TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

CAMINHAMENTOS

ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL

Prof. Alexei Machado

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Calcula o menor caminho entre todos os pares de vértices em um digrafo

- Envolve publicações de Robert Floyd (em 1962), Bernard Roy (em 1959) e Stephen Warshall (em 1962)

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Peter Ingerman (em 1962) deu a forma atual ao algoritmo
- É um exemplo de *programação dinâmica*
  - *Técnica que utiliza cálculos previamente realizados no cálculo da solução atual.*

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Premissa: um caminho entre dois vértices, v_i e v_l, passa por um vértice v_k. Logo, o caminho pode ser visto como $c(v_i,v_k)+c(v_k,v_l)$

- Tenta minimizar as partes do caminho

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Para todo caminho (i, l), o algoritmo verifica se existe outro menor que passa por um vértice k, ou seja, se c(i, l) é menor que c(i, k) + c(k, l) para cada vértice k do grafo
- Insere um ou mais vértices nos caminhos quando for uma vantagem fazer isso

Estruturas de dados

- Matriz de entrada, inicializada com
  - Se i = l, matrizEntrada(i, l) = 0
  - Se i ≠ l e (i, l) ∈ E, matrizEntrada(i,l) = getPeso(i, l)
  - Senão, matrizEntrada(i, j) = ∞

Estruturas de dados

- Matriz de saída $D_{|V|x|V|}$, na qual cada célula d_{il} contém a distância mínima entre os vértices i e l

Algoritmo de Floyd-Warshall


```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

k: intermediário

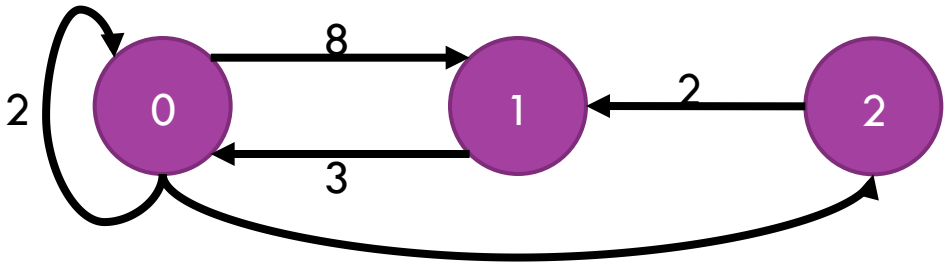
i: origem

l: destino

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

Exemplo

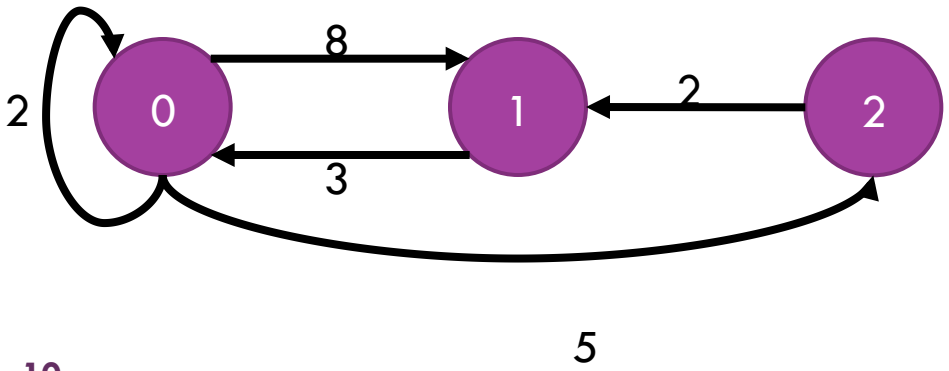


5

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

Exemplo



Matriz de entrada

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

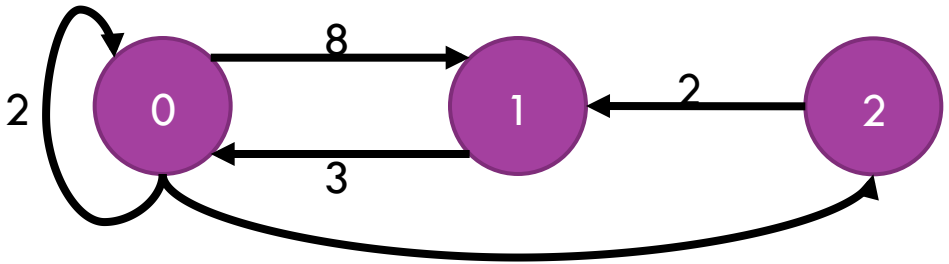
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:0 l:0

Exemplo



Matriz de entrada

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([0][0]=0 , [0][0]=0 + [0][0]=0)

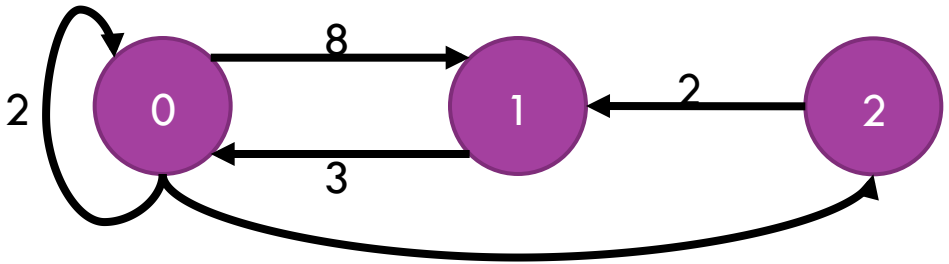
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:0 l:0

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([0][1]=8 , [0][0]=0 + [0][1]=8)

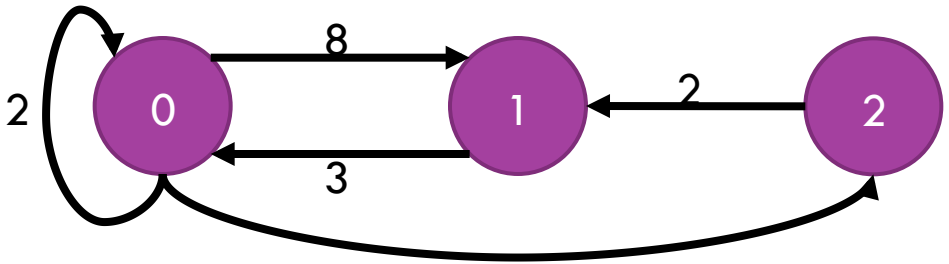
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:0 l:1

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([0][2]=5 , [0][0]=0 + [0][2]=5)

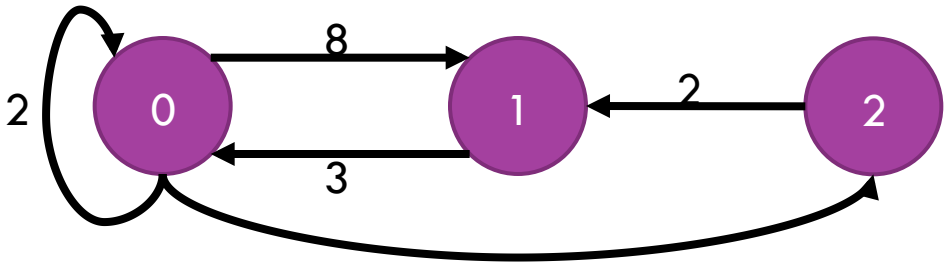
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:0 l:2

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	*5*
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([1][0]=3 , [1][0]=3 + [0][0]=0)

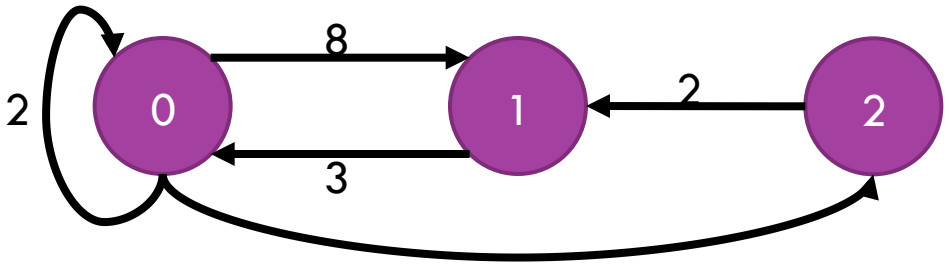
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:1 l:0

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([1][1]=0 , [1][0]=3 + [0][1]=8)

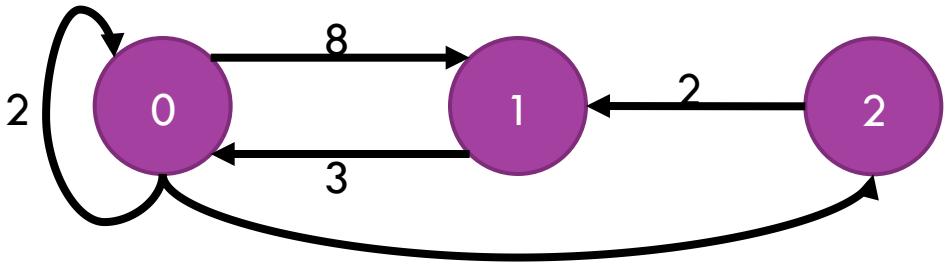
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:1 l:1

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	∞
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([1][2]=∞ , [1][0]=3 + [0][2]=5)

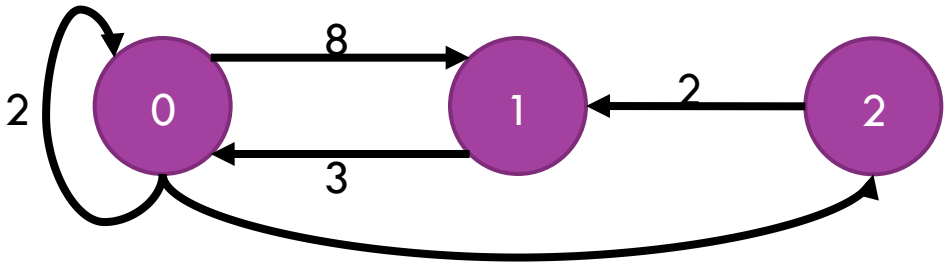
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:1 l:2

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	8
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([2][0]=∞ , [2][0]= ∞ + [0][0]=0)

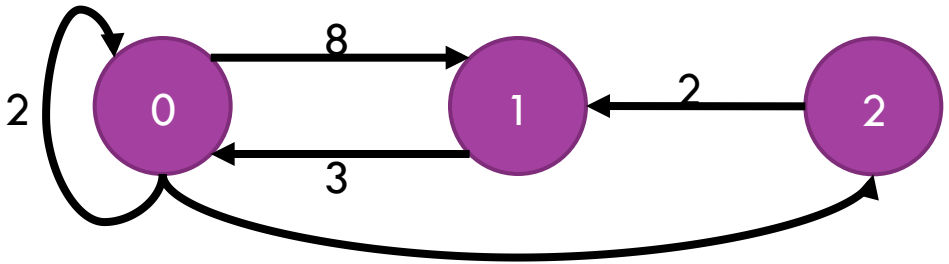
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:2 l:0

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	8
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([2][1]=2 , [2][0]= ∞ + [0][1]=8)

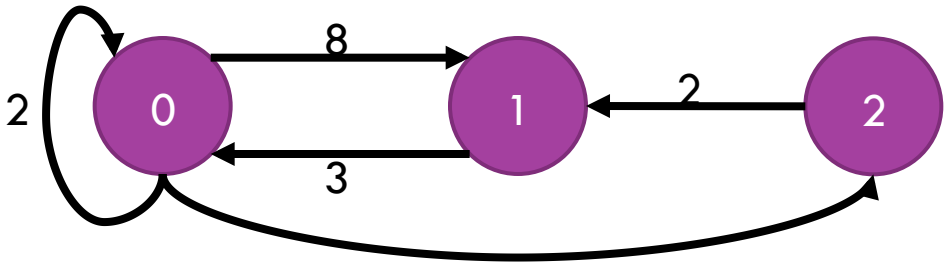
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:2 l:1

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	8
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

= min([2][2]=0 , [2][0]= ∞ + [0][2]=5)

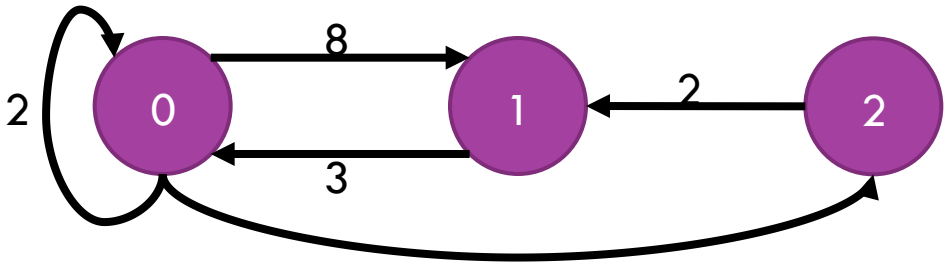
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:0 i:2 l:2

Exemplo



v0 como intermediário

0	8	5
3	0	8
∞	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

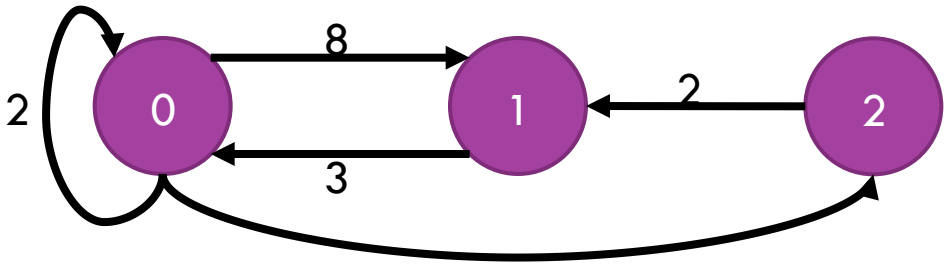
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:1 i:2 l:2

Exemplo



v1 como intermediário

0	8	5
3	0	8
5	2	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

```
void floydWarshall(Peso mat[][]){
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int l = 0; l < n; l++)
        mat[i][l] = min(mat[i][l], mat[i][k] + mat[k][l])
}
```

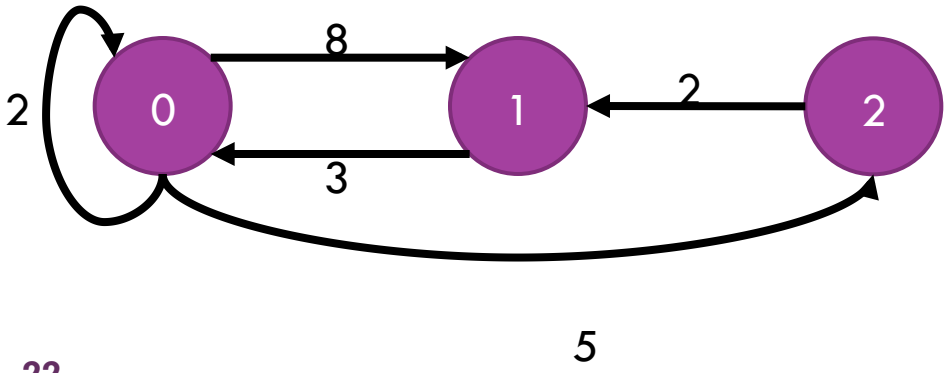
k: intermediário

i: origem

l: destino

k:2 i:2 l:2

Exemplo



v2 como intermediário

0	7	5
3	0	8
5	2	0