SAE 2023: **graphes**

I) Introduction:

Cette SAE "graphes" est la suite de la SAE "les aventuriers du rail" que vous avez déjà commencée. Il s'agit de programmer en java des méthodes et des algorithmes "génériques" de la théorie des graphes afin de les appliquer ensuite aux graphes du jeu des "aventuriers du rail". Ces méthodes et ces algorithmes utiliseront les concepts que vous verrez dans le cours de mathématiques.

Une partie de votre note (40%) sera celle que vous obtiendrez en groupe pour la programmation en java de ces algorithmes, une autre partie (60%) sera individuelle sous la forme d'une interrogation écrite. Cette interrogation nous permettra de vérifier votre implication réelle dans le projet.

II) Notations, définitions:

On suppose dans toute cette SAE, que les graphes sont simples, non orientés et valués aux arêtes (la valuation sera strictement positive). Les arêtes d'un graphe pouvant représenter soit des voies ferroviaires soit des voies maritimes, elles seront dotées, en plus de leur valuation, d'une etiquette F ou M . Un graphe renvoyé par le jeu "les aventuriers du rail" est défini à partir d'une liste d'arêtes pondérées et etiquetées par F ou M et d'un entier $n \geq 1$ (qui est l'ordre du graphe).

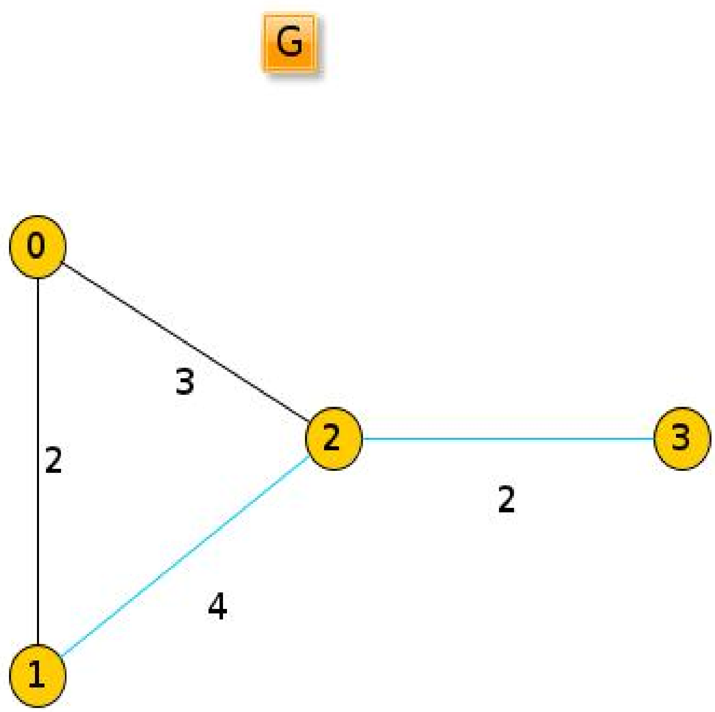
les sommets du graphes "mathématiques" sont par défaut $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Ces sommets correspondent évidemment à des villes du jeu mais nous oublierons ce lien dans cette partie de la SAE.

Une arête est donnée sous la forme d'un quadruplet $(1, 3, 4, F)$: ici il s'agit d'une arête d'extrémités 1 et 3, de valuation 4 correspondant à une voie ferroviaire.

Pour un graphe simple et non orienté cette arête est considérée comme équivalente à l'arête $(3, 1, 4, F)$ et ne doit apparaître qu'une seule fois sous l'une des deux formes équivalentes. De plus, le graphe étant simple cette arête ne peut pas apparaître avec une autre valuation ou une autre étiquette.

Prenons par exemple le graphe $G = (X = \{0, 1, 2, 3\}, E = \{01, 02, 12, 23\})$ muni de la valuation v définie par: $v(01) = 2$; $v(02) = 3$; $v(12) = 4$ et $v(23) = 2$. On donne de plus les étiquettes suivantes: $e(01) = e(02) = F$ et $e(12) = e(23) = M$

Une représentation de ce graphe, de sa valuation et de ses étiquettes est donnée ci-dessous (on a mis en bleu les voies maritimes et en noir les voies ferroviaires):



Un tel graphe sera défini "informatiquement" par la donnée de l'entier $n = 4$ (l'ordre du graphe) et une liste d'arêtes:

$$((0, 1, 2, F), (0, 2, 3, F), (1, 2, 4, M), (2, 3, 2, M))$$

Attention: la liste n'est pas unique et on ne peut évidemment pas choisir le nom des sommets. Ce n'est donc pas une définition mathématique d'un graphe.

Dans un premier temps on ne s'occupera pas des étiquettes M ou F . On négligera donc cette information pour les premiers algorithmes.

A chaque sommet on peut faire correspondre sa liste d'adjacence avec les valuations et les étiquettes correspondantes:

- listeAdj(2) $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ F & M & M \end{pmatrix}$.
- listeAdj(0) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ F & F \end{pmatrix}$.

On utilisera dans cette SAE la notion de parcours:

définitions :

1. Un parcours π d'un graphe G est une **liste non vide et ordonnée de sommets de G** telle que deux sommets consécutifs soient **adjacents dans G**.
2. Un parcours **élémentaire** de G est un parcours de G sans répétition de sommets.
3. La longueur d'un parcours π, notée $|\pi|$, est son nombre de sommets moins un , c'est à dire le nombres d'arêtes parcourues.

remarques :

1. On accepte les parcours de longueur nulle : $\pi_1 = (1)$ est un parcours de longueur nulle du graphe G du début.
2. Une chaîne d'extrémités a et b admet un unique parcours élémentaire de a vers b .
3. A tout parcours élémentaire π de G correspond une chaîne P de G qui a pour sommets ceux de π et pour arêtes celles de π.
4. Dans cette SAE on utilisera aussi des parcours sans répétition d'arêtes.

exemples : (Avec le graphe du début)

1. $\pi_2 = (1, 0, 2, 3, 2, 1, 2)$ est un parcours du graphe G de 1 vers 2 dans lequel le sommet 2 a 3 occurrences.
2. $\pi_3 = (1, 0, 2, 3)$ est un parcours élémentaire de G . La chaîne associée est $P_3 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{10, 02, 23\})$. On pouvait aussi associer à cette chaîne le parcours élémentaire $(3, 2, 0, 1)$.
3. La liste ordonnée $(0, 3, 1)$ de sommets de G n'est pas un parcours de G.

III) Méthodes génériques sur les graphes (à programmer):

Voici la liste des méthodes à programmer:

nom de la méthode	entrées	sorties	commentaires
degre	un sommet x de G	$deg_G(x)$ un entier	
EstsousGraphe	2 graphes G' et G	un booléen	renvoie vraie si $G' \subseteq G$
induit	une liste de sommets X	une liste d'arêtes	renvoie les arêtes de $G[X]$
estIsomorphe	un graphe G'	un booléen	vrai si G' isomorphe à G
estComplet	(méthode de G)	un booléen	
complementaire	(méthode de G)	une liste d'arêtes	
estChaine	(méthode de G)	un booléen	
estCycle	(méthode de G)	un booléen	
chaineExtraite	2 listes P_{xy}et P_{yz}	une liste de sommet P_{xz}	les listes sont des chaînes de G
avoirDesCycles	(méthode de G)	un booléen	
classe	un sommet x de G	une liste de sommets	classe de connexité
estConnexe	(méthode de G)	un booléen	
nombreDeClasses	(méthode de G)	un entier	
estUnIsthme	une arête (x,y)	un booléen	
estUn arbre	(méthode de G)	un booléen	
dijkstra	deux sommets	un réel, une liste de sommet	
sontConnectés	2 sommets et G	un booléen	

(L'algorithme de Dijkstra sera présenté lors d'une séance de SAE et fera donc parti des questions posées à l'interrogation).

IV) 2 méthodes supplémentaires pour le jeu:

- trouver le parcours le plus court entre deux sommets avec une contrainte sur les types d'arêtes: certaines arêtes représentent des voies maritimes (correspondant à l'étiquette M) d'autres des voies ferroviaires(F). En fonction des cartes dont le joueur dispose il ne peut pas dépasser une certaine distance en voies ferroviaires et une certaine distance en voies maritimes.
- les cartes itinéraires: on se donne un sous ensemble de sommets et un graphe. Il s'agit de savoir s'il existe un parcours sans répétition d'arêtes passant par tous ces sommets.