G 集合の制限と誘導について

オ

2023 年 7 月 28 日

概要

G を有限群，H を G の部分群とする．G 集合と H 集合の間の制限と誘導について紹介し，それらが関手として随伴の関係にあることを述べた．また，随伴関手の基本的な事実を，応用するものに限って簡単に解説した．

1　制限と誘導の定義

G を有限群，H を G の部分群とする．Y を有限左 G 集合とし，その作用は $\rho\colon G \to \operatorname{Aut} Y$ で与えられているとする．このとき，任意の $g \in G,\ y \in Y$ に対して，誤解の恐れがない限り

$$\rho(g)(y) = g.y = gy$$

と書くことがある．また，X は作用が σ である有限左 H 集合だとする．以下，特に断らない限り，作用は左作用のみを考え，単に G 集合と言ったときには，特に有限なものを指すことにする[1]．

G 集合は自然な方法で H 集合と見なせる．つまり，H の Y への作用を $\rho|_H$ で定めることで，Y は H 集合となる．このようにして定まる H 集合 Y を

$$\operatorname{Res}^G_H Y \quad や \quad Y{\downarrow}^G_H$$

で表し，Y の G から H への**制限** (**restriction**) と呼ぶことにする．また，任意の G 写像 $f\colon Y \to Y'$ は H 写像 $f\colon Y{\downarrow}^G_H \to Y'{\downarrow}^G_H$ でもある．この f が H 写像であることを強調するときには $f{\downarrow}^G_H$ と書く．

逆に，H 集合を G 集合に自然に見なす方法を考える．まず，簡単な場合として，$K \leq H$ に対し，H/K を G 集合に見なすことを考える．この場合，任意の $g \in G,\ hK \in H/K$ に対して，作用を自然に

$$g.hK := ghK$$

---

[1] 以下の議論は，無限群 G や無限位数の G 集合を含めて考えてもよいと思うが，ここでは慣れ親しんだ有限の場合に限定しておく．

と定めることができるが，このとき，H/K は明らかに推移的 G 集合である．よって，K の固定化群を G_K とすれば，G 集合としての同型 $H/K \cong G/G_K$ が成り立つ．また，

$$\begin{aligned} g \in G_K &\iff g.K = K \\ &\iff g \in K \end{aligned}$$

ゆえ，結局 $H/K \cong G/K$ である．

以上の簡単な場合を踏まえて，一般の H 集合を G 集合に見なす方法を述べる．直積 $G \times X$ に対して，H の右からの作用

$$(a,x).h := (ah, h^{-1}.x) \quad ((a,x) \in G \times X,\ h \in H)$$

を考える．このときの $G \times X$ の軌道全体の集合を $G \times_H X$ と書き，(a,x) の軌道を $(a,x)H$ と書く．先ほどの場合において，$ah.h^{-1}K = a.K$ が成り立っていたことを踏まえると，このような集合を考えることが自然に思えるかもしれない．さて，$G \times_H X$ への G の作用を定めるために，次の補題を準備する．

補題 1.1　任意の $(a_1,x_1)H = (a_2,x_2)H \in G \times_H X$ と $g \in G$ に対して，$(ga_1,x_1)H = (ga_2,x_2)H$ が成り立つ． □

証明　ある $h \in H$ が存在して，$(a_1,x_1) = (a_2h, h^{-1}.x_2)$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} (ga_1,x_1) &= (ga_2h, h^{-1}.x_2) \\ &= (ga_2,x_2).h \end{aligned}$$

だから，$(ga_1,x_1)H = (ga_2,x_2)H$ である． ■

補題より，G の $G \times_H X$ への作用を

$$g.(a,x)H := (ga,x)H$$

で定めることができる．この作用によって得られた G 集合 $G \times_H X$ を

$$\mathrm{Ind}_H^G X \quad や \quad X{\uparrow}_H^G$$

で表し，X の H から G への**誘導 (induction)** と呼ぶ．

誘導の簡単な例を一つ挙げる．

命題 1.2　任意の $K \leq H$ に対して，$\mathrm{Ind}_H^G H/K \cong G/K$ である． □

証明　任意の $(a, hK) \in G \times H/K$ に対して，

$$(a, hK) = (ah, K).h^{-1}$$

が成り立つから，$G \times_H H/K$ の任意の元は $(a, K)H$ $(a \in G)$ で表せる．さらに，任意の $(a, K)H \in \operatorname{Ind}_H^G H/K$ に対して

$$(a, K)H = a.(e_G, K)H \quad (e_G \text{ は } G \text{ の単位元})$$

だから，$\operatorname{Ind}_H^G H/K$ は推移的である．また，任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} g.(e_G, K)H = (e_G, K)H &\iff \text{ある } h \in H \text{ が存在して } (g, K).h = (e_G, K) \\ &\iff \text{ある } h \in H \text{ が存在して } gh = e_G,\ h^{-1}K = K \\ &\iff g \in H \text{ かつ } g^{-1} \in K \\ &\iff g \in H \cap K \end{aligned}$$

なので，$(e_G, K)H$ の固定化群は $H \cap K = K$ である．したがって，$\operatorname{Ind}_H^G H/K \cong G/K$ である．■

また，G 写像から制限の間の H 写像が定まったときと同じように，H 写像 $f\colon X \to X'$ からも，誘導の間の写像 $\operatorname{Ind}_H^G X \to \operatorname{Ind}_H^G X'$ が定まる．

補題 1.3　任意の H 写像 $f\colon X \to X'$ と $(a_1, x_1)H = (a_2, x_2)H \in \operatorname{Ind}_H^G X$ に対して，$(a_1, f(x_1))H = (a_2, f(x_2))H$ が成り立つ．□

証明　ある $h \in H$ が存在して，$(a_1, x_1) = (a_2h, h^{-1}.x_2)$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} (a_1, f(x_1)) &= (a_2h, f(h^{-1}x_2)) \\ &= (a_2h, h^{-1}f(x_2)) \\ &= (a_2, f(x_2)).h \end{aligned}$$

だから，$(a_1, f(x_1))H = (a_2, f(x_2))H$ である．■

補題 1.4　$f\colon X \to X'$ を H 写像とする．補題 1.3 より定まる写像

$$\operatorname{Ind}_H^G f\colon \operatorname{Ind}_H^G X \to \operatorname{Ind}_H^G X'\colon (a, x)H \mapsto (a, f(x))H$$

は G 写像である．□

証明　任意の $g \in G,\ (a,x)H \in \operatorname{Ind}_H^G X$ に対して

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_H^G f(g.(a,x)H) &= (ga, f(x))H \\ &= g.(a,f(x))H \\ &= g.\operatorname{Ind}_H^G f((a,x)H)\end{aligned}$$

が成り立つから，$\operatorname{Ind}_H^G f$ は G 写像である．■

ここまでで与えた制限と誘導の構成は，実は関手的である．G-**set** で G 集合の圏を表すことにすれば[2)]，次の命題が成り立つ．

命題 1.5　以下がそれぞれ成り立つ．

(1)制限を与える対応 Res_H^G は $\mathbf{set}^G$ から $\mathbf{set}^H$ への関手である．

(2)誘導を与える対応 Ind_H^G は $\mathbf{set}^H$ から $\mathbf{set}^G$ への関手である．□

証明　写像の合成と恒等写像を保つことを確認すればいいが，これは構成の仕方から明らかである．■

ここでは，Res_H^G を制限関手，Ind_H^G を誘導関手と呼ぶことにする．

2　随伴関手

誘導関手と制限関手の間には，ある意味で良い対応が存在する．より具体的には，誘導関手は制限関手の左随伴となる．このことを説明するために，随伴関手の基本的な概念について簡単に紹介する．

定義 2.1　$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．$C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}$ に関して自然な全単射

$$\varphi = \varphi_{C,D}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)$$

が存在するとき，F は G の**左随伴** (**left adjoint**)，または，G は F の**右随伴** (**right adjoint**) であると言い，$F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と表す．□

φ の添え字は適宜省略する．ここで，$C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}$ に関して自然とは，任意の

---

2)　$\mathbf{set}^G$ と表すこともある．こう書いたときには，G 集合を関手 $G \to \mathbf{set}$，G 写像を自然変換に見なせることを強調していると思う．一般に，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手全体の成す圏を $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ と表す．

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \arrow[r, "\varphi_{C,D}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \arrow[r, "\varphi_{C,D}"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC', D) \arrow[r, "\varphi_{C',D}"'] \arrow[u, "(Ff)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', GD) \arrow[u, "f^*"'] & , & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D') \arrow[r, "\varphi_{C,D'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD')
\end{tikzcd}$$

が可換になることを言う．ここで，$f^*\colon h \mapsto h \circ f$, $g_*\colon h \mapsto g \circ h$ である．可換図式から，任意の $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ と $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC', D)$ に対して

$$Gg \circ \varphi(h) = \varphi(g \circ h), \quad \varphi(h') \circ f = \varphi(h' \circ Ff) \tag{2.1}$$

が成り立っている．

補題 2.1　$F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とし，$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)$ とする．

(1)任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\eta_C := \varphi(1_{FC})$$

とおく．このとき，$\eta := \{\eta_C\}_C$ は恒等関手 $1_{\mathcal{C}}$ から GF への自然変換である．

(2)任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\varepsilon_D := \varphi^{-1}(1_{GD})$$

とおく．このとき，$\varepsilon := \{\varepsilon_D\}_D$ は FG から $1_{\mathcal{D}}$ への自然変換である．□

証明　(2) は (1) の双対命題なので，(1) を示せば十分である．

任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & GFC \arrow[d, "GFf"] \\
C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & GFC
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよい．これは,

$$\begin{aligned}
GFf \circ \eta_C &= GFf \circ \varphi(1_{FC}) \\
&= \varphi(Ff) \\
&= \varphi(1_{FC'}) \circ f \\
&= \eta_{C'} \circ f
\end{aligned}$$

から分かる．■

定義 2.2　補題 2.1 で定まる自然変換 η, ε を，それぞれ随伴 $F \dashv G$ の**単位** (**unit**)，**余単位** (**counit**) と呼ぶ．□

式 (2.1) より，任意の $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ に対して

$$\varphi(g) = Gg \circ \eta_C,$$

が成り立つ．また，双対性より，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)$ に対しては

$$\varphi^{-1}(f) = \varepsilon_D \circ Ff$$

が成り立つ．したがって，随伴を与える自然な全単射 φ は，単位と余単位によって具体的に表示できる．

逆に，関手の組 (F, G) に対して適切な自然変換の組 (η, ε) を定めることができれば，$F \dashv G$ が成り立つことを確認できる．このことを述べたのが次の定理である．

定理 2.2 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．$F \dashv G$ であるための必要十分条件は，ある自然変換 $\eta \colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$, $\varepsilon \colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ が存在して，

$$\varepsilon F \cdot F\eta = 1_F, \quad G\varepsilon \cdot \eta G = 1_G \tag{2.2}$$

を満たすことである． □

証明の前に，自然変換の垂直合成，水平合成について述べておく．

図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "R"{name=U}] \arrow[r, "S"{description, name=M}] \arrow[r, bend right=50, "T"'{name=L}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\sigma"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\tau"]
\end{tikzcd}$$

を考える．このとき，新たな自然変換 $\tau \cdot \sigma \colon R \Rightarrow T$ が

$$(\tau \cdot \sigma)_C := \tau_C \circ \sigma_C$$

によって定まる．この自然変換 $\tau \cdot \sigma$ を σ と τ の**垂直合成** (**vertical composite**) と呼ぶ．

つづいて，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "R"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "S"'{name=L}] & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] & \mathcal{E}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

を考える．このとき，新たな自然変換 $\sigma F \colon RF \Rightarrow SF$, $G\sigma \colon GR \Rightarrow GS$ が

$$(\sigma F)_B := \sigma_{FB}, \quad (G\sigma)_C := G(\sigma_C)$$

で定まる．これらの自然変換 $\sigma F, G\sigma$ を，それぞれ F と σ，σ と G の**水平合成** (**horizontal conmosite**) と呼ぶ．

証明　$F \dashv G$ だとし，η, ε をそれぞれ単位，余単位とする．このとき，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ に対して

$$\begin{aligned}(\varepsilon F \cdot F\eta)_C &= \varepsilon_{FC} \circ F\eta_C \\ &= \varphi^{-1}(\eta_C) \\ &= 1_{FC}, \\ ((G\varepsilon) \cdot (\eta G))_D &= G\varepsilon_D \circ \eta_{GD} \\ &= \varphi(\varepsilon_D) \\ &= 1_{GD}\end{aligned}$$

だから，等式 (2.2) が成り立つ．

逆に，自然変換 η, ε が等式 (2.2) を満たすとする．このとき，任意の $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ に対して，写像 $\varphi_{C,D} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)$, $\theta_{C,D} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\varphi_{C,D}(g) &:= Gg \circ \eta_C \quad (g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)) \\ \theta_{C,D}(f) &:= \varepsilon_D \circ Ff \quad (f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD))\end{aligned}$$

で定める．このとき，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD)$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_{C,D} \circ \theta_{C,D}(f) &= G(\varepsilon_D \circ Ff) \circ \eta_C \\ &= G\varepsilon_D \circ GFf \circ \eta_C \\ &= G\varepsilon_D \circ \eta_{GD} \circ f \\ &= f,\end{aligned}$$

が成り立つ．また，同様にして，任意の $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ に対して $\theta_{C,D}\varphi_{C,D}(g) = g$ が成り立つので，$\varphi_{C,D}$ は全単射であり，$\theta_{C,D} = \varphi_{C,D}^{-1}$ である．

後は，$\varphi = \{\varphi_{C,D}\}$ が $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ について自然であることを確かめればよい．任意の $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ に対して

$$(Gg)_* \circ \varphi_{C,D}(h) = Gg \circ Gh \circ \eta_C = G(gh) \circ \eta_C = \varphi_{C,D'} \circ g_*(h)$$

が成り立つから，φ は D について自然である．C について自然であることも同様にして分かる．

以上より，φ が随伴 $F \dashv G$ を与えていて，単位，余単位はそれぞれ η, ε である．■

3　制限関手と誘導関手の随伴性

最後に，誘導関手が制限関手の左随伴であることを確かめる．

定理 3.1　任意の有限群 G と部分群 $H \leq G$ に対して，$\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_H^G$ である． □

証明　H 集合 X，G 集合 Y に対して，写像 $\eta_X \colon X \to \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G X$, $\varepsilon_Y \colon \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G Y \to Y$ を

$$\begin{aligned}\eta_X(x) &:= (e_G, x)H \quad (x \in X),\\ \varepsilon_Y((g,y)H) &:= g.y \quad ((g,y)H \in \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G Y)\end{aligned}$$

で定めると，自然変換 $\eta\colon 1_{H\textbf{-set}} \Rightarrow \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G$, $\varepsilon\colon \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G \Rightarrow 1_{G\textbf{-set}}$ が得られる．これらが等式 (2.2) を満たすことを確認すればよい．

任意の H 集合 X と $(g,x)H \in \mathrm{Ind}_H^G X$ に対して，

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mathrm{Ind}_H^G \cdot \mathrm{Ind}_H^G \eta)_X((g,x)H) &= \varepsilon_{\mathrm{Ind}_H^G X} \circ \mathrm{Ind}_H^G \eta_X((g,x)H)\\ &= \varepsilon_{\mathrm{Ind}_H^G X}((g,(e_G,x)H)H)\\ &= g.(e_G,x)H\\ &= (g,x)H\end{aligned}$$

なので，$\varepsilon \mathrm{Ind}_H^G \cdot \mathrm{Ind}_H^G \eta = 1_{\mathrm{Ind}_H^G}$ である．また，任意の G 集合 Y と $y \in \mathrm{Res}_H^G Y$ に対して，

$$\begin{aligned}(\mathrm{Res}_H^G \varepsilon \cdot \eta \mathrm{Res}_H^G)_Y(y) &= \mathrm{Res}_H^G \varepsilon_Y \circ \eta_{\mathrm{Res}_H^G Y}(y)\\ &= \mathrm{Res}_H^G \varepsilon_Y((e_G,y)H)\\ &= e_G.y\\ &= y\end{aligned}$$

なので，$\mathrm{Res}_H^G \varepsilon \cdot \eta \mathrm{Res}_H^G = 1_{\mathrm{Res}_H^G}$ である．

したがって，定理 2.2 より $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_H^G$ を得る． ■

制限関手と誘導関手は，Mackey 関手の圏の間の制限関手 Res_H^G と誘導関手 Ind_H^G を導く．このとき，実は $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_H^G \dashv \mathrm{Ind}_H^G$ が成り立っている (Thévenaz, Webb [3, 命題 4.2])．左随伴関手は余極限を保ち，右随伴関手は極限を保つから，Mackey 関手の間の引き戻しや直和は，制限や誘導によって本質的には変化しないことが分かる．

参考文献

[1] Serge Bouc. Burnside rings. In Michiel Hazewinkel, editor, *Handbook of Algebra*, Vol. 2, pp. 739–804. North Holland, 2000.

[2] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematicians.* No. 5 in Graduate Texts in Mahtematics. Springer, second edition, 1998.

[3] Jacques Thévenaz and Peter J. Webb. Simple mackey functors. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, No. 23, pp. 299–319, 1990.

[4] 中岡宏之.『圏論の技法』. 日本評論社, 2016.