引き戻しについて

著者

2023 年 7 月 27 日

概要

引き戻しの圏論的な基礎です．

1　引き戻しの定義

集合 X, Y, Z と写像 $f\colon X \to Z, g\colon Y \to Z$ に対して，集合

$$X_f \times_g Y = \{\,(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\,\}$$

と自然な射影 $\pi_f\colon X_f \times_g Y \to X$, $\pi_g\colon X_f \times_g Y \to Y$ の組 $(X_f \times_g Y, \pi_f, \pi_g)$ の組を，f, g の引き戻しという．このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
X_f \times_g Y \arrow[r, "\pi_g"] \arrow[d, "\pi_f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

が可換になる．

引き戻しは，この可換図式によって一般の圏に対して定義される．

定義 1.1　$\mathcal{C}$ を圏とする．2 つの射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して，極限 $(L = \mathrm{Lim}(X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y), \pi_f, \pi_g)$ を f, g の $\mathcal{C}$ における引き戻しという．つまり，図式

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi_g"] \arrow[d, "\pi_f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

を可換にし，特に普遍性を持つものを f, g の引き戻しという．　$\square$

組 (P,p,q) が f,g の引き戻しであることを，可換図式において

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

などと表す.

圏 $\mathcal{C}$ に直積とイコライザーが存在すれば，引き戻しが構成できる．ここで，$f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ のイコライザー $(E,\pi\colon E \to X)$ とは，$f\pi = g\pi$ を満たすもののうち，普遍性を持つもののことをいう.

命題 1.1　$\mathcal{C}$ を圏とする．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ に対して，X,Y の直積 $(X \times Y, p_X, p_Y)$ と $X \overset{fp_X}{\underset{gp_Y}{\rightrightarrows}} Z$ のイコライザー (E,π) が存在するとする．このとき，$(E, p_X\pi, p_Y\pi)$ は f,g の引き戻しである.　$\square$

証明　イコライザーの定義より $f(\pi p_X) = g(\pi p_Y)$ が成り立つので，図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_Y\pi"] \arrow[d, "p_X\pi"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

は可換になる．よって，$(E, p_X\pi, p_Y\pi)$ が普遍性を持つことを示せばよい.

任意に対象 $D \in \mathcal{C}$ と射 $\rho_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,X)$, $\rho_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,Y)$ を取り，$f\rho_X = g\rho_Y$ だと仮定する．このとき，直積の普遍性から，ただ一つの $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, X \times Y)$ が存在して，$\rho_X = p_X p$, $\rho_Y = p_Y p$ が成り立つ．さらに，$(fp_X)p = f\rho_X = g\rho_Y = (gp_Y)p$ が成り立つから，イコライザーの普遍性より，ただ一つの $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,E)$ が存在して，$p = \pi e$ が成り立つ．以上より，可換図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dashed, "e"] \arrow[ddr, dashed, "p"] \arrow[drrr, bend left, "\rho_Y"] \arrow[dddr, bend right, "\rho_X"'] & & & \\ & E \arrow[d, "\pi"] & & \\ & X \times Y \arrow[rr, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[rr, "f"'] & & Z \end{tikzcd}$$

を得る．したがって，可換図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dashed, "e"] \arrow[drr, bend left, "\rho_Y"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_X"'] & & \\ & E \arrow[r, "p_Y\pi"] \arrow[d, "p_X\pi"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

を得るから，$(E, \pi p_X, \pi p_Y)$ は普遍性を持つ． ■

一般論から，引き戻しは存在すれば同型を除いて一意に存在する．

2 引き戻しの例

例 2.1 $\mathcal{C}$ を圏，$T \in \mathcal{C}$ を終対象とする．任意の対象 $C \in \mathcal{C}$ に対して，ただ一つ存在する $\mathcal{C}$ の射 $C \to T$ を $!_C$ で表す．このとき，任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して，$!_X, !_Y$ の引き戻しは，X, Y の直積となる．

実際，$(X \times Y, \mathrm{id}_{X \times Y})$ は $X \times Y \overset{!_{X\times Y}}{\underset{!_{X\times Y}}{\rightrightarrows}} T$ のイコライザーを与えている．よって，$(X \times Y, p_X, p_Y)$ は引き戻しである．

例 2.2 集合の圏 **Set** における引き戻しは，冒頭に述べた $(X_f \times_g Y, \pi_F, \pi_g)$ である．

例 2.3 G を有限群とする．有限 G 集合の圏において，図式 $G/H \xrightarrow{f} G/L \xleftarrow{g} G/K$ の引き戻しは

$$\coprod_{HxK \in H\backslash aLb^{-1}/K} G/(H \cap {}^xK), \quad \pi_f \colon yH \cap {}^xK \mapsto yH, \quad \pi_G \colon yH \cap {}^xK \mapsto yx^{-1}K$$

で与えられる．ただし，$f(H) = aL$, $g(K) = bL$ である．

参考文献

[1] 中岡宏之．『圏論の技法』．日本評論社, 2016.