TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

LÓGICA

Lógica: Introdução

- A **lógica** é o ramo da filosofia, matemática e ciência da comptuação que trata das **inferências válidas**.

  A lógica é a base do raciocínio matemático, e de todo o raciocínio automatizado.

- Ela estuda a **preservação da verdade** durante uma argumentação. A lógica concerne técnicas que garantem que:

  1. partindo de hipóteses verdadeiras ,
  2. atinjamos sempre conclusoes também verdadeiras .

- As regras da lógica dão significado preciso a afirmações matemáticas. Elas são essenciais na construção de **provas matemáticas.**

Proposições

Uma **proposição** é uma sentença declarativa (ou seja, uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

Exemplo 1: As seguintes sentenças declarativas são proposições:

- *Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais.* (Proposição verdadeira)
- *Londres é a capital da França.* (Proposição falsa)
- 1 + 1 = 2. (Proposição verdadeira)
- 2 + 2 = 3. (Proposição falsa)

Exemplo 2: As seguintes sentenças não são proposições:

- *"Que horas são?"* (Não é uma sentença declarativa.)
- *"Estude com afinco para a prova."* (Não é uma sentença declarativa.)
- *"x + 2 = 3."* (Não é verdadeira nem falsa.)

Proposições

- Nós usamos letras para denotar **variáveis proposicionais**, ou seja, variáveis que representam proposições:

$$p, q, r, s, t, \ldots$$

- O **valor de verdade** de uma proposição pode ser:
  - **verdadeiro**, denotado por *V* (verdadeiro) ou *T* (*true*), ou
  - **falso**, denotado por *F* (falso ou *false*).

- A área da lógica que lida com proposições é chamada de **cálculo proposicional** ou **lógica proposicional**.

Proposições compostas

- **Proposições compostas** podem ser criadas ao se combinarem proposições já existentes.

  A combinação de proposições é feita usando **operadores lógicos** ou **conectivos lógicos** como:

  - negação (não),
  - conjunção (e),
  - disjunção (ou),
  - Implicação,
  - implicação dupla.

  Nós vamos agora estudar estes conectivos.

Proposições: Negação

- Seja *p* uma proposição.

  A **negação de** *p*, denotada por ¬*p* (ou também $\bar{p}$), é a afirmação

  “Não é o caso de que p.”

  Lê-se a proposição ¬*p* como *“não p”*.

  O valor de verdade de ¬*p* é o oposto do valor de verdade de *p*.

- **Tabela da verdade** para a negação de uma proposição *p*:

p	**¬p**
T	*F*
F	*T*

Conectivos lógicos: Conjunção

- Sejam *p* e *q* proposições.

  A **conjunção de** *p* **e** *q*, denotada por $p \wedge q$, é a afirmação

  “*p e q*”.

  A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos *p* e *q* são verdadeiros, e é falsa em caso contrário.

  Tabela da verdade para a conjunção de duas proposições *p* e *q*:

p	q	$p \wedge q$
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*F*

Conectivos lógicos: Disjunção

- Sejam *p* e *q* proposições.

  A **disjunção de** *p* **e** *q*, denotada por $p \vee q$, é a afirmação

  "p ou q".

  A disjunção $p \vee q$ é verdadeira quando ao menos um entre *p* e *q* é verdadeiro, e é falsa em caso contrário.

  Tabela da verdade para a disjunção de duas proposições *p* e *q*:

p	**q**	**$p \vee q$**
T	*T*	*T*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- A palavra “ou” tem dois significados diferentes em linguagem natural.
- O conectivo “ou” da disjunção corresponde ao significado de **ou inclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se ao menos uma das proposições é verdadeira.
- Exemplo: A disjunção

“Você pode se matricular nesta disciplina se tiver cursado Cálculo ou Programação”

significa que podem se matricular na disciplina:

- Alunos que cursaram apenas Cálculo,
- Alunos que cursaram apenas Programação,
- Alunos que cursaram Cálculo e Programação,

Esta é uma disjunção inclusiva.

Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- O outro significado de “ou” corresponde ao **ou exclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se exatamente uma das proposições é verdadeira.

- Exemplo: Se você ler no cardápio de um restaurante a proposição

  “O prato feito inclui um pedaço de carne ou um pedaço de frango.”

  você entende que você pode:

  - escolher comer um pedaco de frango, mas não de
  - carne, escolher comer um pedaco de carne, mas não
  - de frango,

    mas você não pode escolher comer um pedaco de carne e um pedaço de frango ao mesmo tempo.

  Esta é uma disjunção exclusiva.

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- Sejam *p* e *q* proposições.

  O **ou exclusivo de** *p* **e** *q*, denotado por $p \oplus q$, é a afirmação

  "ou p ou q".

  O ou exclusivo $p \oplus q$ é verdadeiro quando exatamente um entre *p* e *q* é verdadeiro, e é falso em caso contrário.

- **Tabela da verdade** para o ou exclusivo de duas proposições *p* e *q*:

p	q	$p \oplus q$
T	*T*	*F*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação condicional** ou **implicação** $p \rightarrow q$ é a afirmação

  "se p, então q".

  A afirmação condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

- Na afirmação condicional $p \rightarrow q$:
  - p é chamada de **hipótese**, **antecedente**, ou **premissa**,
  - q é chamada de **conclusão** ou **consequente**.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- **Tabela da verdade** para a proposição condicional envolvendo duas proposições *p* e *q*:

Implicação

p	q	p → q
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*T*
F	*F*	*T*

A afirmação condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando *p* é verdadeira e *q* é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- A implicação $p \rightarrow q$ pode ser entendida como uma promessa:

"Se você me garantir p, eu te garanto q."

A promessa só é quebrada quando você me garantir *p* e eu não te garantir *q* em troca.

A promessa é mantida quando você me garante *p* e eu te garanto *q*, ou quando você não me garante *p* (e neste caso eu sou livre para te garantir *q* ou não, sem quebrar a promessa).

- Exemplo: Considere a implicação abaixo.

"Se eu for eleito, eu vou abaixar os impostos"

A proposição condicional é falsa se eu for eleito e não abaixar os impostos.

Se eu não for eleito, eu posso abaixar os impostos ou não, sem assim quebrar minha promessa. Logo, se eu não for eleito, a proposição condicional é verdadeira independentemente de se eu abaixar os impostos ou não.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Na lógica proposicional, o valor de verdade da implicação $p \rightarrow q$ só depende do valor de verdade de p e q, e não de seu significado.

  Ao contrário do uso da implicação em linguagem natural, não existe necessariamente uma noção de "causa e efeito" entre p e q.

- A implicação lógica $p \rightarrow q$ apenas garante que:

  "q é no mínimo tão verdadeiro quanto p."

  A implicação só é falsa se "q for menos verdadeiro que p", ou seja, se p for verdadeiro e q for falso.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Exemplo: Vamos analisar se as implicações abaixo são verdadeiras ou falsas:

  - *"Se o sol emite luz, então queijos são laticínios."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa e conclusão verdadeiras.

  - *"Se* 2 + 2 = 3*, então morangos são animais."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa falsa e conclusão falsa.

  - *"Se a semana tem 7 dias, então o Brasil fica na Europa."*

    Proposição <u>falsa</u>: premissa verdadeira e conclusão falsa.

  - *"Se π é racional, então o Atlântico é um oceano de Fanta Uva."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa e conclusão falsas.

Proposições condicionais em linguagem natural

- Implicações aparecem na matemática e na linguagem natural em diversas formas.

  A afirmação condicional $p \rightarrow q$ pode ser expressa como:

  - *“se p, então q”*
  - *“se p, q”*
  - *“q se p”*
  - *“q quando p”*
  - *“p é suficiente para q”*
  - *“q é necessário para p”*
  - *“q a menos que ¬p”*
  - *“p implica q”*
  - *“p somente se q”*
  - *“q sempre que p”*
  - *“q segue de p”*

Proposições condicionais em linguagem natural

- Exemplo: Sejam as proposições:

p : *"Está fazendo sol."*

q : *"Eu vou ao clube."*

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser escrita em linguagem natural como:

- *"Se estiver fazendo sol, eu vou ao clube."*
- *"Estar fazendo sol é condição suficiente para eu ir ao clube."*
- *"Eu vou ao clube a menos que não esteja fazendo sol."*
- *"O fato de eu ir ao clube segue do fato de estar fazendo*
- *sol." "Eu vou ao clube sempre que faz sol."*
- *"Faz sol somente se eu vou ao clube."*

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação bicondicional** ou **implicação dupla** $p \leftrightarrow q$ é a afirmação

  "p se, e somente se, q".

  A afirmação bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor de verdade, e é falsa em caso contrário.

- Em linguagem natural é comum expressar $p \leftrightarrow q$ como:

  - *"p é necessário e suficiente para q."*
  - *"p sse q."* Note que usamos <u>"sse" com dois "s"</u>.

    (Em inglês, usa-se o <u>"iff" com dois "f"</u>.)

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- **Tabela da verdade** para o ou exclusivo de duas proposições *p* e *q*:

p	**q**	**p ↔ q**
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*T*

- A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que ambos $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiros, e ela é falsa em caso contrário.

Tabela da verdade de proposições compostas

- Nós introduzimos a negação e os conectivos lógicos de disjunção, conjunção, ou exclusivo, implicação e implicação dupla.
- Nós podemos usar estes operadores para expressar proposições cada vez mais complexas.
- Para determinar o valor de verdade de proposições compostas, podemos usar a **tabela da verdade**.

Exemplo: Tabela da verdade para a expressão $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$:

p	**q**	**¬q**	**p ∨ ¬q**	**p ∧ q**	**(p ∨ ¬q) → (p ∧ q)**
T	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*

Ordem de precedência dos operadores lógicos

- Em uma expressão composta, a ordem de aplicação dos operadores é:

  1) negação: $\neg$

  2) conjunção: $\wedge$

  3) disjunção: $\vee$

  4) implicação: $\rightarrow$

  5) implicação dupla $\leftrightarrow$

- Exemplos:
  - $p \vee \neg q \wedge r$ equivale a $p \vee ((\neg q) \wedge r)$.
  - $p \rightarrow q \vee r$ equivale a $p \rightarrow (q \vee r)$.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Sentenças em linguagem natural são frequentemente ambíguas, o que pode causar problemas de comunicação.
- Traduzir sentenças em linguagem natural para proposições compostas remove a ambiguidade.
- Uma vez traduzidas para proposições lógicas, estas sentenças podem ser analisadas quanto ao seu valor de verdade.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Exemplo: Seja a sentença em linguagem natural:

  "Você não pode andar na montanha russa se você for mais baixo que 1.50m de altura, a menos que você tenha mais de 16 anos."

  Podemos traduzí-la para uma proposição composta, usamos as seguintes proposições:

  - p : *"você pode andar na montanha russa"*
  - q : *"você é mais baixo que 1.50 m"*,
  - r : *"você tem mais de 16 anos"*.

  A sentença em linguagem natural é, então, traduzida para:

$$(q \land \neg r) \rightarrow \neg p.$$

Equivalência de proposições: Introdução

- Um passo importante na resolução de muitos problemas é a substituição de uma afirmação por outra com mesmo valor de verdade.
- Nesta seção vamos estudar como determinar se duas proposições compostas têm sempre o mesmo valor de verdade.

Equivalência de proposições: Introdução

- Primeiro, vamos categorizar os tipos de expressões compostas:

  - uma **tautologia** é uma expressão sempre verdadeira independentemente do valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contradição** é uma expressão sempre falsa independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contingência** é uma expressão que não é nem uma tautologia, nem uma contradição.

  Exemplo: A tabela da verdade abaixo mostra que $(p \land \neg p)$ é uma contradição, enquanto a expressão $(p \lor \neg p)$ é uma tautologia.

p	**¬p**	**p ∧ ¬p**	**p ∨ ¬p**
T	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*F*	*T*

Equivalências lógicas

- Duas proposições compostas p e q são **logicamente equivalentes** se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.
  A notação $p \equiv q$ denota que p e q são logicamente equivalentes.

- Uma maneira de determinar se $p \equiv q$ é usando tabelas da verdade.

  Exemplo: Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg p \lor q$ são logicamente equivalentes.
  Solução:

Tabela da verdade para $p \rightarrow q$ e $\neg p \lor q$:

p	**q**	**¬p**	**¬p ∨ q**	**p → q**
T	*T*	*F*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*T*

Como a coluna correspondente a $p \rightarrow q$ e a coluna correspondente a $\neg p \lor q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade,

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$ é uma tautologia.

Logo $p \rightarrow q \equiv (\neg p \lor q)$.

Equivalências lógicas

- Exemplo: Mostre que $\neg(p \lor q)$ e $\neg p \land \neg q$ são logicamente equivalentes.

p	q	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$
T	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*

Uma vez que a coluna correspondente a $\neg(p \lor q)$ e a coluna correspondente a $\neg p \land \neg q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$ é uma tautologia.

Logo, $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$.

A equivalência que demonstramos é uma das **Leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan

$\neg(p \lor q)$	$\equiv$	$\neg p \land \neg q$
$\neg(p \land q)$	$\equiv$	$\neg p \lor \neg q$

Equivalências lógicas

- Algumas equivalências lógicas importantes:

Nome	**Equivalência**
Leis de identidade	$p \land T \equiv p$ $p \lor F \equiv p$
Leis de dominˆancia	$p \land F \equiv F$ $p \lor T \equiv T$
Leis de idempotência	$p \land p \equiv p$ $p \lor p \equiv p$
Lei da dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Leis de comutatividade	$p \land q \equiv q \land p$ $p \lor q \equiv q \lor p$
Leis de associatividade	$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$ $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
Leis de distributividade	$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$ $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
Leis de absorção	$p \lor (p \land q) \equiv p$ $p \land (p \lor q) \equiv p$
Leis da negação	$p \land \neg p \equiv F$ $p \lor \neg p \equiv T$

Equivalências lógicas

- Equivalências lógicas envolvendo proposições condicionais:

Equivalências
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

- Equivalências lógicas envolvendo proposições bicondicionais:

Equivalências
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional, que estudamos até agora, cobre a análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, . . .

- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações matemáticas.

- Por exemplo, suponha que saibamos que

  1 *"Todos os matriculados em Matemática Discreta são alunos dedicados"*, e que

  2 *"Alice está matriculada em Matemática Discreta"*.

  Intuitivamente, podemos, então, concluir que

  3 *"Alice é uma aluna dedicada."*

  Este tipo de inferência só é possível após introduzirmos o conceito de predicados e quantificadores.

Predicados: Introdução

- Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:
  1. $x \geq 12$,
  2. $x + y = z$,
  3. O aluno *x* tirou a maior nota da sala na prova.
- Tais afirmações são escritas em termos de <u>variáveis</u>.

  A menos que os valores das variáveis sejam especificados, as afirmações não são verdadeiras nem falsas.

  Como não possuem valor de verdade, elas não são proposições.

Predicados: Introdução

- Exemplo: A afirmação

"x é um número real"

pode ser dividida em duas partes:

1: a primeira parte, a **variável** *x* , é o sujeito da afirmação,

2: a segunda parte "é um número real" é um **predicado**, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

A afirmação *"x é um número real"* pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável *x* assumir.

- Quando $x = \pi$, a afirmação *"x é um número real"* é verdadeira. Quando $x = 2i$, a afirmação *"x é um número real"* é falsa.

Predicados: Introdução

- Exemplo:(Continuação)

  Podemos ver esta afirmação como uma **função proposicional**

  $P(x)$: *“x é um número real”*

  que mapeia valores de *x* para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

  - $P(\pi)$ é verdadeiro.
  - $P(2i)$ é falso.

Predicados

- Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

  Intuitivamente, predicados dão qualidades a sujeitos; relacionam sujeitos entre si; ou relacionam sujeitos a objetos.

- Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis.

  Um predicado $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis é chamado de um **predicado n-ário**.

Predicados

- Exemplo 4: Seja $P(x, y, z)$ o predicado ternário "$x + y = z$".
  - $P(1, 4, 5) = T$,

    pois substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em "$x + y = z$", obtemos uma afirmação verdadeira.
  - $P(4, 5, 1) = F$,

    pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em "$x + y = z$", obtemos uma afirmação falsa.

Quantificadores: Introdução

- Como um predicado não tem valor de verdade em si, é preciso instanciar os valores de suas variáveis para transformá-lo em uma proposição.

- Para transformar um predicado em uma proposição, podemos
  (1) atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou
  (2) quantificar em qual faixa de valores de *x* a proposição pode ser considerada verdadeira.

  Em português, usamos palavras como "*nenhum*", "*todos*" e "*algum*" para quantificar predicados.

  Por exemplo, o predicado *"O computador x do laboratório está ligado"* não tem valor de verdade em si, mas as seguintes proposições têm:

  1. *"Nenhum computador do laboratório está ligado."*
  2. *"Todos os computadores do laboratório estão ligados."*
  3. *"Algum computador do laboratório está ligado."*

Quantificadores: Domínio ou universo de discurso

- Dado um predicado de várias variáveis, o **domínio de discurso**, ou **universo de discurso**, ou simplesmente **domínio** é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

  1. No predicado

     $$“x \geq 2”,$$

     o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais R ou o dos inteiros Z.

  2. No predicado

     “A pessoa x nasceu no país y”,

     o domínio de *x* pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de *y* pode ser o conjunto de países no mundo.

- O domínio de um predicado é essencial para sua quantificação.

Quantificador universal

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação universal** é

$$\forall x : P(x)$$

significando *"Para todos os valores x no domínio, P(x) é verdadeiro"*

ou simplesmente *"Para todo x no domínio, P(x)"*

O símbolo $\forall$ é o símbolo de **quantificador universal**.

A proposição $\forall x : P(x)$ é

- <u>verdadeira</u> se $P(\boldsymbol{x})$ é verdadeiro para todo ***x* no domínio,** no domínio,
- <u>falsa</u> se há algum ***x*** no domínio tal que $P(\boldsymbol{x})$ seja falso.

  Um elemento ***x*** para o qual $P(\boldsymbol{x})$ é falso é um **contra-exemplo** para $\forall \boldsymbol{x} : P(\boldsymbol{x})$.

Quantificação universal

- Exemplo: Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A Proposição $\forall x : x^2 \geq x$ é verdadeira ou falsa?

  Solução.

  Temos que

  $$1^2 \geq 1,\ 2^2 \geq 2,\ 3^2 \geq 3,\ 4^2 \geq 4, \text{ e } 5^2 \geq 5.$$

  Portanto a proposição é verdadeira.

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na proposição quantificada:

  $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.

  $\forall y \in \mathbb{Z}^+ : -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.

- Exemplo: A proposição

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução: Temos o contra-exemplo

$$(1/2)^2 = 1/4 \not\geq 1/2,$$

e portanto a proposição é falsa.

Quantificação existencial

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação existencial** é

$$\exists x : P(x)$$

significando

"Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro"

ou simplesmente

"Existe x no domínio tal que $P(x)$"

- O símbolo $\exists$ é o símbolo de **quantificador existencial.**
- A proposição $\exists x : P(x)$ é
  - verdadeira se $P(\boldsymbol{x})$ é verdadeiro para ao menos um $\boldsymbol{x}$ no domínio,
  - falsa se para todo $\boldsymbol{x}$ no domínio $P(\boldsymbol{x})$ é falso.

  Um elemento $\boldsymbol{x}$ para o qual $P(\boldsymbol{x})$ é verdadeiro é uma **testemunha** para $\exists \boldsymbol{x} : P(\boldsymbol{x})$.

Quantificação existencial

- Exemplo: Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A proposição

$$\exists m : m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

$$5^2 = 25 \neq 5, \quad 6^2 = 36 \neq 6, \quad 7^2 = 49 \neq 7,$$

$$8^2 = 64 \neq 8, \quad 9^2 = 81 \neq 9, \text{ e } \quad 10^2 = 100 \neq 10.$$

Portanto a proposição é falsa.

Ordem de precedência dos quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os operadores da lógica proposicional ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, . . .).

  1. A proposição

     $$\forall x : P(x) \vee Q(x)$$

     significa

     $$(\forall x : P(x)) \vee Q(x).$$

     Note que a proposição <u>não significa</u> $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$.

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Quando um quantificador é utilizado em uma variável x , dizemos que x é uma **variável ligada**.

  Uma variável que não é ligada a nenhum quantificador é chamada de **variável livre**.

  1. Em

     $$\forall x : x + y = 2,$$

     x é uma variável ligada, e y é uma variável livre.

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Cada quantificador tem um **escopo** sobre o qual ele vale.

  1. Em

     $$\exists x : (P(x) \land Q(x)) \lor \forall x : R(x)$$

     todas as variáveis são ligadas, mas o escopo de cada x é diferente.

     O primeiro quantificador, $\exists x$, tem como escopo apenas $(P(x) \land Q(x))$. O segundo quantificador, $\forall x$, tem como escopo apenas $R(x)$.

     Podemos renomear variáveis ligadas em escopos diferentes sem alterar a expressão lógica (o que muitas vezes torna a expressão mais fácil de ser lida):

     $$\exists x : (P(x) \land Q(x)) \lor \forall y : R(y)$$

Equivalências lógicas envolvendo quantificadores

- Afirmações envolvendo predicados são logicamente equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo valor de verdade independentemente de quais predicados e domínios de discurso são utilizados.

  Usamos

  $$S \equiv T$$

  para denotar que S e T são equivalentes.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como **leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan para negação
$\neg \forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg \exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

- Equivalências consequentes das leis de De Morgan são:

Outras equivalências de negação
$\forall x : P(x) \equiv \neg \exists x : \neg P(x)$
$\exists x : P(x) \equiv \neg \forall x : \neg P(x)$

Negando expressões quantificadas universais

- Exemplo:

  $P: \quad \forall x \in \mathrm{R} : x^2 \geq 0$

  $\neg P: \quad \neg \forall x \in \mathrm{R} : x^2 \geq 0 \equiv \exists x \in \mathrm{R} : \neg(x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathrm{R} : x^2 < 0$

- Exemplo:

  P: *“Todos os programas de computador são finitos.”*

  $\neg P$: *“Nem todos os programas de computador que são finitos. ≡*
  “Existe um programa de computador que não é finito.”

- Exemplo:

  P: *“Todo mundo gosta de sorvete ou de bolo.”*

  $\neg P$: *“Nem todo mundo gosta de sorvete ou de bolo.” ≡*
  “Existe uma pessoa que não goste de sorvete nem de bolo.”

Negando expressões quantificadas existenciais

- Exemplo:

  $P: \quad \exists x \in \mathrm{N} : x^2 = x$

  $\neg P: \quad \neg \exists x \in \mathrm{N} : x^2 = x \equiv \forall x \in \mathrm{N} : \neg(x^2 = x) \equiv \forall x \in \mathrm{N} : x^2 \neq x$

- Exemplo:

  P : *“Alguns peixes respiram ar.”*

  $\neg P$: *“Nenhum peixe respira ar.”*

- Exemplo:

  P : *“Alguns esportistas são brasileiros e jovens.”*

  $\neg P$: *“Nenhum esportista é brasileiro e jovem.”* $\equiv$
  “Todo esportista não é brasileiro ou não é jovem.”

Quantificadores aninhados: Introdução

- Muitas expressões usam múltiplos **quantificadores aninhados.**

  Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

  - A expressão

    $$\forall x : \forall y : ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

    significa

    "O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo."

  - A expressão

    $$\forall x : \exists y : (x + y = 0)$$

    significa

    "Todo número real tem um número real oposto (isto é, que somado ao original resulta em zero)."

Entendendo quantificadores aninhados

- Exemplo: Seja o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

  $A(x, y)$: *"A pessoa x ama a pessoa y"*

  - $\forall x : \exists y : A(x, y)$ significa *"Todo mundo ama alguém."*
  - $\exists y : \forall x : A(x, y)$ significa *"Existe alguém que é amado por todo mundo."*
  - $\forall y : \exists x : A(x, y)$ significa *"Todo mundo é amado por alguém."*
  - $\exists x : \forall y : A(x, y)$ significa *"Existe alguém que ama todo mundo."*

A ordem dos quantificadores

- Exemplo: Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x \; : \; \exists y : x < y$ significa

    "Para todo número real x, existe outro real maior que x."

    Esta sentença é <u>verdadeira</u>.

  - $\exists y : \; \forall x \; : x < y$ significa

    "Existe um número real y tal que todos os demais números reais são menores que y."

    Esta sentença é <u>falsa</u>.

As sentenças do exemplo anterior não são equivalentes logicamente.

Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, <u>o sentido da proposição se altera</u>.

Traduzindo de sentenças quantificadas para linguagem natural

- Exemplo: Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$C(x)$: *"x tem um computador"*

$F(x, y)$: *"x e y são amigos"*

  - $\forall x : (C(x) \vee \exists y : (C(y) \wedge F(x, y)))$ significa

    "Todo estudante tem um computador, ou tem um amigo que tem um computador."

  - $\exists x : \forall y : \forall z : ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y != z)) \rightarrow \neg F(y, z))$ significa

    "Existe um estudante cujos todos amigos não são amigos entre si."

Traduzindo de linguagem natural para sentenças lógicas

- Exemplo: Expresse como express˜oes quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”*
  - *“Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba.”*
  - *“Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.”*

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes:

$D(x)$: *“x sabe dirigir”*

$A(x, y)$: *“x e y são amigos”*

Traduzindo de linguagem natural para sentenças lógicas

- Exemplo: (Continuação)

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal:

1. *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (A(x, y) \land \neg D(y))$$

2. *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba"*:

$$\exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x, y) \rightarrow \neg D(y)))$$

3. *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (A(x, y) \land \neg D(y) \land \forall z : (A(x, z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$$

Negação de quantificadores aninhados

- A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

Leis de De Morgan para negação
$\neg \forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg \exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Notando que $P(x)$ pode ser ela mesma uma expressão quantificada.

- Exemplo: Seja $A(x, y)$ a proposição *"A pessoa x ama a pessoa y"* com universo de discurso como sendo todas as pessoas do mundo.

$P: \quad \forall x : \exists y : A(x, y)$ *"Todo mundo ama alguém"*

$$\neg P: \quad \neg \forall x : \exists y : A(x, y) \equiv \exists x : \neg \exists y : A(x, y) \equiv \exists x : \forall y : \neg A(x, y)$$

"Existe alguém que não ama ninguém."

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo: Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: *"x sabe dirigir"*

$A(x, y)$: *"x e y são amigos"*

Proposição P:

P : $\forall x : \exists y : (A(x, y) \land \neg D(y))$

Afirmativa: *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*

¬P : $\exists x : \forall y : (A(x, y) \rightarrow D(y))$

Negação: *"Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir."*

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo: (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: *"x sabe dirigir"*

$A(x, y)$: *"x e y são amigos"*

Proposição Q:

Q : $\exists x : (\neg D(x) \wedge \forall y : (A(x, y) \rightarrow \neg D(y)))$

Afirmativa: *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem" "nenhum amigo que saiba."*

¬Q : $\forall x : (D(x) \vee \exists y : (A(x, y) \wedge D(y)))$

Negação: *"Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe."*

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo: (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: *“x sabe dirigir”*

$A(x, y)$: *“x e y são amigos”*

Proposição R:

$\mathbf{R} : \quad \forall x : \exists y : (A(x, y) \land \neg D(y) \land \forall z : (A(x, z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$

Afirmativa:

“Cada estudante tem exatamente um amigo que” “não sabe dirigir.”

$\neg\mathbf{R} : \exists x : \forall y : (A(x, y) \rightarrow (D(y) \lor \exists z : (A(x, z) \land \neg D(z) \land y \neq z)))$

Negação: *“Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam” “ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam.”*

Regras de inferência: Introdução

- Em diversas situações é preciso deduzir **conclusões** a partir de **premissas**:
  - em matemática: estabelecer verdades absolutas (teoremas),
  - em ciência da computação: verificar que propriedades de um sistema são satisfeitas dada sua especificação,
  - em política/filosofia: demonstrar que certas ideias são bem fundamentadas.
- O processo de derivar conclusões de premissas é chamado de **argumento**.

  Um argumento é **válido** se, e somente se, é impossível que suas premissas sejam todas verdadeiras e sua conclusão seja falsa.

- Aqui estudaremos **regras de inferência** que nos permitem derivar argumentos válidos.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento** é uma sequência de proposições.

  Todas as afirmações, exceto a última, são chamadas de

  premissas. A proposição final é chamada de **conclusão**.

  Um **argumento válido** é aquele em que a verdade de suas premissas implica na verdade de sua conclusão.

- Um **formato de argumento** em lógica proposicional é uma sequência de proposições envolvendo variáveis proposicionais.

  Um **formato de argumento válido** é aquele em que, independentemente dos valores atribuídos a cada variável proposicional das premissas, a conclusão é verdadeira sempre que as premissas são todas verdadeiras.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo: Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:

  1. *"Se você está matriculado em Matemática Discreta, você tem acesso à página da disciplina."*
  2. *"Você está matriculado em Matemática Discreta."*

     Logo,

  3. *"Você tem acesso à página da disciplina."*

O argumento acima é válido?

Ou seja, é verdade que a conclusão (3) é verdadeira sempre que as premissas (1) e (2) forem ambas verdadeiras?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo: (Continuação)

Solução. Vamos analisar o formato do argumento.

Sejam

p a proposição *"Você está matriculado em Matemática Discreta"*, e

q a proposição *"Você tem acesso à página da disciplina"*.

O argumento anterior tem o formato

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore\ q \end{array} \quad ,$$

onde o símbolo $\therefore$ significa "portanto", ou "logo".

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo: (Continuação)

Considerando *p* e *q* como variáveis proposicionais, podemos usar uma tabela da verdade para verificar que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

		Premissas		Conclusão
p	**q**	**p → q**	**p**	**q**
T	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*F*	*F*

A tabela mostra que sempre que $p \rightarrow q$ e p são ambos verdadeiros, também q deve ser verdadeiro. Assim, o formato de argumento

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore\ q \end{array},$$

é válido porque sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão é verdadeira.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Uma argumentação válida pode ser interpretada como uma regra de preservação da verdade:

  1. Se as premissas são todas verdadeiras, você pode aplicar a argumentação para chegar a uma conclusão verdadeira.
  2. Se as premissas não são todas verdadeiras, ao aplicar a argumentação você pode chegar a uma conclusão falsa ou verdadeira.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo: Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:

  1. *"Se você assistindo a esta aula, você é a pessoa mais famosa do Brasil."*
  2. *"Você está assistindo a esta aula."*

  Logo,

  3. *"Você é a pessoa mais famosa do Brasil."*

  O argumento acima é válido? Sua conclusão é verdadeira?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo: (Continuação)

Solução. Vamos analisar o formato do argumento. Sejam

p a proposição *"Você está assistindo a esta aula"*, e

q a proposição *"Você é a pessoa mais famosa do Brasil"*.

O argumento é válido porque ele tem o formato

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

que já verificamos ser válido: sempre que as premissas forem verdadeiras, a conclusão será verdadeira.

Entretanto, no argumento acima a premissa (1) é falsa, logo a conclusão não é garantidamente verdadeira. De fato, a conclusão é provavelmente falsa!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **formato de argumento inválido** é aquele em que as premissas podem ser verdadeiras e mesmo assim a conclusão pode ser falsa.

- Exemplo: Mostre que o formato de argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Solução.
A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \to q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e a conclusão q ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		Conclusão
p	**q**	**p → q**	**q**	**p**
T	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*

Por exemplo, das premissas *"Se João ganhar na loteria, ele fica rico"* e *"João é rico"*, não se pode concluir que necessariamente *"João ganhou na loteria"*.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs verdade

- A validade é uma propriedade do formato do argumento.
- A verdade é uma propriedade da conclusão do argumento.
- Exemplo:

"Se a Austrália é um país rico, então ela fica no hemisfério norte."
"A Austrália é um país rico."
∴ *"A Austrália fica no hemisfério norte."*

é um argumento válido, mas a primeira premissa é falsa, assim como a conclusão é falsa.

"Se Londres é uma metrópole, então ela tem prédios altos."
"Londres tem prédios altos."
∴ *"Londres é uma metrópole."*

é um argumento inválido, mas a conclusão é verdadeira.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Para mostrar que um argumento é válido, podemos usar sempre uma tabela da verdade para verificar se sempre que suas premissas são verdadeiras, a conclusão também é.
- Entretanto, se o argumento tem muitas variáveis proposicionais, construir uma tabela da verdade pode ser inconveniente.

  Por exemplo, para verificar a validade de um argumento envolvendo 10 variáveis proposicionais, seria necessária uma tabela de $2^{10} = 1\,024$ linhas.
- Para contornar o problema, nós verificamos a validade de argumentos relativamente simples, chamados de **regras de inferência**, e utilizamos estas regras para construir argumentos mais complexos de maneira consistente.

Regras de inferência para lógica proposicional

- O argumento que estabelecemos nos slides anteriores, por exemplo, consiste na regra de inferência chamada de **modus ponens** (do latim, *modo de afirmação*):

$$\begin{array}{rl} & p \\ & \underline{p \to q} \\ \therefore & q \end{array}$$

A regra de modus ponens nos diz que:

1. se uma afirmação condicional $p \to q$ é verdadeira, e
2. a hipótese p do condicional é verdadeira, então
3. a conclusão q do condicional é necessariamente verdadeira.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo: Suponha que saibamos que

  1. *"Se fizer sol hoje, eu vou ao clube"*,

     e que

  2. *"Está fazendo sol hoje"*,

     então, por modus ponens, podemos concluir que

  3. *"Eu vou ao clube."*

Regras de inferência para lógica proposicional

Nome	Regra de inferência
Modus ponens	$\dfrac{p \to q \quad p}{\therefore\ q}$
Modus tollens	$\dfrac{p \to q \quad \neg q}{\therefore\ \neg p}$
Silogismo hipotético	$\dfrac{p \to q \quad q \to r}{\therefore\ p \to r}$
Silogismo disjuntivo	$\dfrac{p \lor q \quad \neg p}{\therefore\ q}$

Nome	Regra de inferência
Adição disjuntiva	$\dfrac{p}{\therefore\ p \lor q}$
Simplificação conjuntiva	$\dfrac{p \land q}{\therefore\ p}$
Adição conjuntiva	$\dfrac{p \quad q}{\therefore\ p \land q}$
Resolução	$\dfrac{p \lor q \quad \neg p \lor r}{\therefore\ q \lor r}$

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo: Justifique a validade do argumento abaixo:

"Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano."

Solução. Sejam

p a proposição *"Zeus é humano"*, e

q a proposição *"Zeus é mortal"*.

O argumento utilizou modus tollens

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & \underline{\neg q \quad\quad} \\ \therefore & \neg p \end{array}$$

para concluir $\neg p$, ou seja, que Zeus não é humano.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo: Justifique a validade do argumento abaixo:

"Se chover hoje, não faremos um churrasco hoje.

Se não fizermos um churrasco hoje, faremos um churrasco amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um churrasco amanhã."

Solução. Sejam

p a proposição *"Chove hoje"*,

q a proposição *"Não faremos um churrasco hoje"*, e

r a proposição *"Faremos um churrasco amanhã"*.

O argumento utilizou silogismo hipotético

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

para concluir $p \rightarrow r$, i.e., que se chover hoje faremos um churrasco amanhã.

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Quando há várias premissas, várias regras de inferência podem ser necessárias para mostrar que um argumento é válido.

- Exemplo: Você está saindo para a escola de manhã e percebe que não está usando os óculos.

  Ao tentar descobrir onde estão os óculos, você pensa nos seguintes fatos, que são todos verdadeiros:

  (a) Se os meus óculos estão na mesa da cozinha, então eu os vi no café da manhã.

  (b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou estava lendo o jornal na cozinha.

  (c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar, então meus óculos estão na mesinha de centro.

  (d) Eu não vi meus óculos no café da manhã.

  (e) Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo.

  (f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na mesa da cozinha.

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Exemplo: (Continuação)

Para formalizar os fatos que você sabe, vamos denominar as proposições:

- p : *"Os meus óculos estão na mesa da cozinha."*
- q : *"Eu vi meus óculos no café da manhã."*
- r : *"Eu estava lendo o jornal na sala de estar."*
- s : *"Eu estava lendo o jornal na cozinha."*
- t : *"Meus óculos estão na mesinha de centro."*
- u : *"Eu estava lendo um livro na cama."*
- v : *"Meus óculos estão no criado-mudo."*

Assim, os fatos que você sabe são:

(a) $p \rightarrow q$ (c) $r \rightarrow t$ (e) $u \rightarrow v$

(b) $r \vee s$ (d) $\neg q$ (f) $s \rightarrow p$

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Exemplo: (Continuação)

Para deduzir onde se encontram os óculos, vamos aplicar regras de inferência.

(1)
$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \textit{Premissa (a)} \\ \underline{\neg q} & \textit{Premissa (d)} \\ \therefore \neg p & \textit{Modus tollens} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} s \rightarrow p & \textit{Premissa (f)} \\ \underline{\neg p} & \textit{Conclusão de (1)} \\ \therefore \neg s & \textit{Modus tollens} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ll} r \vee s & \textit{Premissa (b)} \\ \underline{\neg s} & \textit{Conclusão de (2)} \\ \therefore r & \textit{Silogismo disjuntivo} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{ll} r \rightarrow t & \textit{Premissa (c)} \\ \underline{r} & \textit{Conclusão de (3)} \\ \therefore t & \textit{Moduns ponens} \end{array}$$

Assim podemos concluir que t é verdadeiro, ou seja,

"Os óculos estão na mesinha de centro."

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Já discutimos regras de inferência para proposições.
- Agora vamos discutir regras de inferência para proposições quantificadas.
- Estas regras de inferência são muito usadas em argumentos matemáticos, muitas vezes de forma implícita.

  Regras de inferência importantes para lógica de predicados:

Nome	Regra de inferência
Instanciação universal	$\dfrac{\forall x : P(x)}{\therefore P(c)}$
Generalização universal	$\dfrac{P(c) \text{ para um } c \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x : P(x)}$
Instanciação existencial	$\dfrac{\exists x : P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algum elemento } c}$
Generalização existencial	$\dfrac{P(c) \text{ para algum elemento } c}{\therefore \exists x : P(x)}$

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo: Mostre que as premissas

  1. *"Todos os matriculados em Matemática Discreta são alunos dedicados"*

     e

  2. *"Alice está matriculada em Matemática Discreta"*

     implicam a conclusão

  3. *"Alice é uma aluna dedicada"*

Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas os estudantes:

- $M(x)$: *"x está matriculado em Matemática Discreta."*
- $D(x)$: *"x é um aluno dedicado."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo: (Continuação)

As premissas do argumento são, então:

(a) $\forall x : (M(x) \rightarrow D(x))$ (b) $M(\text{Alice})$

A conclusão do argumento é:

(c) $D(\text{Alice})$

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

(1)

$$\frac{\forall x : (M(x) \rightarrow D(x))}{\therefore M(\text{Alice}) \rightarrow D(\text{Alice})}$$

Premissa (a)
Instanciação universal

(2)

$$\frac{\begin{array}{l} M(\text{Alice}) \\ M(\text{Alice}) \rightarrow D(\text{Alice}) \end{array}}{\therefore D(\text{Alice})}$$

Premissa (b)
Conclusão de (1)
Modus ponens

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 10: Mostre que as premissas

  1. *"Um estudante de Matemática Discreta não leu o livro-texto"*, e
  2. *"Todos os estudantes de Matemática Discreta foram bem na prova"*

  implicam a conclusão

  3. *"Alguém que foi bem na prova não leu o livro-texto"*

Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas as pessoas:

- $D(x)$: *"x é estudante de Matemática Discreta."*
- $L(x)$: *"x leu o livro-texto."*
- $P(x)$: *"x foi bem na prova."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo: (Continuação)

As premissas do argumento são, então:

(a) $\exists x : (D(x) \wedge \neg L(x))$(b) *(b)* $\forall x : (D(x) \rightarrow P(x))$

A conclusão do argumento é:

(c) $\exists x : (P(x) \wedge \neg L(x))$

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

(1)
$$\begin{array}{ll} & \underline{\exists x : (D(x) \wedge \neg L(x))} \\ \therefore & D(c) \wedge \neg L(c) \end{array}$$
Premissa (a)
Instanciação existencial

(2)
$$\begin{array}{ll} & \underline{D(c) \wedge \neg L(c)} \\ \therefore & D(c) \end{array}$$
Conclusão de (1)
Simplificação conjuntiva

(3)
$$\begin{array}{ll} & \underline{\forall x : (D(x) \rightarrow P(x))} \\ \therefore & D(c) \rightarrow P(c) \end{array}$$
Premissa (b)
Instanciação universal

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo: (Continuação)

(4)

$$\begin{array}{ll} & D(c) \\ & \underline{D(c) \rightarrow P(c)} \\ \therefore & P(c) \end{array}$$

Conclusão de (2)
Conclusão de (3)
Modus ponens

(5)

$$\begin{array}{ll} & \underline{D(c) \land \neg L(c)} \\ \therefore & \neg L(c) \end{array}$$

Conclusão de (1)
Simplificação conjuntiva

(6)

$$\begin{array}{ll} & P(c) \\ & \underline{\neg L(c)} \\ \therefore & P(c) \land \neg L(c) \end{array}$$

Conclusão de (4)
Conclusão de (5)
Adição conjuntiva

(7)

$$\begin{array}{ll} & \underline{P(c) \land \neg L(c)} \\ \therefore & \exists x : (P(x) \land \neg L(x)) \end{array}$$

Conclusão de (6)
Generalização existencial

Combinando regras de inferência para proposições e predicados quantificados

- Desenvolvemos regras de inferência para proposições e para proposições quantificadas.
- Uma vez que moduns ponens e instanciação universal são utilizadas com frequência em conjunto, podemos usar a seguinte regra conhecida como **modus ponens universal**:

$$\begin{array}{ll} & \forall x : (P(x) \rightarrow Q(x)) \\ & P(c), \text{ onde } c \text{ é um elemento particular do domínio} \\ \therefore & Q(c) \end{array}$$

- Exemplo: Assuma que a seguinte premissa seja verdadeira:

"Para todo inteiro positivo n, se n > 4*, então* $n^2 < 2^n$*"*.

Sabemos que a proposição *"*100 > 4*"* é verdadeira.

Por modus ponens universal, podemos concluir que *"*$100^2 < 2^{100}$*"*.