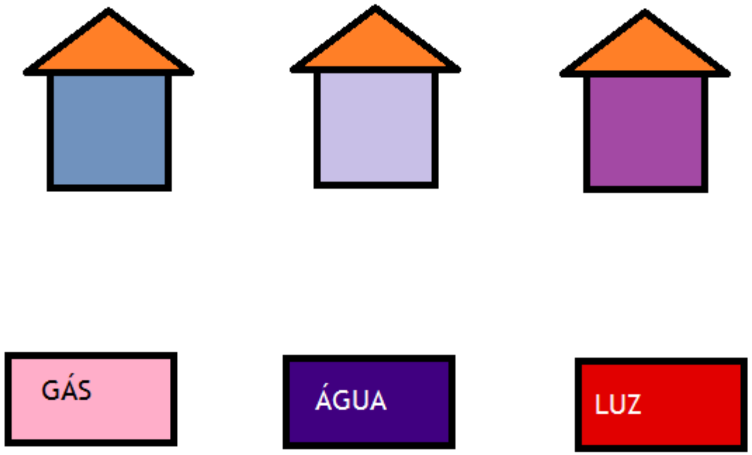
# TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

## PLANARIDADE

Prof. Alexei Machado

# Problema das 3 casas

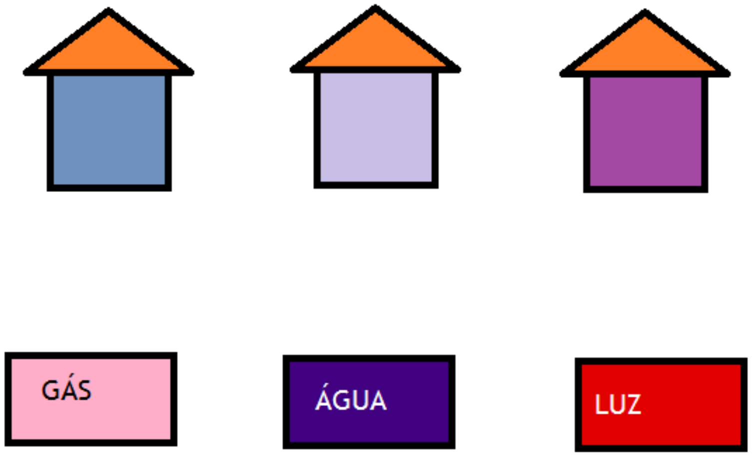


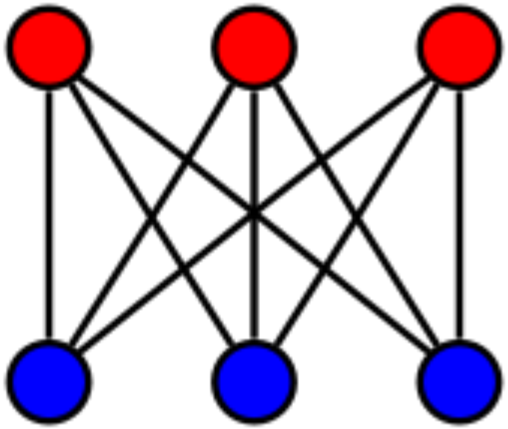



- É possível conectar as três casas aos três serviços sem cruzar as tubulações?

# Problema das 3 casas

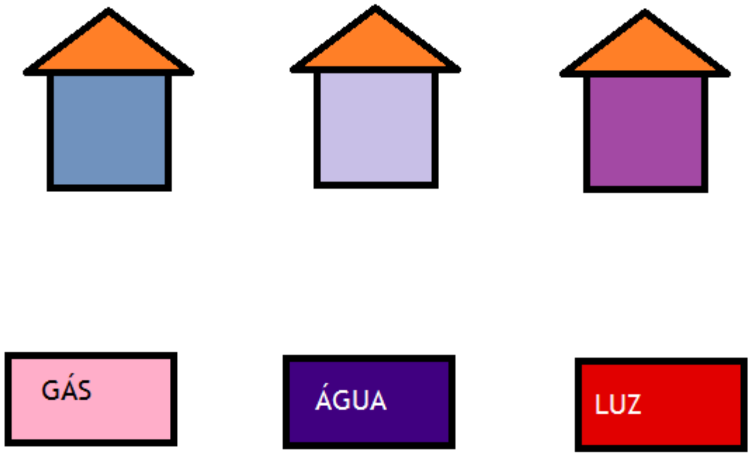


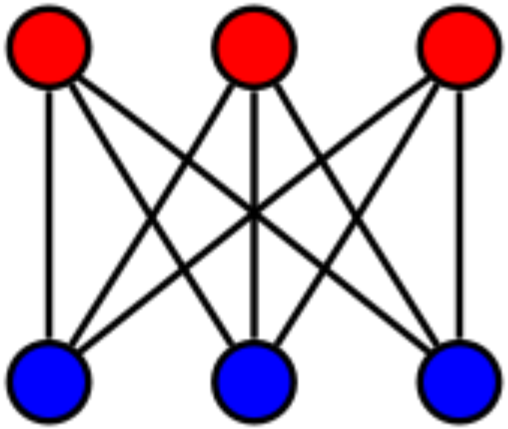


# Problema das 3 casas





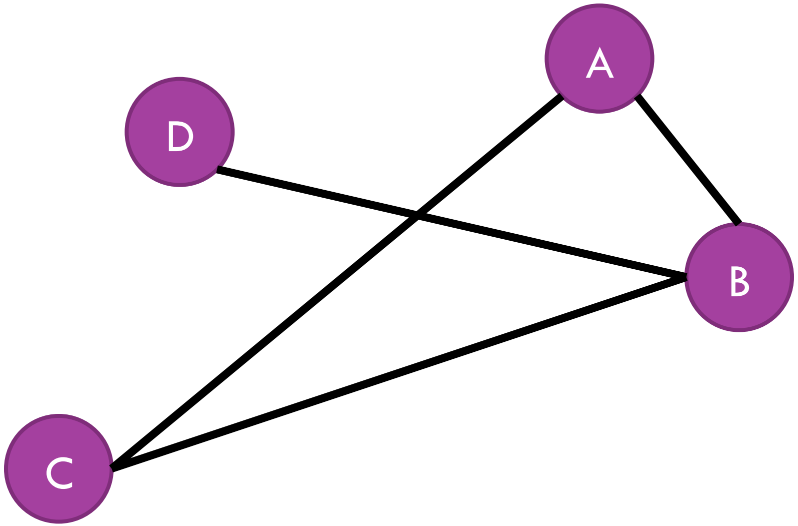



Grafo bipartido completo – $K_{3,3}$

# Grafo planar



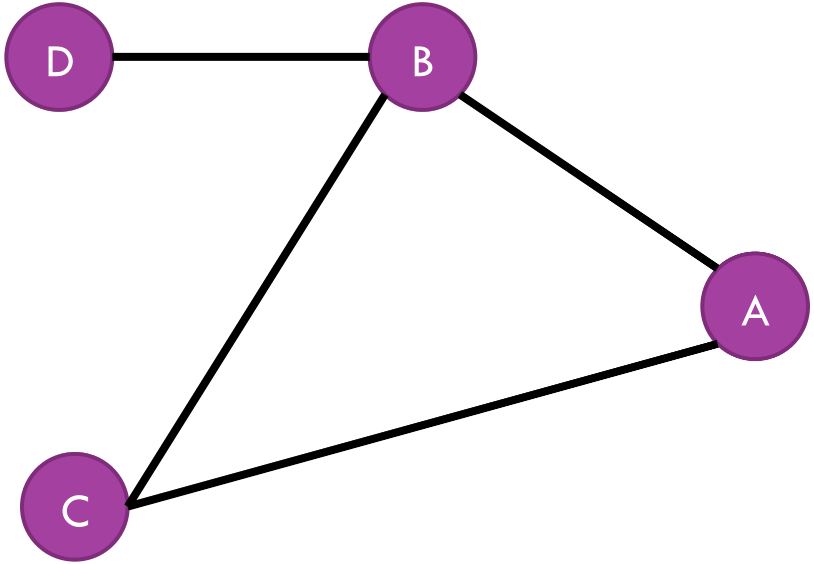
- Um grafo G é **planar** se existe uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.



# Grafo planar



- Um grafo G é **planar** se existe uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.

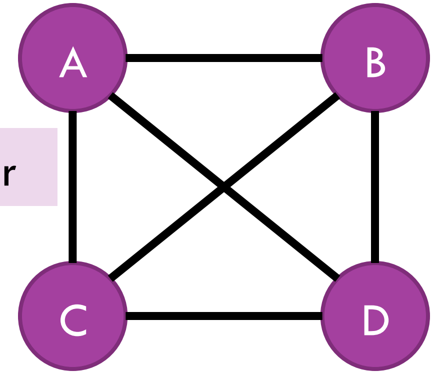


# Grafo planar e grafo plano



- Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

Grafo planar

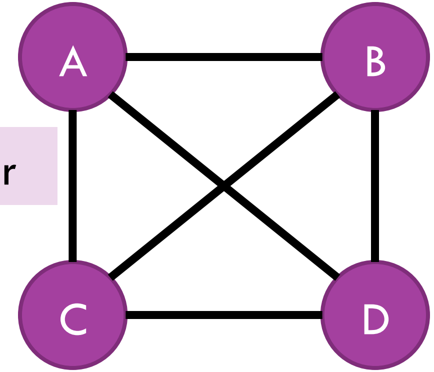


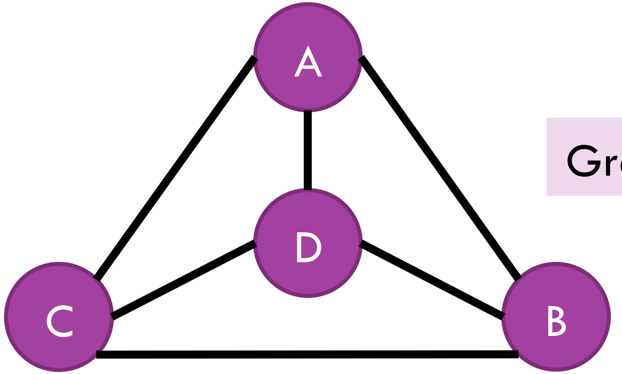
# Grafo planar e grafo plano



- Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

Grafo planar




Grafo plano

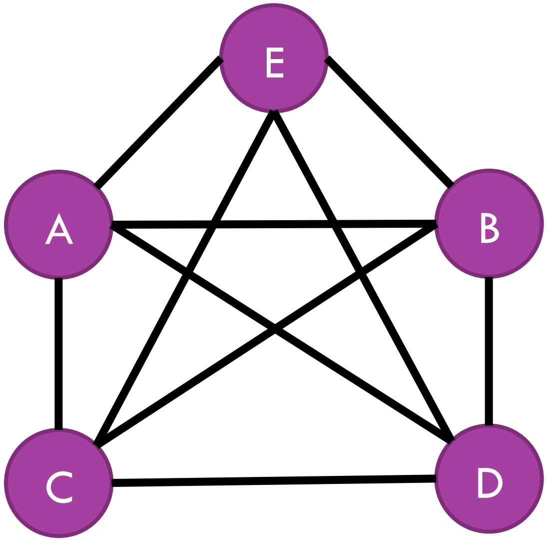
# Grafos planares e Kuratowski

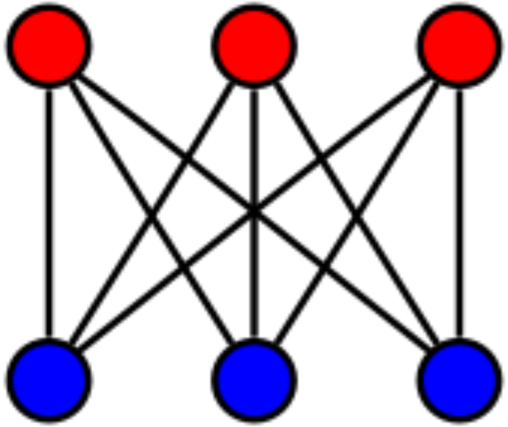


- Existem dois grafos não planares que são muito importantes para o estudo de planaridade. Eles são chamados de grafos de Kuratowski

# Grafos de Kuratowski



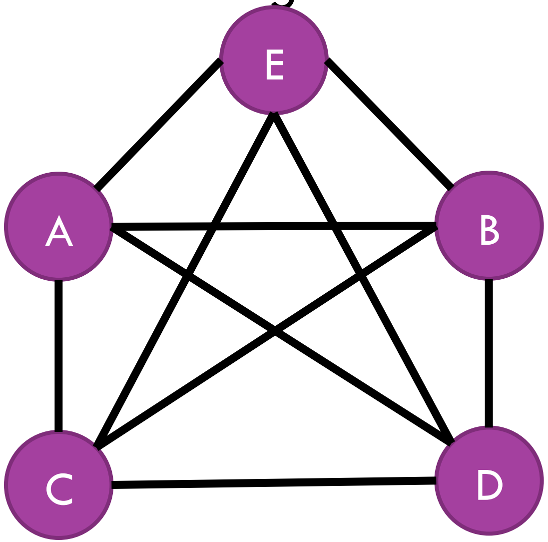


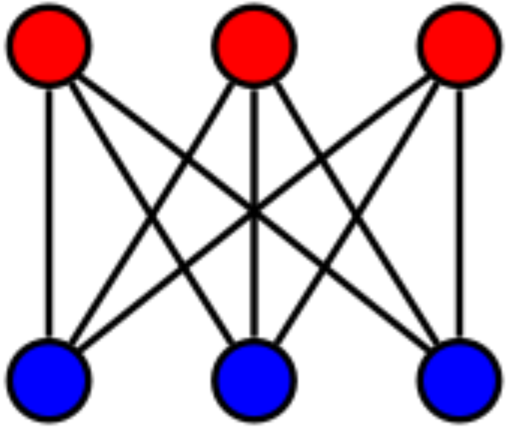
# Grafos de Kuratowski



$K_5$



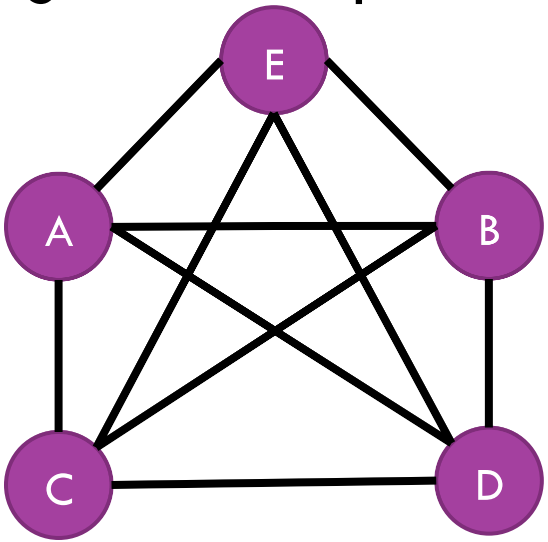

$K_{3,3}$



# Grafos de Kuratowski



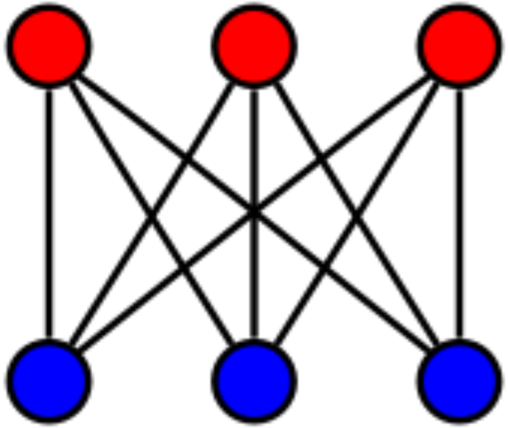
- $K_5$: grafo não planar com o menor número de vértices



# Grafos de Kuratowski



- $K_{3,3}$: grafo não planar com o menor número de arestas



# Grafos de Kuratowski

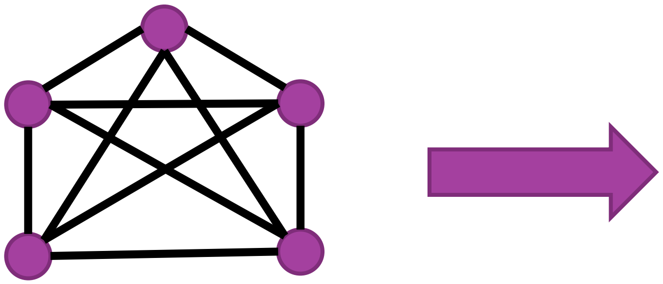


- Propriedades em comum de $K_5$ e $K_{3,3}$
  1. Ambos são regulares
  2. Ambos são não planares
  3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna ambos os grafos planares

# Grafos de Kuratowski



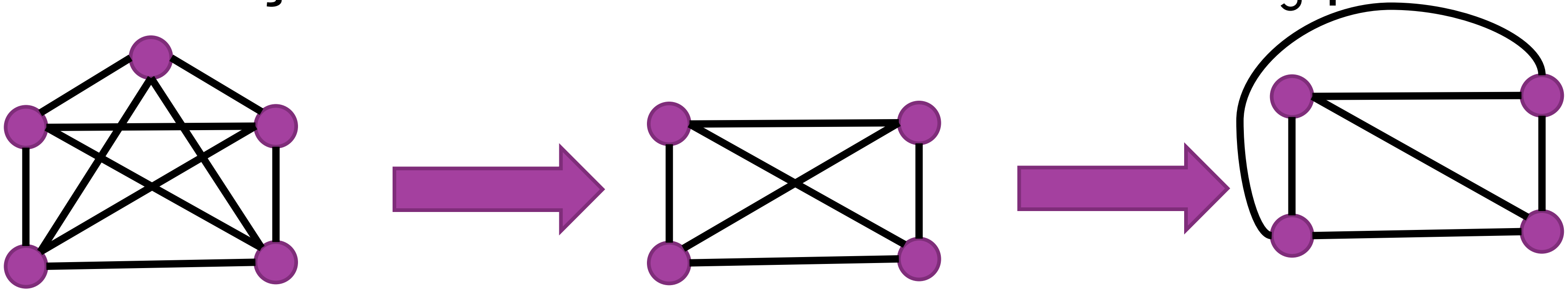
- A remoção de um vértice ou aresta torna $K_5$ planar?



# Grafos de Kuratowski



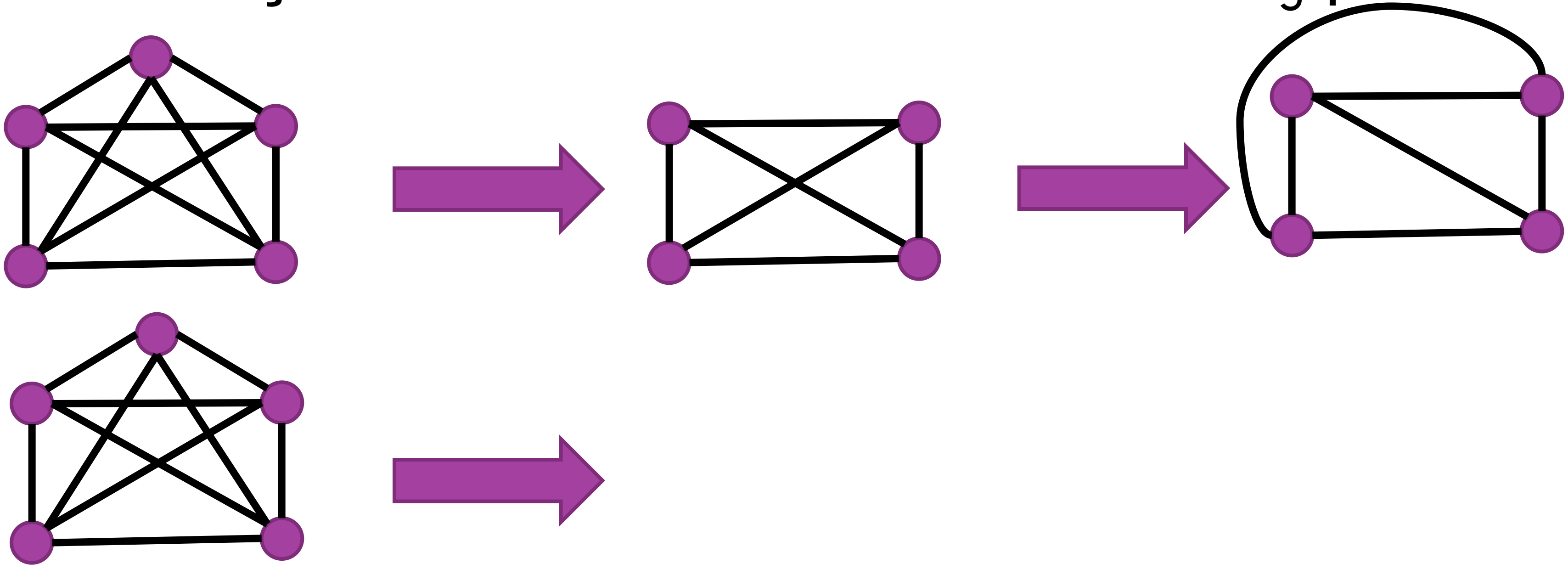
- A remoção de um vértice ou aresta torna $K_5$ planar?



# Grafos de Kuratowski



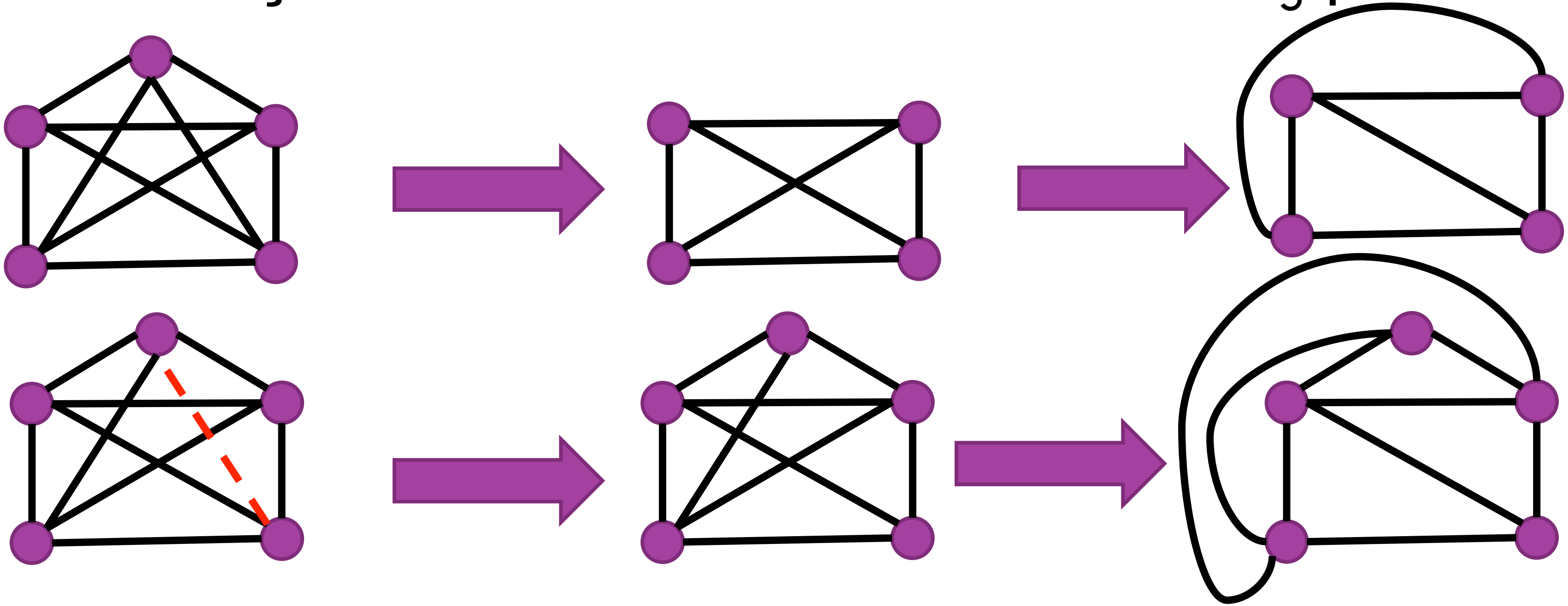
- A remoção de um vértice ou aresta torna $K_5$ planar?



# Grafos de Kuratowski



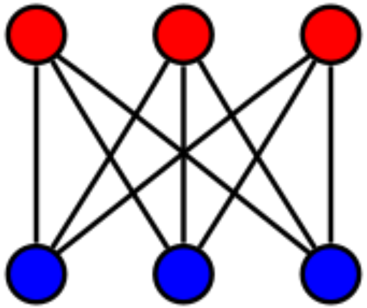
- A remoção de um vértice ou aresta torna $K_5$ planar?



# Grafos de Kuratowski



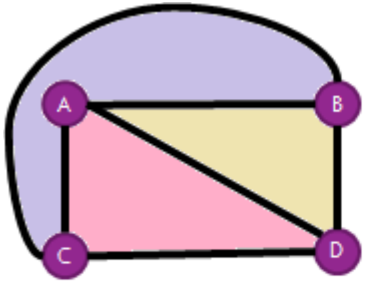
- A remoção de uma aresta ou vértice torna $K_{3,3}$ planar?



# Planaridade



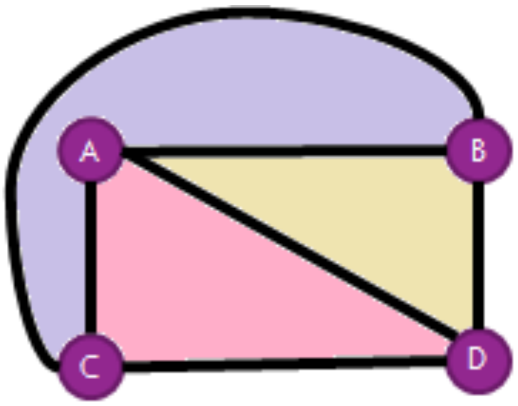
- **Região (ou face)**: uma representação gráfica planar de um grafo divide o plano em *regiões* ou *faces*. Cada região é caracterizada pelas arestas que a contornam.



# Faces



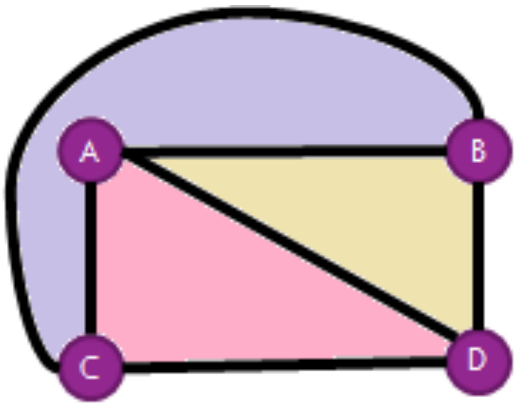
- Cada aresta de G pertence à fronteira de uma ou duas faces de G.
- O grau (comprimento), de uma face f de G, representado por d(F) é igual ao número de arestas da fronteira de F.



# Faces



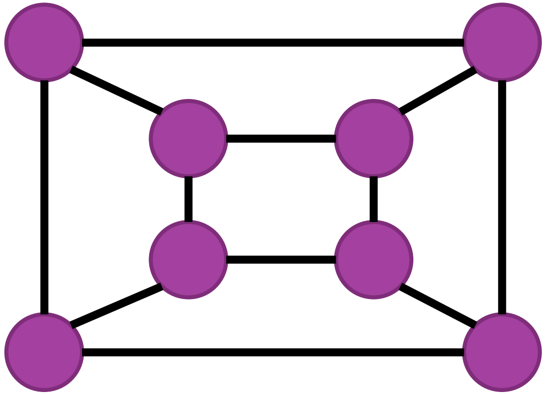
- Cada face da representação planar de um grafo corresponde a um passeio fechado do grafo constituído pelos vértices e arestas que delimitam a face. Chamamos grau da face, d(f), ao comprimento do passeio correspondente.



# Faces



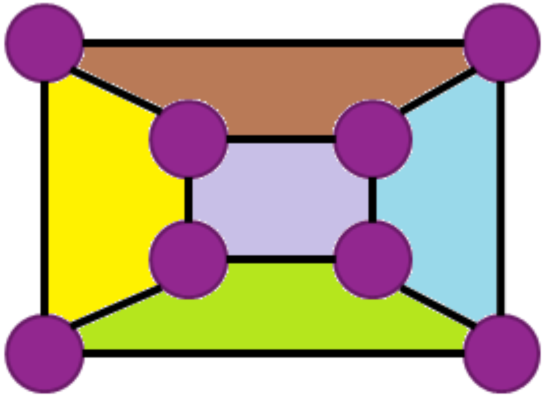
- Quantas faces temos neste grafo?



# Faces



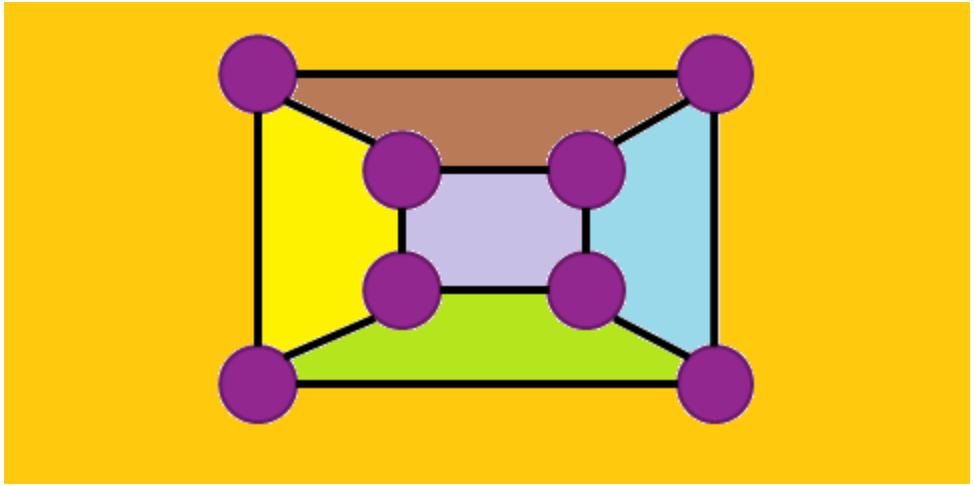
- Quantas faces temos neste grafo?



# Faces



- Quantas faces temos neste grafo? SEIS



Face infinita: porção infinita do plano que não é contornada por arestas

# Fórmula de Euler



- TEOREMA: Seja G um grafo conexo planar com $\underline{n}$ vértices e $\underline{e}$ arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

# Fórmula de Euler



- TEOREMA: Seja G um grafo conexo planar com $\underline{n}$ vértices e $\underline{e}$ arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

# Fórmula de Euler



- COROLÁRIO: $e \leq 3n - 6$

- Condição necessária mas não suficiente para um grafo SIMPLES ser planar

# Detecção de planaridade



- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar

# Detecção de planaridade



- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar
- Se G é planar, então, a inclusão ou remoção de:
  - arestas paralelas
  - loops
  - vértices de grau 2 (arestas em série)
- não afetam a planaridade de G

# Detecção de planaridade



- Técnica de *redução* auxilia nesta detecção

# Detecção de planaridade

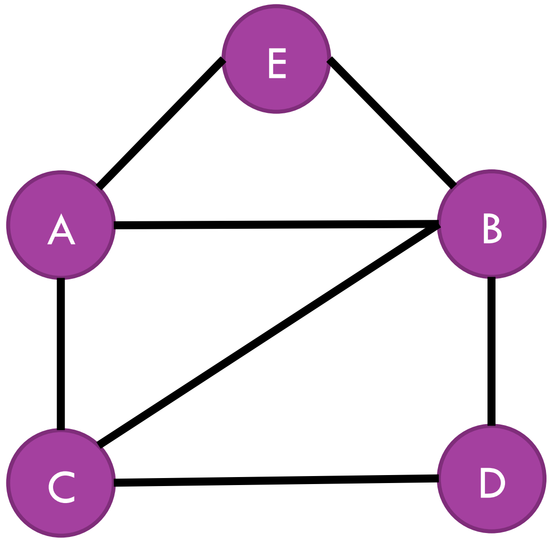


- Redução elementar

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

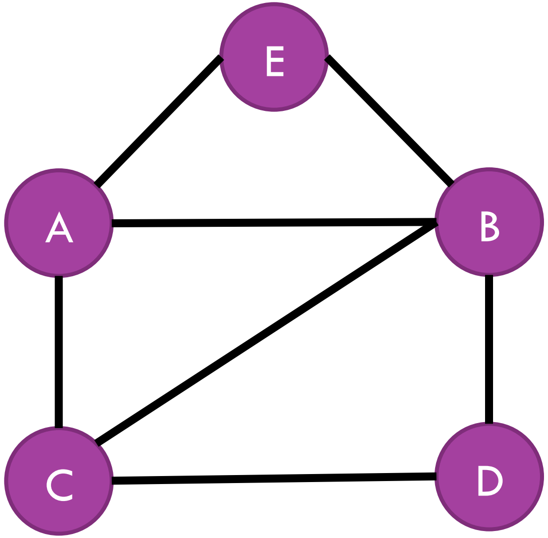
# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



# Detecção de planaridade

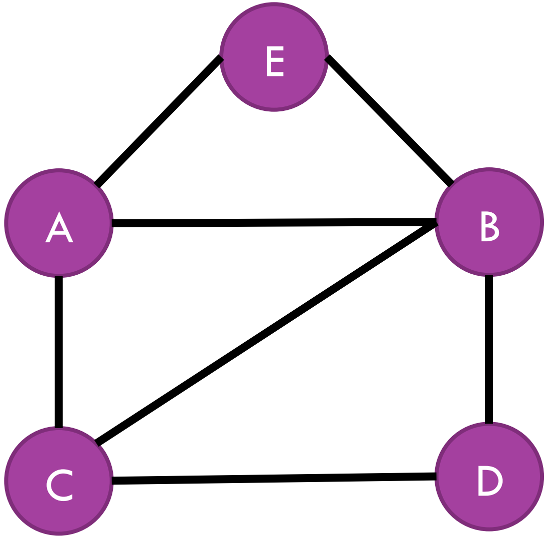
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

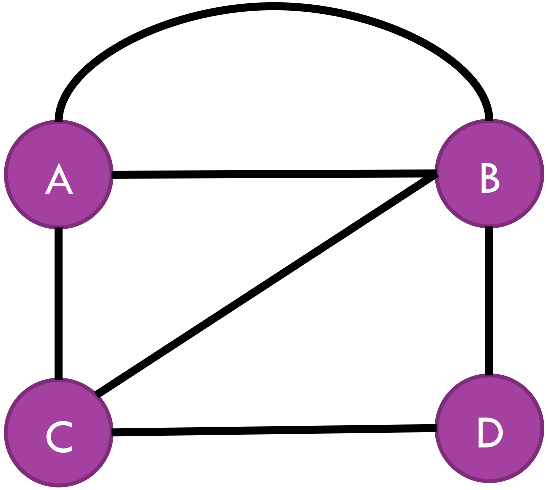
- AE e EB



# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

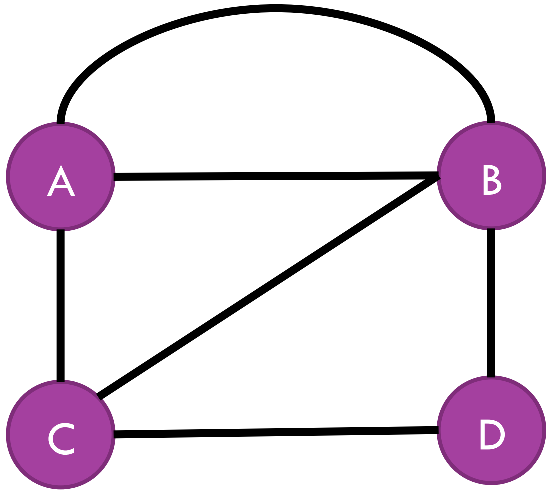
- AE e EB



# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```

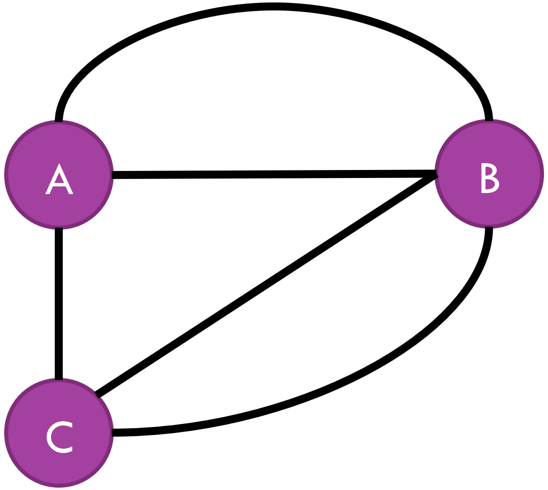
- AE e EB
- BD e DC



# Detecção de planaridade

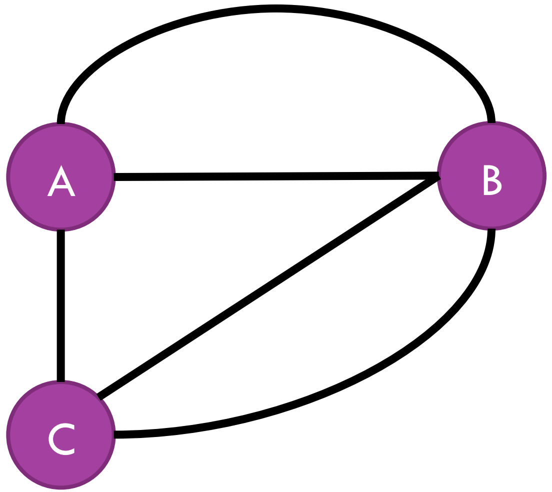
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
    remover loops
    remover as arestas paralelas
    contrair as arestas em série
fim enquanto
```

- AE e EB
- BD e DC



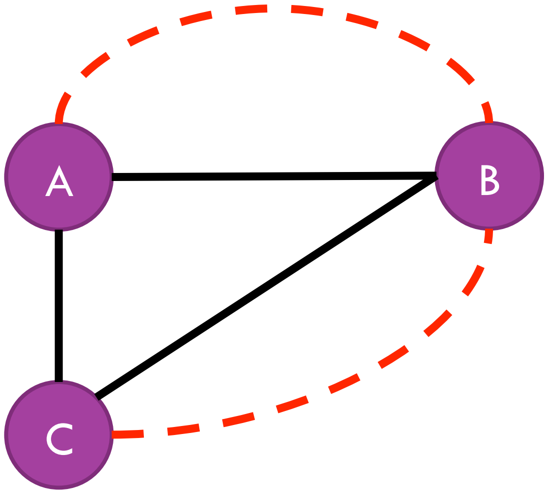
# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



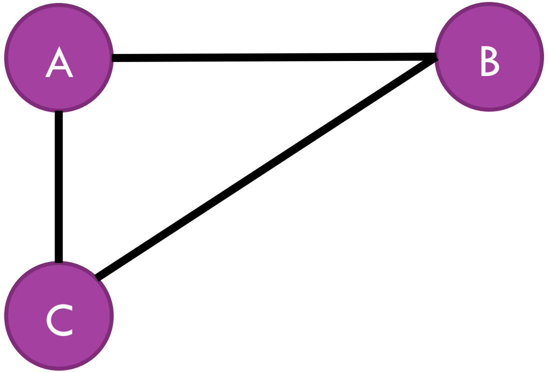
# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



# Detecção de planaridade

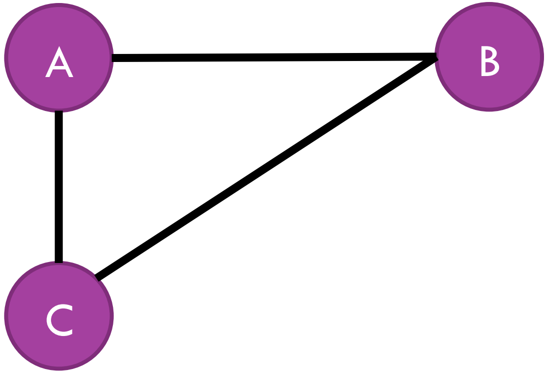
```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
   remover loops
   remover as arestas paralelas
   contrair as arestas em série
fim enquanto
```



# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
    remover loops
    remover as arestas paralelas
    contrair as arestas em série
fim enquanto
```

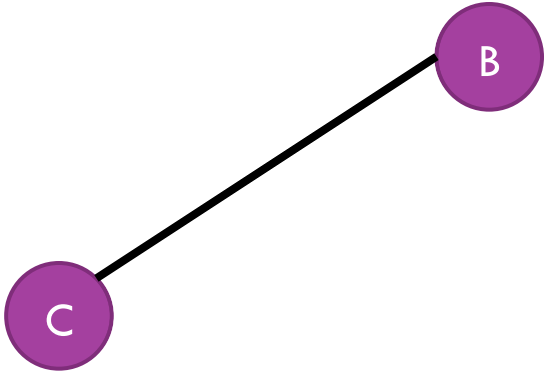
- CA e AB



# Detecção de planaridade

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça
    remover loops
    remover as arestas paralelas
    contrair as arestas em série
fim enquanto
```

- CA e AB



# Detecção de planaridade



- De maneira geral, após aplicar o procedimento a cada um dos componentes Gi, qual será o grafo reduzido Hi?
  1. Uma única aresta, ou
  2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
  3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

# Detecção de planaridade



1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

# Detecção de planaridade



1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

PLANAR!!

# Detecção de planaridade



1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. $\boxed{\text{Um grafo simples com } n \geq 5 \text{ e } e \geq 7}$ INVESTIGAR!!

# Detecção de planaridade



3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

INVESTIGAR!!

- Podemos verificar se $e \leq 3n-6$.
  - Se o grafo reduzido não satisfaz a inequação, então o grafo é não planar. Se a inequação for satisfeita, é necessário fazer testes adicionais.

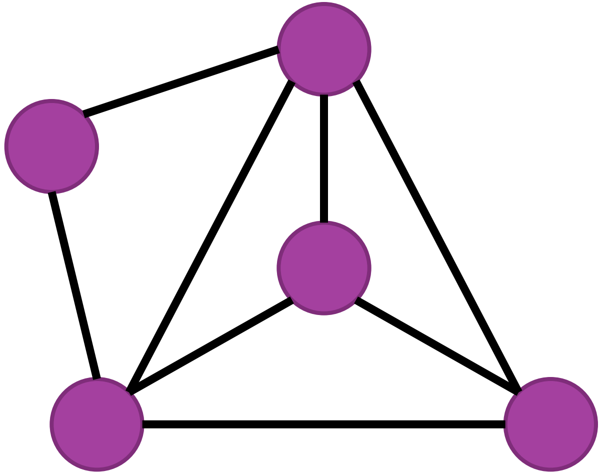
# Homeomorfismo



- Dois grafos $G_1$ e $G_2$ são **homeomorfos** se os grafos $H_1$ e $H_2$ obtidos a partir das reduções elementares de $G_1$ e $G_2$ forem isomorfos
- $G_1$ e $G_2$ são **homeomorfos** se pudermos obter $G_2$ a partir da inserção de vértices intermediários nas arestas de $G_1$

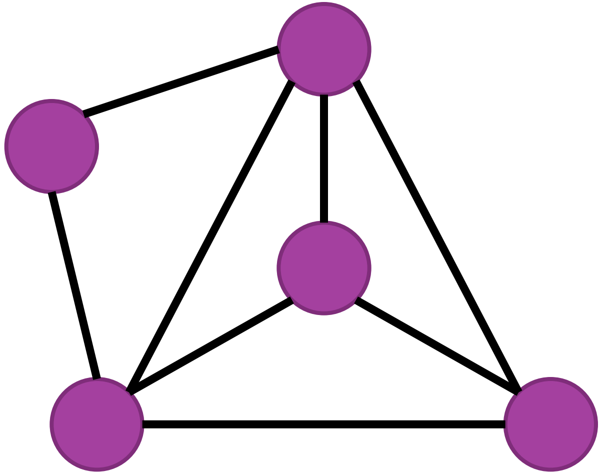
# Homeomorfismo

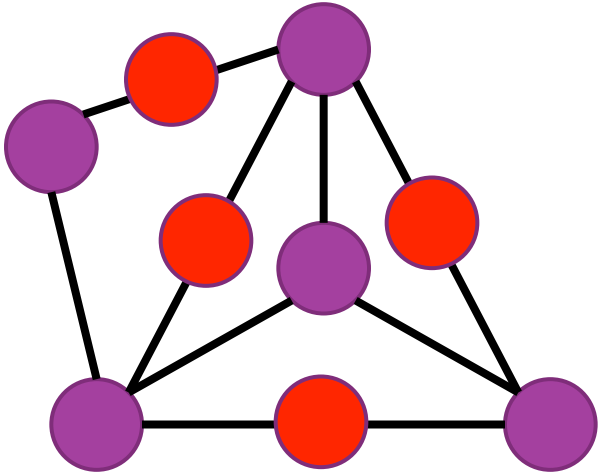




# Homeomorfismo



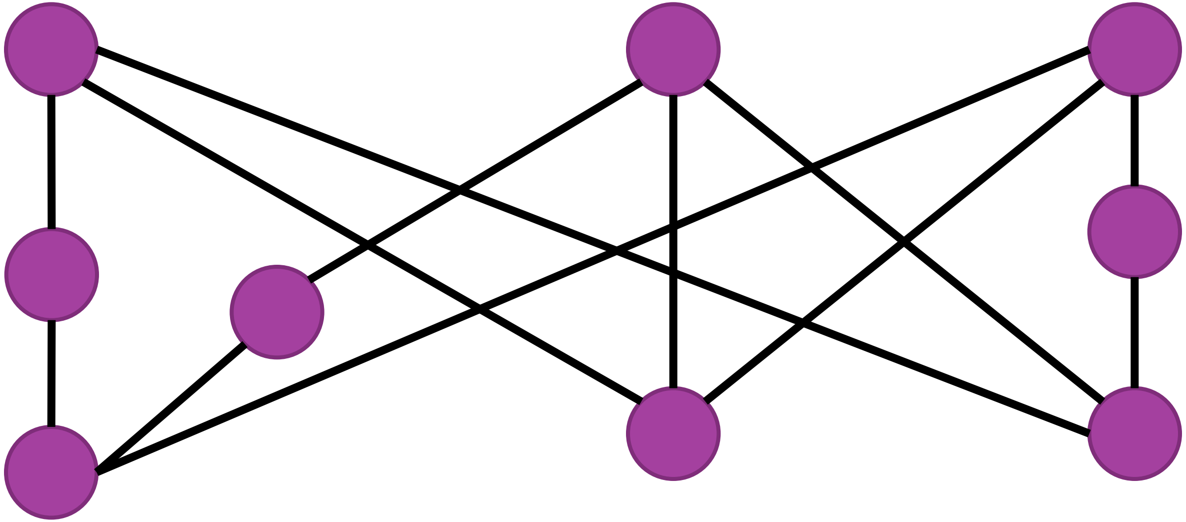




# Teorema



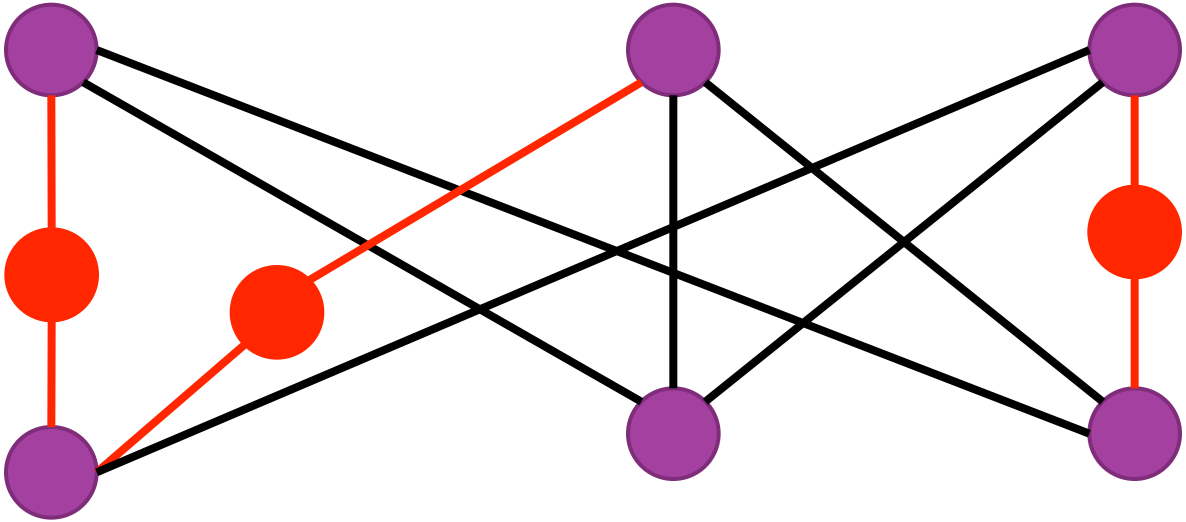
- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.



# Teorema



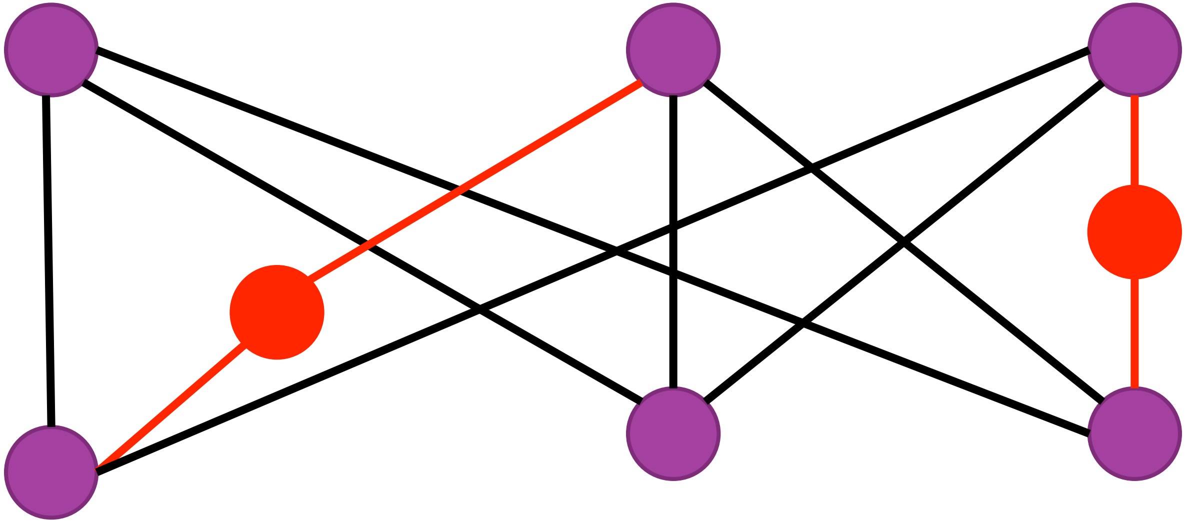
- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.



# Teorema



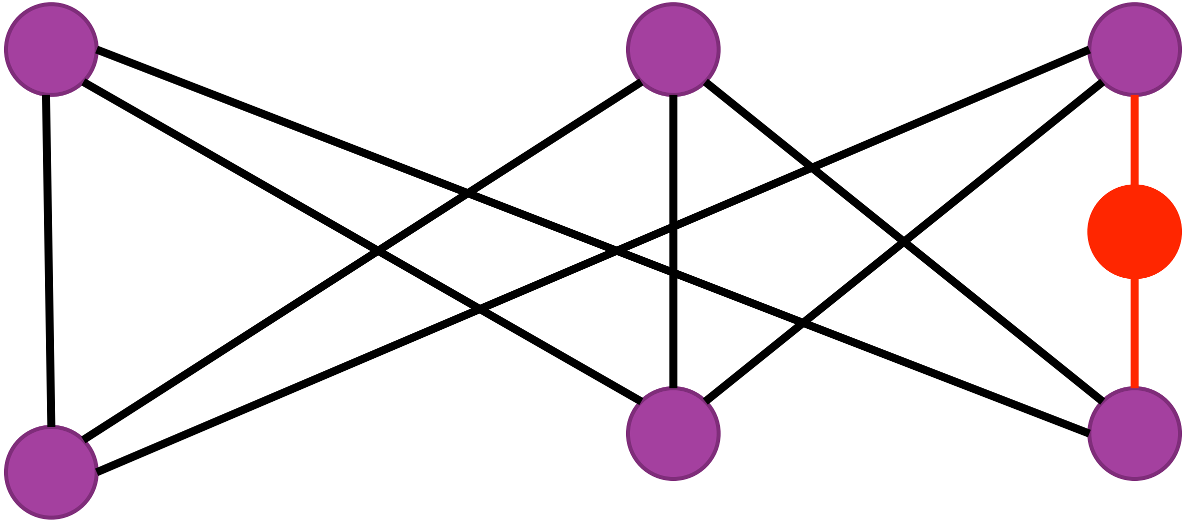
- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.



# Teorema



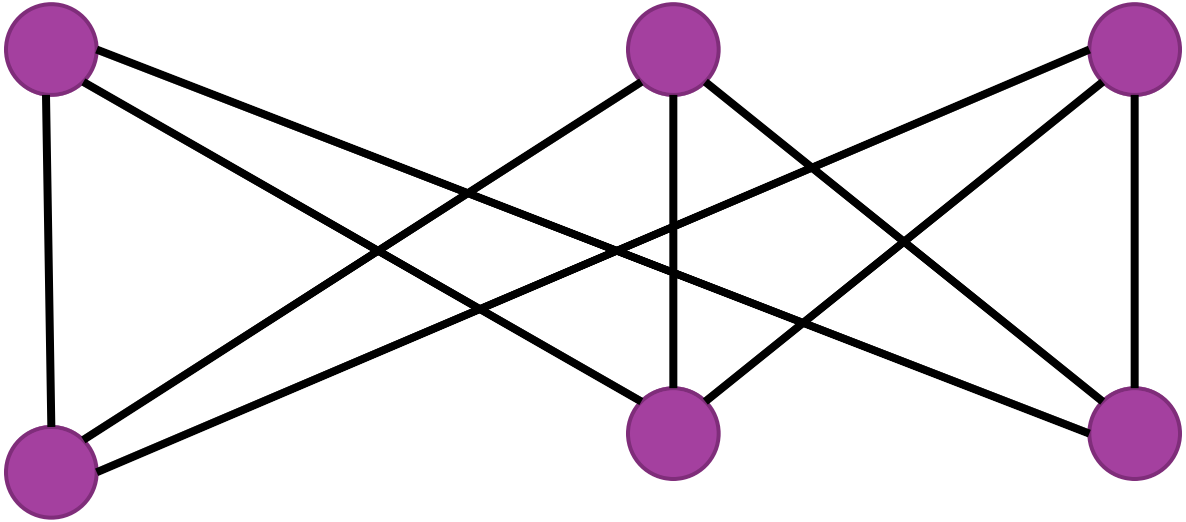
- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.



# Teorema



- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.



# Dualidade



- Dado um grafo G planar, o grafo G*, chamado **dual** de G, é construído da seguinte forma:
  - para cada face f de G, G* tem um vértice

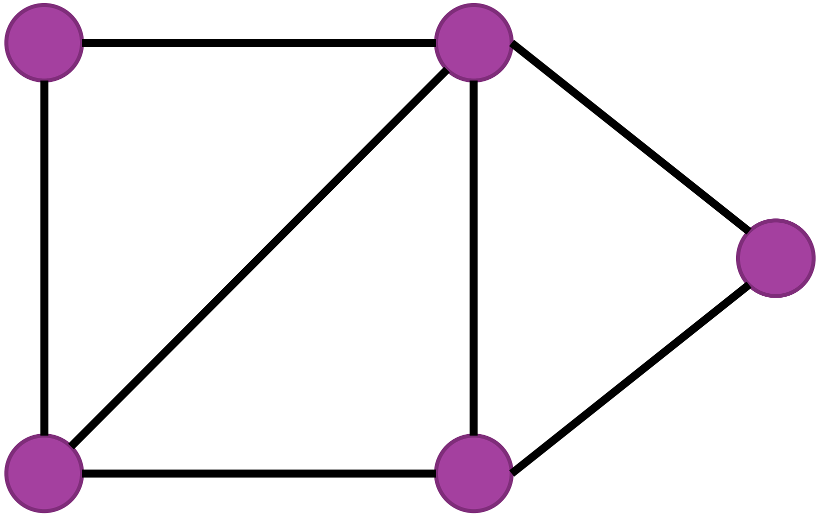
# Dualidade



- una os vértices de G* da seguinte forma
  - se 2 regiões $f_i$ e $f_k$ são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre $v_k$ e $v_k$ interceptando a aresta em comum
  - se existirem mais de uma aresta em comum entre $f_i$ e $f_k$ coloque uma aresta entre $v_i$ e $v_k$ para cada aresta em comum
  - se uma aresta está inteiramente em uma região, $f_i$, coloque um loop no vértice $v_i$.

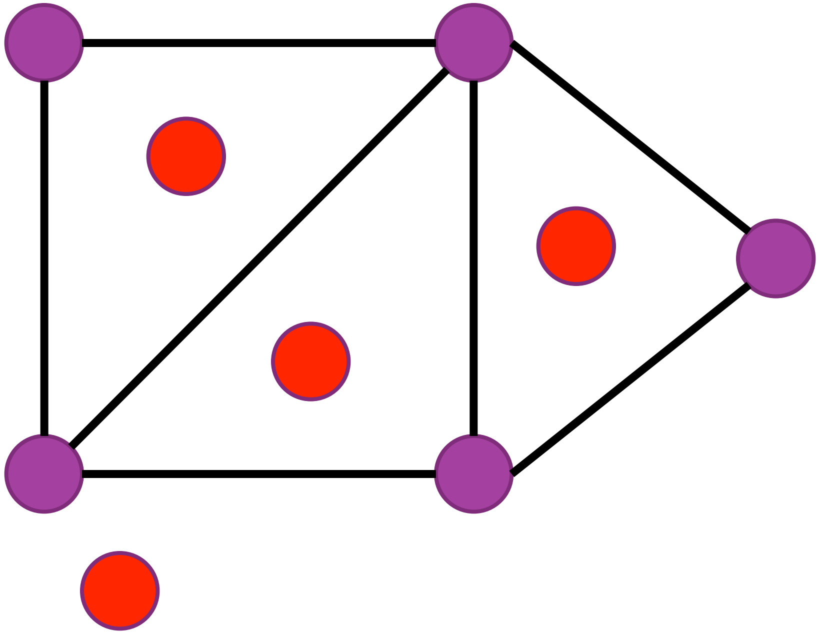
# Dualidade





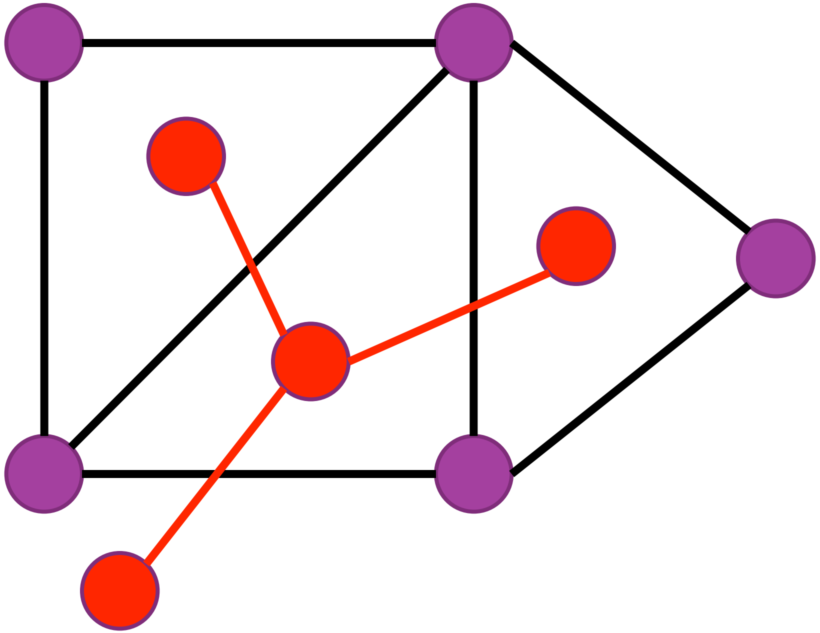
# Dualidade



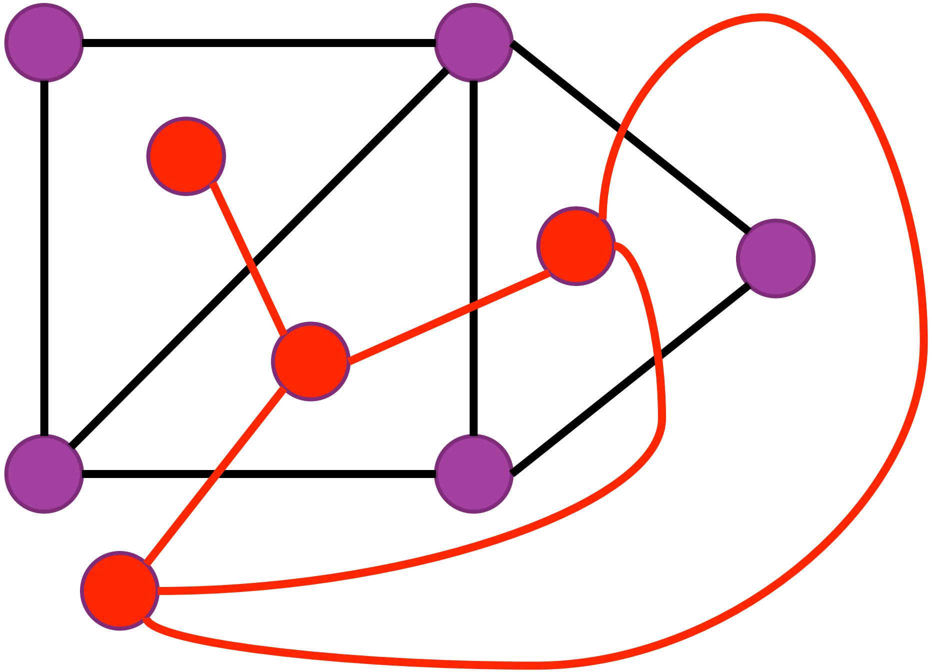


# Dualidade



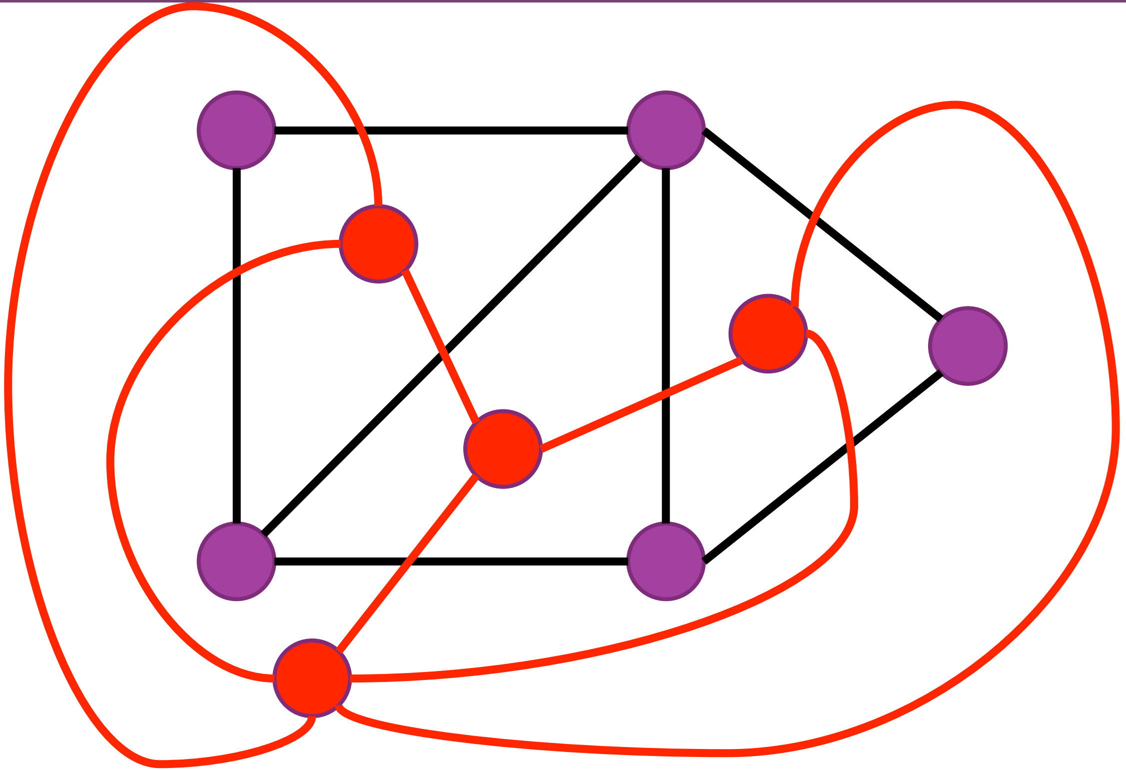


# Dualidade



# Dualidade

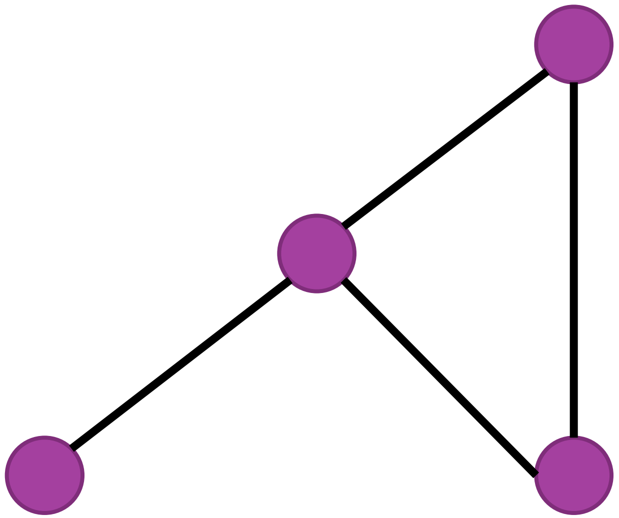




# Dualidade



- Qual é o dual deste grafo G?



# Dualidade



- Qual é o dual deste grafo G?
  - Arestas contidas em uma região tornam-se *loops* no dual