1　数学 1A

1.1　数と式

1.1.1　集合と命題

まず数学で扱ういわゆる問題について次のように定めておく.

定義 1.1. 正しいか正しくないかを決めることができる文を**命題**という. また, 命題が正しいときその命題は**真**であるといい, 正しくないときその命題は**偽**であるという.

次の例で見るように, 命題を書くとき, 誤解の無いよう「」または『』で囲うことがあるが, これは省略してもよい. また, 命題そのものを文字で置くことがあるが, そのときは大抵 p, q, $r, \ldots$ のように p から順番に用いて表す[*1].

例 1.1. 「2 は偶数である」は命題であり, 真である. また, 「2 は奇数である」は命題であり, 偽である. 「2 は美しい」は人によって真偽が変わるから, 命題でない.

例 1.2. 「水は液体である」は命題であり, 真である. 「水は水である」は命題であり, 真である.

例 1.3. 「$x-1=3$」は x が何か分からないので真偽を判定できないから, 命題でない (「$x-1$ は 3 である」と読み替えると分かりやすい). しかし, x に 4 を代入すれば「$3=3$」という真の命題となり, x に 3 を代入すれば「$2=3$」という偽の命題となる.

例 1.3 のような, x を定めることで命題となる文を **x に関する条件**, または単に**条件**という.
いくつかの決まった言い回しを紹介しておく.

定義 1.2. p, q は条件とする.

1. 「p が真かつ q が真」という条件を「p かつ q」で表す.
2. 「p が真または q が真」という条件を「p または q」で表す.
3. 「p でない」という条件を p の**否定**といい, $\overline{p}$ で表す.
4. 「p が真のとき q も真である」という条件を「p ならば q」または $p \Rightarrow q$ で表す. また, $p \Rightarrow q$ が真のとき, p は q であるための**十分条件**であるといい, q は p であるための**必要条件**であるという.
5. 『「$p \Rightarrow q$」かつ「$q \Rightarrow p$」』という命題を $p \Leftrightarrow q$ で表す. $p \Leftrightarrow q$ が真のとき, p は q であるための**必要十分条件**である, または p と q は**同値**であるという.

[*1] proposition の頭文字である.

2 について, p と q がどちらも成り立つときも「p または q」は真であることに注意したい. また, 4 において, 左右を入れ替えて $q \Leftarrow p$ と表すこともあるが, 意味することは変わらない.

これらの記号や言葉を使いこなせれば, 数学の見通しが非常に良くなる.

次に, 集合について学んでいく.

定義 1.3. ある条件を満たすものの集まりを**集合**といい, 集合を構成するものそれぞれを**要素**または**元**という. また, x が集合 X の要素の 1 つであるとき, x は X に**属する**といい, $x \in X$ と表す.

大抵の場合, 集合は A, B などの大文字, 要素は a, b などの小文字を用いて表す. また, x が集合 X に属さないことを $x \notin X$ で表す. さらに, 左右を入れ替えて $X \ni x$ や $X \not\ni x$ と表すこともあるが, 意味することはそれぞれ変わらない.

例 1.4. 0 以上 3 以下の自然数全体の集合 A を考える. A の要素 a が満たす条件は「a は自然数かつ $0 \leqq a \leqq 3$」である. 従って, A の要素は 1, 2, 3 の 3 つであり, $2 \in A$ や $4 \notin A$ などが成り立つ.

このとき, A の要素を明らかにして $A = \{1, 2, 3\}$ と表すことができる. この表し方を外延的記法といい, 集合に属する要素が少ないときに有効である.

例 1.5. 集合 $B = \{1, 3, 7\}$ を考える. B の要素は明らかであるが, 定義に従うと, B の要素 b が満たす条件は「$b = 1$ または $b = 3$ または $b = 7$」である.

例 1.6. 自然数全体の集合 N を考える. N の要素 n が満たすべき条件は「n は自然数である」である. 従って, N の要素は 1, 2, 3, 4,$\ldots$ のように無限に存在する.

このとき, N の要素の満たす条件を用いて $N = \{\, n \mid n \text{ は自然数} \,\}$ のように表すことができる. この表し方を内包的記法といい, 要素の条件が分かっているときに有効である.

定義 1.4. 要素を持たない集合を**空集合**といい, $\emptyset$ で表す.

定義 1.5. A, B を集合とする. すべての A の要素が B にも属しているとき, A は B の**部分集合**であるといい, $A \subset B$ で表す.

定義 1.6.

1.2　必要性と十分性

2　数学 2B

2.1　面積を求める積分

2 つの多項式に囲まれた面積を求めるとき, その立式が簡単にできる場合がある.
$f(x)$, $g(x)$ を多項式とする.

2.2　積分と平行移動

置換積分

2.3　二次関数と接線について

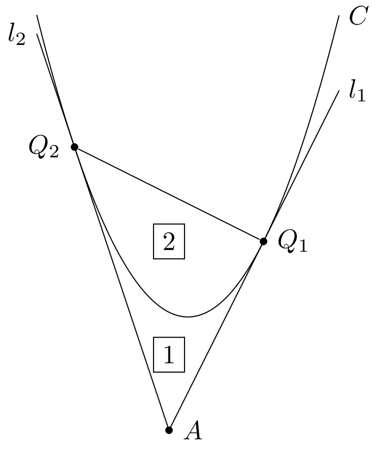

図 1

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ のグラフ C に, ある点 A から 2 本の接線 l_1, l_2 を引けたとする. C と l_1 の交点を Q_1, C と l_2 の交点を Q_2 とすれば, C は三角形 $\triangle AQ_1Q_2$ を分割し, その面積比は図 1 のように $1 : 2$ となる.

証明. $\triangle AQ_1Q_2$ は平行移動によって面積を変えないから, $A = O = (0, 0)$ としても一般性を失わない. A から C に引いた接線の傾きを m, 接点を $P = (p, q)$ とすれば, 条件より

$$\begin{cases} q = mp & (2.1) \\ q = ap^2 + bp + c & (2.2) \\ m = 2ap + b & (2.3) \end{cases}$$

を得る. (2.1) に (2.3) を代入して $q = 2ap^2 + bp$ が分かり, さらにこれを (2.2) に代入すれば, p についての 2 次方程式 $ap^2 - c = 0$ を得る. 仮定より, 相異なる接点が 2 つ存在するのだから, この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解

$$p = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

をもつ. 簡単のために, 以下 $p = \sqrt{c/a}$ とする. このとき, C と直線 Q_1Q_2 に囲まれた面積を

S, C と l_1, l_2 に囲まれた面積を T とすれば, それぞれ

$$\begin{aligned} S &= \left| a \int_{-p}^{p} \left(x^2 - p^2\right) \, dx \right| \\ &= \frac{4|a|}{3} p^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \left| a \int_{-p}^{0} (x+p)^2 \, dx \right| + \left| a \int_{0}^{p} (x-p)^2 \, dx \right| \\ &= \frac{2|a|}{3} p^3 \end{aligned}$$

となるので, たしかに $S : T = 2 : 1$ となることが分かる. □

上では A を定めてから l_1, l_2 を定めているが, この順番は逆でもよい. つまり, C に相異なる 2 つの接線 l_1, l_2 を引き, これらの接線の唯一の交点を A と定めてもよい. 一般に, 互いに平行でない 2 つの直線の交点はただ一つに定まる.

3 発展的な内容

3.1 ほげ

参考文献

[1] 嘉田勝, 『論理と数学から始める数学の基礎』, 日本評論社, 2018