1. Resolver las siguientes operaciones (aproxime cuando sea necesario).

(a) $(1 + i)^4 =$

$[(1 + i)^2]^2 =$

$[1 + 2.1.i + i^2]^2 =$

$[1 + 2i - 1]^2 =$

$[2i]]]^2 =$

$2^2 \,.\, i^2 =$

$4 \,.\, (-1) =$ **-4**

$\boxed{(1 + i)^4 = -4}$

(b) $(2 + i).\,(3 - 2i)^3 =$

$(2 + i)\,.\,(3^3 + 3\,.\,3^2\,.\,(-2i) + 3\,.\,3\,.\,(-2i)^2 + (-2i)^3 =$

$(2 + i)\,.(27 - 54i - 36 + 8i) =$

$(2 + i)\,(-9 - 46i) =$

$2\,.\,(-9) + 2\,.(-46i) + i\,.\,(-9) + i\,.\,(-46i) =$

$-18 - 92i - 9i - 46i^2 =$

$-18 - 92i - 9i + 46 =$

$\boxed{(2 + i).\,(3 - 2i)^3 = 28 - 101i}$

Cálculos auxiliares:

$(-2i)^2 = (-2)^2\,.\,i^2 = 4\,.\,-1 = -4$

$(-2i)^3 = (-2i)^2\,.\,(-2i) = -4\,.\,(-2\,i) = 8i$

2. Resolver las siguientes operaciones siendo $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$ y $z_3 = 2 + 3i$:

(l) $(z_1 + z_2)^2 =$

$$(1 + i + i)^2 =$$

$$(1 + 2i)^2 =$$

$$1^2 + 2 \,.\, 1 \,.\, 2i + (2i)^2 =$$

$$1 + 4i - 4 =$$

$$\boxed{(z_1 + z_2)^2 = -3 + 4i}$$

(n) $z_1 \,.\, z_2 + z_3 =$

$$(1 + i) \,.\, i + 2 + 3i =$$

$$1 \,.\, i + i^2 + 2 + 3i =$$

$$i - 1 + 2 + 3i =$$

$$\boxed{z_1 \,.\, z_2 + z_3 = 1 + 4i}$$

3. Sean a, b, c, d ∈ R, busque la manera de transformar la expresión (a+bi)/(c+di) en una equivalente de la forma e + f i con e, f ∈ R. Sugerencia: observar que (c + di).(c − di) ∈ R.

Ejercicio explicado en el video [Conjunto de los números complejos - Clase 2 - Operaciones en Forma Par ordenado y Forma Binómica]

4. Realizar el cociente entre los siguientes complejos:

(g) $z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = -2 + 6i$

$$\frac{1 - 3i}{-2 + 6i} =$$

$$\frac{1 - 3i}{-2 + 6i} \cdot \frac{-2 - 6i}{-2 - 6i} =$$

$$\frac{1 \,.\, (-2) + 1 \,.\, (-6i) + (-3i) \,.\, (-2) + (-3i) \,.\, (-6i)}{(-2).(-2) + (-2)(-6i) + 6i \,.\, (-2) + 6i \,.\, (-6i)} =$$

$$\frac{-2 - 6i + 6i + 18i^{\overset{-1}{2}}}{4 + 12i - 12i - 36i^{\underset{-1}{2}}} =$$

$$\frac{-2 - 18}{4 + 36} =$$

$$\frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1 - 3i}{-2 + 6i} = -\frac{1}{2}}$$

(h) $z_1 = 3i$; $z_2 = 7 - i$

$$\frac{3i}{7-i} =$$

$$\frac{3i}{7-i}\cdot\frac{7+i}{7+i} =$$

$$\frac{3i\,.\,7 + 3i\,.\,i}{7\,.\,7 + 7\,.\,i + (-i).\,7 + (-i).\,i} =$$

$$\frac{21i + 3\overset{-1}{i^{2}}}{49 + 7i - 7i - \underset{-1}{i^{2}}} =$$

$$\frac{21i - 3}{49 + 1} =$$

$$\boxed{\frac{3i}{7-i} = \frac{-3}{50} + \frac{21}{50}i}$$

5. Escribir los siguientes Números Complejos escritos en forma binómica en forma polar, graficarlos aproximadamente e indicar su parte real, imaginaria, módulo y argumento (aproximar valores cuando sea necesario):

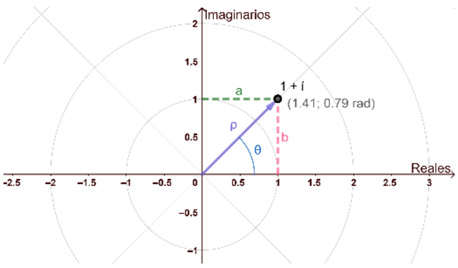
(a) 1 + i

Forma Binómica: 1 + i

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{1})$

Componente Real: **1**

Componente Imaginaria: **1**



Módulo: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Argumento: $arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

Forma Polar: $\left(\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$

Forma Trigonométrica: $\sqrt{2}\,.\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

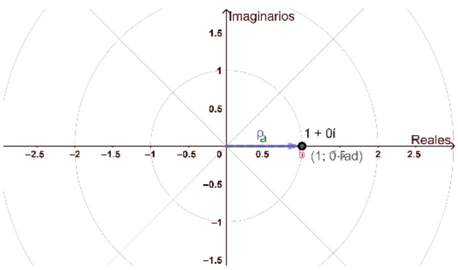
(b) 1

Forma Binómica: **1**

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{0})$

Componente Real: **1**

Componente Imaginaria: **0**



Módulo: $\sqrt{1^2 + 0^2} = \mathbf{1}$

Argumento: $arctg\left(\frac{0}{1}\right) = \mathbf{0}$

Forma Polar: $(\mathbf{1};\ \mathbf{0})$

Forma Trigonométrica: $\mathbf{1}\,.\left(\mathbf{cos}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{sen}(\mathbf{0})\right)$

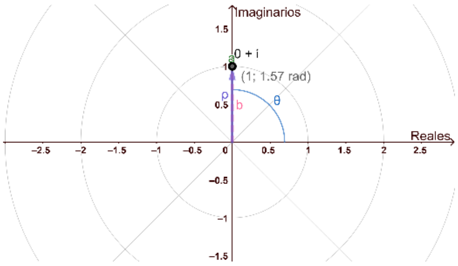
(c) i

Forma Binómica: i

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1})$

Componente Real: **0**

Componente Imaginaria: **1**



Módulo: $\sqrt{0^2 + 1^2} = \mathbf{1}$

Argumento: $arctg\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$

Forma Polar: $\left(\mathbf{1};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Forma Trigonométrica: $\mathbf{1}\,.\left(\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

6. Escribir a los siguientes Números Complejos escritos en forma polar en forma binómica, graficarlos aproximadamente e indicar su parte real, imaginaria, módulo y argumento (aproximar valores cuando sea necesario):

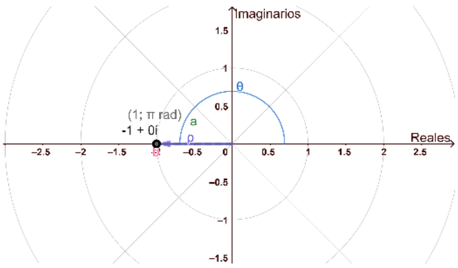
(a) (1, π)

Forma Polar: $(\mathbf{1};\ \boldsymbol{\pi})$

Forma Trigonométrica: $\mathbf{1}\,.\left(\mathbf{cos}(\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\pi})\right)$

Módulo: **1**

Argumento: $\boldsymbol{\pi}$



Componente Real: $\mathbf{1}\,.\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{-1}$

Componente Imaginaria: $\mathbf{1}\,.\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{0}$

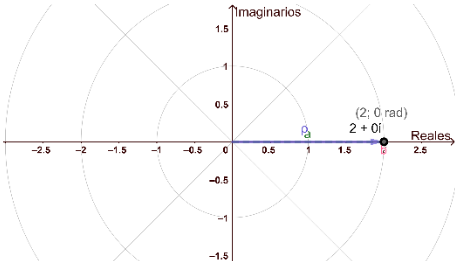
Forma Binómica: **-1**

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{0})$

(c) (2, 0)

Forma Polar: $(\mathbf{2};\ \mathbf{0})$

Forma Trigonométrica: $\mathbf{2}\ .\left(\mathbf{cos}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{sen}(\mathbf{0})\right)$



Módulo: $\mathbf{2}$

Argumento: $\mathbf{0}$

Componente Real: $\mathbf{2}\ .\mathbf{cos}(\mathbf{0}) = \mathbf{2}$

Componente Imaginaria: $\mathbf{2}\ .\mathbf{sen}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Forma Binómica: $\mathbf{2}$

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{0})$

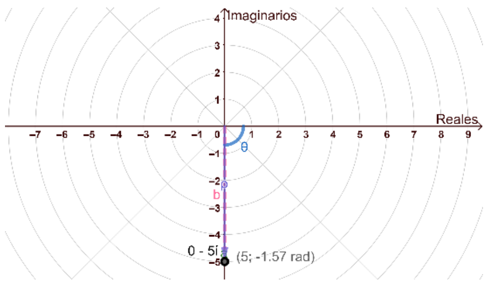
(d) (5, – π/2)

Forma Polar: $\left(\mathbf{5};\ -\frac{\pi}{2}\right)$

Forma Trigonométrica: $\mathbf{5}\ .\left(\mathbf{cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Módulo: $\mathbf{5}$

Argumento: $-\frac{\pi}{2}$



Componente Real: $\mathbf{5}\ .\mathbf{cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$

Componente Imaginaria: $\mathbf{5}\ .\mathbf{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{5}$

Forma Binómica: $-\mathbf{5}$

Forma Par Ordenado: $(\mathbf{0}\ ;\ -\mathbf{5})$

7. Muestre que cualquier Número Complejo z = (ρ, Θ) puede escribirse de la forma

z = ρ(cos(Θ) + i.sen(Θ)).

A esta forma se la llama Forma Trigonométrica del complejo

Ejercicio explicado en el video [Conjunto de los números complejos - Clase 1 - Introducción]

8. A partir de la forma trigonométrica y de las fórmulas mencionadas anteriormente resuelva las siguientes operaciones:

a)

$$\left[4\,.\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i.\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right].\left[\sqrt{7}\,.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]=$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).i.\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ i.\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ i.\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right).i.\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ i.\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right).\overset{-1}{i^{2}}\right]=$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right]=$$

Como

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right]=$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i.\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$4\,.\sqrt{7}\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i.\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

9. A partir de la forma trigonométrica y de las fórmulas mencionadas anteriormente muestre que si $z_1 = \rho_1(\cos(\Theta_1) + i\sin(\Theta_1))$ y $z_2 = \rho_2(\cos(\Theta_2) + i\sin(\Theta_2))$ ….

Ejercicio explicado en el video [Conjunto de los números complejos - Clase 3 - Operaciones - Forma Trigonométrica]

10. Considere z_1 del ítem anterior. Calcular z_1^2

$$z_1 = \rho_1\,.\,(\cos(\Theta_1) + i\sin(\Theta_1))$$

$$z_1\,.\,z_1 = \rho_1\,.\,(\cos(\Theta_1) + i\sin(\Theta_1))\ .\ \rho_1\,.\,(\cos(\Theta_1) + i\sin(\Theta_1)) =$$

$$\rho_1\,.\,\rho_1\,.\,(\cos(\Theta_1+\Theta_1) + i\sin(\Theta_1+\Theta_1))$$

$$\boxed{z_1^2 = \rho_1^2\ .\ (\cos(2\ .\ \Theta_1) + i\sin(2\ .\Theta_1))}$$

11. Deduzca una fórmula para obtener el resultado de z^n, siendo z = (ρ, Θ).

Ejercicio explicado en el video Conjunto de los números complejos - Clase 3 - Operaciones - Forma Trigonométrica

12. Calcular (aproximar valores cuando sea necesario):

(a) $(1 + i)^6$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

En el ejercicio 5.a) encontramos que

$$1 + 1.i = \sqrt{2}\,.\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Por lo tanto

$$(1 + 1.i)^6 =$$

$$\sqrt{2}^6\,.\left(\cos\left(6.\frac{\pi}{4}\right) + i.sen\left(6.\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$\boxed{8\,.\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)}$$

(h) i^{19}

$i^{19} = i^3 =$ -i

(p) $\frac{(\rho_1,\theta_1).(\rho_2,\theta_2)}{(\rho_3,\theta_3)^6} =$

$$\frac{(\rho_1.\rho_2, \theta_1 + \theta_2)}{(\rho_3{}^6, 6.\theta_3)} =$$

$$\boxed{\left(\frac{\rho_1.\rho_2}{\rho_3{}^6}, \theta_1 + \theta_2 - 6.\theta_3\right)}$$

13. Resolver las siguientes ecuaciones con incógnita z ∈ C y graficar las soluciones en el plano complejo.

(i) z + 1 = 2z – (7 + i)

z + 1 = 2z – (7 + i)

z – 2z = –7 – i – 1

-z = -8 – i

$\boxed{z = 8 + i}$

(p) $z^5 - i + 3 = 0$

$$z^5 - i + 3 = 0$$

$$z^5 = -3 + 1.i$$

Módulo: $\sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Argumento: $arctg\left(\frac{1}{-3}\right) \cong 2.82$

$$z^5 = \sqrt{10}.(\cos(2.82) + i.sen(2.82))$$

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{10}.(\cos(2.82) + i.sen(2.82))}$$

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{10}}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + k.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + k.2\pi}{5}\right)\right)$$

Con k = 0

$$z_0 = \sqrt[10]{10}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + 0.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + 0.2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{z_0 = \sqrt[10]{10}.(\cos(0.564) + i.sen(0.564))}$$

Con k = 1

$$z_1 = \sqrt[10]{10}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + 1.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + 1.2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt[10]{10}.(\cos(1.82) + i.sen(1.82))}$$

Con k = 2

$$z_2 = \sqrt[10]{10}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + 2.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + 2.2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{z_2 = \sqrt[10]{10}.(\cos(3.08) + i.sen(3.08))}$$

Con k = 3

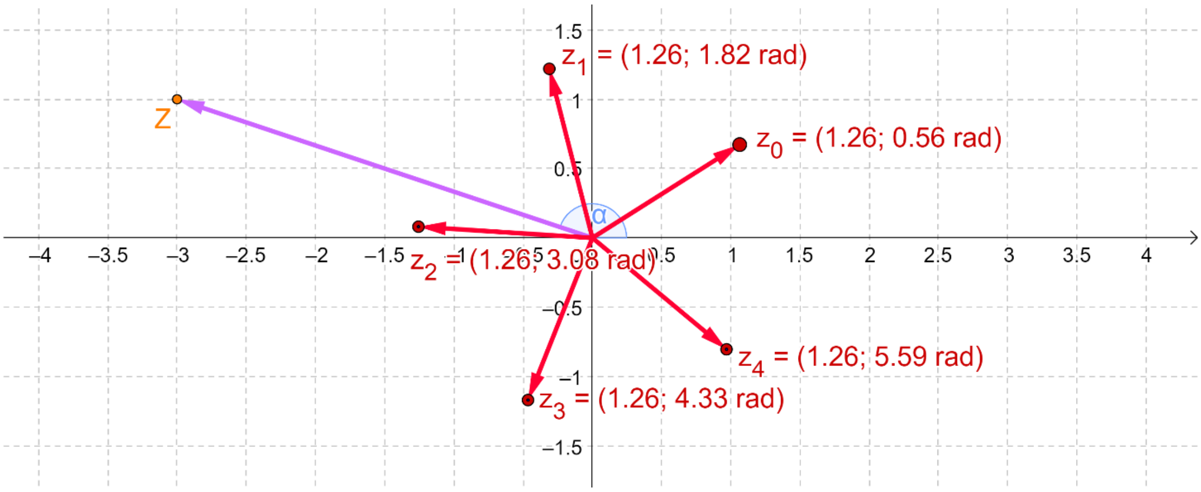
$$z_3 = \sqrt[10]{10}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + 3.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + 3.2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{z_3 = \sqrt[10]{10}.(\cos(4.33) + i.sen(4.33))}$$

Con k = 4

$$z_4 = \sqrt[10]{10}.\left(\cos\left(\frac{2.82 + 4.2\pi}{5}\right) + i.sen\left(\frac{2.82 + 4.2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\boxed{z_4 = \sqrt[10]{10}.(\cos(5.59) + i.sen(5.59))}$$



$z_1 = (1.26; 1.82 \text{ rad})$
$z_0 = (1.26; 0.56 \text{ rad})$
$z_2 = (1.26; 3.08 \text{ rad})$
$z_3 = (1.26; 4.33 \text{ rad})$
$z_4 = (1.26; 5.59 \text{ rad})$
z
α