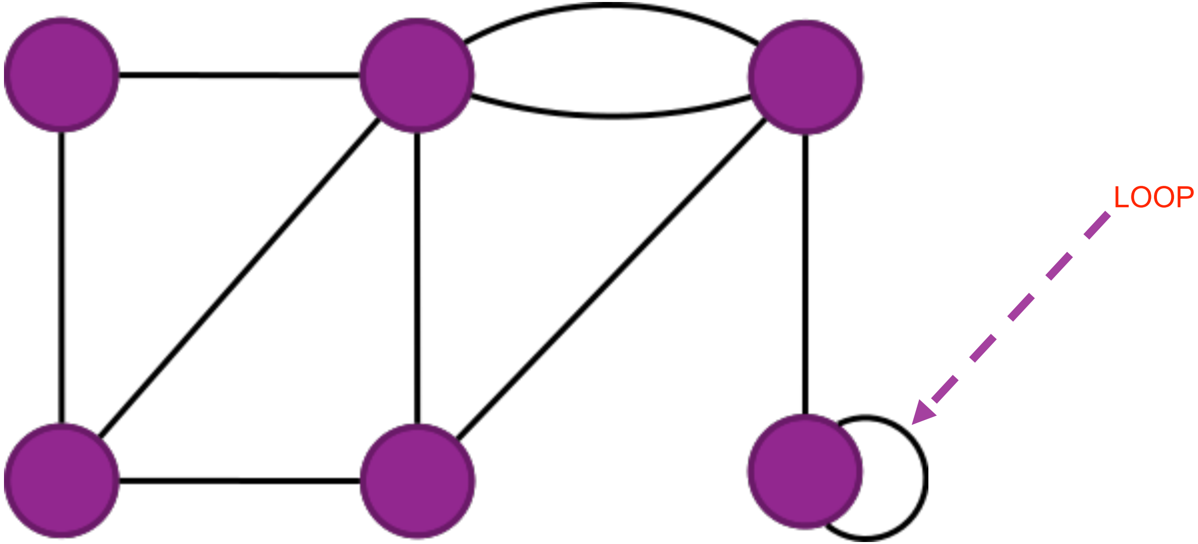
Incidência

- Quando um vértice v_i é o vértice final de alguma aresta e_j, v_i e e_j são **incidentes**



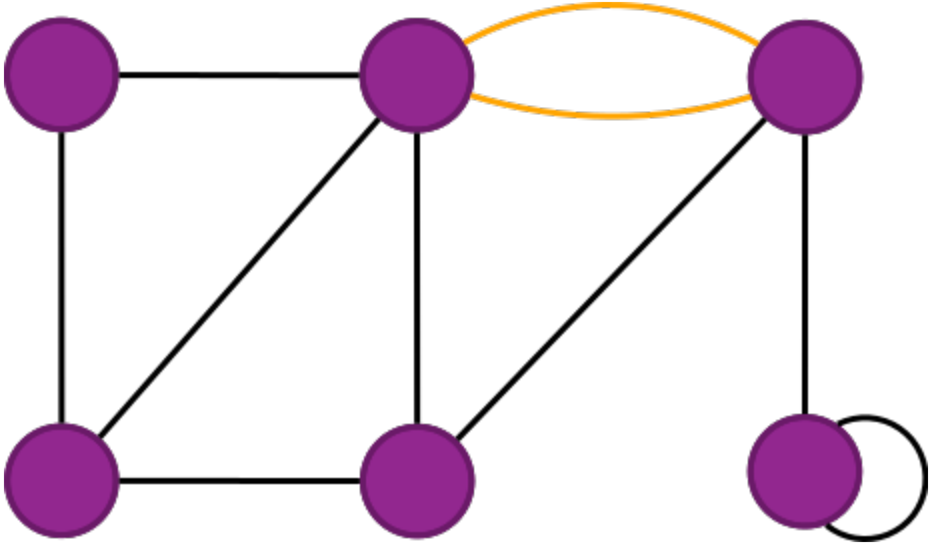
Laço (*Loop*)

- Aresta que liga um vértice a si mesmo (v_i, v_i)



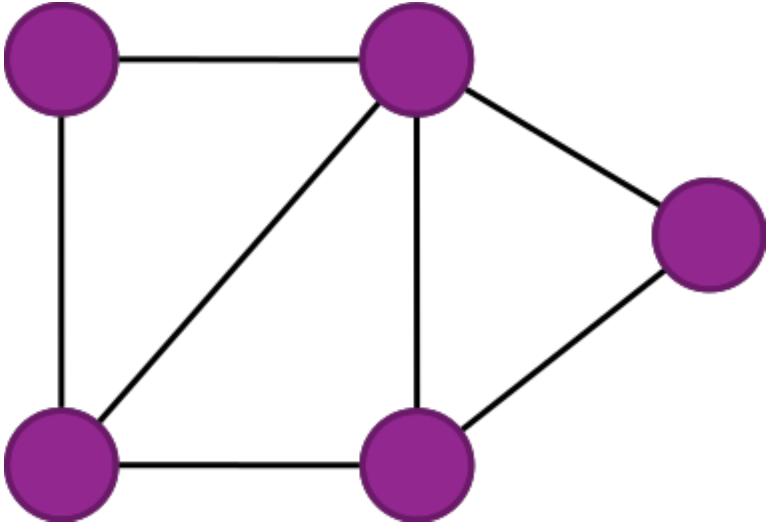
Arestas paralelas

- Duas ou mais arestas associadas ao mesmo par de vértices



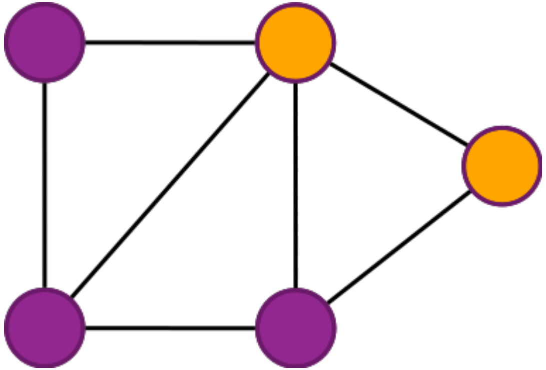
Grafo simples

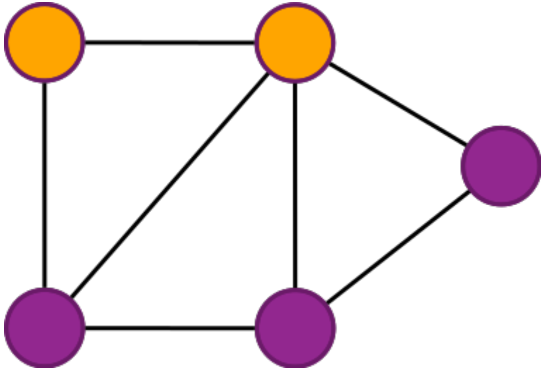
- Não possui nem arestas paralelas nem laços

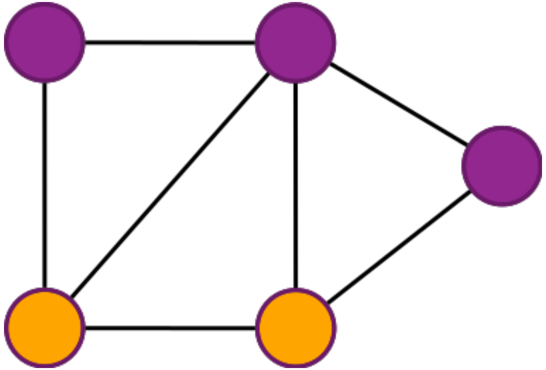


Vértices adjacentes (vizinhos)

- Dois vértices são ditos **adjacentes** se existe uma aresta que os liga

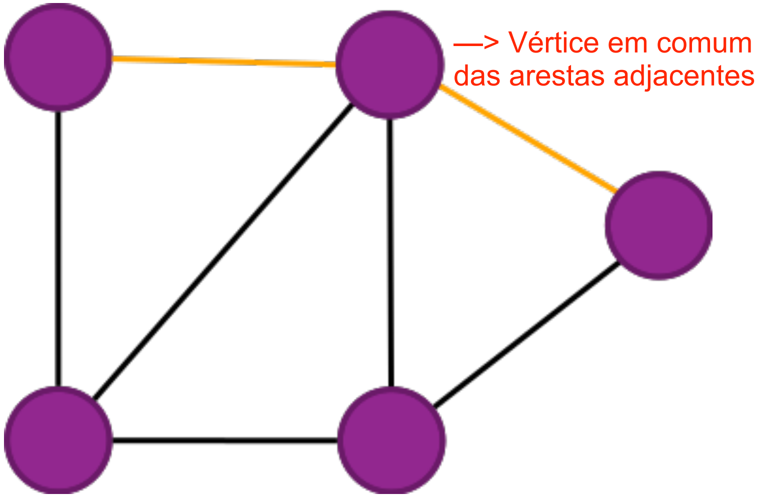






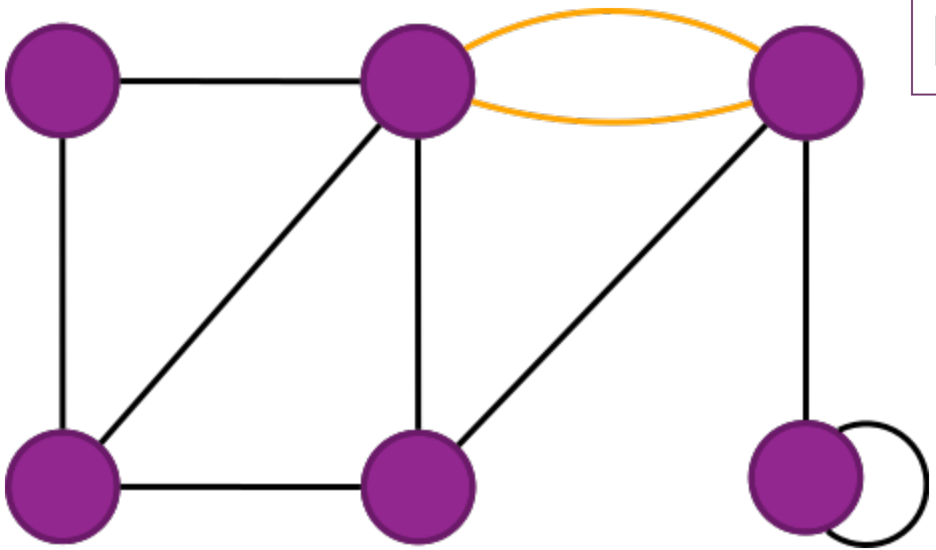
Arestas adjacentes

- Duas arestas não paralelas são **adjacentes** se elas são incidentes a um vértice comum



Arestas adjacentes

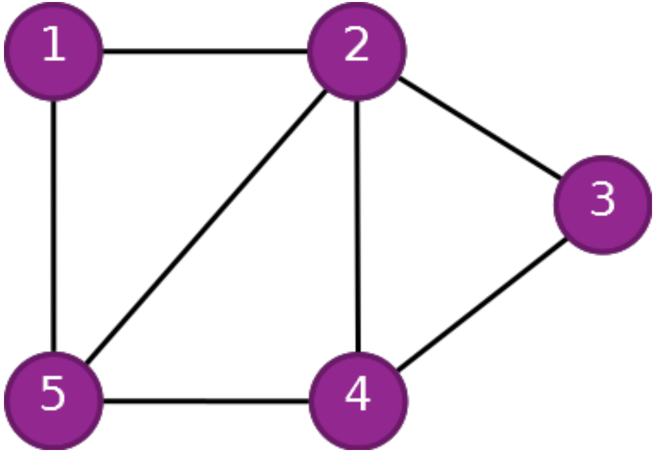
- Cuidado!!



Paralelas,
Não adjacentes!

Grau de um vértice

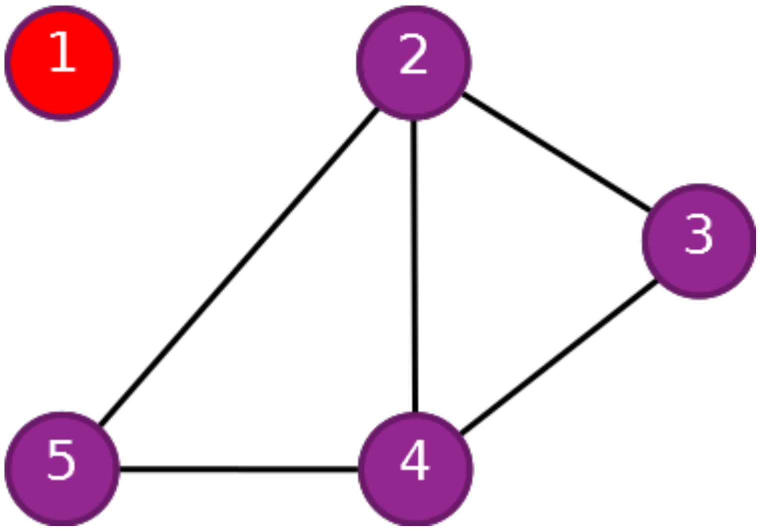
- O número de arestas incidentes a um vértice v_i é chamado de **grau**, $d(v_i)$, do vértice i



Vértice 1:
Vértice 2:
Vértice 3:
Vértice 4:
Vértice 5:

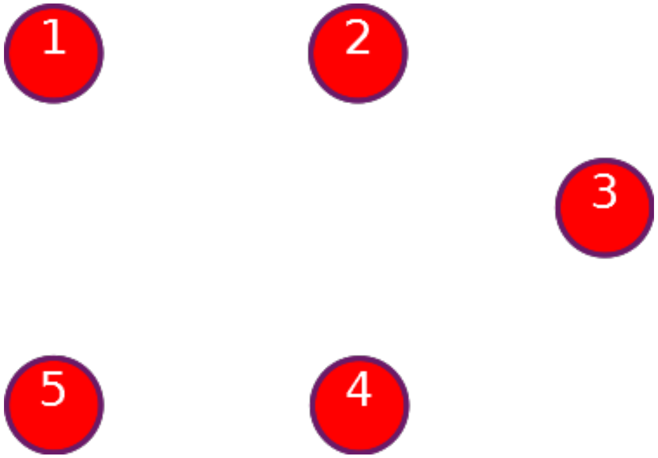
Graus e vértices

- Vértices com grau 0 são chamados isolados



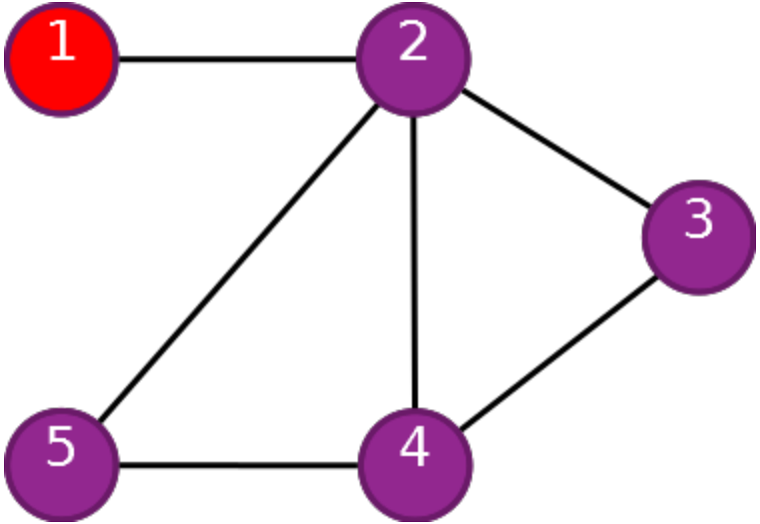
Graus e vértices

- Grafos que possuem somente vértices isolados são chamados de *grafos nulos*



Graus e vértices

- Um vértice de grau 1 é chamado de pendente



Teorema

- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

- Demonstre!

Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

- Ao contar os graus dos vértices, contamos cada extremidade de aresta uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Teorema

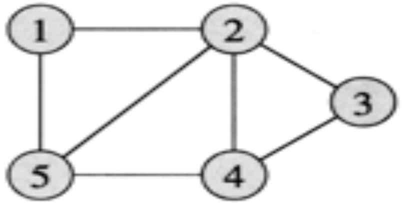
- O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par
  - Prove o teorema!

Provando...

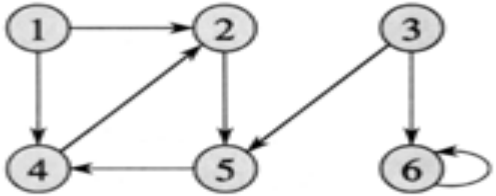
$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in Par} d(v) + \sum_{v \in Ímpar} d(v)$$

Graus e vértices

- Em um grafo orientado, o grau de saída de um vértice é o número de arestas que saem dele, e o grau de entrada de um vértice é o número de arestas que entram nele. O grau de um vértice em um grafo orientado é seu grau de entrada somado a seu grau de saída



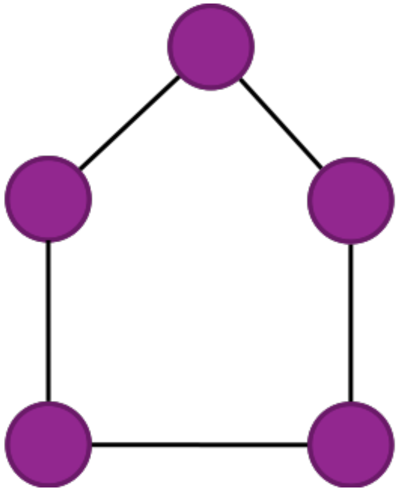
grau do vértice 2 é 4



grau de entrada do vértice 5 é 2
grau de saída do vértice 5 é 1

Grafo regular

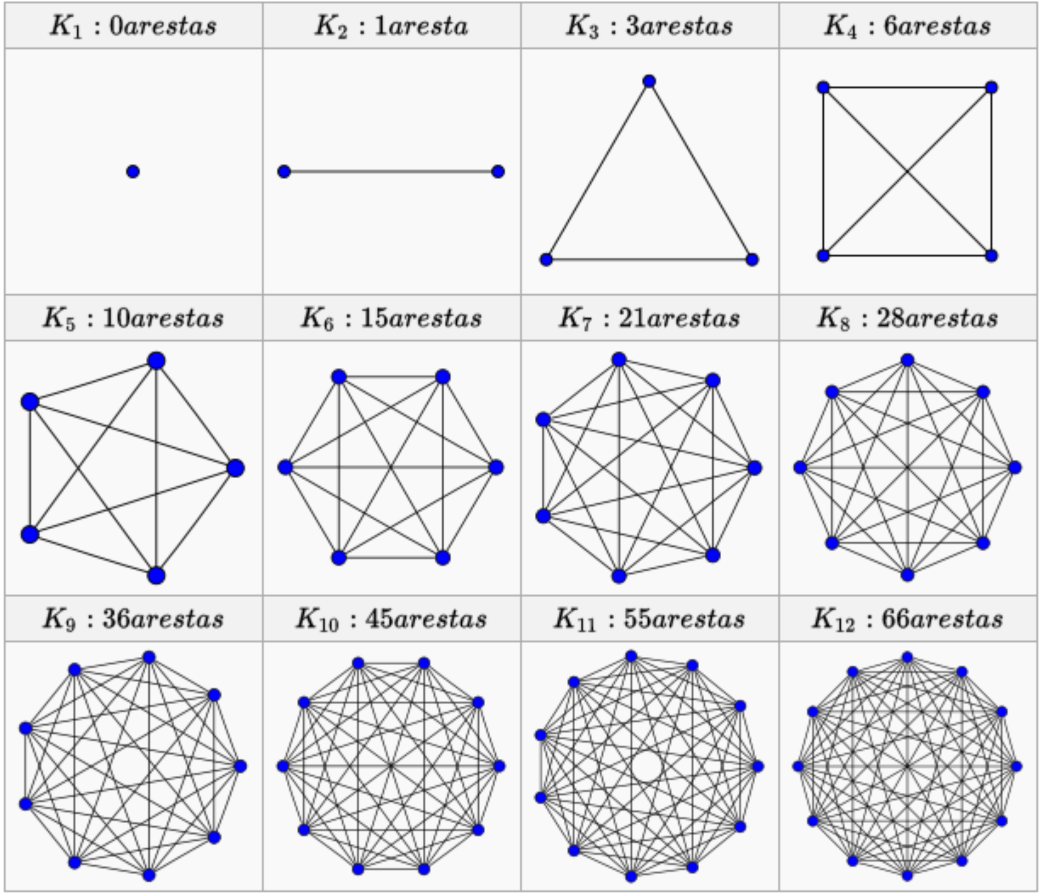
- Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de **grafo regular**



Grafo completo

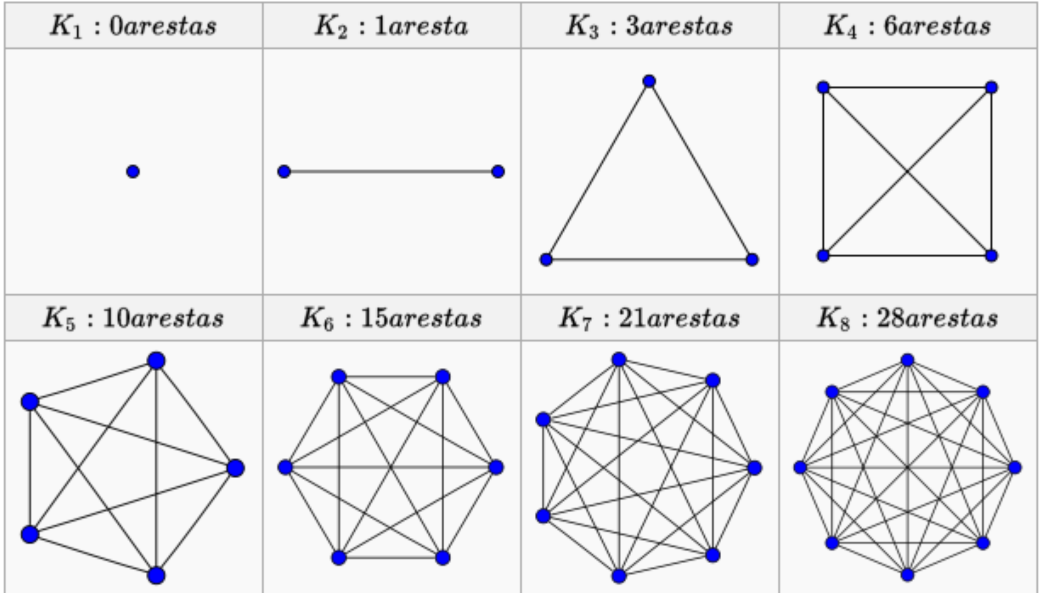
- Um grafo $G=(V,E)$ é dito **completo** se para cada par de vértices v_a e v_b existe uma aresta entre v_a e v_b
- Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes
- Um grafo completo com n vértices é dito K_n

Grafos completos



Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_completo

Grafos completos

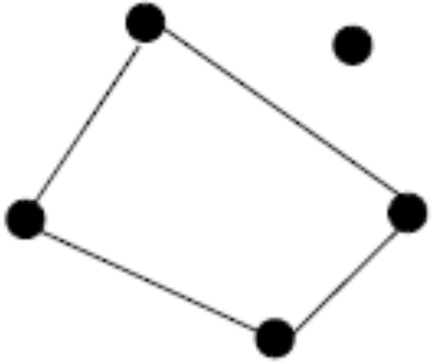


- Qual é o grau dos vértices de um grafo K_n ?
- Qual é o número de arestas de um grafo K_n ?

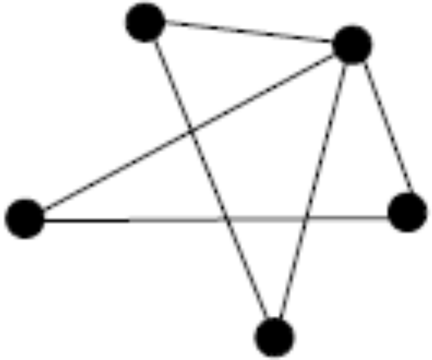
Grafo complementar

- Seja G = (V,E) um grafo simples, seu grafo complementar, C(G) ou $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
  - Os vértices de C(G) são todos os vértices de G
  - As arestas de C(G) são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Grafo complementar



G



$\overline{G}$

Representação de Grafos

Grafo

- Como representar um grafo computacionalmente, de modo que possamos executar algoritmos e resolver problemas diversos ?

Representação de Grafos

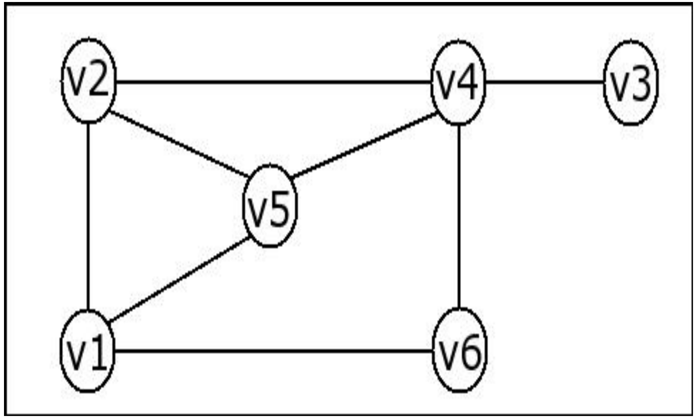
- Principais estruturas de dados:
  - Matriz de adjacências
  - Listas de adjacências

Matriz de adjacências

- Dado $n = |G|$, criar uma matriz n x n.

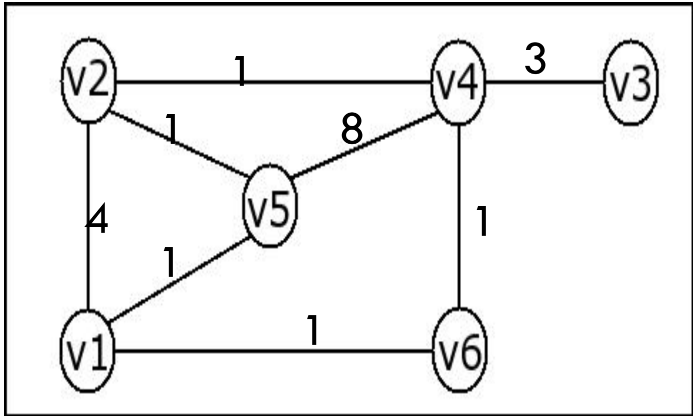
- A posição [u,v] da matriz conterá 0 se não há aresta entre v_u e v_v, ou um valor não nulo se houver

Matriz de adjacências



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	1	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0

Matriz de adjacências



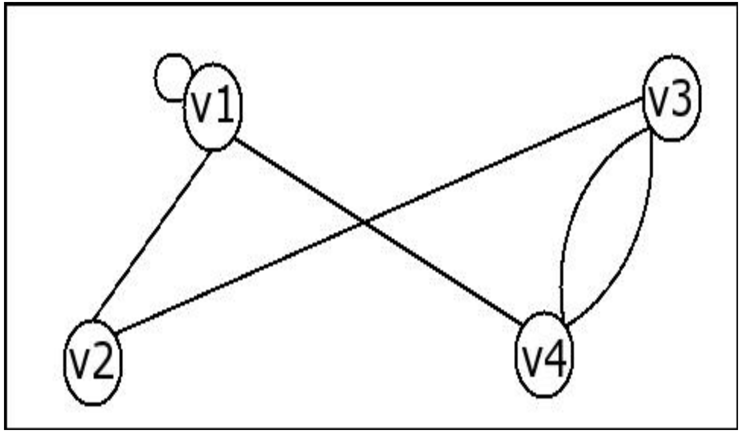
Se as arestas tivessem pesos, suas posições poderiam ter estes valores

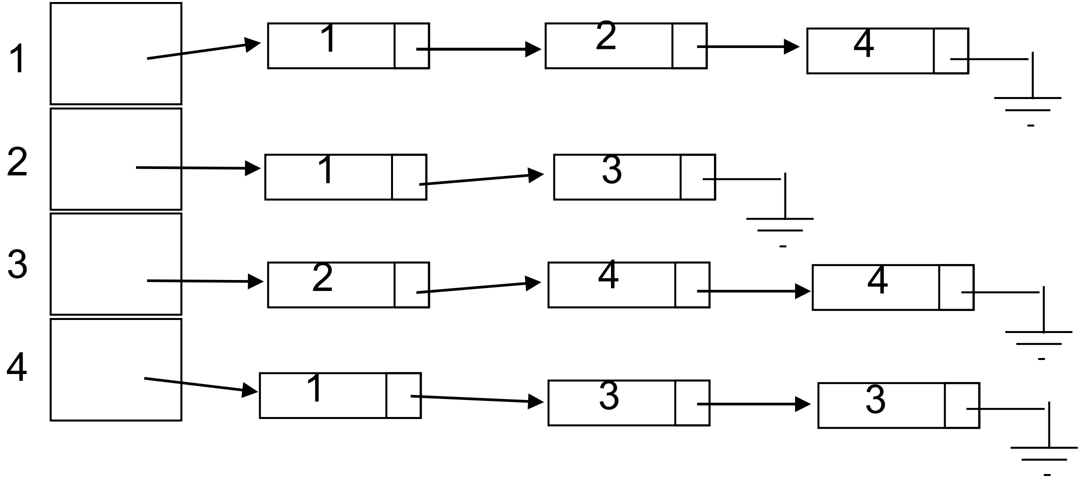
	1	2	3	4	5	6
1	0	4	0	0	1	1
2	4	0	0	1	1	0
3	0	0	0	3	0	0
4	0	1	3	0	8	1
5	1	1	0	8	0	0
6	1	0	0	1	0	0

Listas de adjacências

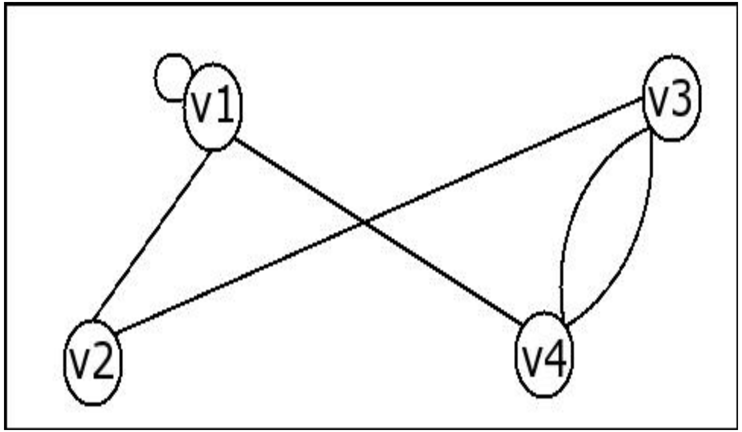
- Cada vértice é um elemento de uma lista
- Cada vértice contém uma lista de arestas, indicando o outro par que a compõe

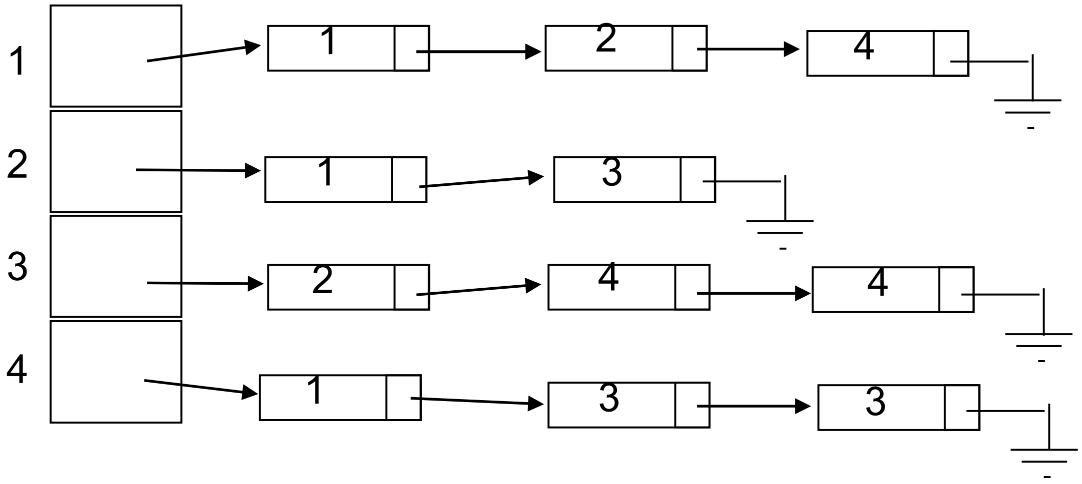
Listas de adjacências





Listas de adjacências





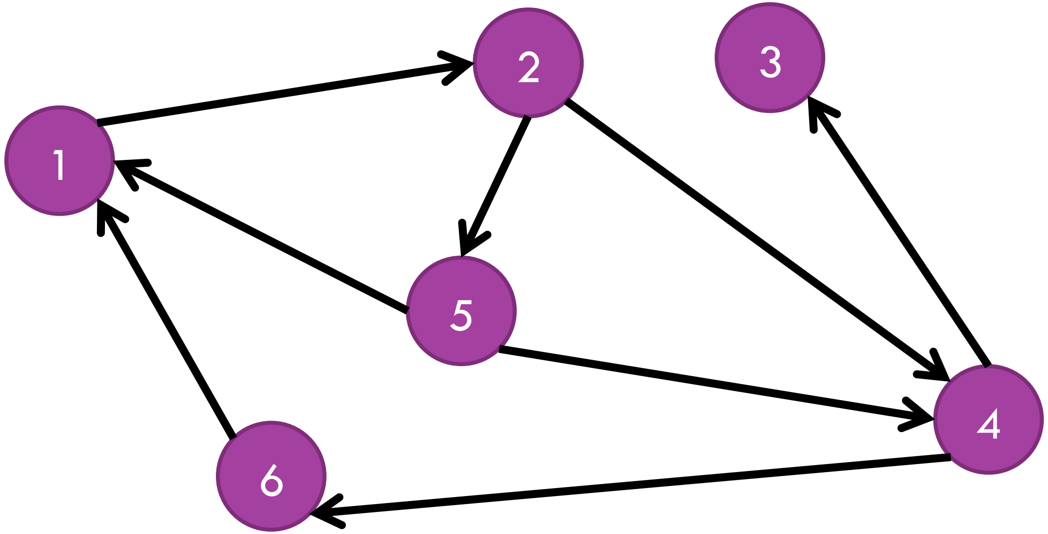
Se as arestas tivessem pesos, isto poderia ser armazenado nos elementos das listas

Representação de digrafos

- Matriz de incidência
  - Valor positivo: indica direção linha → coluna
  - Valor negativo: indica direção coluna → linha

Representação de digrafos

- Matriz de incidência



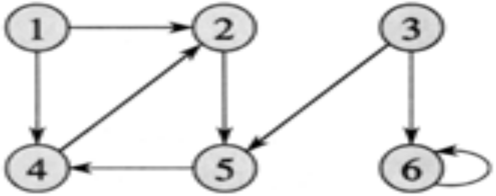
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	-1	-1
2	-1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	-1	0	0
4	0	-1	1	0	-1	1
5	1	-1	0	1	0	0
6	1	0	0	-1	0	0

Representação de digrafos

- Matriz de incidência
  - Valor positivo: indica direção linha → coluna
  - Valor negativo: indica direção coluna → linha

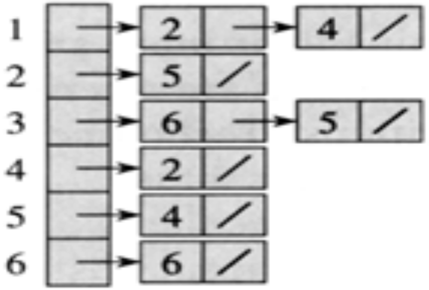
- Listas de incidência

Estruturas de Dados para Dígrafos



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Matriz de Adjacências



Lista de Adjacências

Considerações

- Matrizes x listas
  - Espaço
  - Complexidade de busca

- Estruturas de dados otimizadas para busca de vértices e/ou arestas