いろいろ

2020 年 5 月 3 日

1　1/6 公式の一般化

次の等式は, いわゆる 1/6 公式や 1/12 公式の一般化にあたる. 証明は部分積分法を繰り返し用いればよい.

定理 1.1. 任意の 0 以上の整数 m, n と任意の実数 α, β に対して,

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\ dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}.$$

例えば, 式において $m=n=1$ とすれば

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\ dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となり, 1/6 公式を得る.

上の定理において, $\alpha=0$, $\beta=1$ とおけば

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\ dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

を得るが, これは Beta 関数 (第一種 Euler 積分) の特別な場合である. ここで, 実数 x, y に対して, Beta 関数 $B(x,y)$ は次のように定義される:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

2　2 次の Euler 積

この節において, p は素数を表すことにする. 普通の意味での Euler 積とは, 等式

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

のことをいう. 対して,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11}p^{-2s}} \tag{2.1}$$

を 2 次の Euler 積という．ここで, $\tau(n)$ を Ramanujan の τ 関数といい, 左辺の無限級数を Ramanujan の L 関数という．この節では, この等式の導出について簡単にまとめておく[*1].

自然数 n に対して, Ramanujan の τ 関数 $\tau(n)$ は

$$q\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{24}$$

の展開式における q^n の係数で定義される．この関数について, (2.1) を示すため必要となる次の 2 つの性質を認める．実際に計算して確かめてみるとよい．

1. 互いに素な自然数 m, n に対して, $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$.
2. 任意の素数 p と 2 以上の自然数 k に対して, $\tau(p^k)=\tau(p)\tau(p^{k-1})-p^{11}\tau(p^{k-2})$.

証明は大変難しいらしく, 私が理解できないため割愛する．保型形式なる概念を用いるらしいが, そもそも私は保型形式を知らない．

上の 2 つの性質を用いて, 表題の (2.1) を示す．性質 1 より, Ramanujan の L 関数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}\right)=\left(1+\frac{\tau(2)}{2^s}+\frac{\tau(2^2)}{2^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{\tau(3)}{3^s}+\frac{\tau(3^2)}{3^{2s}}+\cdots\right)\cdots$$

と変形できる．ここで,

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}$$

とおく．性質 2 から

$$\begin{aligned}
S&=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}\\
&=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau(p)\tau(p^{k-1})-p^{11}\tau(p^{k-2})}{p^{ks}}\\
&=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p)}{p^s}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau(p^{k-1})}{p^{(k-1)s}}+\frac{p^{11}}{p^{2s}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau(p^{k-2})}{p^{(k-2)s}}\\
&=1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p)}{p^s}(S-1)+\frac{p^{11}}{p^{2s}}S.
\end{aligned}$$

よって, 整理して

$$S=\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11}p^{-2s}}$$

を得る．従って,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_p S=\prod_p\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11}p^{-2s}}.$$

[*1] 参考: `https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/ramanujan-tau-function-and-euler-product`

3 Pick の定理

平面上に等間隔に並べられた無数の平行線の集合を L とする．L を 90° 回転したものもまた平行線の集合であり, これを $\rotatebox[origin=c]{90}{L}$ とおく．L と $\rotatebox[origin=c]{90}{L}$ を重ねたとき, 平行線は互いに直交する．このとき生じる交点を格子点といい, 2 つの格子点を結んだ線分の長さの最小値を 1 とする．また, すべての頂点が格子点上にあるような多角形を格子多角形という．ただし, 格子長方形と格子直角三角形は, 証明のため, 各辺のうち少なくとも 2 辺が L または $\rotatebox[origin=c]{90}{L}$ 上にあるもののみを指す.

格子多角形について, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (Pick の定理)**.** 平面上の穴のない格子多角形 P の面積を S とする．多角形の内部にある格子点の数を f, 辺上にある格子点の数を e とおくと,

$$S = f + \frac{1}{2}e - 1. \tag{3.1}$$

ここで, 格子多角形における穴とは, この節では, この定理の証明を行う．また, この定理の類似 (森原の定理, 額賀の定理) や拡張についても紹介する.

証明の見通しをよくするために, 格子多角形 X の面積を S_X, 内部にある格子点の数を f_X, 辺上にある格子点の数を e_X で表す．また,

$$P(X) = f_X + \frac{1}{2}e_X - 1$$

とおく．このとき, 定理 3.1 を示すことは $S_P = P(P)$ を示すことに他ならない.

補題 3.2. 格子多角形 P を辺上の相異なる 2 つの格子点を結んだ直線によって切断する．このときできた格子多角形を Q, R とおくと, $P(P) = P(Q) + P(R)$.

証明. 直線上の格子点の数を p とおく．このとき,

$$f_P = f_Q + f_R + p - 2, \quad e_P = e_Q + e_R - 2p + 2$$

であることから明らか. □

補題 3.3. 格子長方形 P に対して, $S_P = P(P)$.

証明. 長方形の平行でない各辺上の格子点の数を e_1, e_2 とおけば,

$$f_P = (e_1 - 2)(e_2 - 2), \quad e_P = 2(e_1 + e_2 - 2)$$

となる．よって,

$$S_P = (e_1 - 1)(e_2 - 1) = (e_1 - 2)(e_2 - 2) + (e_1 + e_2 - 2) - 1 = f_P + \frac{1}{2}e_P - 1.$$

□

補題 3.4. 格子直角三角形 P に対して, $S_P = P(P)$.

証明. 任意の格子直角三角形 P は, ある格子長方形 Q の対角線による切断によって作ることができる. このとき, 補題 3.2 と補題 3.3 より

$$2S_P = S_Q = P(Q) = 2P(P).$$

よって, $S_P = P(P)$. □

補題 3.5. 任意の格子三角形 T について, $S_T = P(T)$.

証明. 任意の格子三角形は, いくつかの適当な格子長方形 □

4　いろいろ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^2 x}\ dx.$$

ここで, $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ であり, 区間 $[0, \pi/2]$ において $\sin(x/2) \geq 0$ であるから,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos x}\sin\frac{x}{2}\ dx.$$

部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos x}\sin\frac{x}{2}\ dx = \left[\sqrt{2\cos x}\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}(\cos x)'\ dx.$$

右辺の第 1 項目は $2\sqrt{2}$ となる. 第 2 項目について, 被積分関数は $x = \pi/2$ において定義されていないため, 広義積分となる. また, $1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$ であり, 区間 $[0, \pi/2)$ において $\cos(x/2) > 0$ であることから,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}(\cos x)'\ dx &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\theta} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}(\cos x)'\ dx \\
&= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{\cos x}}(\cos x)'\ dx.
\end{aligned}$$

$\sqrt{1 + 1/\cos x} = t$ と置換すれば,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{\cos x}}(\cos x)'\ dx &= \lim_{R\to+\infty}\left(-\int_{\sqrt{2}}^{R} \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\ dx\right) \\
&= -\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\ln\frac{R-1}{R+1} - \frac{2R}{R^2-1}\right) - \left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{2\sqrt{2}}{2-1}\right)\right\} \\
&= \ln(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

従って,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\ dx = 2\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1).$$