特性方程式について

著者

2023 年 9 月 9 日

概要

漸化式の特性方程式について書きました.

1　特性方程式について

$N \geq 1$ に対して，$N+1$ 項間斉次漸化式

$$a_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} p_k a_{n+k} \quad (n \geq 0) \tag{1.1}$$

を考える.

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n+N-1} \\ a_{n+N-2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p_{N-1} & \cdots & p_1 & p_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，漸化式 (1.1) は

$$\boldsymbol{a}_{n+1} = A\boldsymbol{a}_n \quad (n \geq 0)$$

と表される．したがって，

$$\boldsymbol{a}_n = A^n \boldsymbol{a}_0$$

が成り立つから，A^n が分かれば a_n も分かることになる.

行列の冪を求める方法の一つに固有多項式の利用がある．A の固有多項式は

$$t^N - \sum_{k=0}^{N-1} p_k t^k$$

であり，あたかも (1.1) の数列部分を t に置き換えたような形をしている．これを漸化式 (1.1) の特性多項式という．特性多項式を $\Phi(t)$ としたとき，方程式 $\Phi(t) = 0$ を特性方程式という.

2　2項間漸化式の固有多項式

(1.1) において，$N = 1$ とした場合を考える．このときの特性方程式は

$$t - p_0 = 0$$

である．

対して，定数項として q を加えた漸化式

$$a_{n+1} = p_0 a_n + q$$

について，その特性方程式が

$$t = p_0 t + q \tag{2.1}$$

であると学んだ人も多いと思う．すでに見た通り，特性方程式とは，そもそも斉次線形漸化式に対して定義されるものである．したがって，方程式 (2.1) を特性多項式と呼ぶのは適切ではない．