定義 1.1　集合 A とその上の二項演算 $\cdot, \circ$ が以下の条件を満たすとき，三つ組 $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ を skew (left) brace と呼ぶ：

1. $\langle A, \cdot \rangle$ と $\langle A, \circ \rangle$ は群である．
2. 任意の $a, b, c \in A$ が brace **関係式**（brace relation）

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c)$$

を満たす．ここで，a^{-1} は a の $\cdot$ に関する逆元である．

以下，$\langle A, \cdot, \circ \rangle$ は skew brace とする．

群 $\langle A, \cdot \rangle$ を A **の加法群**（additive group）と呼び，群 $\langle A, \circ \rangle$ を A **の乗法群**（multiplicative group）と呼ぶ．$a \in A$ の乗法に関する逆元を $\overline{a}$ で表す．

加法 $\cdot$ と乗法 $\circ$ が混ざった式においては，加法を優先的に計算すると取り決めておく．また，加法の記号は適宜省略する．この取り決めによって，例えば，brace 関係式は

$$a \circ bc = (a \circ b)a^{-1}(a \circ c)$$

と表される．

命題 1.2　$\langle A, \cdot \rangle$ の単位元と $\langle A, \circ \rangle$ の単位元は一致する．

A の単位元を 1 で表す．

A 上の二項演算 $\cdot_{\mathrm{op}}$ を

$$a \cdot^{\mathrm{op}} b = ba$$

と定めると，三つ組 $\langle A, \cdot^{\mathrm{op}}, \circ \rangle$ は skew brace となる．この skew brace を A^{op} で表す．

任意の $a \in A$ に対して，写像 $\lambda_a \colon A \to A$ を

$$\lambda_a(b) = a^{-1}(a \circ b)$$

で定める．さらに，A に関する**ラムダ写像**（lambda map）$\lambda \colon A \to A^A$ を

$$\lambda(a) = \lambda_a$$

で定める．

命題 1.3　以下が成り立つ：

1. ラムダ写像 λ は乗法に関する群準同型である．
2. 任意の $a \in A$ に対して，$\lambda_a \in \mathrm{Aut}\,\langle A, \cdot \rangle$ である．

証明

1. 任意の $a, b, c \in A$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(\lambda_a \circ \lambda_b)(c) &= a^{-1}(a \circ b^{-1}(b \circ c)) \\
&= a^{-1}(a \circ b^{-1})a^{-1}(a \circ b \circ c) \\
&= (a \circ b)^{-1}((a \circ b) \circ c) \\
&= \lambda_{a \circ b}(c)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，$\lambda_{a \circ b} = \lambda_a \circ \lambda_b$ だから，λ は群準同型写像である．

2. 任意の $b, c \in A$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\lambda_a(bc) &= a^{-1}(a \circ bc) \\
&= a^{-1}(a \circ b)a^{-1}(a \circ c) \\
&= \lambda_a(b)\,\lambda_a(c)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$\lambda_a \in \mathrm{End}\,\langle A, \cdot \rangle$ である．また，$\lambda_{\overline{a}} = {\lambda_a}^{-1}$ なので，λ_a は群同型写像である． ■

A^{op} に関するラムダ写像を λ^{op} で表す．命題 1.3 より，λ^{op} は $\langle A, \circ \rangle$ から $\mathrm{Aut}\,\langle A, \cdot^{\mathrm{op}} \rangle = \mathrm{Aut}\,\langle A, \cdot \rangle$ への群準同型写像である．また，

$$\lambda^{\mathrm{op}}_a(b) = (a \circ b)a^{-1}$$

である．

$\langle \langle A, \cdot \rangle, \lambda^{\mathrm{op}} \rangle$ は $\langle A, \circ \rangle$ の群としての作用であるから，半直積 $\Lambda_A = \langle A, \cdot \rangle \rtimes_{\lambda^{\mathrm{op}}} \langle A, \circ \rangle$ が定まる．

定義 1.4　X を集合とする．X への 2 つの作用 $\beta\colon \langle A, \cdot \rangle \to \mathrm{Hom}(X, X)$ と $\rho\colon \langle A, \circ \rangle \to \mathrm{Hom}(X, X)$ が，関係式

$$\beta(\lambda^{\mathrm{op}}_a(b)) = \rho(a) \circ \beta(b) \circ \rho(a)^{-1}$$

を満たすとき，三つ組 $\langle X, \beta, \rho \rangle$ を A の作用と呼ぶ．

Λ_A は自然に A 集合となる．

X を A 集合とする．

命題 1.5　X を A 集合としたとき，以下が成り立つ：

1. 任意の $a \in A$ と $x \in X$ に対して，$a \circ A \cdot x = A \cdot (a \circ x)$ が成り立つ．
2. $A \cdot (A \circ x)$ は A 集合である．
3.