Mackey 関手まとめ

オ

2023 年 7 月 27 日

概要

Mackey 関手のまとめです．

1 Mackey 関手

G は有限群，R は単位元を持つ可換とは限らない環とする．また，R-**Mod** で R 加群全体の成す圏，G-**set** で有限 G 集合全体の成す圏を表す．

1.1 Green による定義

定義 1.1 以下の条件を満たす対応の組 (M, t, r, c) を G の R-**Mod** に値を持つ **Mackey 関手**と呼ぶ．

1. 任意の部分群 $H \leq G$ に対して，$M(H)$ は R 加群である．
2. 任意の部分群 $H \leq K \leq G$ と $g \in G$ に対して，

$$
\begin{aligned}
r^K_H &\colon M(K) \to M(H), \\
t^K_H &\colon M(H) \to M(K), \\
c_{g,H} &\colon M(H) \to M({}^gH)
\end{aligned}
$$

   は R 加群の準同型写像である．
3. 任意の $H \leq K \leq L \leq G$ と $x, y \in G$ に対して，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & M(L) \arrow[dl, "r^L_H"'] \arrow[d, "r^L_K"] \\
M(H) & M(K) \arrow[l, "r^K_H"]
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & M(L) \\
M(H) \arrow[ur, "t^L_H"] \arrow[r, "t^K_H"'] & M(K) \arrow[u, "t^L_K"']
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & M({}^{yx}H) \\
M(H) \arrow[ur, "c_{yx,H}"] \arrow[r, "c_{x,H}"'] & M({}^xH) \arrow[u, "c_{y,{}^xH}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
M(K) \arrow[r, "c_{x,K}"] \arrow[d, "r^K_H"'] & M({}^xK) \arrow[d, "r^{{}^xK}_{{}^xH}"] \\
M(H) \arrow[r, "c_{x,H}"'] & M({}^xH)
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
M(K) \arrow[r, "c_{x,K}"] & M({}^xK) \\
M(H) \arrow[u, "t^K_H"] \arrow[r, "c_{x,H}"'] & M({}^xH) \arrow[u, "t^{{}^xK}_{{}^xH}"']
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

4. 任意の $g \in H \leq G$ に対して，$r_H^H = t_H^H = c_{g,H} = \mathrm{id}_{M(H)}$ である．
5. (Mackey の公理) 任意の $K \leq H \geq L$ に対して，

$$r_L^H \circ t_K^H = \sum_{LxK \in L\backslash H/K} t_{L\cap {}^xK}^L \circ c_{x,L^x\cap K} \circ r_{L^x\cap K}^K. \qquad \square$$

1.2 Dress による定義

定義 1.2 以下の条件を満たす関手の組 $M = (M^*, M_*)$ を，G の R-**Mod** に値を持つ **Mackey 関手**と呼ぶ．

1. $M^*\colon G\text{-}\mathbf{set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ は反変関手，$M_*\colon G\text{-}\mathbf{set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手である．
2. 任意の $X \in G$-**set** に対して，$M^*(X) = M_*(X) = M(X)$．
3. 任意の $X, Y \in G$-**set** とその直和 $X \xrightarrow{i_X} X \sqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y$ に対して，

$$\begin{bmatrix} M^*i_X \\ M^*i_Y \end{bmatrix} = M^*i_X \times M^*i_Y\colon M(X\sqcup Y) \to M(X)\oplus M(Y),$$
$$\begin{bmatrix} M_*i_X & M_*i_Y \end{bmatrix} = M_*i_X \sqcup M_*i_Y\colon M(X)\oplus M(Y) \to M(X\sqcup Y)$$

が同型 $M(X)\oplus M(Y) \cong M(X\sqcup Y)$ を与える．

4. 任意の G-**set** の引き戻し

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "\pi_g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

に対して，

$$\begin{tikzcd} M(P) \arrow[d, "M_*\pi_g"'] & M(X) \arrow[l, "M^*\pi_f"'] \arrow[d, "M_*f"] \\ M(Y) & M(Z) \arrow[l, "M^*g"] \end{tikzcd}$$

は可換である． $\square$

命題 1.1 定義 1.1 の意味での Mackey 関手と，定義 1.2 の意味での Mackey 関手は，1 対 1 に対応する． $\square$

証明 M が定義 1.1 の意味での Mackey 関手だとする．任意の $X \in G$-**set** に対して

$$\widetilde{M}_*(X) = \widetilde{M}^*(X) = \widetilde{M}(X) = \bigoplus_{Gx\in G\backslash X} M(G_x)$$

と定める．また，部分群 $H, K \leq G$ と $a \in G$ が $H \leq {}^aK$ を満たすならば，任意の $k \in K$ に対して

$$c_{(ak)^{-1},{}^{ak}K} \circ t_H^{{}^{ak}K} = c_{k^{-1},K} \circ c_{a^{-1},{}^aK} \circ t_H^{{}^aK} = c_{a^{-1},{}^aH} \circ t_H^{{}^aK}$$

が成り立つ．よって，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{set}}(G/H, G/K)$ に対して，

$$\widetilde{M}_*(f) = c_{a^{-1},{}^aK} \circ t_H^{{}^aK} \quad (f(H) = aK)$$

と定められる．このとき，任意の $G/H \xrightarrow{f} G/K \xrightarrow{g} G/L$ に対して，$f(H) = aK$, $g(K) = bL$ とすると，図式

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{M}(G/L) \\
 & M({}^{ab}L) \arrow[ur, "c_{(ab)^{-1},{}^{ab}L}"] \arrow[r, "c_{a^{-1},{}^{ab}L}"'] & M({}^bL) \arrow[u, "c_{b^{-1},{}^bL}"'] \\
\widetilde{M}(G/H) \arrow[ur, "t_H^{{}^{ab}L}"] \arrow[r, "t_H^{{}^aK}"'] & M({}^aK) \arrow[u, "t_{{}^aK}^{{}^{ab}L}"] \arrow[r, "c_{a^{-1},{}^aK}"'] & \widetilde{M}(G/K) \arrow[u, "t_K^{{}^bL}"']
\end{tikzcd}$$

が可換になる．よって，$\widetilde{M}_*(gf) = \widetilde{M}_*(g)\widetilde{M}_*(f)$ が成り立つ．また，

$$\widetilde{M}_*(\mathrm{id}_{G/H}) = c_{e_G,H} t_H^H = \mathrm{id}_{M(H)} = \mathrm{id}_{\widetilde{M}(H)}$$

が成り立つ．したがって，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{set}}(X, Y)$ に対して

$$\widetilde{M}_*(f) = \Big[i_{M(G_{f(x)})} \widetilde{M}_*(f|_{Gx}) \Big]_{Gx \in G\backslash X} = \bigsqcup_{Gx \in G\backslash X} i_{M(G_{f(x)})} \widetilde{M}_*(f|_{Gx})$$

と定めると，$\widetilde{M}_* \colon G\text{-}\mathbf{set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ は関手になる．ただし，$i_{M(G_{f(x)})}$ は自然な入射 $M(G_{f(x)}) \hookrightarrow \widetilde{M}(Y)$ であり，$f|_{Gx} \colon Gx \to Gf(x)$ は同型により G/G_x から $G/G_{f(x)}$ への G 写像と見なす．さらに，写像 $\pi \colon G\backslash X \to G\backslash Y$ を $\pi(Gx) = Gf(x)$ と定め，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathbf{set}}(X, Y)$ に対して

$$\widetilde{M}^*(f) = \left[\sum_{Gx \in \pi^{-1}(Gy)} i_{M(G_x)} \widetilde{M}^*(f|_{Gx}) \right]_{Gy \in G\backslash Y} = \bigsqcup_{Gy \in G\backslash Y} \left(\sum_{Gx \in \pi^{-1}(Gy)} i_{M(G_x)} \widetilde{M}^*(f|_{Gx}) \right),$$
$$\widetilde{M}^*(f|_{Gx}) = r_{G_x}^{{}^aG_{f(x)}} c_{a,G_{f(x)}} \quad (f(G_x) = aG_{f(x)})$$

とおけば，同様にして $\widetilde{M}^* \colon G\text{-}\mathbf{set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ が反変関手となることが分かる．

直和 $G/H \xrightarrow{i_{G/H}} G/H \sqcup G/K \xleftarrow{i_{G/K}} G/K$ に対して，

$$\widetilde{M}^* i_{G/H} = \mathrm{id}_{M(H)} \sqcup 0, \qquad \widetilde{M}^* i_{G/K} = 0 \sqcup \mathrm{id}_{M(K)}$$
$$\widetilde{M}_* i_{G/H} = i_{M(H)}, \quad \widetilde{M}^* i_{G/K} = i_{M(K)}$$

となるから

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}^*\, i_{G/H} \\ \widetilde{M}^*\, i_{G/K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_*\, i_{G/H} & \widetilde{M}_*\, i_{G/K} \end{bmatrix} = \mathrm{id}_{M(H) \oplus M(K)} .$$

したがって，これらが同型 $\widetilde{M}(G/H \sqcup G/K) = M(H) \oplus M(K)$ を与える．さらに，$G/H \xrightarrow{f} G/L \xleftarrow{g} G/K$ の引き戻し

$$\begin{CD}
\displaystyle\coprod_{HxK \in H\backslash aLb^{-1}/K} G/H \cap {}^xK @>{\pi_g}>> G/K \\
@V{\pi_f}VV @VV{g}V \\
G/H @>>{f}> G/L
\end{CD} \tag{1.1}$$

に対して，図式

$$\begin{CD}
\displaystyle\bigoplus_{HxK \in H\backslash aLb^{-1}/K} M(H \cap {}^xK) @<{\widetilde{M}^*\pi_g}<< G/K \\
@V{\widetilde{M}_*\pi_f}VV @VV{\widetilde{M}_*g}V \\
G/H @<<{\widetilde{M}^*f}< G/L
\end{CD} \tag{1.2}$$

の可換性を示す．

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_*\pi_f \circ \widetilde{M}^*\pi_g &= \left(\coprod_{HxK} t^H_{H\cap{}^xK}\right) \circ \left(\sum_{HxK} i_{M(G_{(H,xK)})} r^{{}^xK}_{H\cap{}^xK} c_{x,K}\right) \\
&= \sum_{HxK} \left(\coprod_{HyK} t^H_{H\cap{}^xK}\right) i_{M(G_{(H,xK)})}\, c_{x,H^x\cap K}\, r^K_{H^x\cap K} \\
&= \sum_{HxK} t^H_{H\cap{}^xK}\, c_{x,H^x\cap K}\, r^K_{H^x\cap K} \\
&= \sum_{H^{ab^{-1}}xK \in H^{ab^{-1}}\backslash {}^bL/K} t^H_{H\cap{}^{ab^{-1}x}K}\, c_{ab^{-1}x, H^{ab^{-1}x}\cap K}\, r^K_{H^{ab^{-1}x}\cap K} \\
&= \sum_{H^{ab^{-1}}xK \in H^{ab^{-1}}\backslash {}^bL/K} t^H_{H\cap{}^{ab^{-1}x}K}\, c_{ab^{-1}, H^{ab^{-1}}\cap{}^xK}\, c_{x,H^{ab^{-1}x}\cap K}\, r^K_{H^{ab^{-1}x}\cap K} \\
&= \sum_{H^{ab^{-1}}xK \in H^{ab^{-1}}\backslash {}^bL/K} c_{ab^{-1}, H^{ab^{-1}}}\, t^{H^{ab^{-1}}}_{H^{ab^{-1}}\cap{}^xK}\, c_{x,H^{ab^{-1}x}\cap K}\, r^K_{H^{ab^{-1}x}\cap K} \\
&= c_{ab^{-1}, H^{ab^{-1}}}\, r^{{}^bL}_{H^{ab^{-1}}}\, t^{{}^bL}_K \\
&= r^{{}^aL}_H\, c_{ab^{-1}, {}^bL}\, t^{{}^bL}_K \\
&= (r^{{}^aL}_H\, c_{a,L}) \circ (c_{b^{-1}, {}^bL}\, t^{{}^bL}_K) \\
&= \widetilde{M}^*f \circ \widetilde{M}_*g
\end{aligned}$$

より，(1.2) は可換である．したがって，$\widetilde{M} = (\widetilde{M}^*, \widetilde{M}_*)$ は G の定義 1.2 の意味での Mackey 関手となる．

逆に，$M = (M^*, M_*)$ を定義 1.2 の意味での G の Mackey 関手とする．任意の $H \leq K \leq G$ と $x \in G$ に対して，

$$M_1(H) = M(G/H), \quad r^K_H = M^*p^K_H, \quad t^K_H = M_*p^K_H, \quad c_{x,H} = M^*\gamma_{x^{-1},{}^xH}$$

とおく．ここで，$p_H^K\colon G/H \to G/K$ は自然な射影，$\gamma_{x,H}$ は $\gamma_{x,H}(H) = x^{-1x}H$ で定まる G 写像である．この M_1 が定義 1.1 の意味での Mackey 関手になることを確認するには，Mackey の公理を満たすことを確認すればよい．

引き戻し図式 (1.1) において，$H \leq L \geq K$ だとし，$f = p_H^L$，$g = p_K^L$ とする．このとき，$\pi_f = \bigsqcup_{HxK \in H\backslash L/K} p^H_{H\cap {}^xK}$，$\pi_g = \bigsqcup_{HxK \in H\backslash L/K} p^K_{H^x \cap K}\,\gamma_{x^{-1},H\cap {}^xK}$ である．また，

$$\widetilde{M}_* \pi_f \circ \widetilde{M}^* \pi_g = \left(\bigsqcup_{HxK} t^H_{H\cap {}^xK}\right)\left(\sum_{HxK} c_{x,H^x\cap K}\, r^K_{H^x\cap K}\right) = \sum_{HxK} t^H_{H\cap {}^xK}\, c_{x,H^x\cap K}\, r^K_{H^x\cap K},$$
$$\widetilde{M}^* f \circ \widetilde{M}_* g = r^L_H\, t^L_K$$

である．よって，図式 (1.2) の可換性から Mackey の公理を得る．したがって，組 (M_1, t, r, c) は定義 1.1 の意味での Mackey 関手となる． ■

1.3 Mackey 代数による定義

Mackey 関手は Mackey 代数上の加群と見なすこともできる．

定義 1.3 G の部分群全体を頂点集合とし，辺集合が

$$\{t_H^K \mid H, K \leq G,\ \mathrm{out}(t_H^K) = H,\ \mathrm{in}(t_H^K) = K\},$$
$$\{r_H^K \mid H, K \leq G,\ \mathrm{out}(r_H^K) = K,\ \mathrm{in}(r_H^K) = H\},$$
$$\{c_{x,H} \mid H \leq G,\ x \in G,\ \mathrm{out}(c_{x,H}) = H,\ \mathrm{in}(c_{x,H}) = {}^xH\}$$

の和集合から成る箙の $\mathbb{Z}$ 上の道代数を Q とおく．また，Q の部分代数 Λ を

$$\begin{aligned}\Lambda = \Big\langle & r_H^K r_K^L - r_K^L,\ t_K^L t_H^K - t_H^L,\ c_{y,{}^xH} c_{x,H} - c_{yx,H},\\ & c_{x,H} r_H^K - r^{{}^xK}_{{}^xH} c_{x,K},\ c_{x,K} t_H^K = t^{{}^xK}_{{}^xH} c_{x,H},\\ & r_H^H - c_{h,H},\ t_H^H - c_{h,H},\\ & r_L^H t_K^H - \sum_{LxK \in L\backslash H/K} t^L_{L\cap {}^xK} c_{x,L^x\cap K} r^K_{L^x\cap K},\\ & \sum_{J\leq G} r_J^J - 1,\ \sum_{J\leq G} t_J^J - 1 \,\Big|\, H, K \leq L \leq G,\ x \in G,\ h \in H \Big\rangle_{\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

で定める．

このとき，R 代数 $\mu_R(G) = R \otimes_{\mathbb{Z}} (Q/\Lambda)$ を G の R 上の **Mackey 代数**という． □

G の $\mathbb{Z}$ 上の Mackey 代数を $\mu(G)$ と表す．

1.4 Mackey 関手の圏

以下，特に断らない限り，Mackey 関手は R-**Mod** に値を持つものとする．

定義 1.4 M, N を G の Mackey 関手とする．R 準同型写像の族 $\theta = \{\theta_X \in R\text{-}\mathbf{Mod}(MX, NX)\}_{X \in \mathbf{set}^G}$ が，任意の $f \in \mathbf{set}^G(X, Y)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "M_*(f)"'] & N(X) \arrow[d, "N_*(f)"] \\ M(Y) \arrow[r, "\theta_Y"'] & N(Y) \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\theta_X"] & N(X) \\ M(Y) \arrow[r, "\theta_Y"'] \arrow[u, "M^*(f)"] & N(Y) \arrow[u, "N^*(f)"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするとき，θ を M から N への **Mackey 関手の射**という． □

定義 1.5 対象が G の Mackey 関手全体，射が Mackey 関手の射，合成が自然変換の垂直合成であるような圏を Mack(G) で表す． □

2 Mackey 関手の構成

補題 2.1 M を G の R-**Mod** に値を持つ Mackey 関手とする．任意の G 集合 Y に対して，関手の組 $M_Y = ({M_Y}^*, {M_Y}_*)$ を

$$\begin{gathered} {M_Y}^*(X) = {M_Y}_*(X) = M_Y(X) = M(X \times Y), \\ {M_Y}^*(f) = M^*(f \times \mathrm{id}_Y), \quad {M_Y}_*(f) = M_*(f \times \mathrm{id}_Y) \end{gathered}$$

で定める．このとき，M_Y は G の R-**Mod** に値を持つ Mackey 関手となる． □

補題 2.2 M を G の Mackey 関手，$g \in \mathbf{set}^G(Y, Y')$ を G 写像とする．M_Y から $M_{Y'}$ への R 準同型写像の族 M^g, M_g をそれぞれ

$$M^g{}_X = M^*(\mathrm{id}_X \times g), \qquad (M_g)_X = M_*(\mathrm{id}_X \times g)$$

で定めると，M^g, M_g は M_Y から $M_{Y'}$ への Mackey 関手の射となる． □

証明 M_g についてのみ示す．任意の $f \in \mathbf{set}^G(X, Y)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} M_Y(X) \arrow[r, "(M_g)_X"] \arrow[d, "(M_Y)_*(f)"'] & M_{Y'}(X) \arrow[d, "(M_{Y'})_*(f)"] \\ M_Y(X') \arrow[r, "(M_g)_{X'}"'] & M_{Y'}(X') \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} M(X \times Y) \arrow[r, "M_*(\mathrm{id}_X \times g)"] \arrow[d, "M_*(f \times \mathrm{id}_Y)"'] & M(X \times Y') \arrow[d, "M_*(f \times \mathrm{id}_{Y'})"] \\ M(X' \times Y) \arrow[r, "M_*(\mathrm{id}_X \times g)"'] & M(X' \times Y') \end{tikzcd}$$

は，G-**set** の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times g"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"'] & X \times Y' \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_{Y'}"] \\ X' \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{X'} \times g"'] & X' \times Y' \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

の M_* による像なので，可換である．さらに，図式 (2.1) は G-**set** における $\mathrm{id}_{X'} \times g$ と $f \times \mathrm{id}_{Y'}$ の引き戻しなので，図式

$$
\begin{tikzcd}
M_Y(X) \arrow[r, "(M_g)_X"] & M_{Y'}(X) \\
M_Y(X') \arrow[u, "{M_Y}^*(f)"] \arrow[r, "(M_g)_{X'}"'] & M_{Y'}(X') \arrow[u, "{M_{Y'}}^*(f)"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
M(X \times Y) \arrow[r, "M_*(\mathrm{id}_X \times g)"] & M(X \times Y') \\
M(X' \times Y) \arrow[u, "M^*(f \times \mathrm{id}_Y)"] \arrow[r, "M_*(\mathrm{id}_X \times g)"'] & M(X' \times Y') \arrow[u, "M^*(f \times \mathrm{id}_{Y'})"']
\end{tikzcd}
$$

は可換である．したがって，M_g は M_Y から $M_{Y'}$ への Mackey 関手の射である． ■

関手 $M^{\square}, M_{\square}\colon G\text{-}\mathbf{set} \to \mathrm{Mack}(G)$ が $M^{\square}(g) = M^g, M_{\square}(g) = M_g$ により定まる．また，$\mathrm{Mack}(G) \cong \mu_R(G)\text{-}\mathbf{Mod}$ なので，次の定理が成り立つ．

定理 2.3 M を G の Mackey 関手とする．関手の組 $(M^{\square}, M_{\square})$ は G の $\mu_R(G)$-**Mod** に値を持つ Mackey 関手となる． □

参考文献

[1] Serge Bouc. **Green Functors and *G*-sets**. No. 1671 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1997.