2 次関数の最大・最小問題

オ

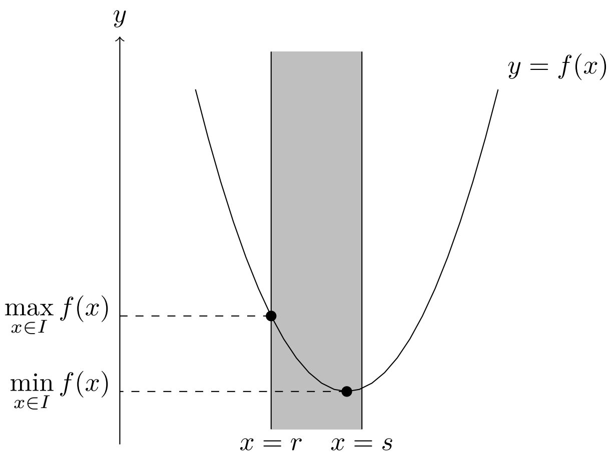
2023 年 4 月 2 日

概要

2 次関数の最大・最小問題について解説した.

1　2 次関数の最大・最小問題

2 次関数 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ $(a, p, q \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ の区間 $I = [r, s]$ $(r < s)$ における最大・最小問題を考える．つまり，頂点が (p, q) で，2 次の項の係数が a であるような 2 次関数の，$r \leq x \leq s$ における最大値と最小値を求めるのである．ここでは，$f(x)$ の I における最大値，最小値をそれぞれ $\max\limits_{x \in I} f(x)$，$\min\limits_{x \in I} f(x)$ と書くことにする[1]．例えば,



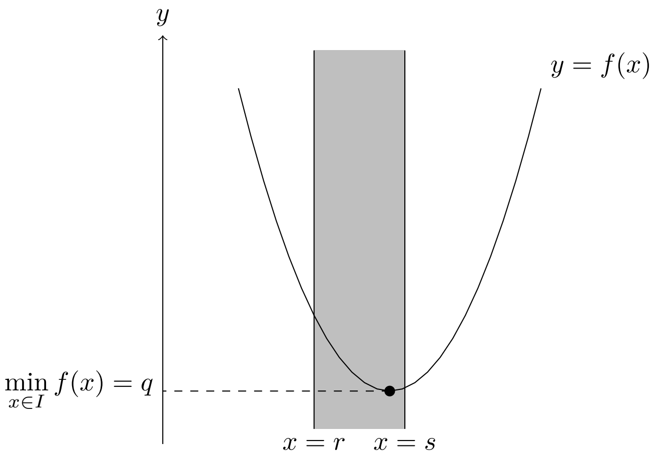
のような感じである．この場合，最大値は $f(r)$ $(x = r)$，最小値は q $(x = p)$ となる．

ところで，今回の場合は $a > 0$，つまり，$y = f(x)$ のグラフが下に凸な場合を考えれば十分である．実際，$a < 0$ の場合は，$-f(x)$ の最大と最小を入れ替えればよい．そこで，以下では $a > 0$ だとしよう．

まずは最小値について考える．

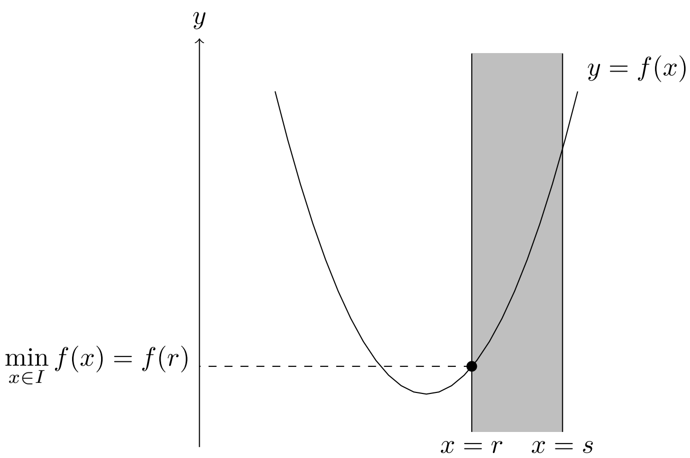
1） $\max\limits_{x \in I} f(x)$ は $\max\{\, f(x) \mid x \in I\}$ を表している．max, min は集合に値を対応させる関数である．

そもそも，実数上で $f(x)$ は $x = p$ において最小値 q を取るから，$p \in I$ の場合，つまり $r \leq p \leq s$ の場合は，最小値が q $(x = p)$ だと分かる．

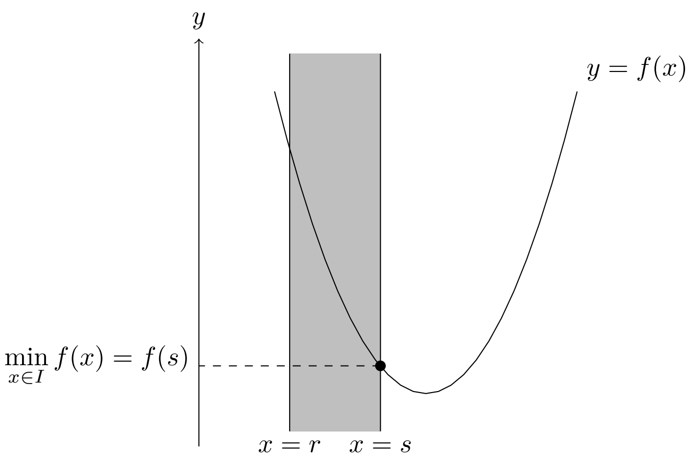


後は，$p \notin I$ の場合，つまり $p < r$ または $s < p$ である場合を考えればよい．この場合は，グラフの形から，$p < r$ のときは $f(r)$ $(x = r)$ が最小値で，$s < p$ のときは $f(s)$ $(x = s)$ が最小値だと分かる．

$p < r$ のとき



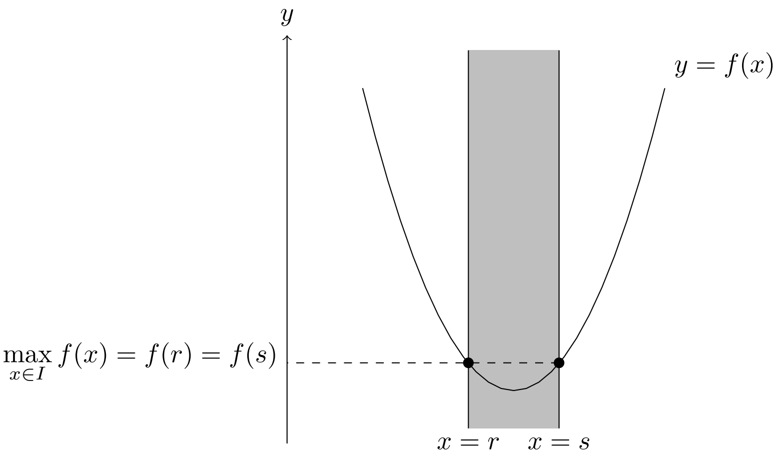
$s < p$ のとき



続いて，最大値について考える．$y = f(x)$ のグラフは $x = p$ に関して対称だから，$f(r) = f(s)$ となる場合がある．これは，数直線上で p が r と s の中点である場合，つまり $p = \dfrac{r+s}{2}$ である場合に対応する．このことは，グラフの対称性からも明らかだが，条件 $f(r) = f(s)$ から直接求めることもできる．実際，$f(r) = f(s)$ なら

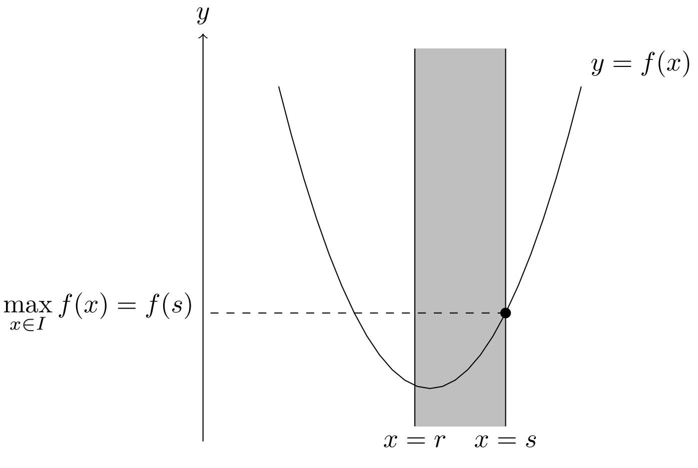
$$f(r) - f(s) = (r-s)(r+s-2p) = 0$$

であり，今は $r \neq s$ としているので，$p = \dfrac{r+s}{2}$ を得る．このとき，最大値は $f(r)$ $(x = r, s)$ である．

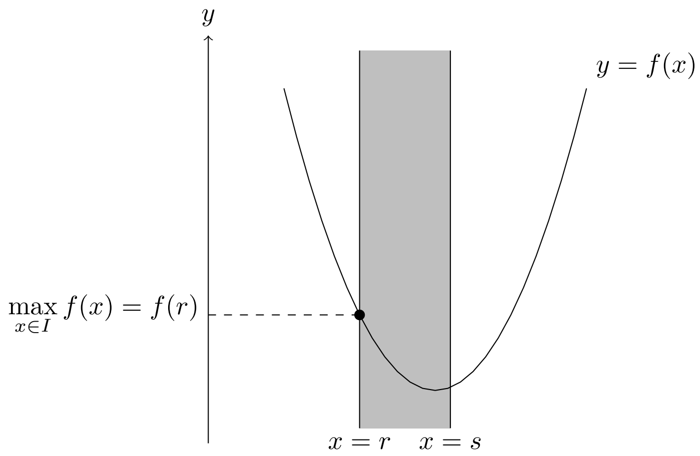


後は，$p \neq \dfrac{r+s}{2}$ の場合を考えればよい．これは，$p \notin I$ である場合の最小値を求めたときと同様に，グラフの形から，$p < \dfrac{r+s}{2}$ のときは $f(s)$ $(x = s)$ が最大値で，$\dfrac{r+s}{2} < p$ のときは $f(r)$ $(x = r)$ が最大値だと分かる．

$p < \dfrac{r+s}{2}$ のとき



$\dfrac{r+s}{2} < p$ のとき



以上のことをまとめれば，下に凸な 2 次関数 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ の区間 $[r, s]$ における最大値，最小値について，

$$
\begin{array}{ll}
p < r \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値 } f(s) \quad (x = s), \\ \text{最小値 } f(r) \quad (x = r), \end{cases} \\
r \leq p < \dfrac{r+s}{2} \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値 } f(s) \quad (x = s), \\ \text{最小値 } q \qquad (x = p), \end{cases} \\
p = \dfrac{r+s}{2} \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値 } f(s) = f(r) \quad (x = r, s), \\ \text{最小値 } q \qquad\qquad\quad (x = p), \end{cases} \\
\dfrac{r+s}{2} < p \leq s \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値 } f(r) \quad (x = r), \\ \text{最小値 } q \qquad (x = p), \end{cases} \\
s < p \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値 } f(r) \quad (x = r), \\ \text{最小値 } f(s) \quad (x = s) \end{cases}
\end{array}
$$

が成り立つ．

また，今回は I が有界な場合を考えたが，I が有界でない場合，例えば $I = (-\infty, s]$ であるような場合についても，適切に解釈すれば，上にまとめたことが成り立つ．

ここまで，最大値や最小値について考えたが，重要なのは区間と頂点の x 座標の位置関係だと分かるだろう．つまり，各パラメータがどれだけ複雑になっても，関数の値ではなく，区間と頂点の位置関係にのみ注目すれば，問題は解けるはずである．

ところで，上にまとめたものは，読者に暗記を促すものでは決してない．むしろ，整理するまでに述べた考え方をよく理解してほしい．