G を有限群とし，$H \leq G \trianglerighteq N$ とする．

1　$m(G)$ を与える Burnside 環の元について

1.1　Deflation による $m(G)$ の導出

補題 1.1　$|H\backslash G/N| = \dfrac{(G:N)}{(H:H\cap N)} = (G:HN)$.　□

証明　自然な作用 $H \curvearrowright G/N$ を考えればよい．　■

G 集合 X と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\binom{X}{n} = \{\, A \subset X \mid |A| = n \,\}$$

とおく．Gill-Lodà [3] ではこの集合を *n-subsets of X* と呼んでいる．

補題 1.2

$$\left|\binom{G/N}{n}^H\right| = \begin{cases} 0 & ((H:H\cap N) \nmid n), \\ \dbinom{(G:N)/(H:H\cap N)}{n/(H:H\cap N)} & ((H:H\cap N) \mid n). \end{cases}$$　□

証明　$A \in \binom{G/N}{n}^H$ と仮定すると，H は A に作用する．$H_{gN} = H \cap {}^gN = H \cap N$ より，$A \cong \bigsqcup H/(H\cap N)$ が成り立つから，$(H:H\cap N) \mid n$.

$(H:H\cap N) \mid n$ のとき，A は相異なる $H.gN \in H\backslash G/N$ の直和なので，代表元の選び方を考えて $|\binom{G/N}{n}^H| = \binom{|H\backslash G/N|}{n/(H:H\cap N)}$ を得る．　■

一般の G 集合の k-subsets の構造についての先行研究は見つかっていない．ただし，n 次対称群 S_n に関しては，$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ の k-subsets の S_n 集合としての構造が Halasi [4] や Gill, Lodà ら [3] などによりある程度調べられている．

系 1.3 ([2, p.31, LEMMA 1'])

$$\left|\binom{G/\mathbf{1}}{n}^H\right| = \begin{cases} 0 & (|H| \nmid n), \\ \dbinom{(G:H)}{n/|H|} & (|H| \mid n). \end{cases}$$　□

定理 1.4 (Yoshida)

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{K \leq H} |K|\mu(K,H)[G/H]$$

は $\mathbb{Q}B(G)$ における原始的べき等元であり，$\{\, e_H^G \mid [H]_G \in \mathrm{Cl}(G) \,\}$ は $\mathbb{Q}B(G)$ の原始的べき等元全体の集合である． □

$$\sigma_N^G = \sum_{[H]_G \in \mathrm{Cl}(G)} \binom{G/N}{(H : H \cap N)} e_H^G = \sum_{[H]_G \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{(G : N)}{(H : H \cap N)} e_H^G$$

とおく．

定義 1.1 ([1, p. 77, 5.2.2])　$N \triangleleft G$ に対して，

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{XN=G} |X| \mu(X, G)$$

とおく． □

命題 1.5 ([1, p. 91, 5.6.1])

$$m_{G,G} = \begin{cases} 0 & (G\text{: non-cyclic}), \\ \varphi(|G|)/|G| & (G\text{: cyclic}). \end{cases}$$ □

命題 1.6

$$|(\mathrm{Def}_{G/G}^G\, \sigma_N^G)^{G/G}| = \frac{1}{|N|} \sum_{\langle g \rangle \le G} \frac{\varphi(o(g))}{(\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap N)}.$$ □

証明

$$\begin{aligned} |(\mathrm{Def}_{G/G}^G\, \sigma_N^G)^{G/G}| &= \sum_{[H]_G \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{(G : N)}{(H : H \cap N)} \frac{1}{(N_G(H) : H)} m_{H,H} \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{[H]_G \in \mathrm{Cl}(G) \\ H\text{: cyclic}}} (G : N_G(H)) \frac{\varphi(|H|)}{(H : H \cap N)} \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H \le G \\ H\text{: cyclic}}} \frac{\varphi(|H|)}{(H : H \cap N)} \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{\langle g \rangle \le G} \frac{\varphi(o(g))}{(\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap N)}. \end{aligned}$$ ■

$m(G) = \sum_{g \in G} \frac{1}{o(g)}$ とおく．

系 1.7　$|\,\mathrm{Def}_{G/G}^G(\sigma_{\mathbf{1}}^G)^{G/G}| = m(G)$. □

1.2　σ_N^G のその他の性質について

命題 1.8 ([1, p. 79, 5.3.1])　$N \lhd M \lhd G$ に対して，$m_{G,M} = m_{G,N} m_{G/N,M/N}$.　□

特に，任意の $H \leq G$ に対して，

$$m_{H,H} = m_{H,H\cap N} m_{H/(H\cap N),H/(H\cap N)} \tag{1.1}$$

が成り立つ．

この命題から，$M, N \lhd G$ に対して，命題 1.6 の一般化

$$\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma_N^G = \frac{1}{|N|}\sum_{\langle g\rangle \leq G}(N_G(\langle g\rangle M):\langle g\rangle M)\frac{|\langle g\rangle\cap N|}{|\langle g\rangle\cap M|}\frac{\varphi(o(g))}{\varphi((\langle g\rangle:\langle g\rangle\cap M))}e^{G/M}_{\langle g\rangle M/M}.$$

が想像できる．しかし，これを導出するには式 (1.1) の両辺を $m_{H/(H\cap N),H/(H\cap N)}$ で割る必要がある．

定理 1.4 における e_H^G の具体的な表示を用いれば，次の関係式を得る．

命題 1.9

$$m(G) = |S(G)| + \sum_{K<H\leq G}\frac{\mu(K,H)}{(H:K)}.$$

ここで，$S(G)$ は G の部分群全体の集合である．　□

証明

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{1}}^G &= \sum_{[H]_G\in \mathrm{Cl}(G)}(G:H)\left(\frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{K\leq H}|K|\mu(K,H)[G/H]\right)\\ &= \sum_{K\leq H\leq G}\frac{\mu(K,H)}{(H:K)}[G/H]\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{Def}^G_{G/G}([G/H]) = [G/HG] = [G/G]$ なので，

$$\begin{aligned}m(G) &= |\,\mathrm{Def}^G_{G/G}(\sigma_{\mathbf{1}}^G)^{G/G}|\\ &= \sum_{K\leq H\leq G}\frac{\mu(K,H)}{(H:K)}\\ &= |S(G)| + \sum_{K<H\leq G}\frac{\mu(K,H)}{(H:K)}.\end{aligned}$$　■

系 1.7 の一般化が得られる．

命題 1.10　$M \triangleleft G$ に対して

$$|(\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_{\mathbf{1}})^{M/M}| = (G:M)m(M). \qquad \square$$

証明

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_N = &\sum_{\substack{[H]_G\in\mathrm{Cl}(G)\\ H\le M}} \frac{(G:N)}{(H:H\cap N)}\frac{(N_G(M):M)}{(N_G(H):H)} m_{H,H} e^{G/M}_{M/M} \\ &+ \sum_{\substack{[H]_G\in\mathrm{Cl}(G)\\ H\not\le M}} \frac{(G:N)}{(H:H\cap N)}\frac{(N_G(HM):HM)}{(N_G(H):H)} m_{H,H\cap M} e^{G/M}_{HM/M}\end{aligned}$$

である．$HM=M \iff H\le M$ なので，命題 1.6 の証明と同様の議論により

$$\begin{aligned}|(\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_N)^{M/M}| &= (N_G(M):M)\sum_{\substack{[H]_G\in\mathrm{Cl}(G)\\ H\le M}} \frac{(G:N)}{(H:H\cap N)}\frac{1}{(N_G(H):H)} m_{H,H} \\ &= (G:MN)\sum_{\langle g\rangle\le M}\frac{\varphi(o(g))}{(\langle g\rangle:\langle g\rangle\cap N)}\end{aligned}$$

が分かる．$N=\mathbf{1}$ とすれば,

$$\begin{aligned}|(\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_{\mathbf{1}})^{M/M}| &= (G:M)\sum_{\langle g\rangle\le M}\frac{\varphi(o(g))}{o(g)} \\ &= (G:M)m(M). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

写像 $a\colon \mathrm{Cl}(G)\to\mathbb{Q}$ に対して，$a_H := a([H]_G)$ とする．

$$\sigma^G_a = \sum_{[H]_G\in\mathrm{Cl}(G)} a_H e^G_H$$

とおく．

命題 1.11　$M \triangleleft G$ に対して

$$|(\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_a)^{M/M}| = \frac{1}{|M|}\sum_{g\in M} a_{\langle g\rangle}. \qquad \square$$

証明

$$\begin{aligned}|(\mathrm{Def}^G_{G/M}\,\sigma^G_a)^{M/M}| &= (N_G(M):M)\sum_{\substack{[H]_G\in\mathrm{Cl}(G)\\ H\le M}} a_H\frac{1}{(N_G(H):H)} m_{H,H} \\ &= \frac{1}{|M|}\sum_{\langle g\rangle\le M} a_{\langle g\rangle}\varphi(o(g)) \\ &= \frac{1}{|M|}\sum_{g\in M} a_{\langle g\rangle}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

2　群の作用する集合の n-subsets の構造について

n は非負整数とする．$n = |G|_p$ の場合の作用を考えることで Sylow p 部分群の存在などが証明できる．

命題 2.1　G 集合 X, Y に対して

$$\binom{X \sqcup Y}{n} \cong \coprod_{k=0}^{n} \binom{X}{n-k} \times \binom{Y}{k}. \qquad \square$$

証明　写像 $f\colon \binom{X \sqcup Y}{n} \to \coprod_{0 \leq k \leq n} \binom{X}{k} \times \binom{Y}{n-k}$ を，任意の $A = A_X \sqcup A_Y \in \binom{X \sqcup Y}{n}$ $(A_\bullet \subset \bullet)$ に対して

$$f(A) = (A_X, A_Y)$$

で定める．

このとき，$\bullet$ は G 集合だから，任意の $g \in G, A \in \binom{X \sqcup Y}{n}$ に対して，$A_\bullet$ は G の作用で $\binom{\bullet}{|A_\bullet|}$ の元となるので

$$f(g.A) = f(g.A_X \sqcup g.A_Y) = g.f(A)$$

が成り立つ．よって，f は G 写像である．f が全単射なことは明らかなので，f は G 同型写像である． ■

一般には次が成り立つ．

命題 2.2　X_i $(i = 1, \ldots, d)$ を G 集合とする．このとき，

$$\binom{\coprod_{i=1}^{d} X_i}{n} \cong \coprod_{\sum_{i=1}^{d} p_i = n} \prod_{i=1}^{d} \binom{X_i}{p_i}. \qquad \square$$

証明　d に関する帰納法で示す．$d = 1$ のときは明らか．また，d で成り立つと仮定すれば

$$\begin{aligned}
\binom{\sqcup_{i=1}^{d+1} X_i}{n} &\cong \coprod_{p_{d+1}=0}^{n} \binom{\coprod_{i=1}^{d} X_i}{n - p_{d+1}} \times \binom{X_{d+1}}{p_{d+1}} \\
&\cong \coprod_{p_{d+1}=0}^{n} \left(\coprod_{\sum_{i=1}^{d} p_i = n - p_{d+1}} \prod_{i=1}^{d} \binom{X_i}{p_i} \right) \times \binom{X_{d+1}}{p_{d+1}} \\
&\cong \coprod_{\sum_{i=1}^{d+1} p_i = n} \prod_{i=1}^{d+1} \binom{X_i}{p_i}.
\end{aligned} \qquad ■$$

任意の G 集合は推移的 G 集合の非交和となるから，命題 2.2 により，任意の G 集合の n-subsets の非交和への分解が得られる．

例 2.1 $H, K \leq G$ とし，$H\backslash G/K$ の完全代表系を $C = \{\, Hg_iK \mid i = 1, \dots, d \,\}$ とする．このとき，

$$\binom{G/H \times G/K}{n} \cong \coprod_{\sum_{i=1}^{d} p_i = n} \prod_{i=1}^{d} \binom{G/(H \cap {}^{g_i}K)}{p_i}.$$

母関数的な考えもできる．

$$b_X^H(x) = \sum_{n=0}^{|X|} \left| \binom{X}{n}^H \right| x^n$$

とおけば，命題 2.2 より $b_{X \sqcup Y}^H(x) = b_X^H(x) b_Y^H(x)$ が成り立つ．また，任意の $[H]_G \leq \mathrm{Cl}(G)$ に対して $b_X^H(x) = b_Y^H(x)$ が成り立つことと，$X \cong Y$ であることは同値である．これは，$B_+(G) = \{\, [X] \mid X \in \mathbf{set}^G \,\}$ から $(\mathbb{N}[x] - \{0\}, \times)$ へのモノイド準同型を誘導する．

$A \in \binom{X}{n}$ の固定群は，A に作用する G の部分群のうち最大のものである．

参考文献

[1] Serge Bouc. *Biset functors for finite groups*, Vol. 1990 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] Andreas W. M. Dress, Christian Siebeneicher, and Tomoyuki Yoshida. An application of Burnside rings in elementary finite group theory. *Adv. Math.*, Vol. 91, No. 1, pp. 27–44, 1992.

[3] Nick Gill and Bianca Lodà. Statistics for S_n acting on k-sets. *J. Algebra*, Vol. 607, pp. 286–299, 2022.

[4] Zoltán Halasi. On the base size for the symmetric group acting on subsets. *Studia Sci. Math. Hungar.*, Vol. 49, No. 4, pp. 492–500, 2012.