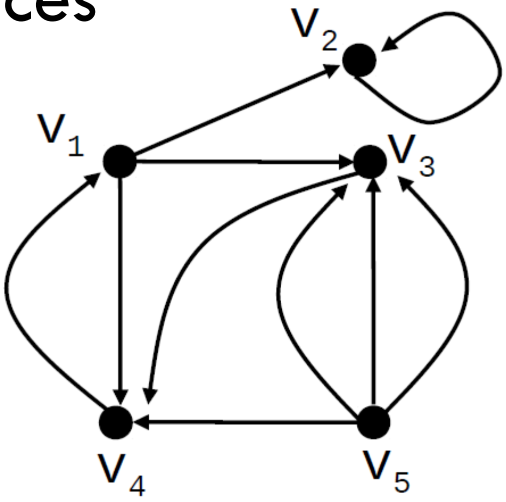
TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

DIGRAFOS
GRAFOS DIRIGIDOS ACÍCLICOS

Prof. Alexei Machado

Digrafos[1]

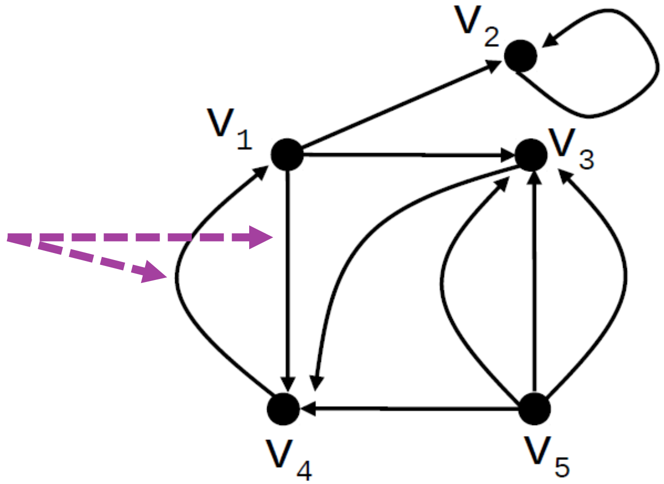
- Digrafo ou grafo direcionado: é um grafo no qual as arestas são *pares ordenados* de vértices
- As arestas em um digrafo são comumente chamadas de *arcos*



1 - "A palavra digrafo é uma adaptação do termo *digraph* em inglês, que resultou da contração de *directed* e *graph*. Já dígrafo (com acento) é outra coisa muito diferente!" – Feofiloff, Paulo (2016) em http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/digraphs.html

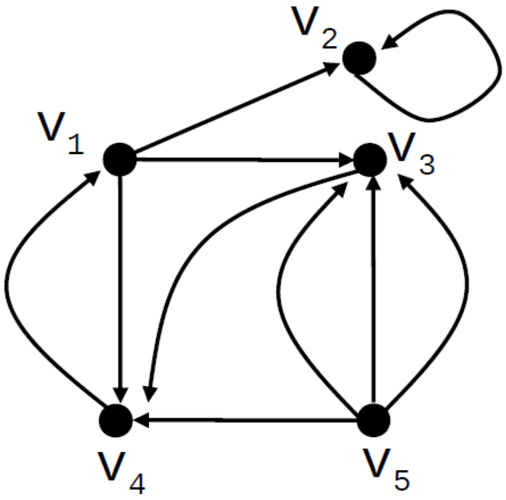
Digrafos

- Vértice inicial e vértice final de um arco
- Dois arcos são *antiparalelos* ou *simétricos* se o vértice inicial de um é o vértice final de outro e vice versa



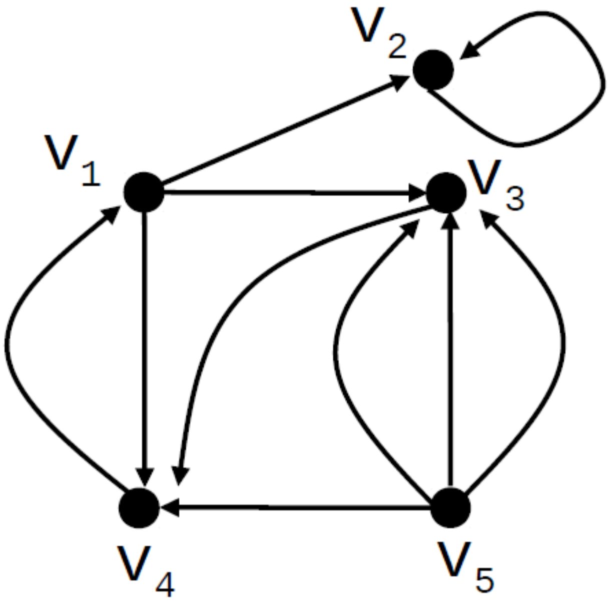
Digrafos

- Grau de entrada de um vértice: $\mathbf{d^{-}(v)}$
- Grau de saída de um vértice: $\mathbf{d^{+}(v)}$

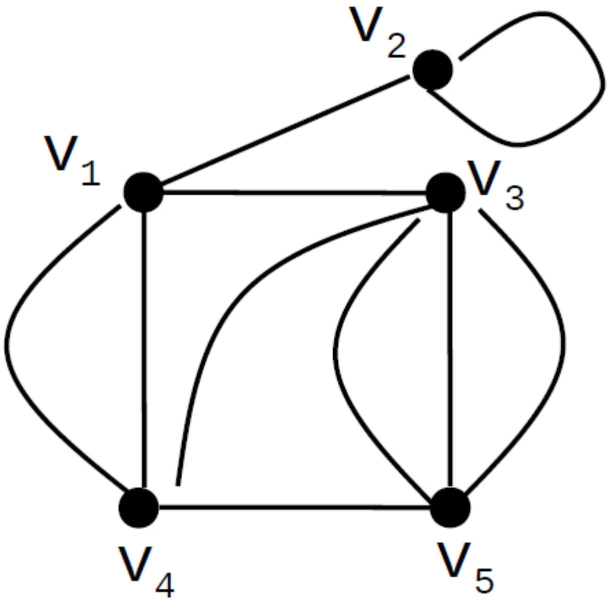


$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i)$$

Digrafos e grafos correspondentes

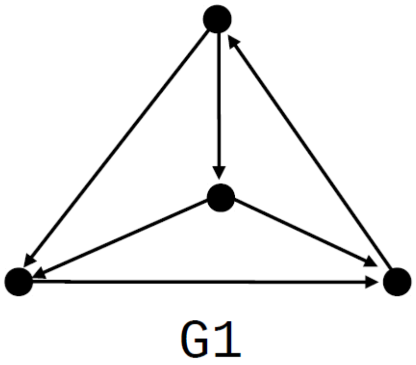


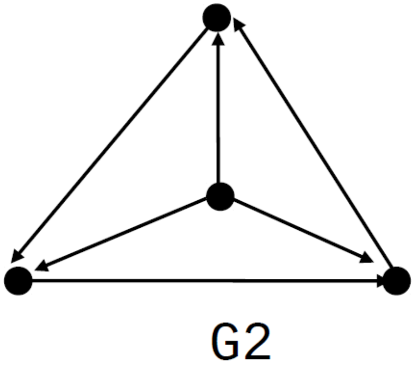
Grafo Correspondente



Isomorfismo de digrafos

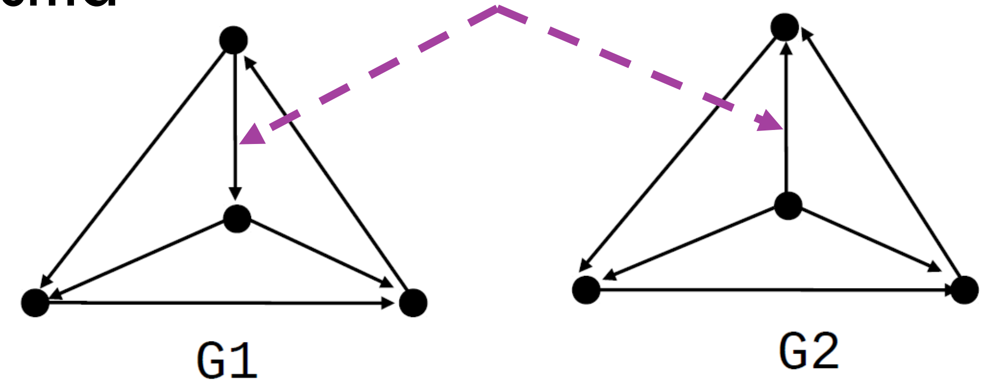
- Isomorfismo de digrafos: a direção das arestas deve ser a mesma





Isomorfismo de digrafos

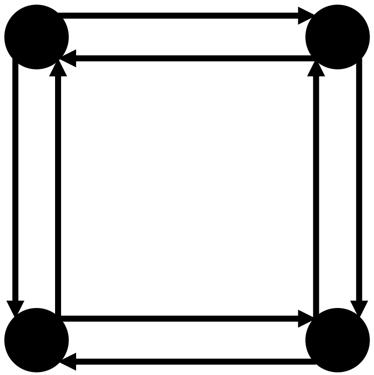
- Isomorfismo de digrafos: a direção das arestas deve ser a mesma



- G1 e G2 não são isomorfos

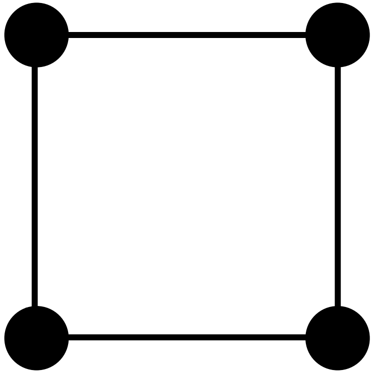
Digrafos simétricos

- Um digrafo é simétrico se para toda aresta (v_a,v_b) existe uma aresta (v_b,v_a)



Digrafos simétricos

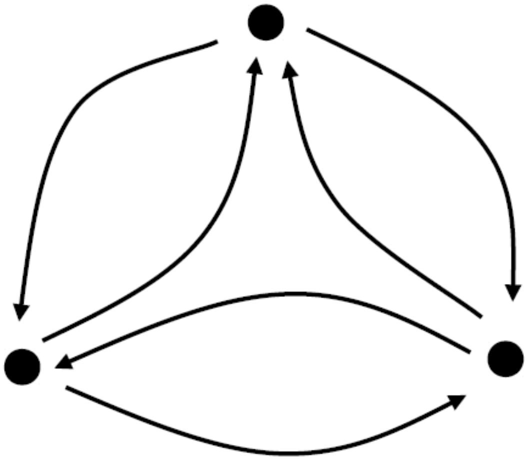
- Um digrafo é simétrico se para toda aresta (v_a, v_b) existe uma aresta (v_b, v_a)



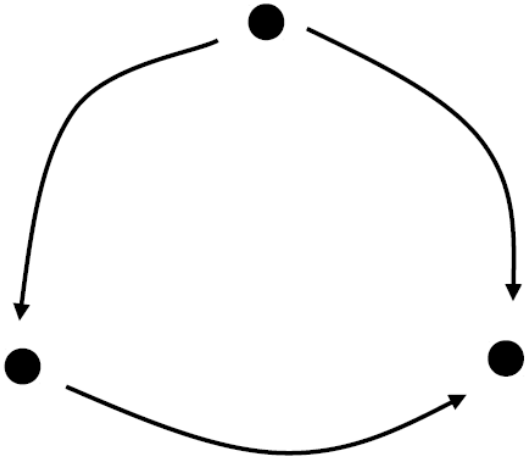
- == grafo!

Digrafos completos

Simétrico
(grafo)



Assimétrico
(torneio)



Digrafo balanceado

- Se, para todo vértice v de um digrafo, temos

$$d^{+}(v) = d^{-}(v)$$

o digrafo é dito balanceado.

Caminhos e circuitos em digrafos

- Caminho dirigido: segue a orientação das arestas
  - Semi-caminho: é um caminho no grafo correspondente mas não é no dígrafo
- Caminho simples dirigido e Semi-caminho simples
- Circuito dirigido e Semi-circuito

Conectividade

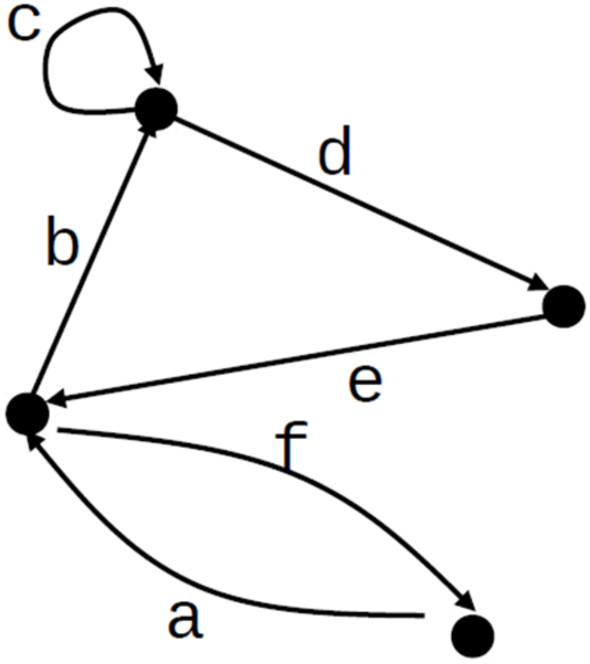
- Digrafo fortemente conexo: existe um caminho dirigido entre quaisquer pares de vértices
- Digrafo fracamente conexo: digrafo não é fortemente conexo, mas seu grafo correspondente é conexo
- Se falarmos que um digrafo é conexo, simplesmente significa que seu grafo correspondente é conexo

Eulerianos

- Digrafos Eulerianos: possuem um caminho fechado dirigido que passa por todas as arestas exatamente uma vez
- TEOREMA: Um dígrafo é euleriano se, e somente se, ele for fortemente conexo e balanceado

$$d^{+}(v) = d^{-}(v) \ \forall \ v \in V$$

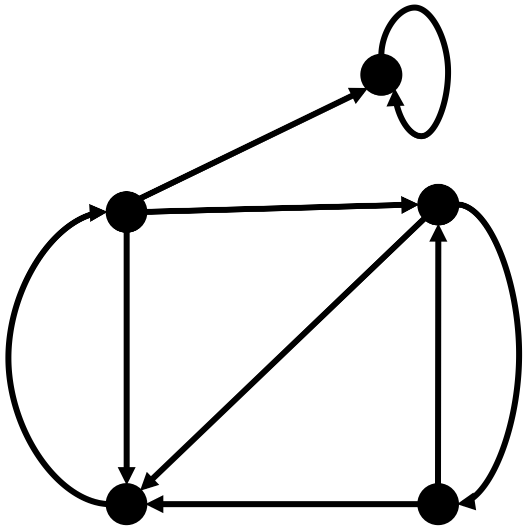
Eulerianos



Digrafos e representação

- Matriz de adjacência

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	1	1	0
v2	0	1	0	0	0
v3	0	0	0	1	1
v4	1	0	0	0	0
v5	0	0	1	1	0



Digrafos e representação

- Listas de adjacência

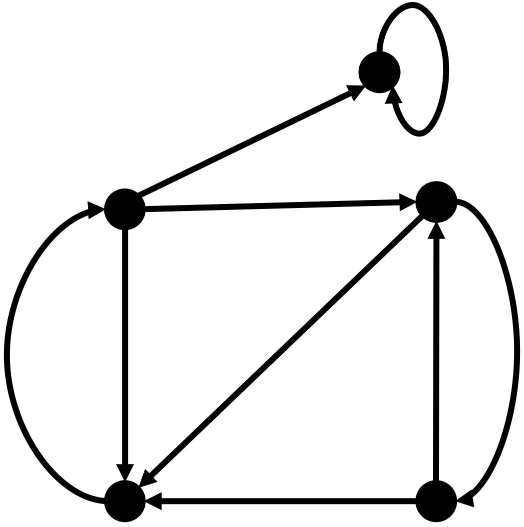
v1 → v2 → v3 → v4

v2 → v2

v3 → v4 → v5

v4 → v1

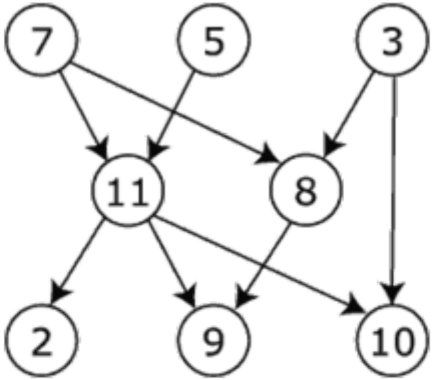
v5 → v3 → v4



Grafos dirigidos acíclicos

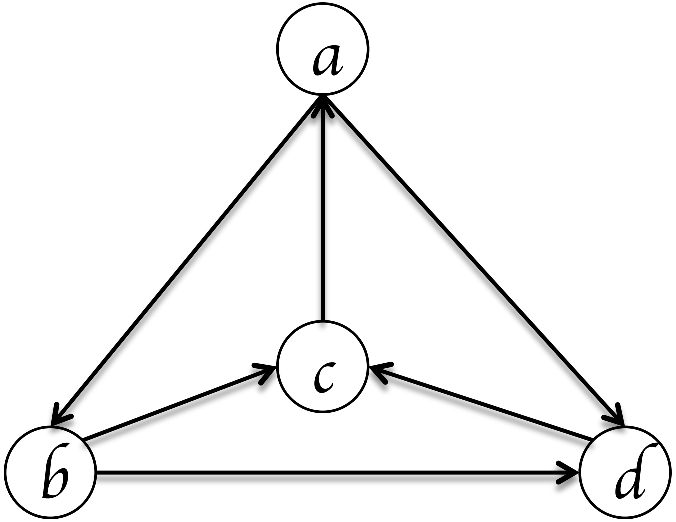
Grafos dirigidos acíclicos

- São digrafos que não possuem ciclos, isto é, para qualquer vértice v não existe um circuito iniciando-se e terminando em v
- Conhecidos como DAG (*directed acyclic graph*)



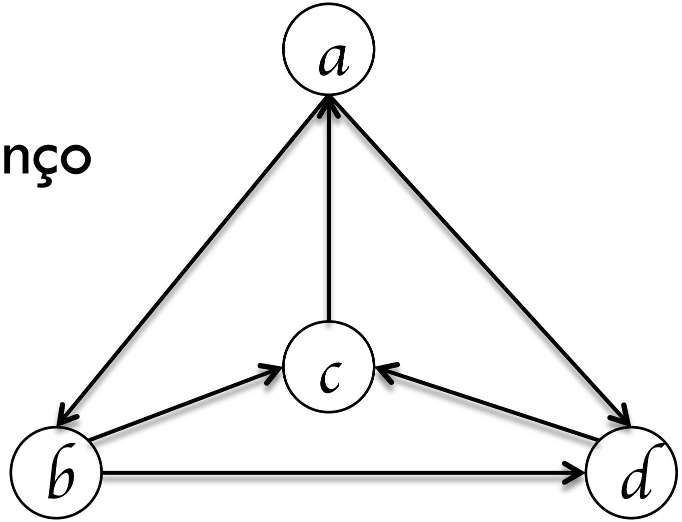
Busca em profundidade e ciclos

- Como usar a busca em profundidade para descobrir se um digrafo é um DAG?



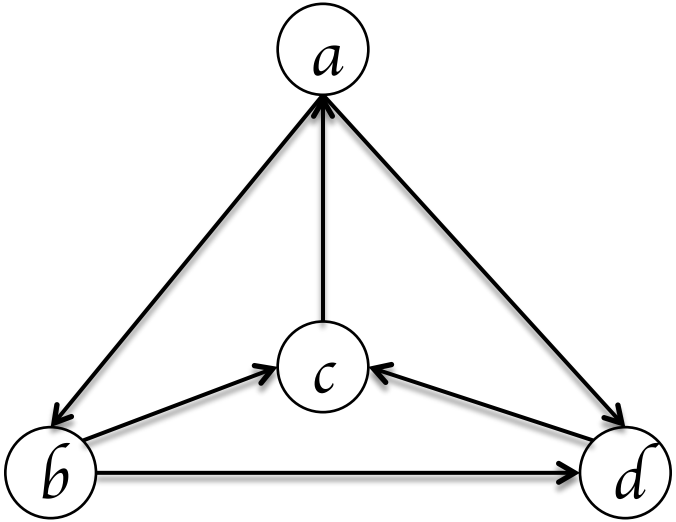
Busca em profundidade e ciclos

- Classificação de arestas
  - Arestas de árvore
  - Arestas de cruzamento ou avanço
  - Arestas de retorno



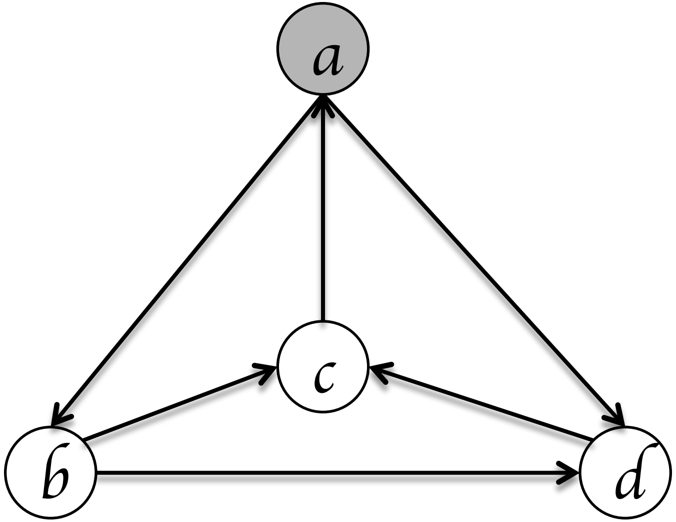
Classificação de arestas

- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados



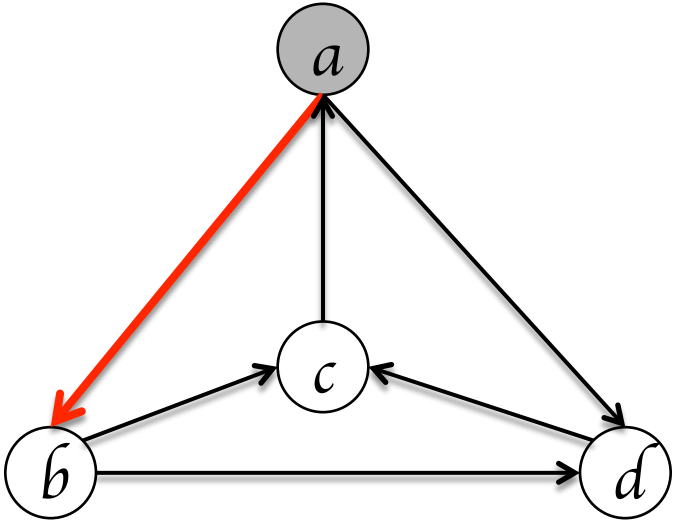
Classificação de arestas

- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
  - Iniciando a busca em A



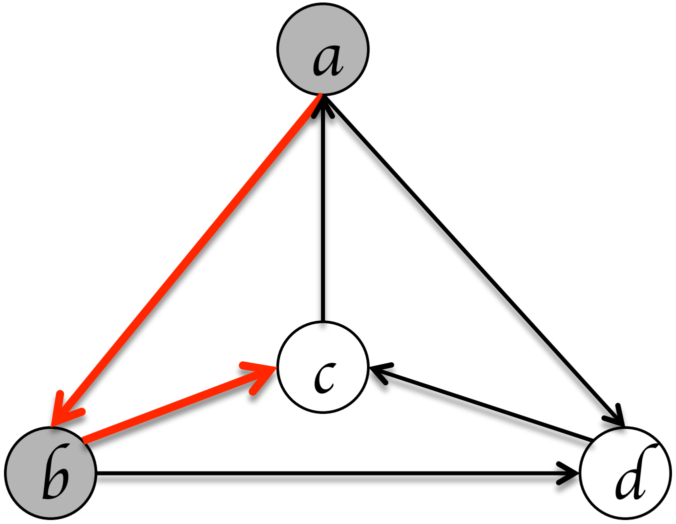
Classificação de arestas

- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
  - Iniciando a busca em A
    - Chegada em um vértice branco: aresta de árvore



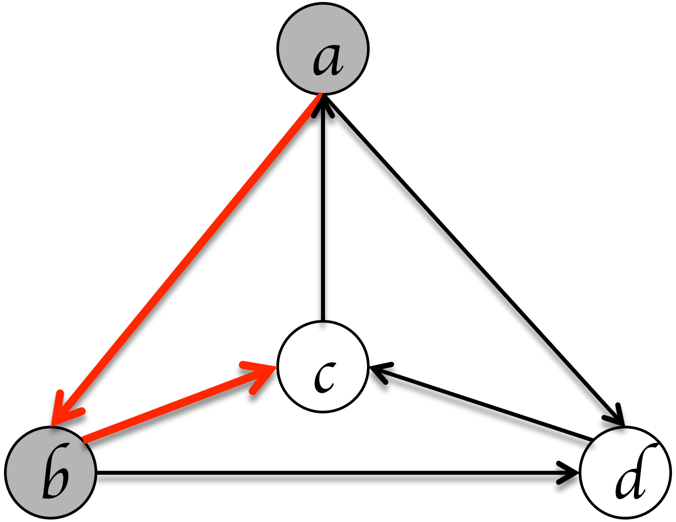
Classificação de arestas

- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
  - Iniciando a busca em A
    - Chegada em um vértice branco: aresta de árvore



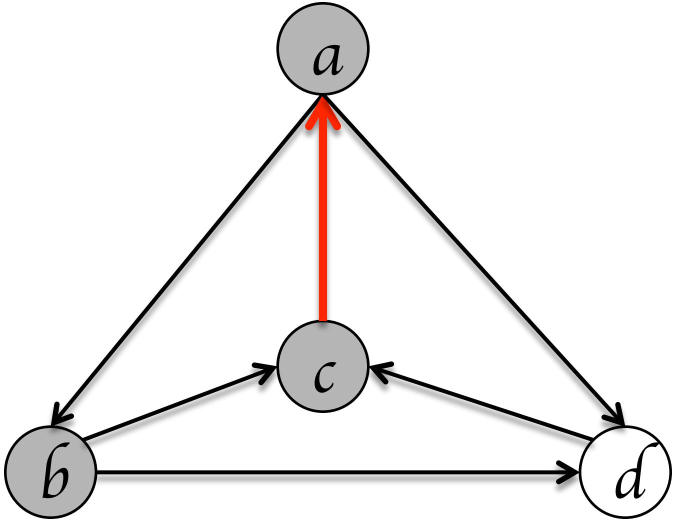
Classificação de arestas

- Arestas de retorno: as que conectam um vértice *u* a um predecessor seu, *v*
  - Iniciando a busca em A



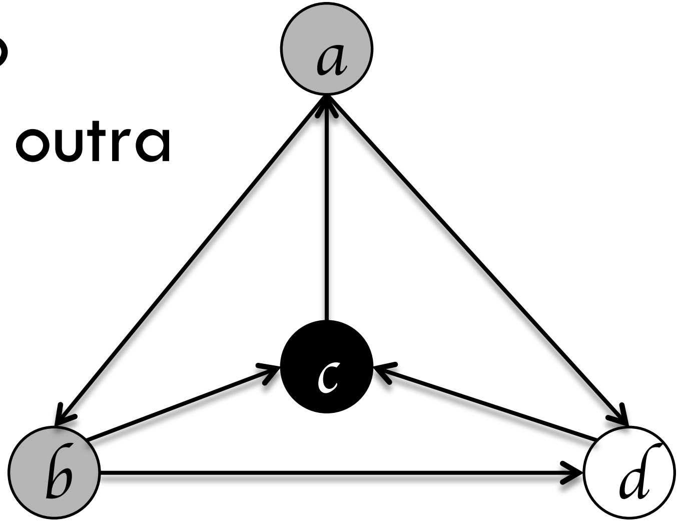
Classificação de arestas

- Arestas de retorno: as que conectam um vértice *u* a um predecessor seu, *v*
  - Iniciando a busca em A
    - Chegando em um vértice cinza: aresta de retorno



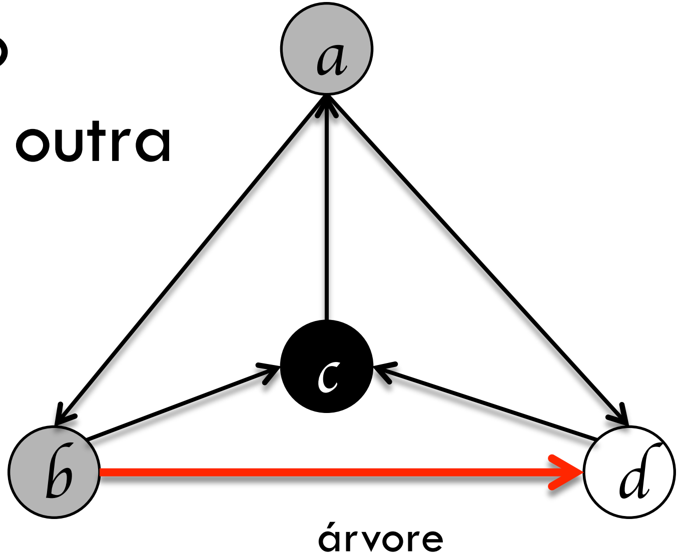
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A



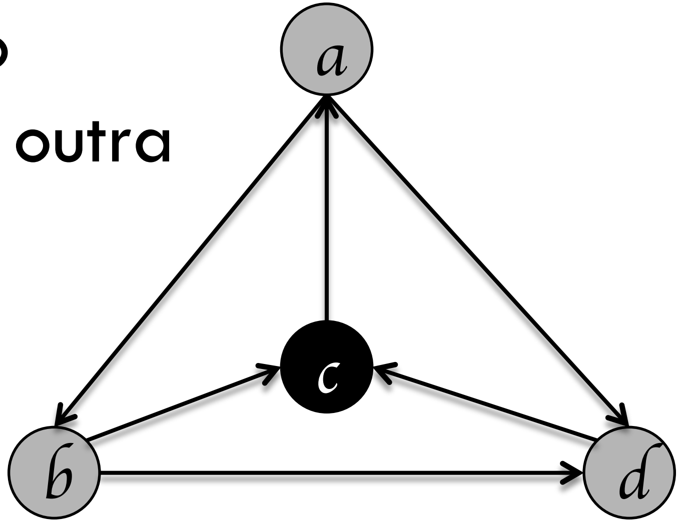
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A



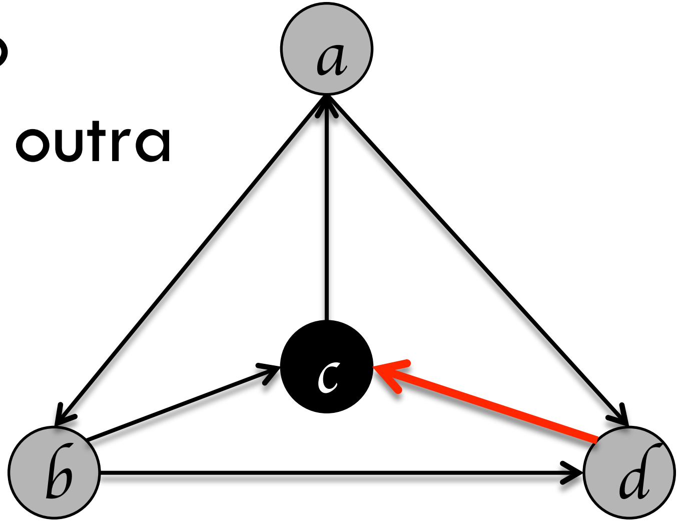
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A



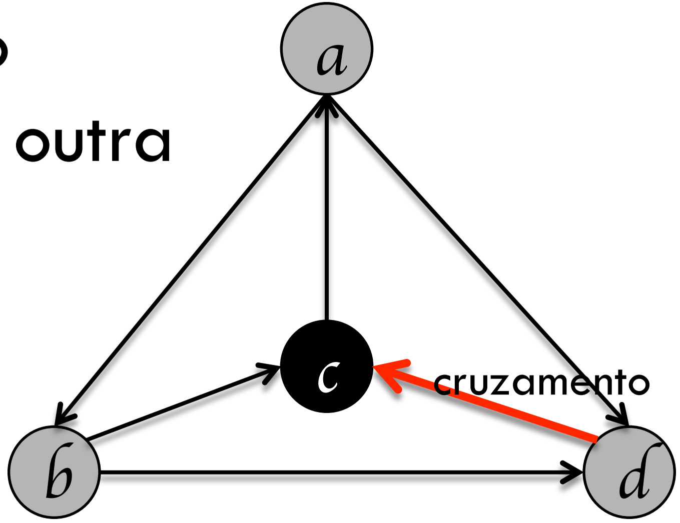
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



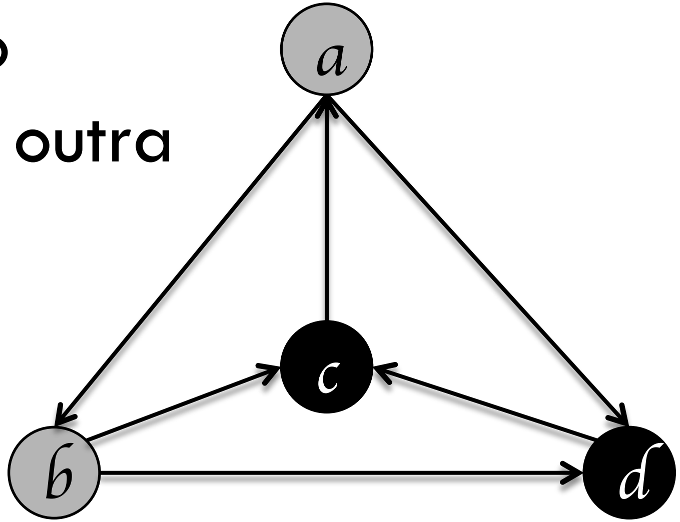
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



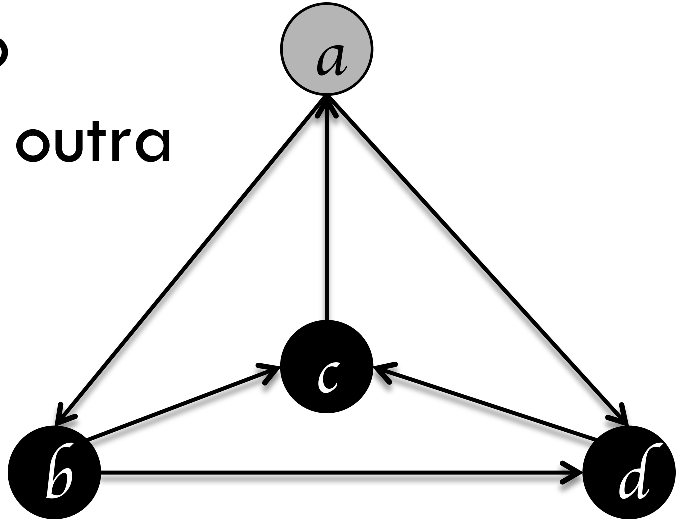
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



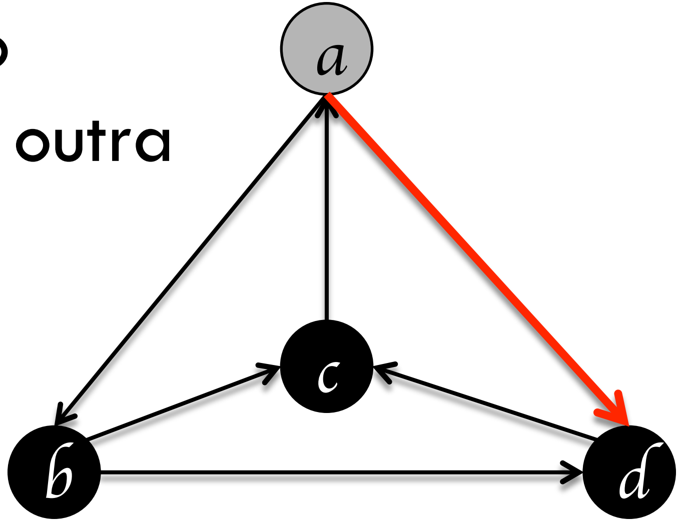
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



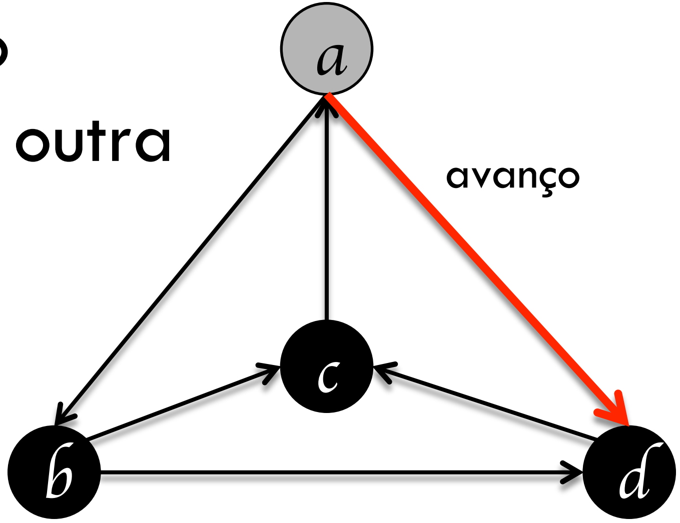
Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
  - Iniciando a busca em A: chegando a um vértice preto:
    - **Avanço**, se u vem antes de v
    - **Cruzamento**, caso contrário



DAG e arestas de retorno

- Um digrafo é DAG se e somente se na busca em profundidade não for encontrada nenhuma aresta de retorno.