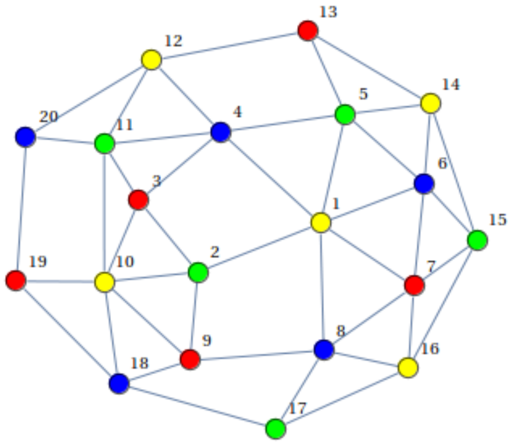
TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

Particionamento, Coberturas Emparelhamento

Prof. Alexei Machado

Conjuntos independentes

- Uma coloração de um grafo induz a um ***particionamento*** dos vértices em subconjuntos de vértices chamados de **conjuntos independentes**



Conjuntos independentes

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente

Conjuntos independentes

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente
- **Conjunto independente máximo**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' sendo

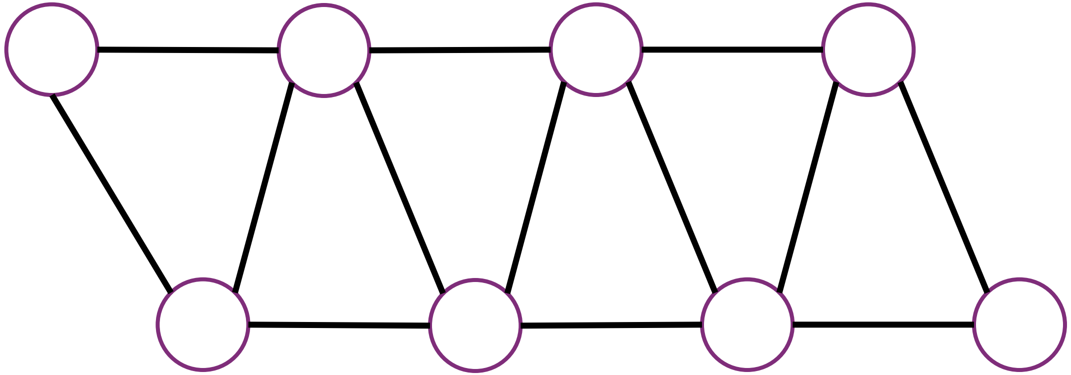
$$|V_i'| > |V_i|$$

Conjuntos independentes

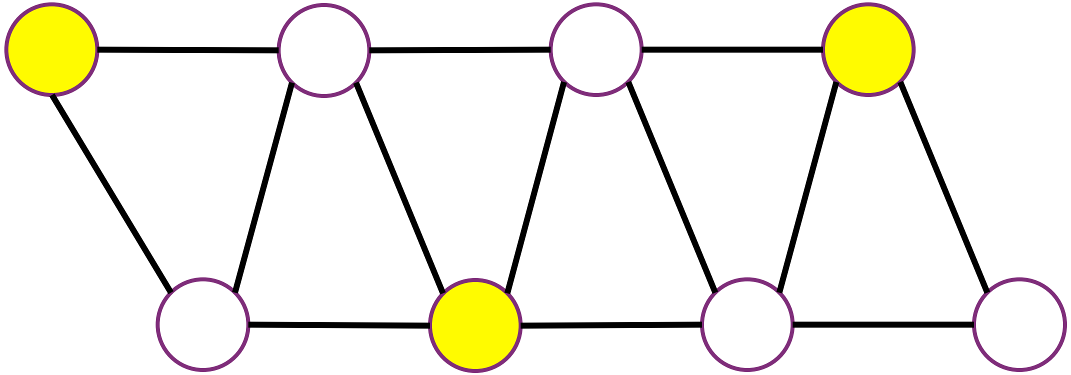
- **Conjunto independente máximo**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' sendo

$$|V_i'| > |V_i|$$

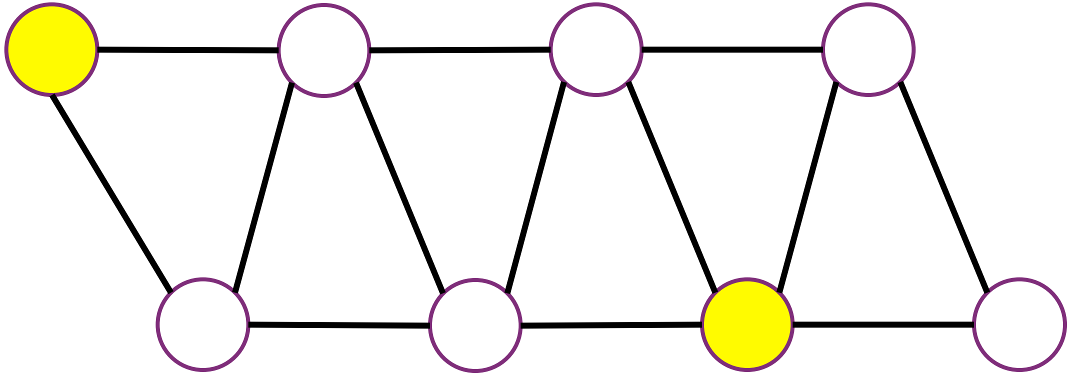
- **Conjunto independente maximal**: conjunto independente V_i tal que não exista V_i' que contenha V_i, ou seja, $V_i \not\subset V_i'$



- É máximo? É maximal?



- É máximo? É maximal?



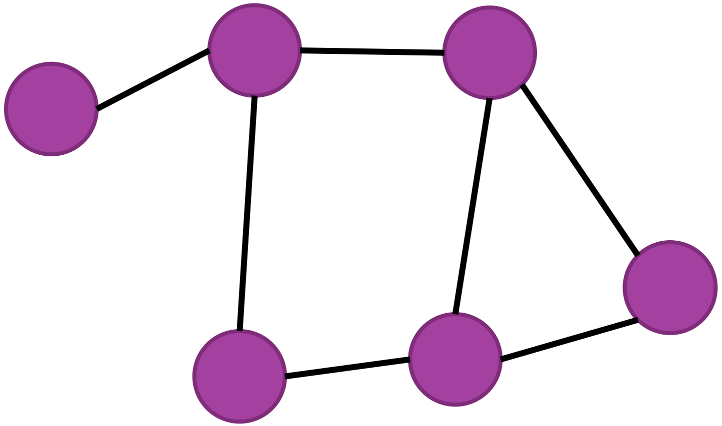
Número de independência

- Número de vértices do conjunto independente máximo do grafo.

$$\beta(G)$$

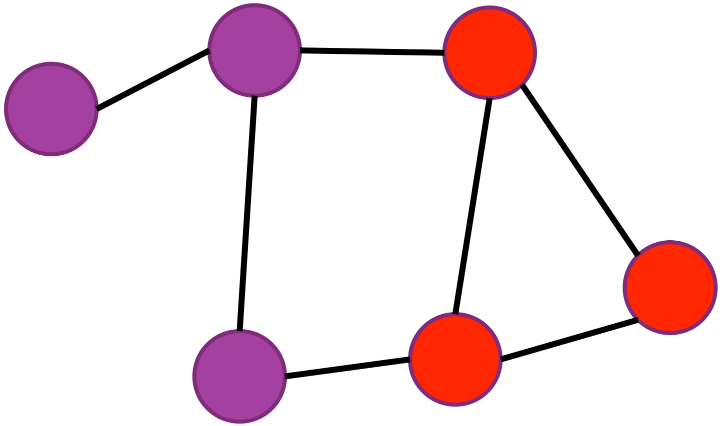
Clique

- Seja G=(V,E). Um subconjunto C $\subseteq$ V é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



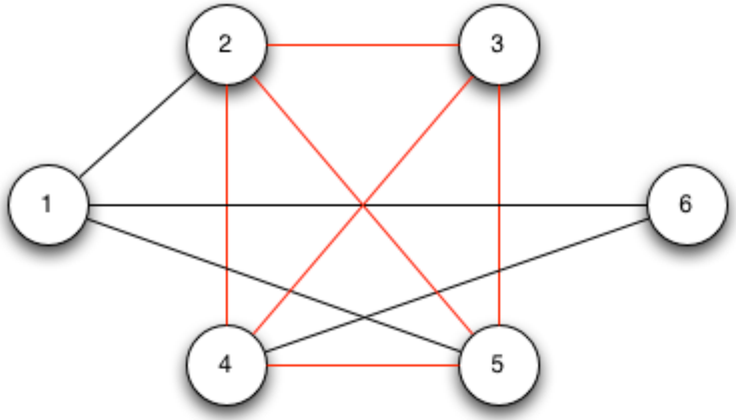
Clique

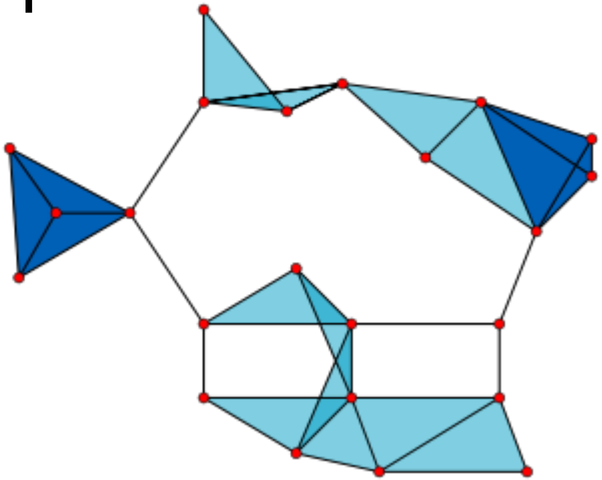
- Seja G=(V,E). Um subconjunto C $\subseteq$ V é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



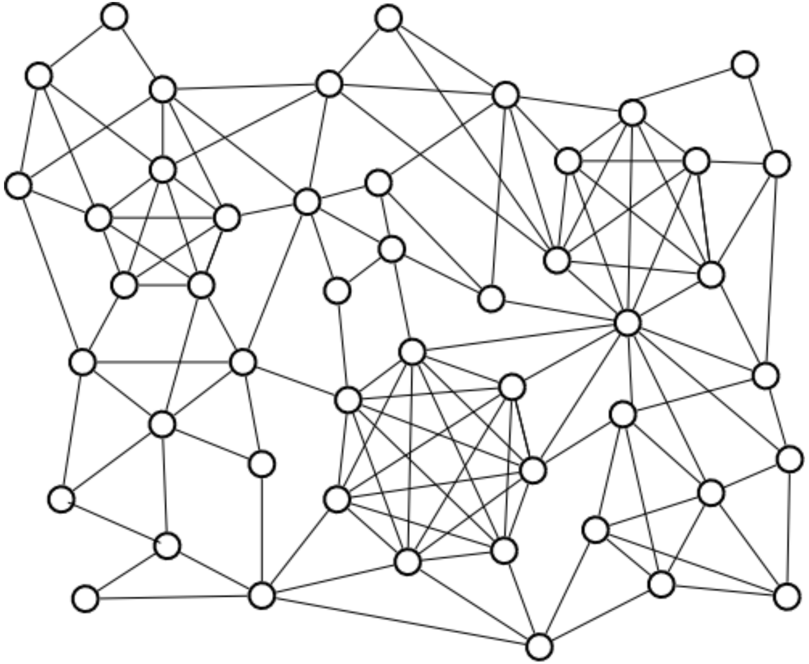
Clique

- Seja $G=(V,E)$. Um subconjunto $C \subseteq V$ é uma **clique** de G se C é um subgrafo completo de G



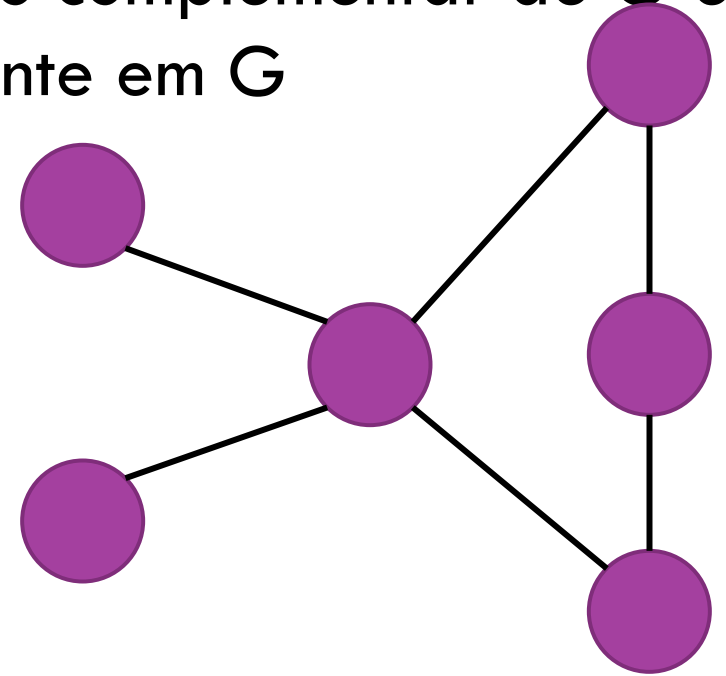


Clique



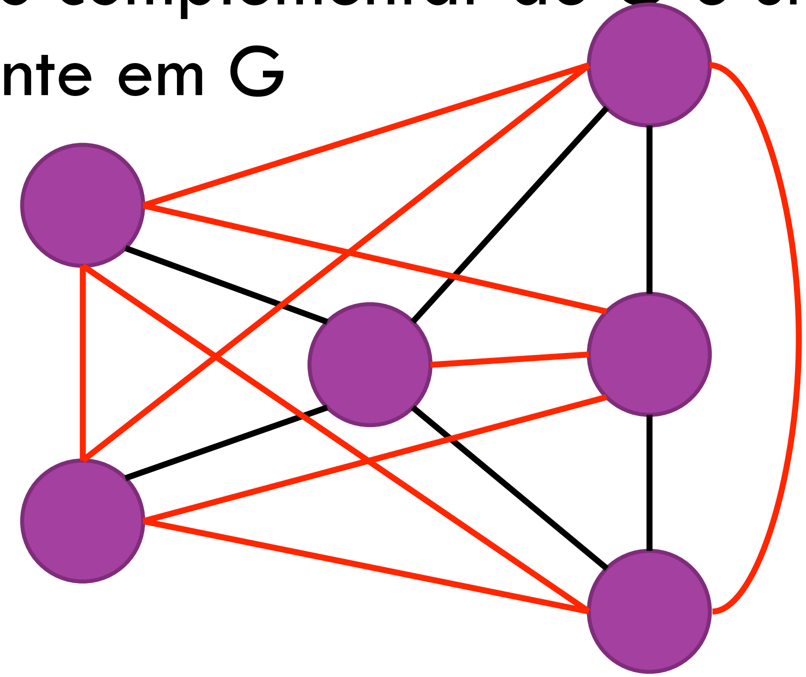
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



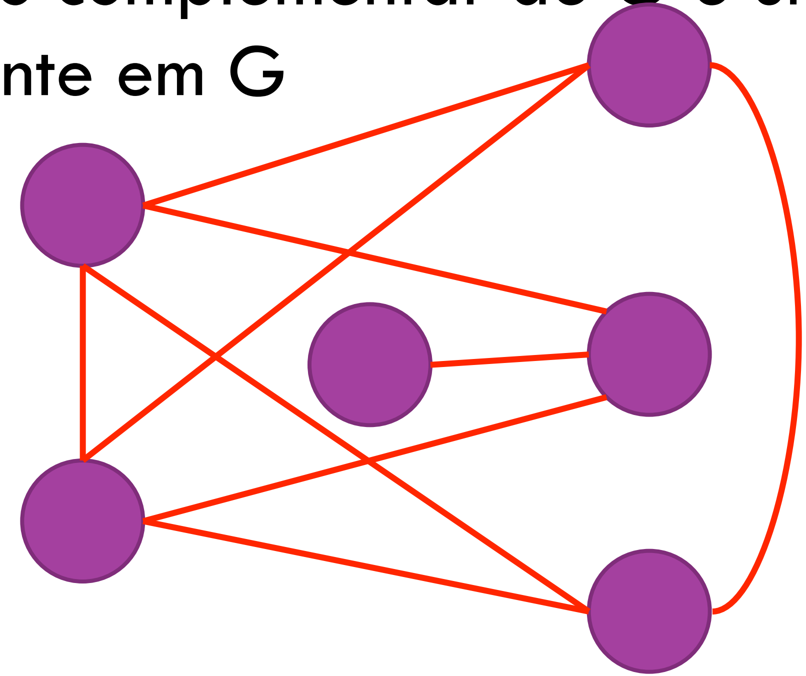
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



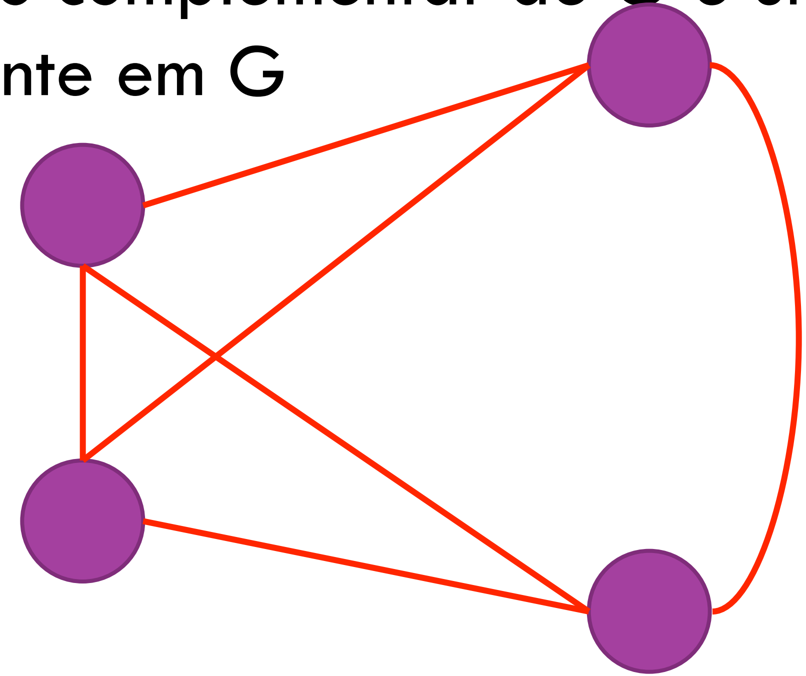
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



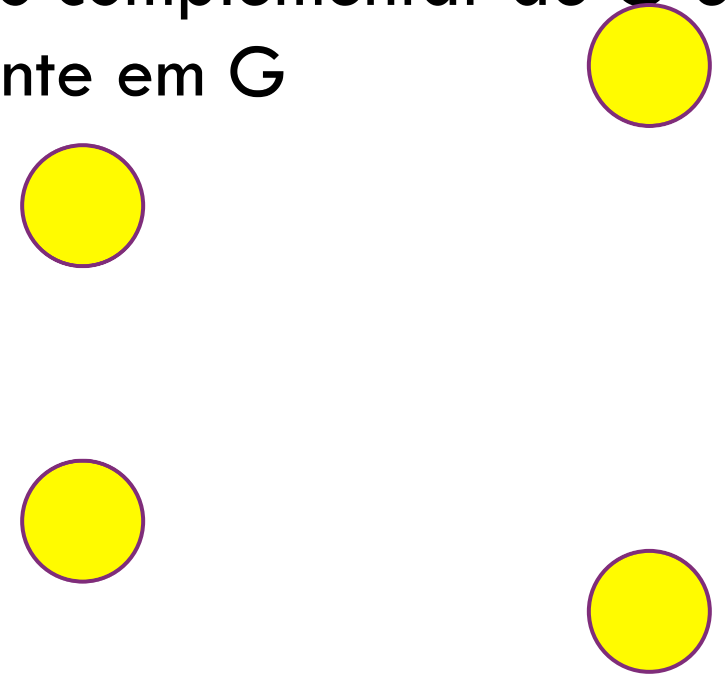
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



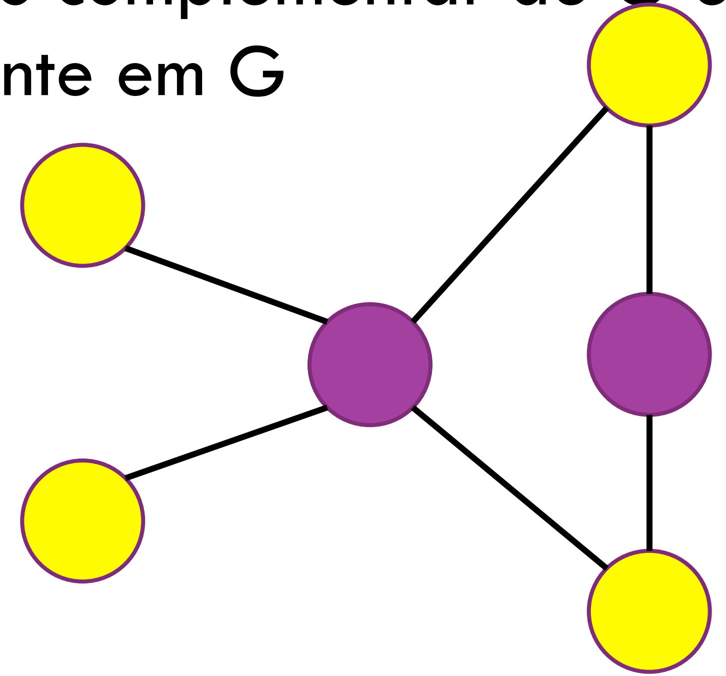
Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



Clique e conjunto independente

- Uma clique no grafo complementar de G é um conjunto independente em G



Algoritmos

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado

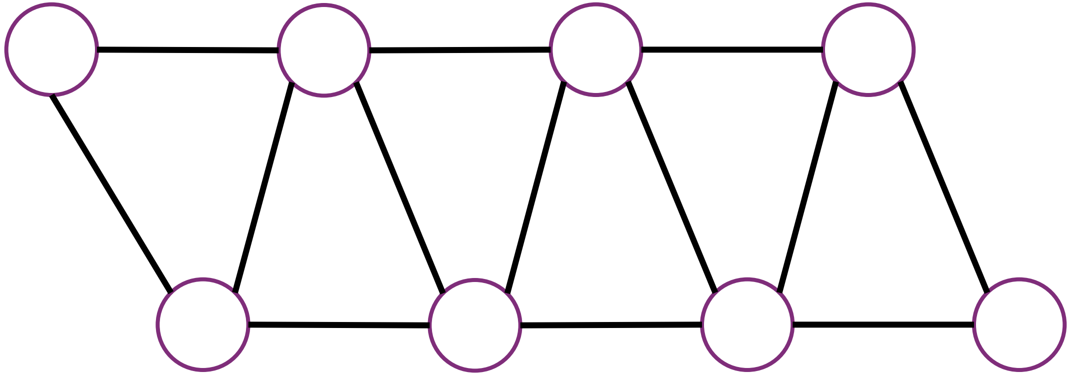
Algoritmos

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado. Dado um grafo G=(V,E)

```
 Inicialize o conjunto independente I como vazio
 Enquanto há vértices em V
Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
 Fim_enquanto
 Retorne I
```

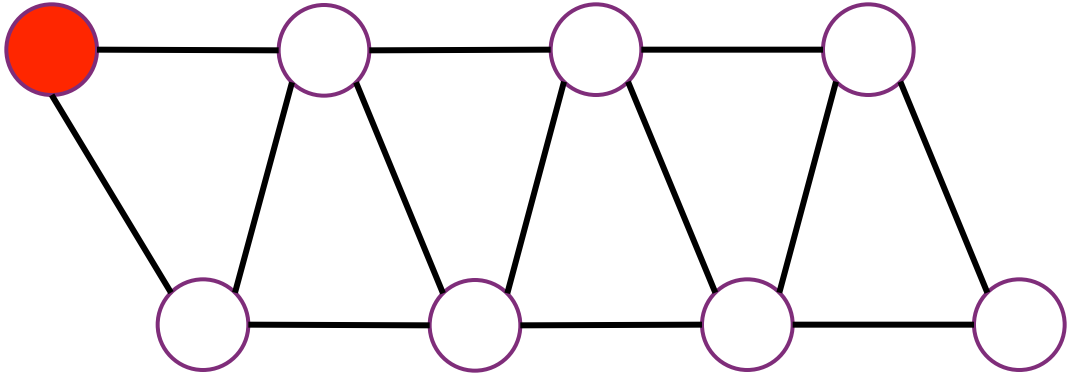
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



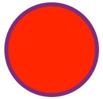
Algoritmos

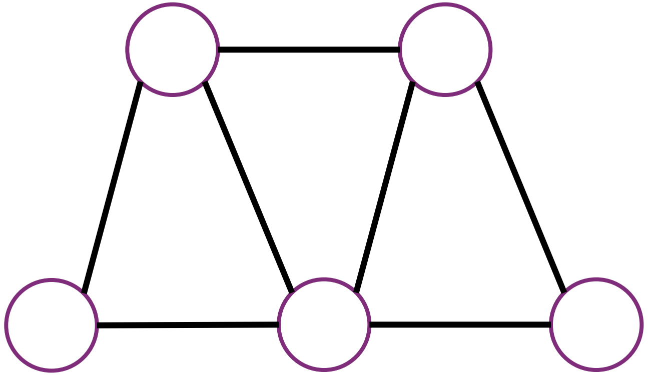
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos

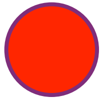
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```

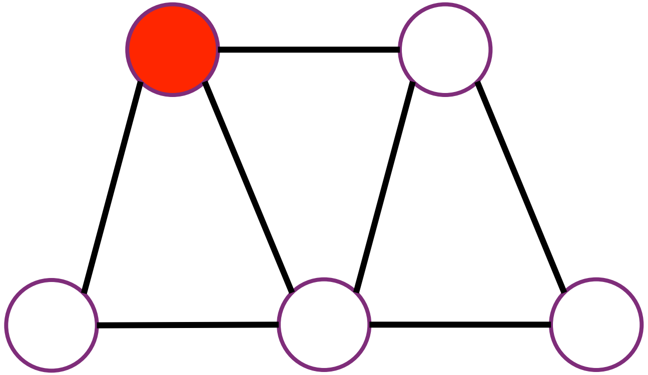




Algoritmos

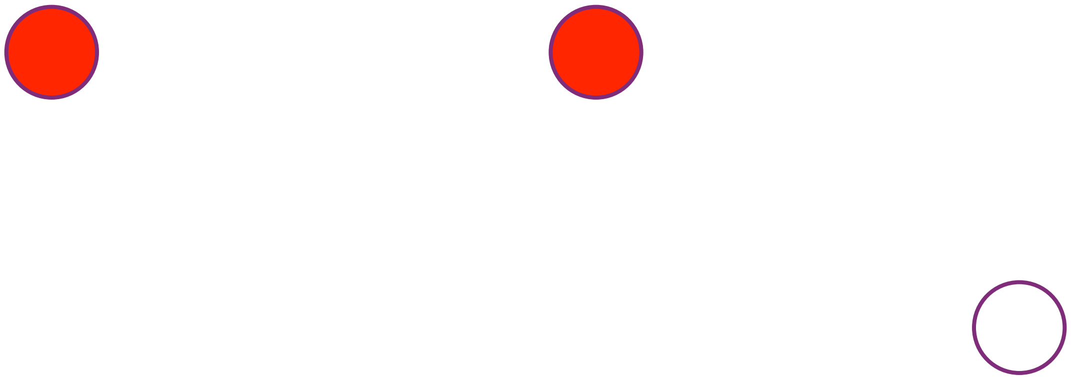
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```





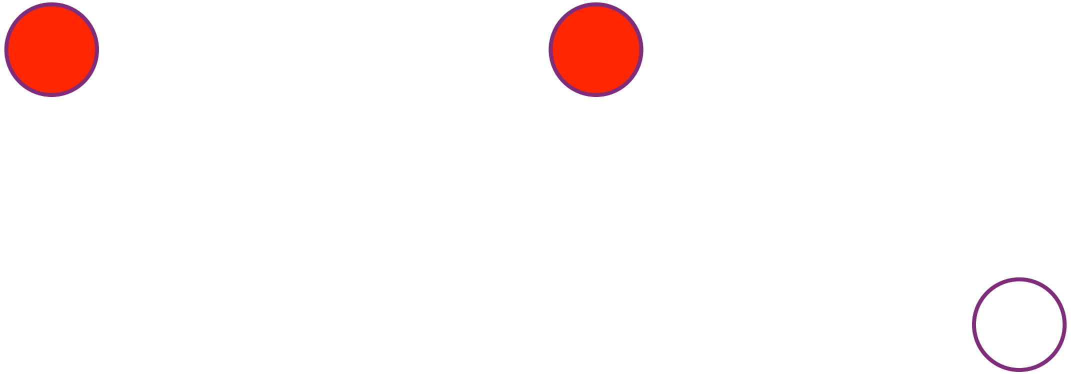
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



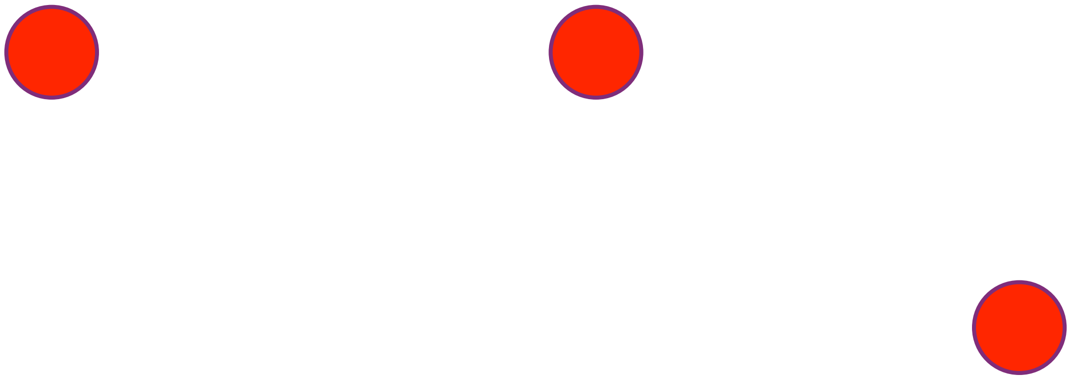
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



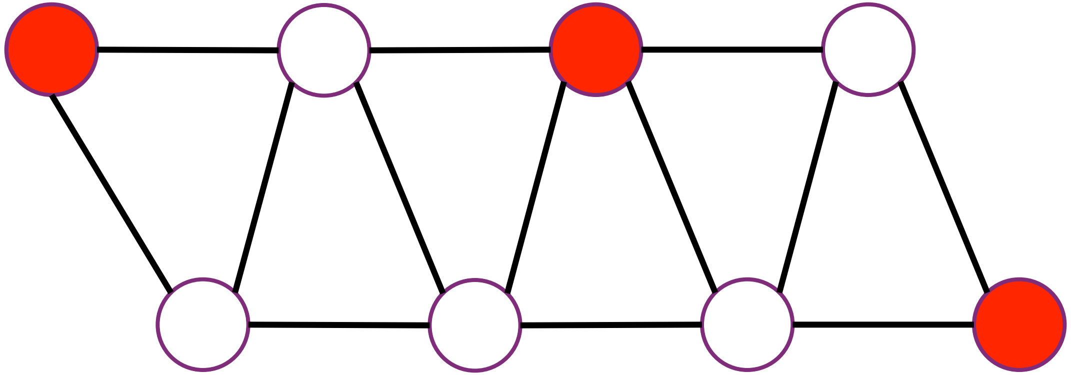
Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
    Escolha um vértice v ∈ V;
     Insira v em I;
     Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



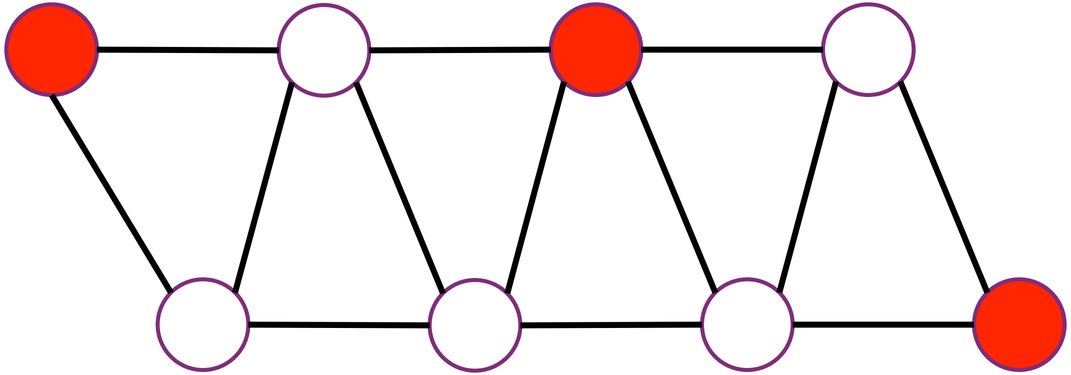
Algoritmos

- Já para encontrar um conjunto independente máximo... *NP-hard*

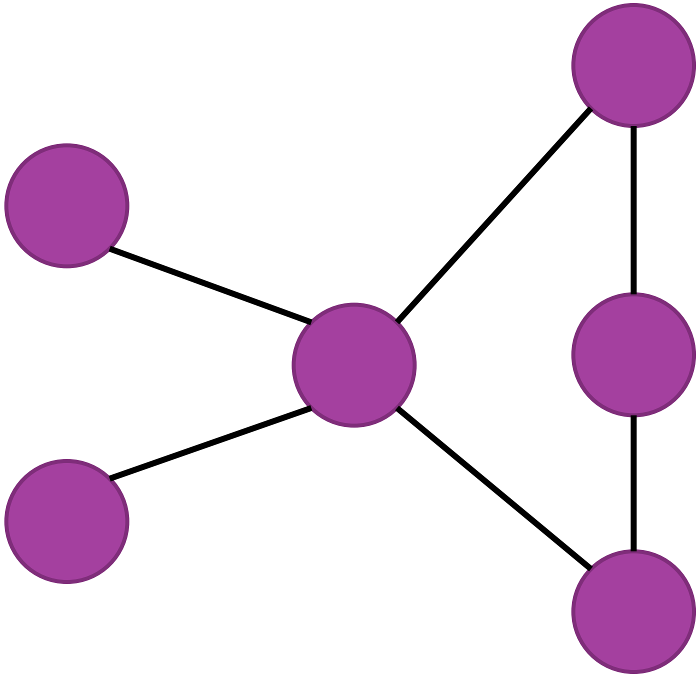
- *Heurísticas*

Algoritmos

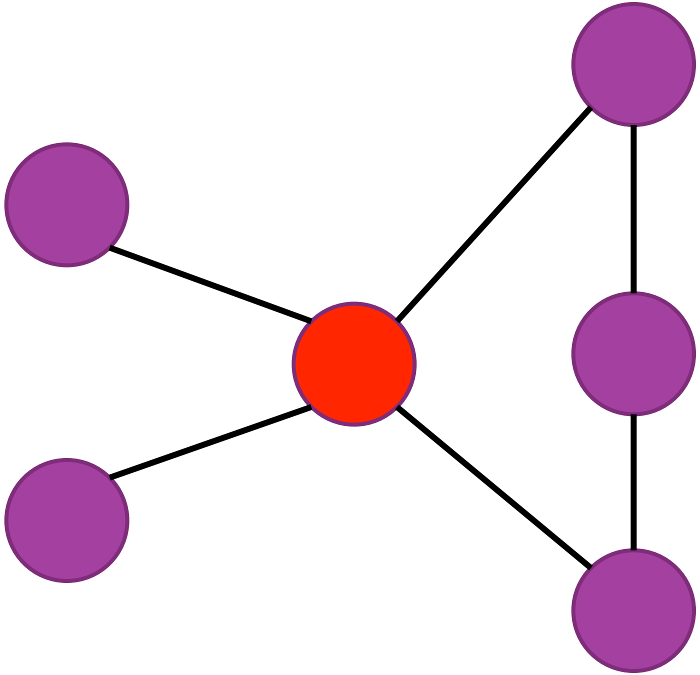
```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
   Escolha um vértice v ∈ V;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```



Algoritmos



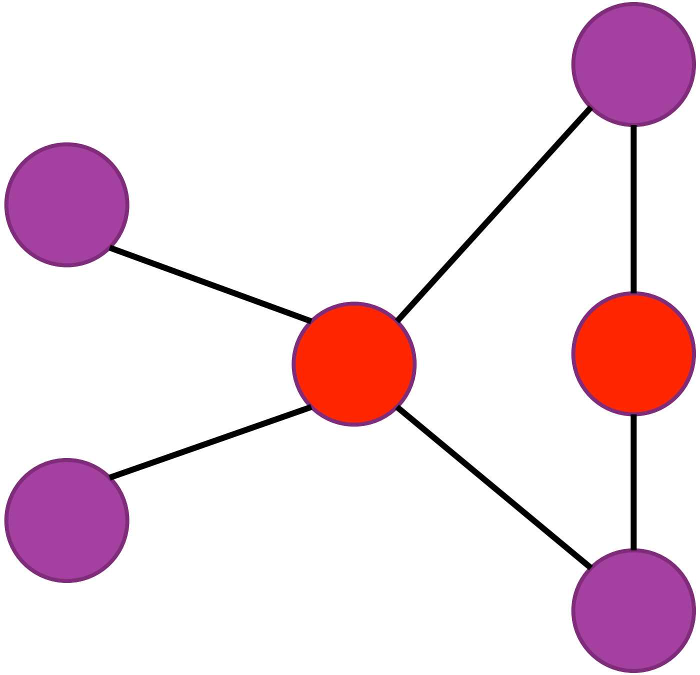
Algoritmos



Algoritmos

Algoritmos

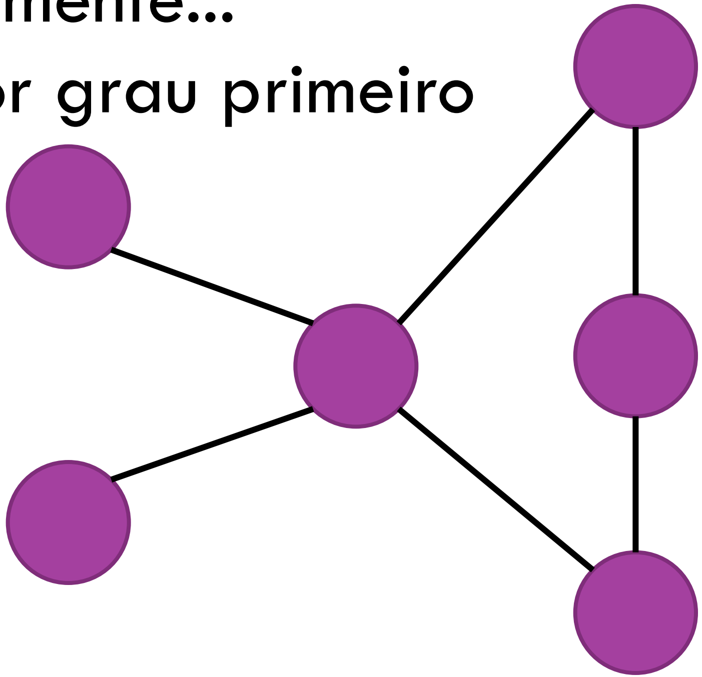
Algoritmos



Algoritmos

- Novamente...

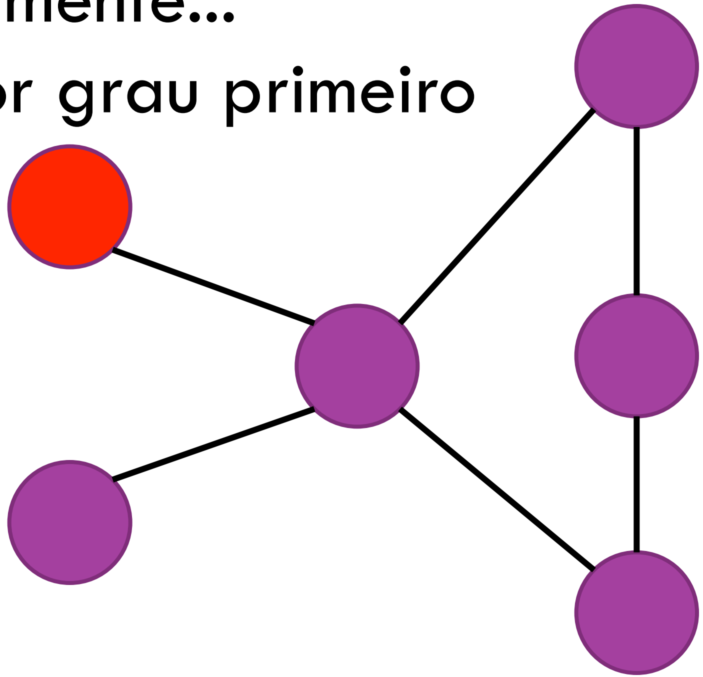
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

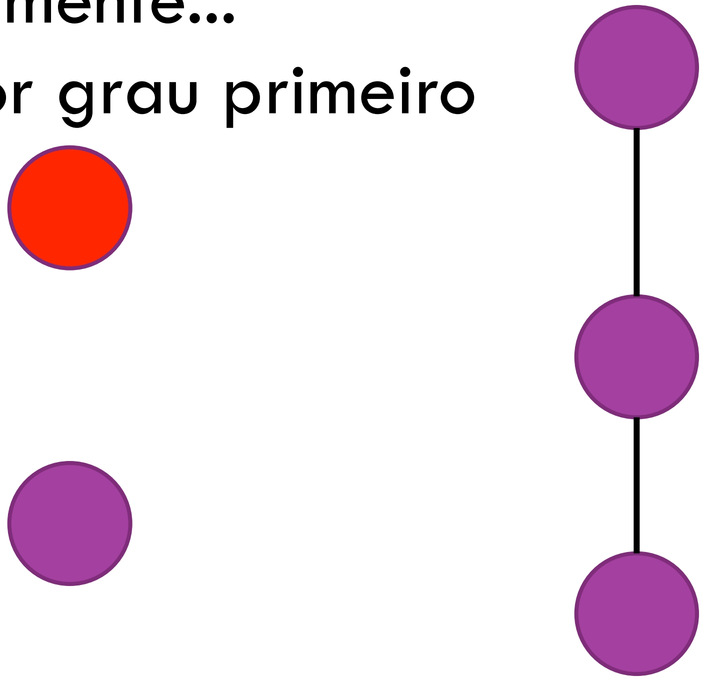
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

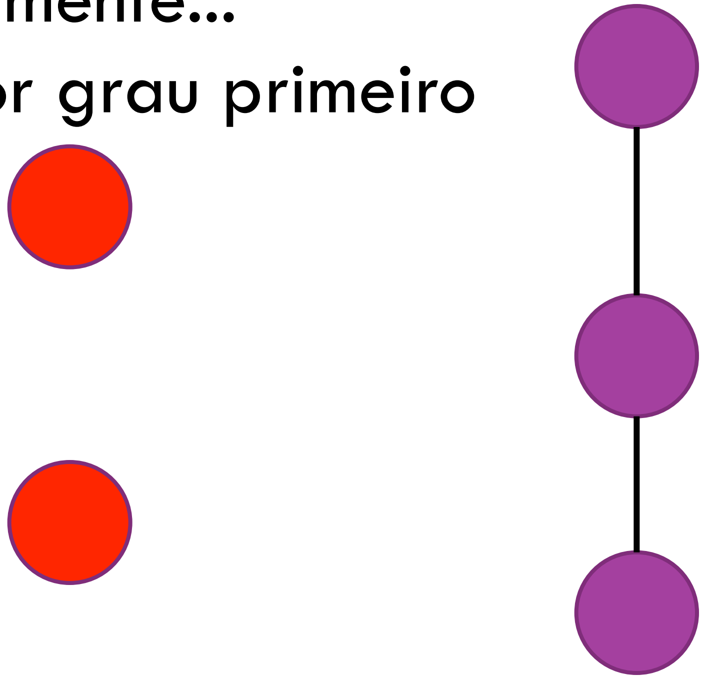
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

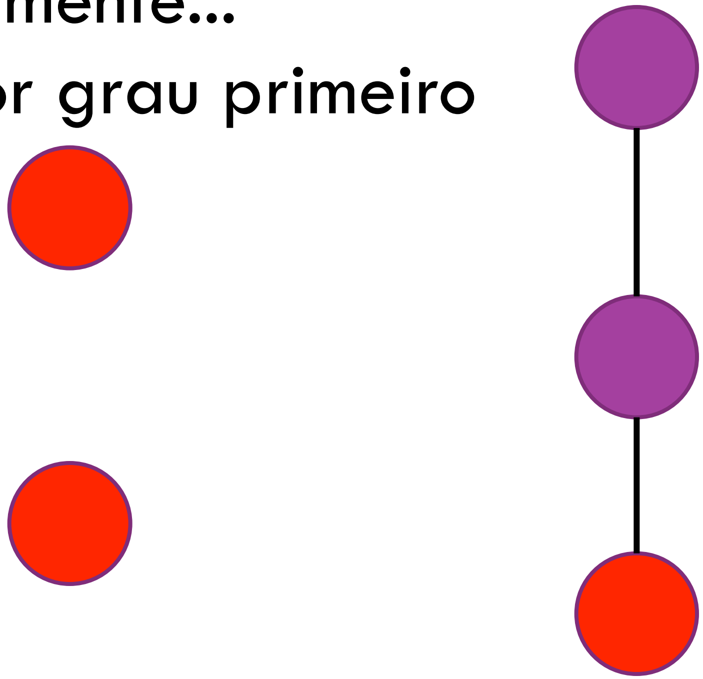
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

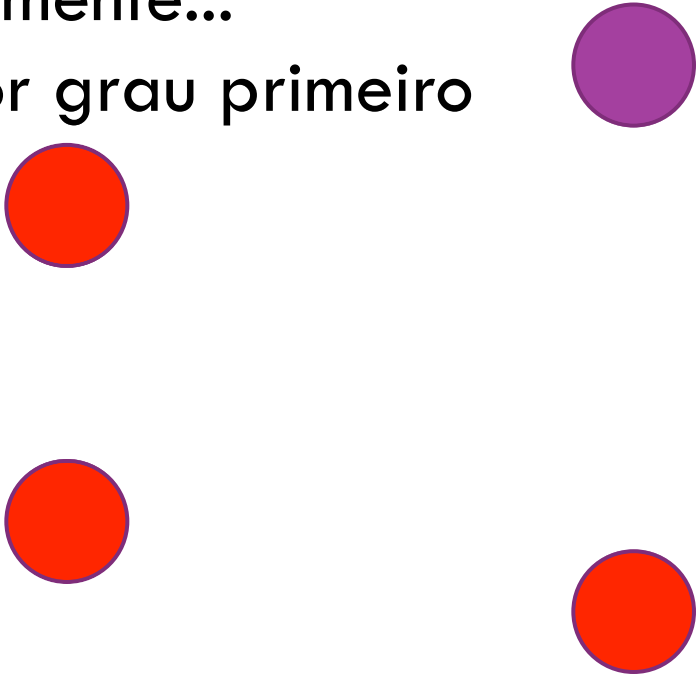
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

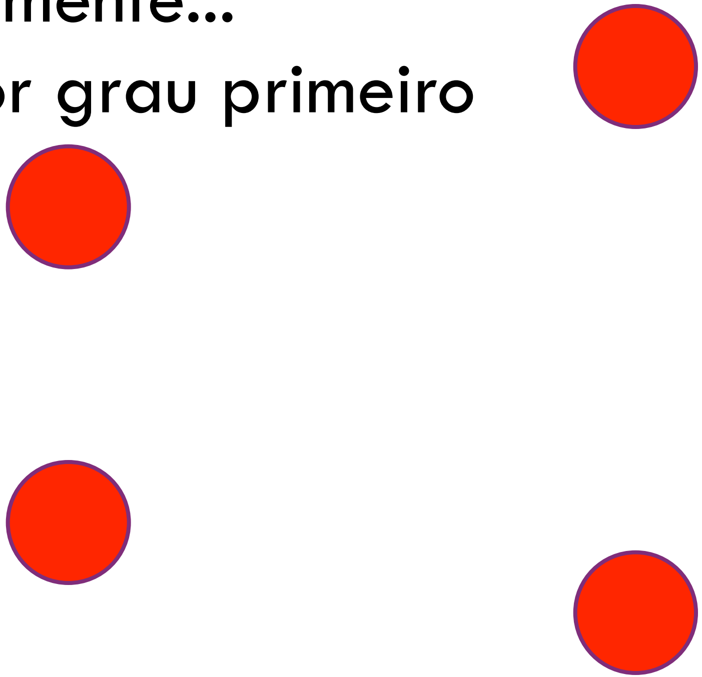
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

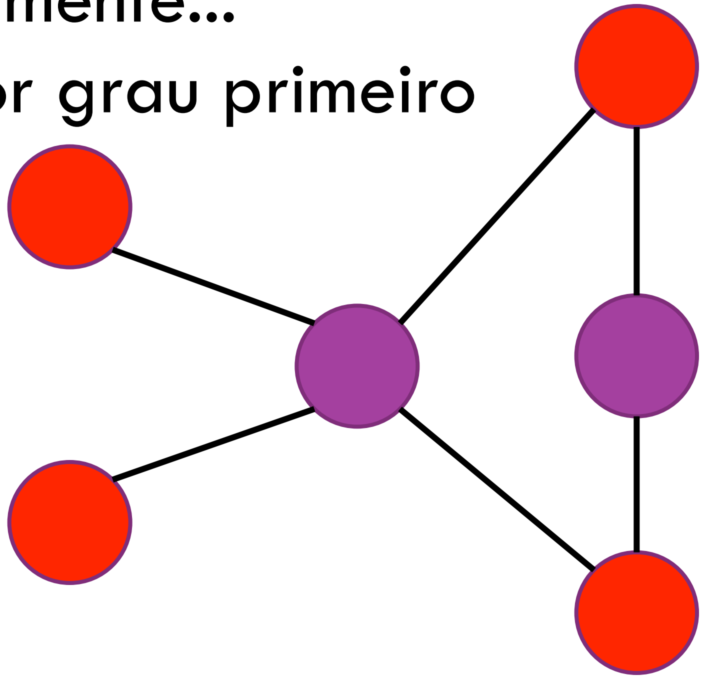
  Menor grau primeiro



Algoritmos

- Novamente...

  Menor grau primeiro



Conjuntos dominantes

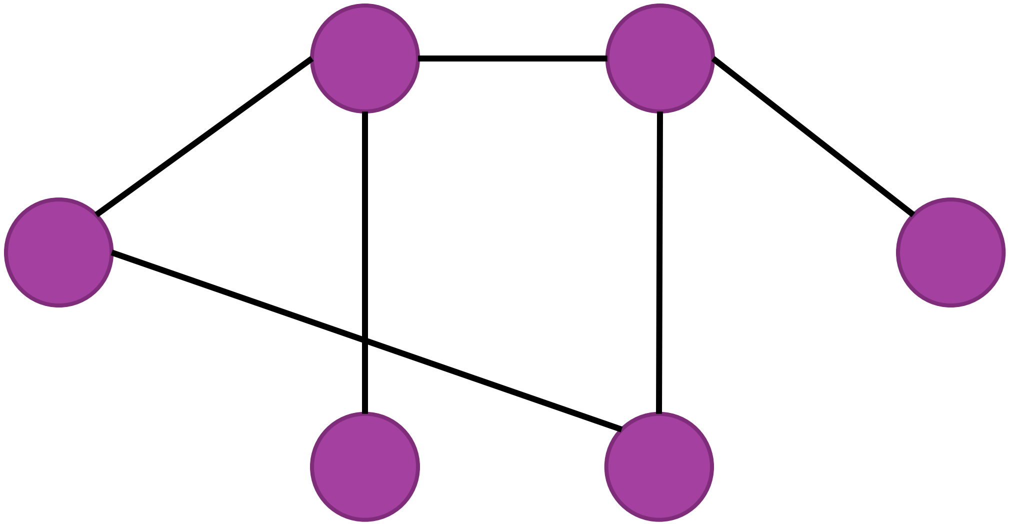
- **Conjunto dominante** é um conjunto de vértices do grafo que “domina” todos os vértices do grafo:

UM VÉRTICE V PERTENCE AO CONJUNTO DOMINANTE OU É ADJACENTE A UM VÉRTICE QUE PERTENCE.

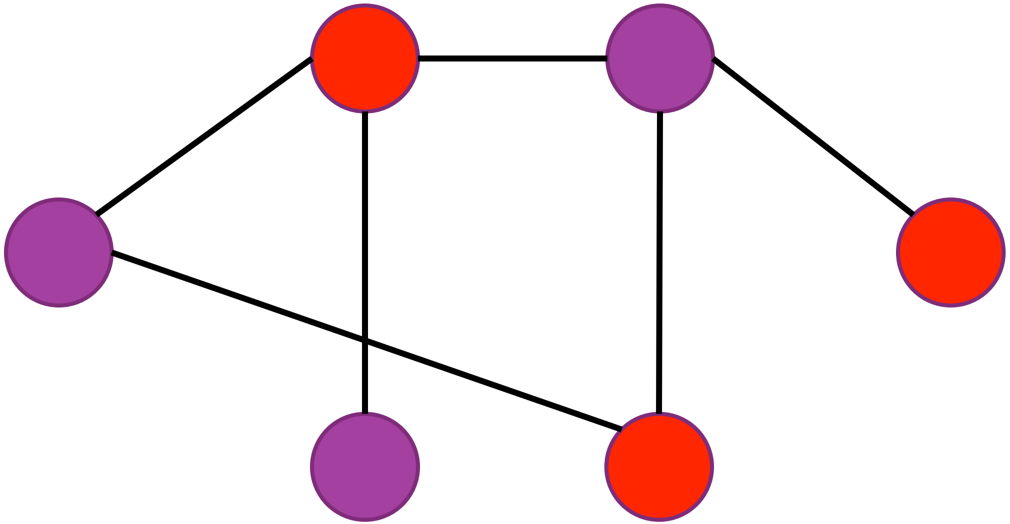
Conjunto dominante mínimo

- Dizemos que um conjunto dominante U é um conjunto dominante mínimo se não existir outro conjunto dominante S tal que $S \subseteq U$
- **Conjunto dominante mínimo** é um conjunto dominante com o menor número de vértices possível.
- Número de estabilidade externa: $\alpha(G)$

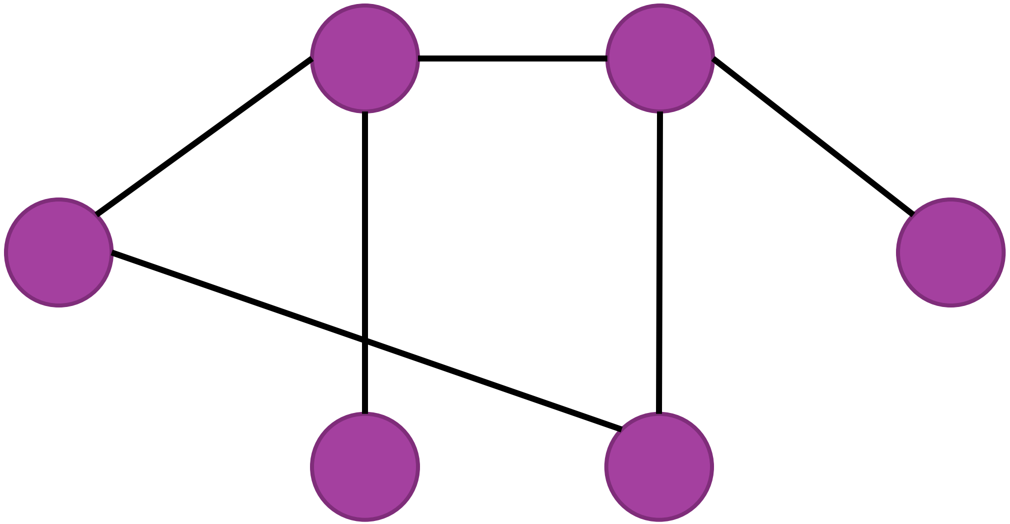
Conjunto dominante



Conjunto dominante

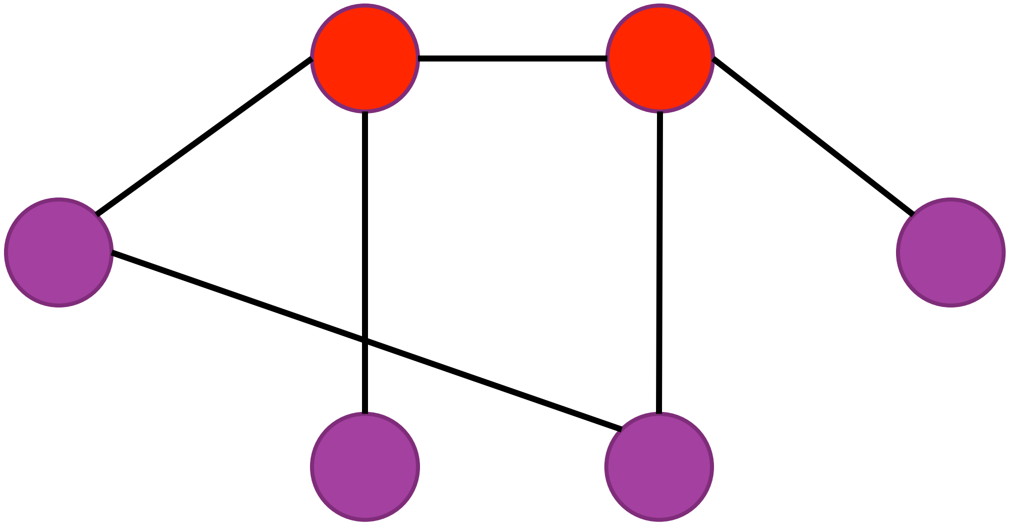


Conjunto dominante



Conjunto dominante

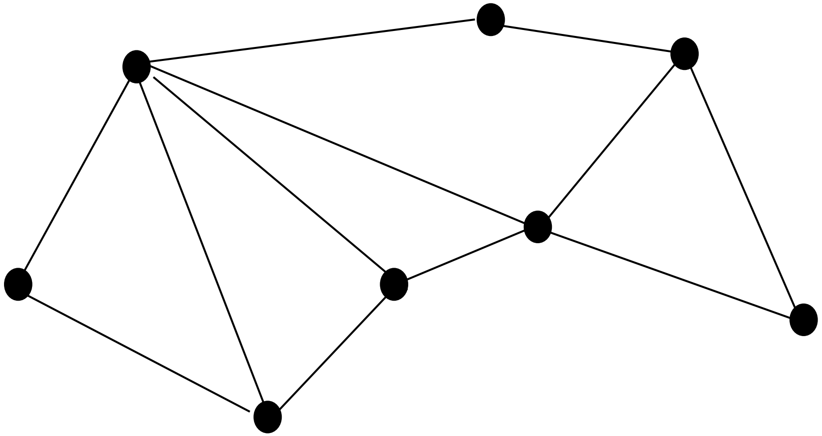
- Conjunto dominante mínimo



Cobertura de vértices

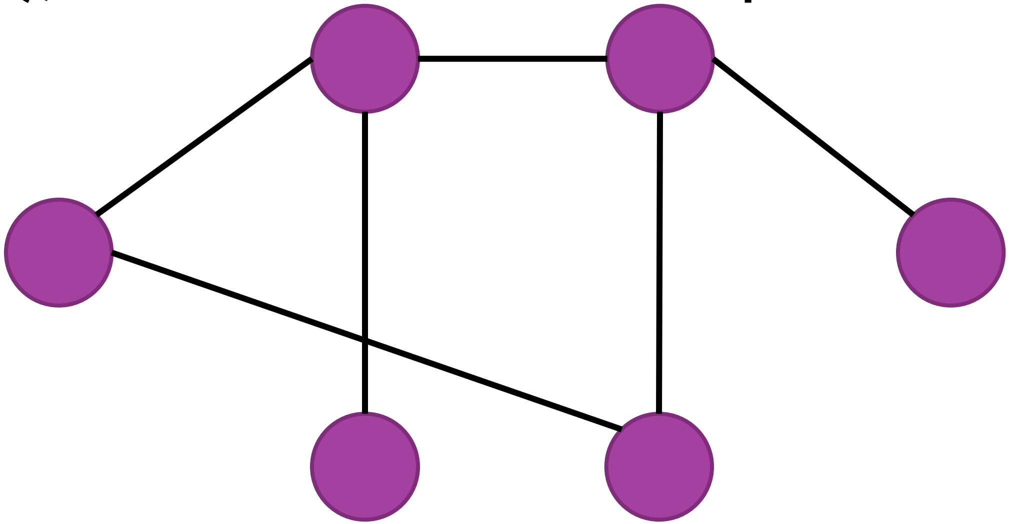
- Em um grafo G, um conjunto g de vértices é chamado de cobertura de vértices se todas as arestas de G são incidentes a pelo menos um vértice de g.
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade dizemos que g é uma ***cobertura mínima de vértices***

MENOR CONJUNTO DE VÉRTICES INCIDENTES A TODAS AS ARESTAS



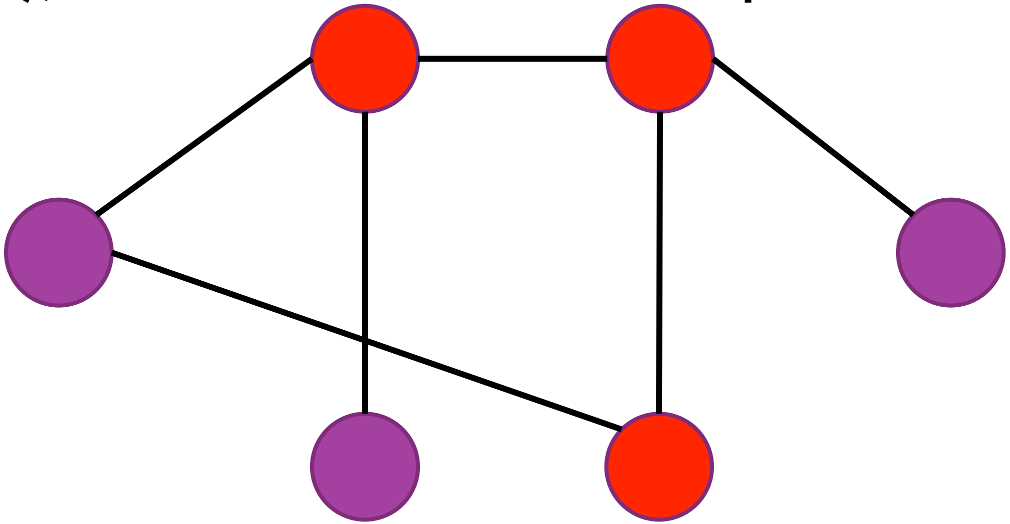
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



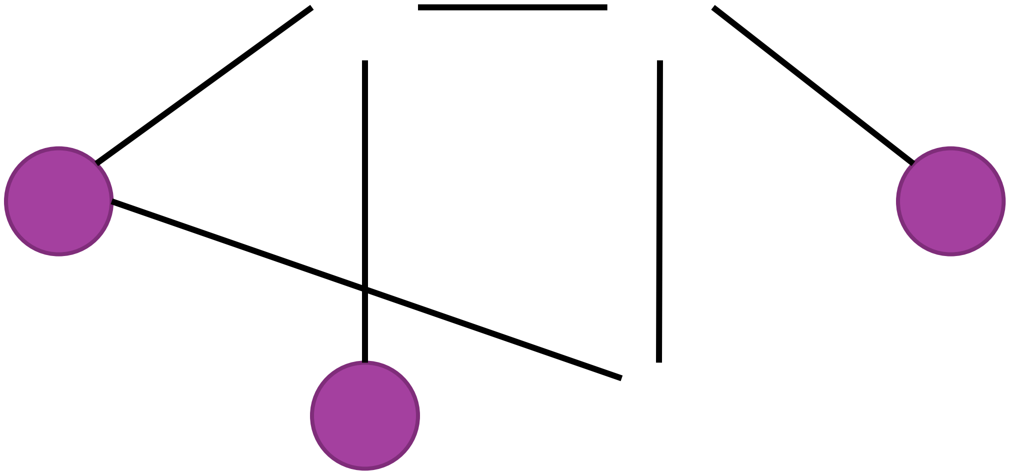
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



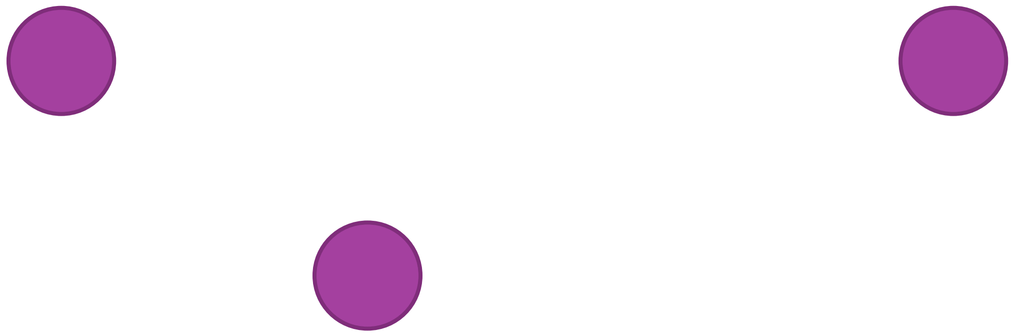
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



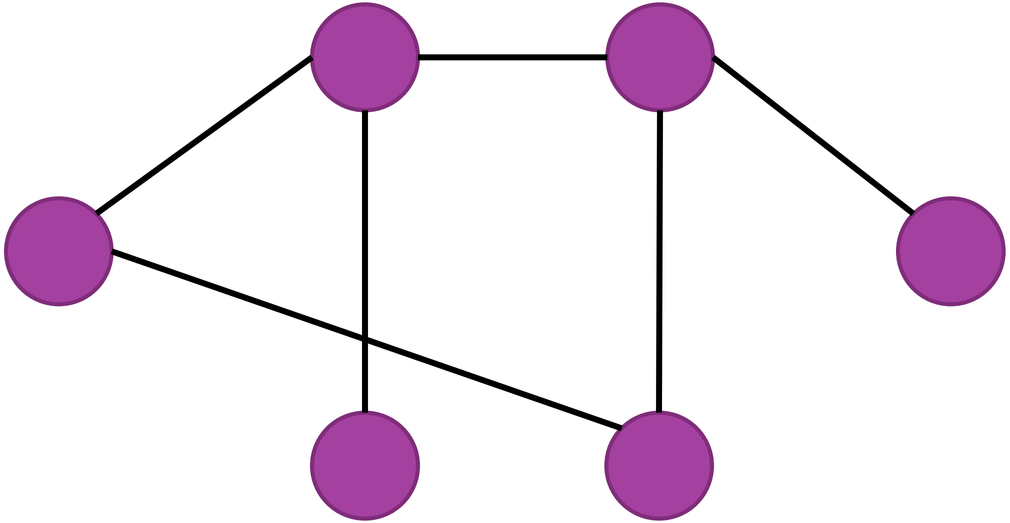
Coberturas e independência

- Se C é uma cobertura de vértices de um grafo G = (V,E), então V – C é um conjunto independente



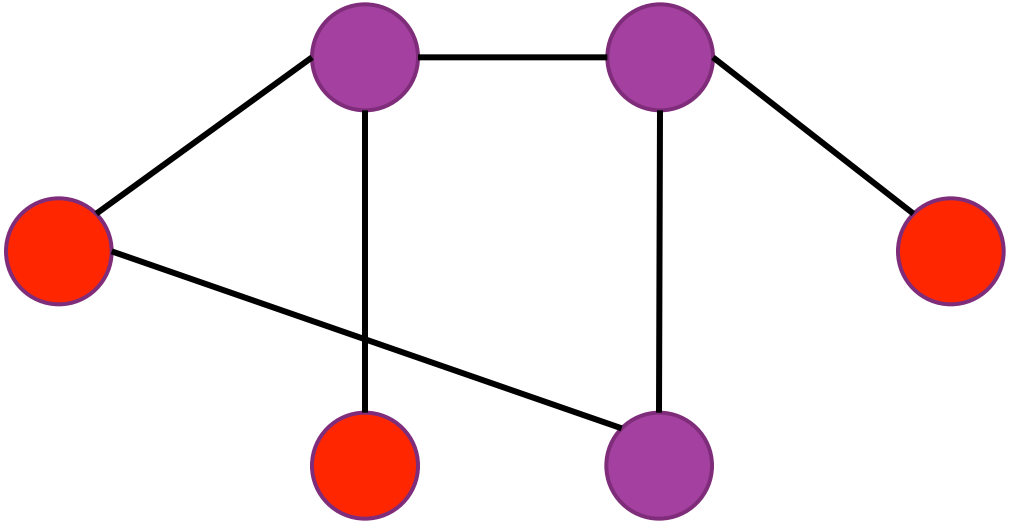
Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



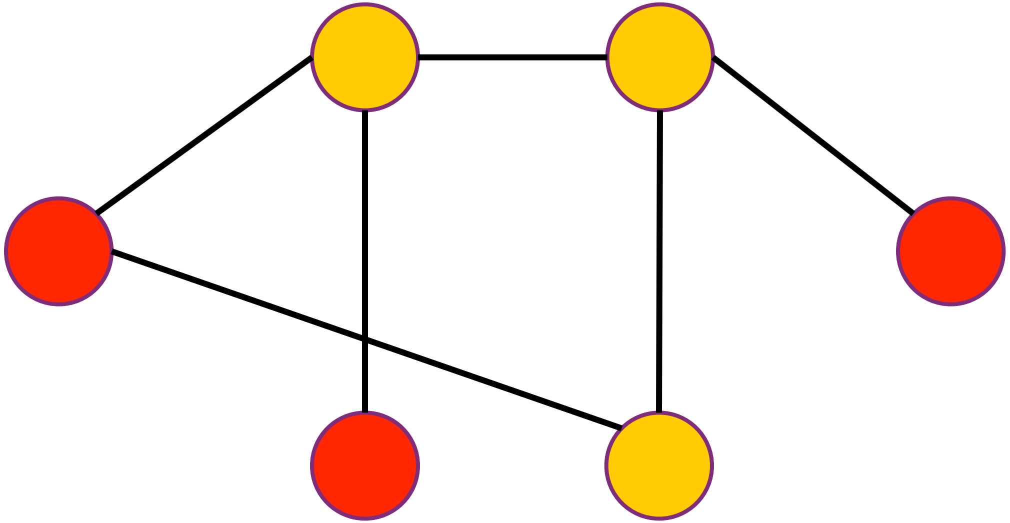
Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



Coberturas e independência

- Logo, se S é um conjunto independente, V – S é uma cobertura de vértice



Coberturas e independência

- Se o conjunto S é máximo, V – S é mínimo

ENCONTRAR UM CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO É O MESMO QUE ENCONTRAR UMA COBERTURA DE VÉRTICE MÍNIMA

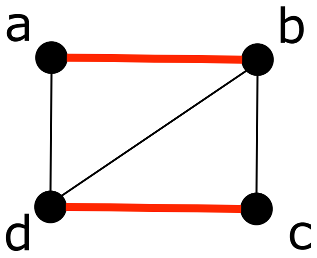
Coberturas e independência

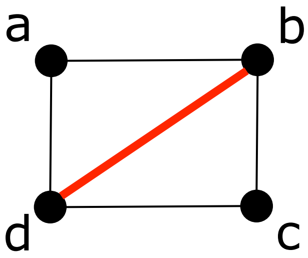
- Como encontrar um conjunto independente é NP-completo, encontrar a cobertura de vértice mínima também é.

ENCONTRAR UMA COBERTURA DE VÉRTICE MÍNIMA É UM PROBLEMA NP-COMPLETO

Emparelhamento (casamento / *matching*)

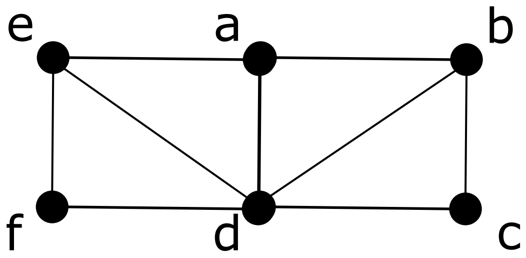
- Um emparelhamento num grafo G não-dirigido é um conjunto M de arestas com a seguinte propriedade: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M.





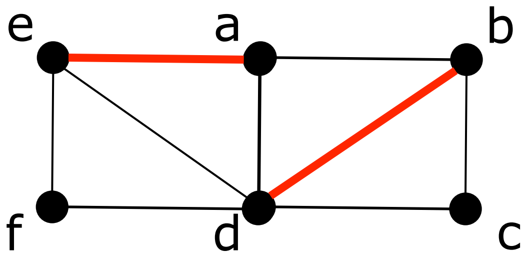
Emparelhamento (casamento / *matching*)

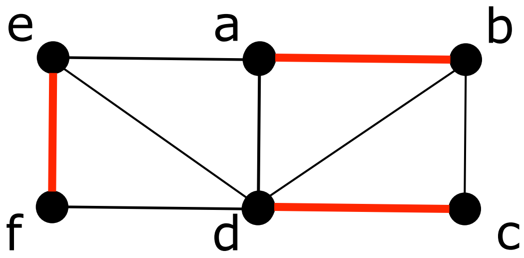
- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice



Emparelhamento (casamento / *matching*)

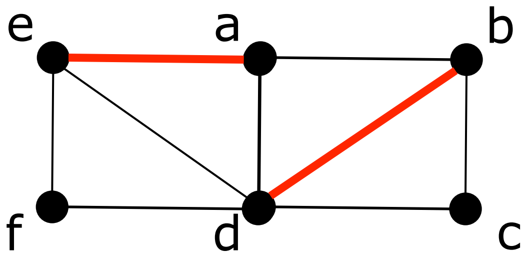
- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice

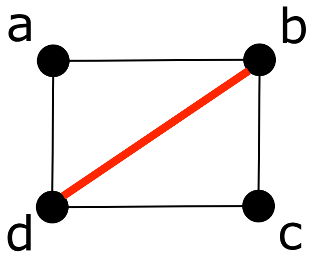




Emparelhamento

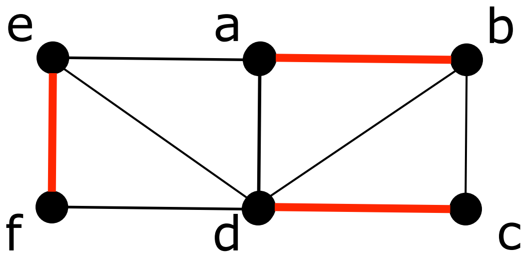
- Quando nenhuma aresta pode ser incluída em M, dizemos que M é maximal





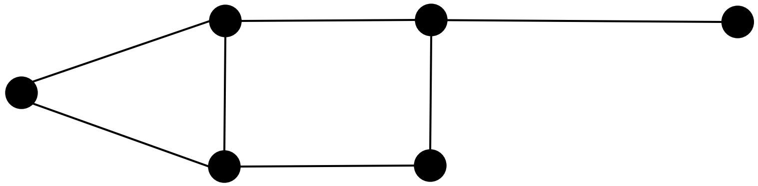
Emparelhamento

- Um emparelhamento M é máximo se |M| for máximo em G
- Emparelhamento com maior número de arestas possível em G



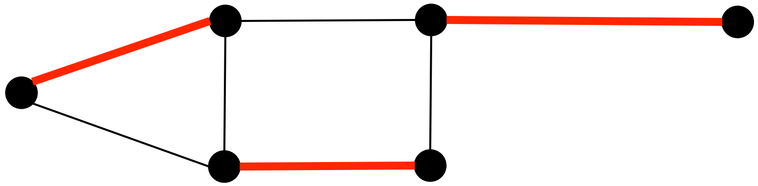
Emparelhamento perfeito

- Um emparelhamento M é perfeito (completo) se todos os vértices de G estão em M



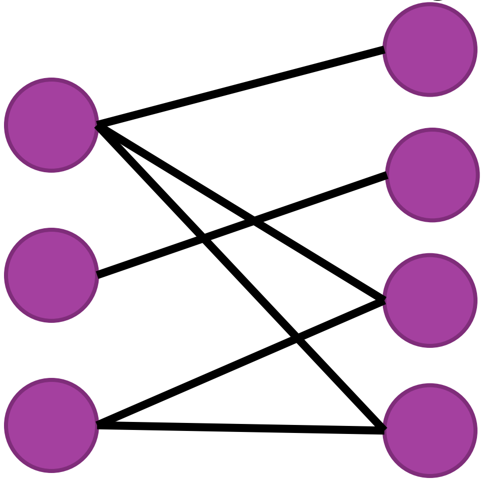
Emparelhamento perfeito

- Um emparelhamento M é perfeito se todos os vértices de G estão em M



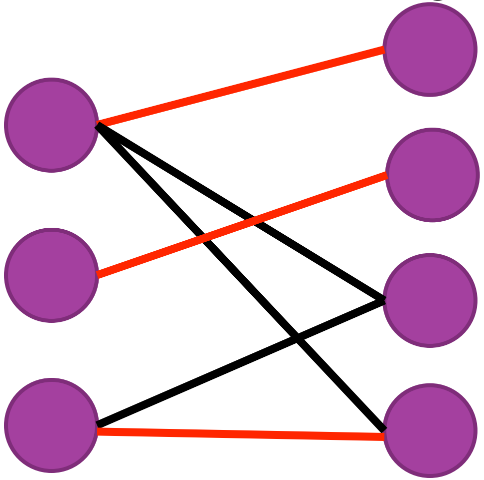
Emparelhamento completo em grafos bipartidos

- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



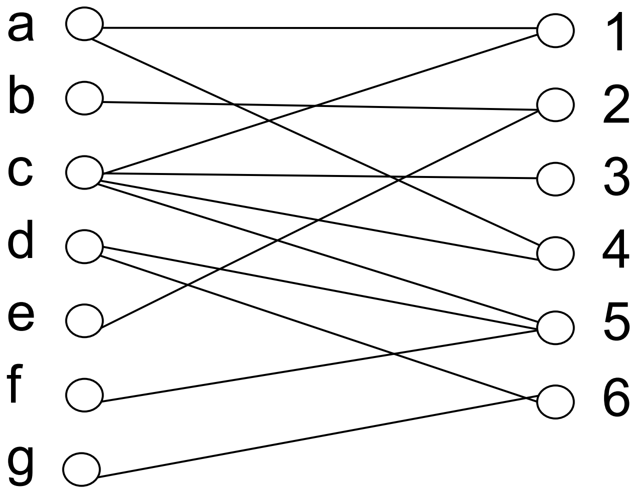
Emparelhamento completo em grafos bipartidos

- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



Exercício

- Tente encontrar um emparelhamento máximo e um emparelhamento completo para o grafo ao lado

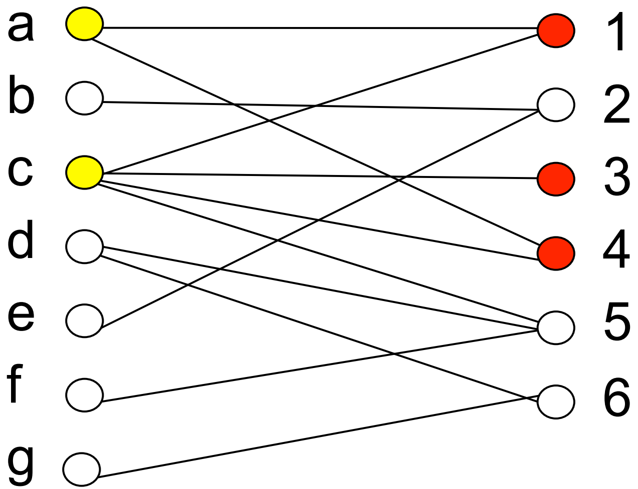


Teorema de Hall

- Seja $G=(X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de X para Y se e somente se $|\text{adj}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.

Teorema de Hall

- Seja $G=(X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de X para Y se e somente se $|\text{adj}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.



Teorema de Hall

- Temos que v vértices devem ser adjacentes a ao menos *u* vértices do outro conjunto, para todo inteiro k satisfazendo $1 \leq k \leq m$, onde m indica o número total de vértices, e todo subconjunto de k vértices.

Cobertura de arestas

- Em um grafo G, um conjunto g de arestas é chamado de cobertura de aresta se todos os vértices de G são incidentes a pelo menos uma aresta de g.

- O próprio grafo G é uma cobertura de arestas

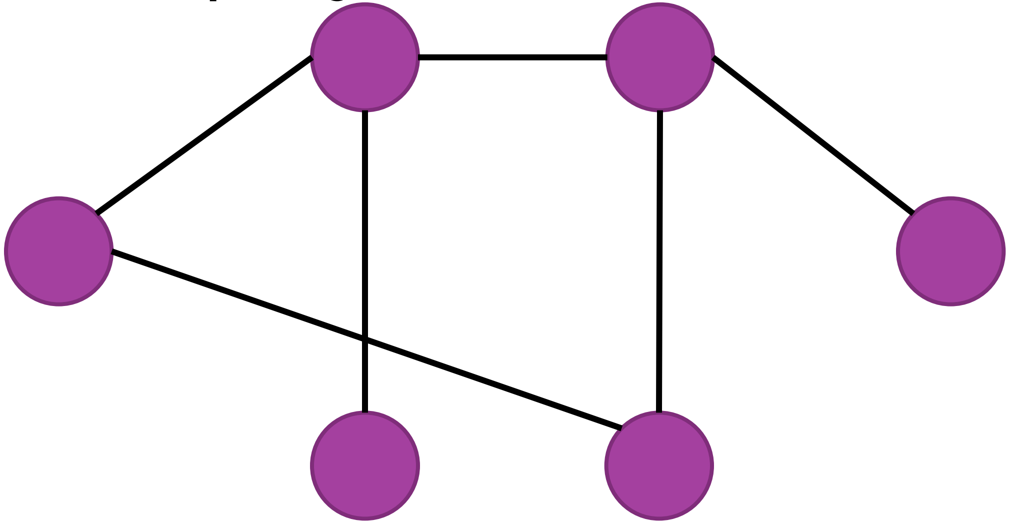
Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***

MENOR CONJUNTO DE ARESTAS INCIDENTES A TODOS OS VÉRTICES

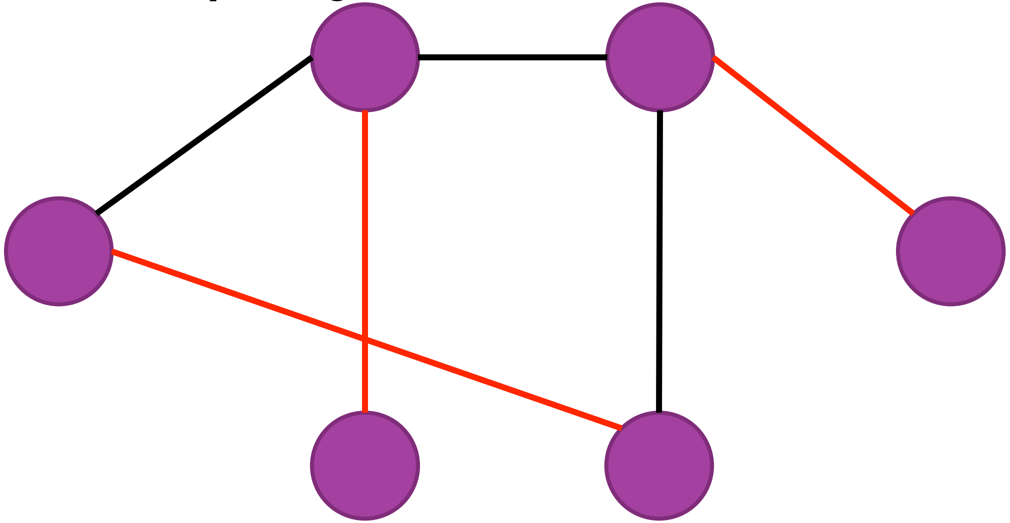
Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***



Cobertura de arestas

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que g é uma ***cobertura mínima de aresta.***

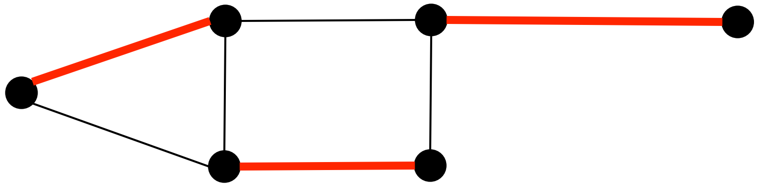


Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas

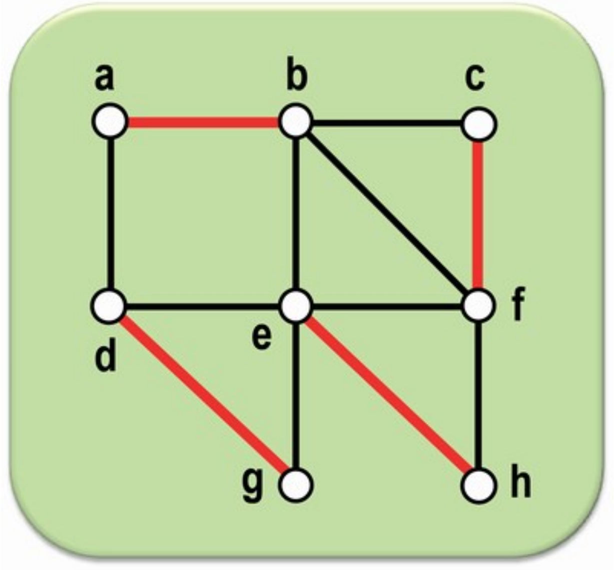
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas



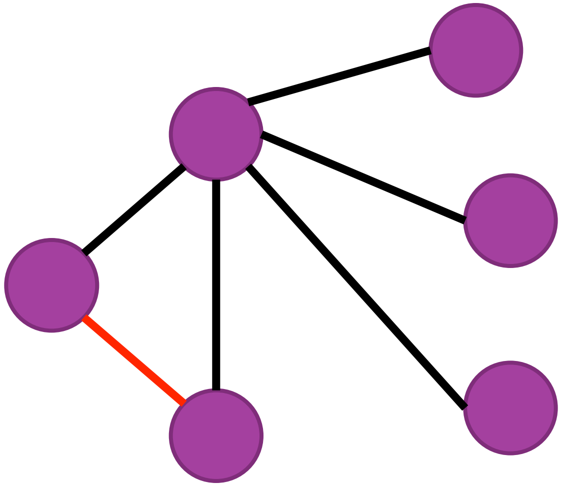
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



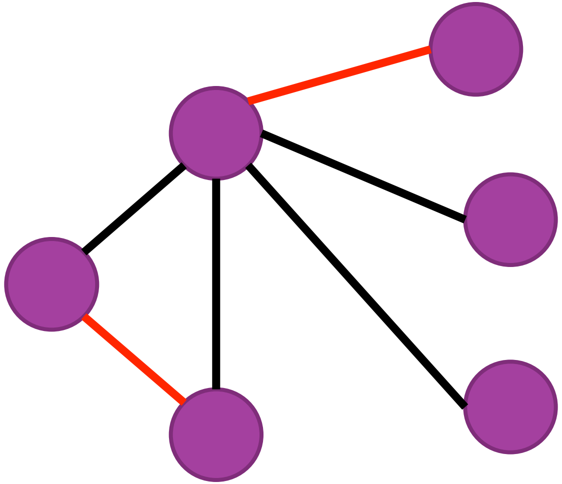
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



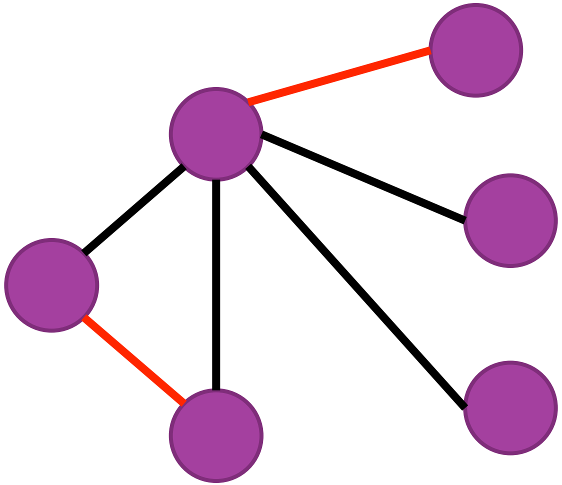
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



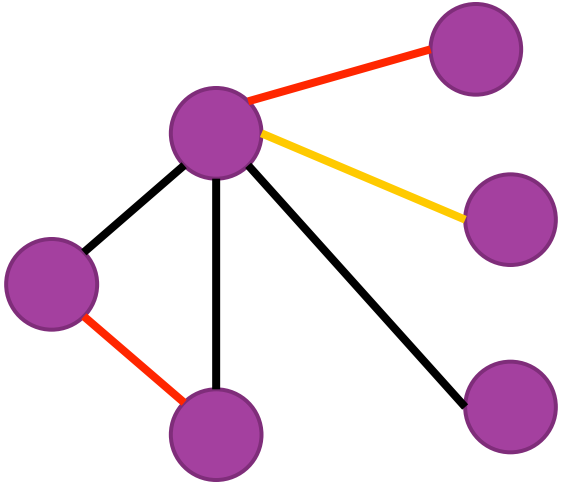
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



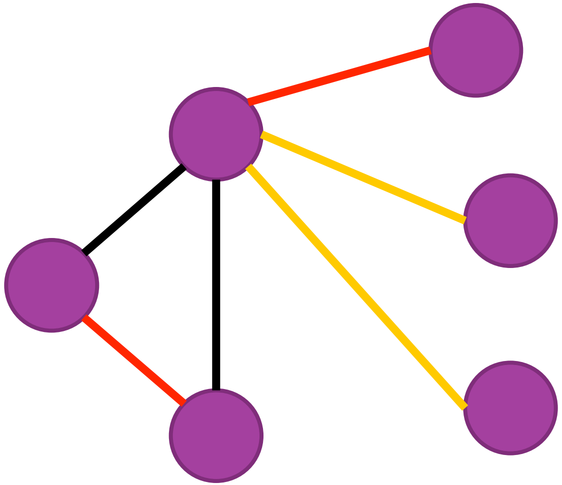
Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



Emparelhamentos e cobertura de arestas

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura