粒子滤波

Kalman 滤波根据线性高斯模型可以求得解析解，但是在非线性，非高斯的情况，是无法得到解析解的，对这类一般的情况，我们叫做粒子滤波，我们需要求得概率分布，需要采用采样的方式。

我们希望应用 Monte Carlo 方法来进行采样，对于一个概率分布，如果我们希望计算依这个分布的某个函数 $f(z)$ 的期望，可以利用某种抽样方法，在这个概率分布中抽取 N 个样本，则 $\mathbb{E}[f(z)]\simeq\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N f(z_i)$。但是如果这个概率十分复杂，那么采样比较困难。对于复杂的概率分布，我们可以通过一个简单的概率分布 $q(z)$ 作为桥梁（重要值采样）：

$$\mathbb{E}[f(z)]=\int_z f(z)p(z)dz=\int_z f(z)\frac{p(z)}{q(z)}q(z)dz=\sum\limits_{i=1}^N f(z_i)\frac{p(z_i)}{q(z_i)} \tag{1}$$

于是直接通过对 $q(z)$ 采样，然后对每一个采样的样本应用权重就得到了期望的近似，当然为了概率分布的特性，我们需要对权重进行归一化。

在滤波问题中，需要求解 $p(z_t|x_{1:t})$，其权重为：

$$w_t^i=\frac{p(z_t^i|x_{1:t})}{q(z_t^i|x_{1:t})},i=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

于是在每一个时刻 t，都需要采样 N 个点，但是即使采样了这么多点，分子上面的那一项也十分难求，于是希望找到一个关于权重的递推公式。为了解决这个问题，引入序列重要性采样（SIS）。

SIS

在 SIS 中，解决的问题是 $p(z_{1:t}|x_{1:t})$。

$$w_t^i\propto\frac{p(z_{1:t}|x_{1:t})}{q(z_{1:t}|x_{1:t})} \tag{3}$$

根据 LDS 中的推导：

$$\begin{aligned}p(z_{1:t}|x_{1:t})\propto p(x_{1:t},z_{1:t})&=p(x_t|z_{1:t},x_{1:t-1})p(z_{1:t},x_{1:t-1})\\&=p(x_t|z_t)p(z_t|x_{1:t-1},z_{1:t-1})p(x_{1:t-1},z_{1:t-1})\\&=p(x_t|z_t)p(z_t|z_{t-1})p(x_{1:t-1},z_{1:t-1})\\&\propto p(x_t|z_t)p(z_t|z_{t-1})p(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})\end{aligned} \tag{4}$$

于是分子的递推式就得到了。对于提议分布的分母，可以取：

$$q(z_{1:t}|x_{1:t})=q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})q(z_{1:t-1}|x_{1:t-1}) \tag{5}$$

所以有：

$$w_t^i\propto\frac{p(z_{1:t}|x_{1:t})}{q(z_{1:t}|x_{1:t})}\propto\frac{p(x_t|z_t)p(z_t|z_{t-1})p(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})}{q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})q(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})}=\frac{p(x_t|z_t)p(z_t|z_{t-1})}{q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}w_{t-1}^i \tag{6}$$

我们得到的对权重的算法为：

1. $t-1$ 时刻，采样完成并计算得到权重
2. t 时刻，根据 $q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})$ 进行采样得到 z_t^i。然后计算得到 N 个权重。
3. 最后对权重归一化。

SIS 算法会出现权值退化的情况，在一定时间后，可能会出现大部分权重都逼近0的情况，这是由于空间维度越来越高，需要的样本也越来越多。解决这个问题的方法有：

1. 重采样，以权重作为概率分布，重新在已经采样的样本中采样，然后所有样本的权重相同，这个方法的思路是将权重作为概率分布，然后得到累积密度函数，在累积密度上取点（阶梯函数）。
2. 选择一个合适的提议分布，$q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})=p(z_t|z_{t-1})$，于是就消掉了一项，并且采样的概率就是 $p(z_t|z_{t-1})$，这就叫做生成与测试方法。

采用重采样的 SIS 算法就是基本的粒子滤波算法。如果像上面那样选择提议分布，这个算法叫做 SIR 算法。