2018 年度京都大学文系数学第 4 問

オ

2025 年 1 月 4 日

概要

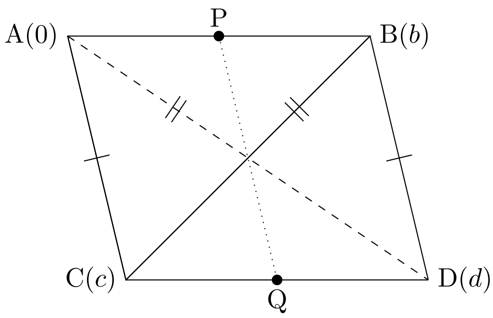
解きました.

問題　四面体 ABCD は AC = BD, AD = BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする.

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ.

(1) $b = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $c = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $d = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と置く[1].



このとき，AC = BD より

$$\begin{aligned} |d-b|^2 - |c|^2 &= |b|^2 - 2b\cdot d + |d|^2 - |c|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから，

$$b \cdot d = \frac{|b|^2 - |c|^2 + |d|^2}{2}$$

1) 矢印をつけるべきだろうけど面倒なので省略する.

が分かる．同様にして，AD = BC より

$$b \cdot c = \frac{|b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{2}$$

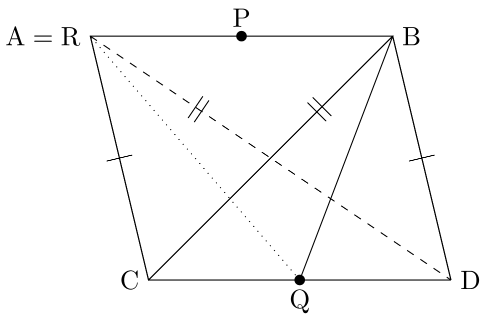
を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= b \cdot \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}b \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{|b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{2} + \frac{|b|^2 - |c|^2 + |d|^2}{2} - |b|^2 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから，AB ⊥ PQ である．

(2) R を辺 AC または辺 AD 上の点とし，$r = \overrightarrow{\mathrm{AR}}$ と置く．平面 α は 3 点 P, Q, R を含む平面だとしてもよい[2)]

(R = A のとき)分けられた部分同士は平面 α に関して対称なので，それらの体積は一致する．



(R が辺 AC から点 A を除いた部分上にあるとき) $r = kc$ $(0 \leq k \leq 1)$ とできる．このとき，

$$\begin{aligned}
\alpha &= \{\, up + vq + wr \mid u + v + w = 1 \,\} \\
&= \left\{ \frac{u}{2}b + \left(\frac{v}{2} + wk \right) c + \frac{v}{2}d \,\middle|\, u + v + w = 1 \right\}
\end{aligned}$$

である．α と辺 BD の交点を S とし，$s = \overrightarrow{\mathrm{AS}}$ と置く．$s = lb + (1-l)d$ $(0 \leq l \leq 1)$ とすれば，$s \in \alpha$ なので

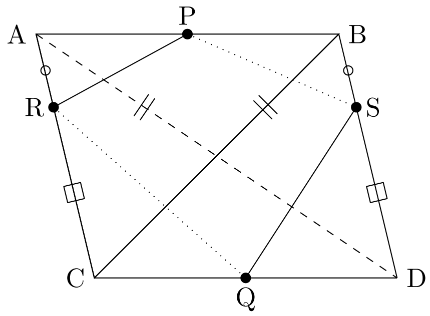
$$\begin{cases} \dfrac{u}{2} = l \\ \dfrac{v}{2} + wk = 0 \\ \dfrac{v}{2} = 1 - l \end{cases}$$

を得る．$u + v + w = 1$ より

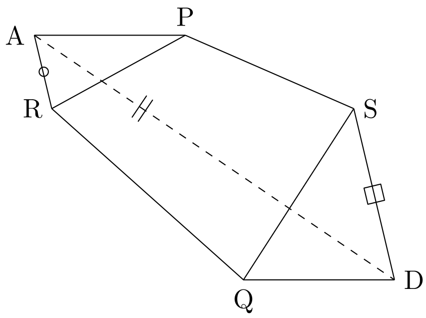
$$2l + 2(1-l) - \frac{2(1-l)}{2k} = 1$$

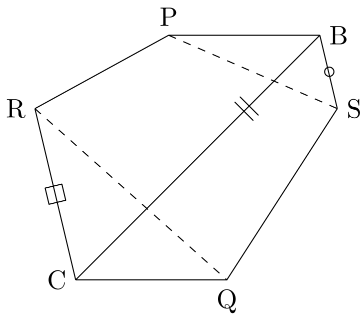
2) 面 ACD 上に，点 Q を中心とした半円周 O を考える．平面 α と $O \setminus \{D\}$ のただ一つの交点を R′ と置けば，α と R′ は 1 対 1 に対応する．直線 QR′ は辺 AC または，辺 AD から点 D を除いた部分と交わるので，その交点を R と置く．R と R′ は 1 対 1 に対応し，α は P, Q, R を含む．

なので，$l = 1 - k$ が分かる．したがって，点 S は辺 BD を $k : (1 - k)$ に内分する．



$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$BAD と $\triangle$ACD $\equiv$ $\triangle$BDC より，PR = PS と QR = QS が分かる．よって．立体 APR-DQS と立体 BPS-CQR は回転と平行移動によって一致する．





よって，これらの体積も一致する．

(R が辺 AD から点 A を除いた部分上にあるとき) 点 C と点 D を入れ替えた四面体を考えれば，R が辺 AC 上にある場合に帰着する．

以上より，PQ を含むいかなる平面 α に対しても，2 つの部分の体積は一致する．