TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE

RELAÇÕES

Definição e propriedades

- Considere o conjunto S={1,2,3}, descreva o conjunto dos pares ordenados S x S

- Quais seriam os elementos se tivéssemos interessados na relação de igualdade entre eles? Ou seja, os pares ordenados cujas componentes são iguais.

- Quais seriam os elementos se tivéssemos interessados na relação de um número ser menor do que o outro?

Definição e propriedades

Definição 1 (Relação): Uma *relação* é um conjunto de pares ordenados.

Exemplo: R = { (1,3), (2,4), (1,0) }

Definição 2 (Relação entre conjuntos): Seja R uma relação e sejam A e B conjuntos. Dizemos que R é uma *relação sobre* A desde que $R \subseteq A \times A$ e R é uma *relação de* A em (para) B se $R \subseteq A \times B$.

Exemplo: Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { 3, 4, 5, 6} temos as relações:

1) R = { (1,3), (2,3), (1,1) } é sobre A;
2) S = { (3,3), (3,4), (4,6) } é sobre B;
3) T = { (1,3), (1,4), (2,6) } é de A em B.

Definição e propriedades

Uma relação de *A* em *B* é um subconjunto *R* de pares ordenados onde:

- o primeiro elemento do par vem de *A;*
- o segundo elemento do par vem de *B.*

Usamos xRy para indicar (x, y) ∈ R. Dessa forma, temos que x está **relacionado** com y por *R.*

Formalmente,

$$\boxed{xRy \Leftrightarrow ((x, y) \in R)}$$

OBS.: Alguns autores definem a relação aqui discutida como relação binária, porque ela relaciona elementos de dois conjuntos. Se forem mais de 2 conjuntos temos uma relação n-ária.

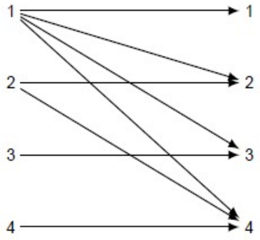
Definição e propriedades

Ex.1: Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$

$R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ é uma relação de A para B

Ex.2: Seja A = {1, 2, 3, 4}

Representação Gráfica e Tabular



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Definição e propriedades

Normalmente uma relação R entre dois conjuntos ou num mesmo conjunto, é expresso por uma propriedade.

Exemplo 2: Seja o conjunto A = { 1, 2, 3, 4}.

a) Construa a relação R = { (a,b) | a dividido por b é um número inteiro} .

b) Construa a representação gráfica e tabular.

Definição e propriedades

Exemplo 3:

Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em $\mathbb{N}$, decida quais entre os pares ordenados dados pertencem à R:

(a) $xRy = \{(x, y) \mid x = y + 1\}$. Pares $(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)$.

(b) $xRy = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\ \}$. Pares $(2, 4), (2, 5), (2, 6)$.

(c) $xRy = \{(x, y) \mid x \text{ é ímpar }\}$. Pares $(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$.

(d) $xRy = \{(x, y) \mid x > y^2\ \}$. Pares $(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)$.

Definição e propriedades

Definição (Relação inversa): Seja R uma relação. A *inversa* de R, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em R.

Exemplo: Seja $R = \{ (1,3), (2,4), (3,6)\}$

Então $R^{-1} = \{ (3,1), (4,2), (6,3)\}$

OBS.: Se R é uma relação sobre A, então R^{-1} também o é. Se R é uma relação de A em B, então R^{-1} é uma relação de B em A.

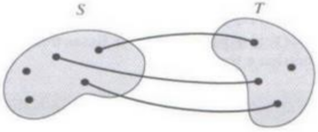
Exercício: Dados $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Construa uma relação e sua inversa:

a) de A em B b) sobre B.

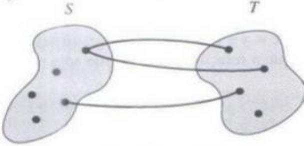
Definição e propriedades

Uma relação *xRy* pode ser classificada em:

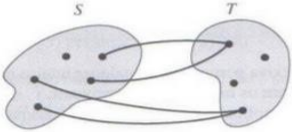
- **um pra um**: componentes *x* e *y* aparecem apenas uma vez em *R*
- **um para muitos**: componente *x* aparece em mais de um par
- **muitos para um**: componente *y* aparece em mais de um par
- **muitos para muitos**: componente *x* e *y* aparecem em mais de um par



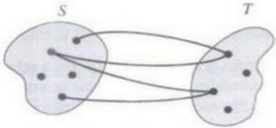
Um para um



Um para muitos



Muitos para um



Muitos para muitos

Definição e propriedades

Exercício: Sobre as seguintes relações, identifique quais são do tipo "um para um", "um para muitos", "muitos para um" ou "muitos para muitos".

(a) $R = \{(5,2), (7,5), (9,2)\}$
(b) $R = \{(2,5), (5,7), (7,2)\}$
(c) $R = \{(7,9), (2,5), (9,9), (2,7)\}$

Definição e propriedades

Quantas relações existem em um conjunto A com n elementos?

- Quantos elementos tem o produto cartesiano $A \times A$?
- $|A \times A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = n^2$
- Um conjunto qualquer com m elementos possui 2^m subconjuntos
- Uma relação R em A é um subconjunto de $A \times A$
- Logo, existe uma relação em $A \times A$ para cada subconjunto de $A \times A$
- Como $A \times A$ possui n^2 elementos, existem $2^{(n^2)}$ relações em $A \times A$.

Exemplo: Seja A = {1,2}. Determine todas as relações de AxA.

Propriedades

Propriedade Reflexiva: Uma relação R em um conjunto A é chamada de **reflexiva** se (x, x) ∈ R para todo elemento x ∈ A.

Todo x está relacionado a sí mesmo

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Quais relações são reflexivas?

Propriedades

Propriedade Simétrica: Uma relação R em um conjunto A é chamada de **simétrica** se (y, x) ∈ R sempre que (x, y) ∈ R.

Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x.

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4)(4,1),(4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são simétricas?

Propriedades

Propriedade Antissimétrica: Uma relação R em um conjunto A é chamada **antissimétrica** se, para quaisquer x, y ∈ A, se (x, y) ∈ R e (y, x) ∈ R, então x = y.

Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$.

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são anti-simétricas?

Propriedades

Propriedade Transitiva: Uma relação R em um conjunto A é chamada **transitiva** se, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$, $x, y, z \in A$.

Se x está relacionado a y, e y está relacionado a z, então x está relacionado a z.

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são transitivas?

Resumo das Propriedades

Propriedade	Lógica	Linguagem Natural
Reflexiva	$\forall x \in A((x,x) \in R)$	Todo x está relacionado a sí mesmo
Simétrica	$\forall x \forall y\ ((x,y) \in R \to (y,x) \in R)$	Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x
Anti-Simétrica	$\forall x \forall y\ ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \to (x = y))$	Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$
Transitiva	$\forall x \forall y \forall z\Big(((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R)\Big)$	Se x está relacionado a y, e y está relacionado a z, então x está relacionado a z

Propriedades

Exemplos

3) Verifique se as relações são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas:

a) $R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$
b) $R_2 = \{(a, b) | a > b\}$
c) $R_3 = \{(a, b) | a = b\}$
d) $R_4 = \{(a, b) | a = b + 1\}$
e) $R_5 = \{(a, b) | a + b \leq 3\}$

Representação de Relações com grafos

Definição (grafo direcionado): um grafo direcionado ou dígrafo consiste em um conjunto V de vértices e um conjunto E de pares ordenados de elementos de V (arestas).

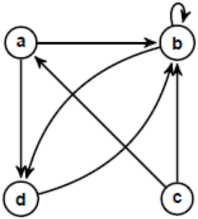
Uma relação R sobre A é ilustrada por um grafo quando:

- Cada elemento de A é representado por um vértice do grafo.
- Cada par ordenado de R é representado por uma aresta direcionada.

Relações com grafos

Exemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$.



Exercício: represente usando grafos a seguinte relação R={(1,3),(1,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(2,4),(4,3)} sobre A, sabendo que o conjunto A é dado por A={1,2,3,4,5}.

Fecho

- Assuma que R é uma relação binária sobre um conjunto A
- Assuma que R **não possui uma dada propriedade** P
- Podemos 'estender' R para obter uma nova relação R^* que contenha P
  - R^* **conterá os pares** de R: $R \subseteq R^*$
  - R^* **conterá pares adicionais**
  - Tais pares adicionais fazem com que a propriedade P seja válida
  - R^* é o **menor conjunto** com tal propriedade
  - Se existir uma relação S que contém R e possui P, então $R^* \subseteq S$
- Denominamos a relação R^* de **fecho** de R

Fecho

Definição (Fecho de uma Relação)

Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e P uma propriedade.
*O **fecho** de R é uma relação binária R^* em A que possui a propriedade P e satisfaz:*

1. *R^* tem a propriedade P*
2. *$R \subseteq R^*$*
3. *Se S é uma relação qualquer que contém R e satisfaz P, então $R^* \subseteq S$*

Tipos de fechos:

- Reflexivo
- Simétrico
- Transitivo

Se uma relação R já possui uma propriedade, então ela é o seu próprio fecho em relação a mesma propriedade.

Fecho Reflexivo

Definição (Fecho Reflexivo)

*O **fecho reflexivo** R^* de uma relação binária R em A é*

$$R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$$

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- R não possui a **propriedade reflexiva**
- **Fecho Reflexivo**: $R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), \boxed{(2,2)}, (2, 3), \boxed{(3,3)}\}$$

- R^* é uma relação reflexiva e $R \subseteq R^*$.

Fecho Simétrico

Definição (Fecho Simétrico)

*O **fecho simétrico** R^* de uma relação binária R em A é*

$$R^* = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- R não possui a **propriedade simétrica**
- **Fecho Simétrico**: $R^* = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R \land (y, x) \notin R\}$

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), \boxed{(2,1)}, (1, 3), (3, 1), (2, 3), \boxed{(3,2)}\}$$

- R^* é uma relação simétrica e $R \subseteq R^*$.

Fecho Transitivo

Definição (Fecho Transitivo)

*O **fecho transitivo** R^* de uma relação binária R em A é uma relação binária que satisfaz:*

1. R^* é transitiva

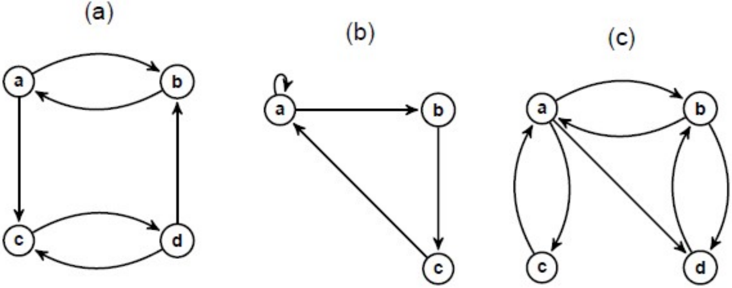
2. $R \subseteq R^*$

3. Se S é outra relação transitiva que contém R, $R^* \subseteq S$.

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- R não possui a **propriedade transitiva**
- Aplicando passos sucessivos para encontrar o **Fecho Transitivo** R^*:
  - 1) $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \boxed{(3,2)}, \boxed{(3,3)}, \boxed{(2,1)}\}$
  - 2) $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), \boxed{(2,2)}\}$
- R^* é uma relação transitiva e $R \subseteq R^*$.
- Se S é outra relação transitiva que contém R, então $R \subseteq R^*$ e $R^* \subseteq S$.

Fecho Transitivo

Exercício: encontre o fecho reflexivo, simétrico e transitivo, em cada caso:



Relações de Equivalência

Definição: (Relações de Equivalência)
Uma relação binária em um conjunto A que é **reflexiva, simétrica** e **transitiva** é chamada de **relação de equivalência** em A.

Exemplos: (Relações de Equivalência)

1) $R = \{(x, y) \mid x = y\}$, sobre qualquer conjunto S

2) $R = \{(x, y) \mid x + y$ é par $\}$, sobre o conjunto N

3) $R = \{(x, y) \mid x$ senta na mesma fileira de $y \}$, sobre $\{x \mid x$ é aluno da turma$\}$.

4) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$.

Relações de Equivalência

Exemplo 1: Verifique se a relação R sobre o conjunto dos números reais tal que a relaciona b se e somente se a-b$\in \mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência.

Reflexiva: seja o número inteiro a, então, a-a=0. E 0 está no conjunto dos inteiros;

Simétrica: sejam os números inteiros a e b, então, a-b=t, onde t é um número inteiro. E b-a=-t, e –t também é inteiro.

Transitiva: sejam os números reais a, b e c. Perceba que b-a e c-b pertencem aos inteiros. Agora, note que

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

Logo, a-c também pertence aos inteiros.

Conclusão: R é uma relação de equivalência.

Relações de Equivalência

Exemplo 2: Seja R a relação "x dividido por y é inteiro" no conjunto dos números inteiros com exceção do zero. R é uma relação de equivalência?

Reflexiva: seja o número inteiro a, então, a/a=1. E 1 está no conjunto dos inteiros;

Simétrica: sejam os números inteiros a e b, então, a/b=t, onde t é um número inteiro. E b/a=1/t, e 1/t só é inteiro se t=1.

Conclusão: R não é uma relação de equivalência.

Congruência módulo m

Definição (Congruência Módulo m)

Se x e y são inteiros e $m > 1$ é um inteiro positivo,
$x \equiv y \pmod{m}$ se $x - y$ é um múltiplo inteiro de m

- Exemplo: 27 e 2 são **congruentes** módulo 5, pois $27 \equiv 2 \pmod{5}$
- Exemplos:
  - $10 \equiv 2 \pmod{4}$, pois 4 divide 10-2
  - $35 \equiv 10 \pmod{5}$, pois 5 divide 35-10
  - $38 \equiv 2 \pmod{12}$, pois 12 divide 38-2