Algunos resultados de la práctica 5

6) a) Tenemos $f: R_0^+ \to R$ con $f(x) = \frac{x+3}{a}$ y queremos calcular un valor para a tal que $f(0) = -1$.
Debemos plantear la ecuación:

$$f(0) = \frac{0+3}{a} = -1 \qquad 3 = -1 \cdot a \qquad -3 = a$$

b) Veamos qué pasa en este ítem, tenemos $f: R_0^+ \to R$ con $f(x) = ax^2 + 3$ y al plantear la ecuación: $f(0) = a \bullet 0^2 + 3 = -1$, llegamos al absurdo: $3 = -1$. Esto sucede porque no existe un valor para a tal que $f(0) = -1$.

c) No existe valor para a tal que $f(0) = -1$.

d) No existe valor para a tal que $f(0) = -1$.

e) No existe valor para a tal que $f(0) = -1$.

7) En este ejercicio las respuestas no son únicas en todos los casos. A modo de ejemplo vamos a resolver los primeros dos ítems:

a) Si la expresión de g es de la forma $g(x) = ax + b$ y tenemos que $g(0) = -2$ y $g(1) = 0$.
Podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$$\{g(0) = a\cdot 0 + b = -2 \; g(1) = a\cdot 1 + b = 0$$

De la primer ecuación obtenemos $b = -2$ y reemplazando este valor en la segunda ecuación nos va a permitir calcular el valor de a.

$$a\cdot 1 + (-2) = 0 \qquad a = 2$$

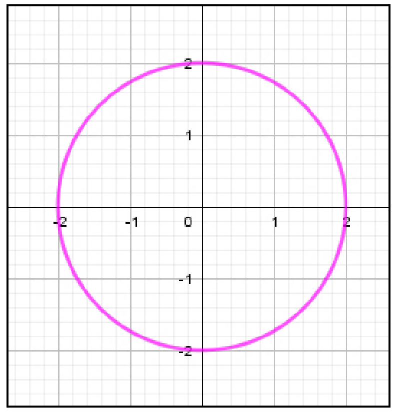
Luego, la expresión única de g que cumple con lo pedido es $g(x) = 2x - 2$.

b) Nos piden $f(x) = ax + b$ de manera que f pase por el origen de coordenadas, que es el punto $(0; 0)$, y que sea decreciente. Para esto último deberá tener pendiente negativa, esto es $a < 0$ (puede ser cualquier número) y para que pase por el origen de coordenadas su ordenada al origen deberá ser cero, esto es $b = 0$.

Luego, una expresión posible (que no es la única) podría ser: $f(x) = -5x$.

8) Debemos decidir cuáles de las fórmulas que nos dan podrían representar funciones de R en R.

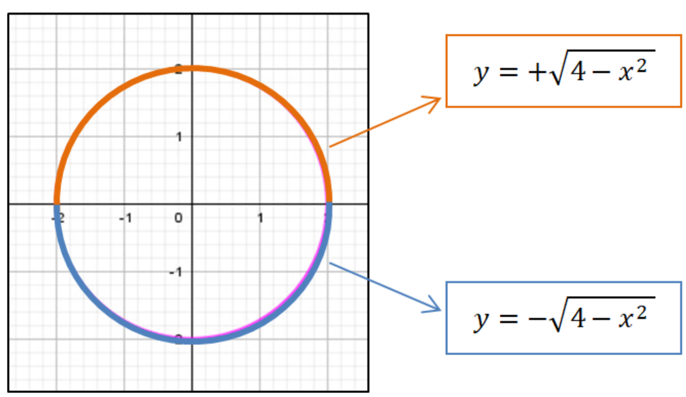
a) Tenemos $y^2 + x^2 = 4$ y se trata de una circunferencia con centro en el punto $(0; 0)$ y radio 2. Sabemos que su gráfica resultaría:



Vemos que, por ejemplo, cero tiene dos imágenes que son 2 y -2. Por lo que no puede representar una función. Además hay valores que no tienen imagen, como el 3.

En el ejercicio siguiente, el ejercicio 9, nos pide redefinir los conjuntos de partida y de llegada de manera que resulte una función. En este caso deberíamos hacerlo de la siguiente forma f: $[-2; 2] \rightarrow [0; 2]$. Ahora sí sería una función, ya que todos los valores del -2 al 2 tienen imagen, y esa imagen sería una sola porque el conjunto de llegada solo permite tomar media circunferencia (esto es lo que nos pide el ejercicio siguiente, el ejercicio 9). La función que definimos tendría la siguiente fórmula (debemos despejar y):

$$y^2 + x^2 = 4 \qquad y^2 = 4 - x^2 \qquad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$



En nuestro caso, como dijimos, nos estamos quedando con la semicircunferencia superior (la de color naranja). Por lo que redefiniendo la función, nos queda:

$$f\colon [-\ 2; 2] \rightarrow [0; 2] \text{ con } f(x)\ = \sqrt{4\ -\ x^2}\ .$$

b) Es función de R en R.

c) NO es función de R en R.

d) NO es función de R en R.

e) Es función de R en R.

11) En este ejercicio para decidir si las funciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas, se espera que justifiquen su respuesta tal como se ha explicado en el video sobre este tema.

a) Biyectiva.
b) Inyectiva.
c) Biyectiva.
d) Biyectiva.
e) Inyectiva.
f) Ninguna de las tres.
g) Inyectiva.
h) Biyectiva.
i) Inyectiva.
j) Ninguna de las tres.
k) Sobreyectiva.
l) Biyectiva.
m) Ninguna de las tres.
n) Inyectiva.
o) Ninguna de las tres.

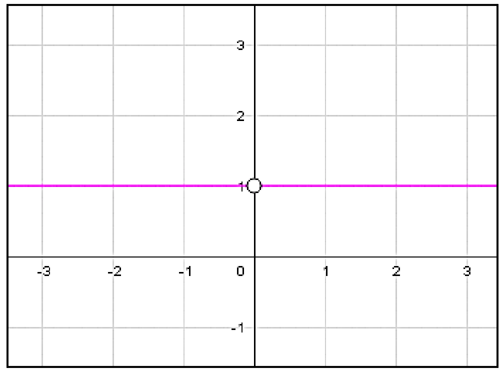
14) Debemos hallar el dominio natural y graficar las funciones reales que nos dan. Explicaremos algunos de los ítems. En todos los casos a la hora de graficar pueden realizar una tabla de valores.

a) b) c) d) $Dom(f)\ =\ R$ (El gráfico queda a cargo del estudiante)

e) Tenemos la función cuya fórmula es $h(x) = \frac{x}{x}$, si simplificamos el numerador con el denominador obtenemos $h^*(x) =\ 1$. La gráfica de h^* es una recta horizontal, pero esta es una fórmula asociada a la que nos dieron originalmente y por eso ponemos el asterisco.

Veamos que $Dom(h) = R\ -\ \{0\}$, ya que para poder resolver los cocientes $\frac{x}{x}$ la x del denominador no puede ser cero.

Al graficar, debemos excluir al punto cuya abscisa es cero ($x = 0$) y en ese punto en la gráfica nos quedará un punto vacío o “agujero”.

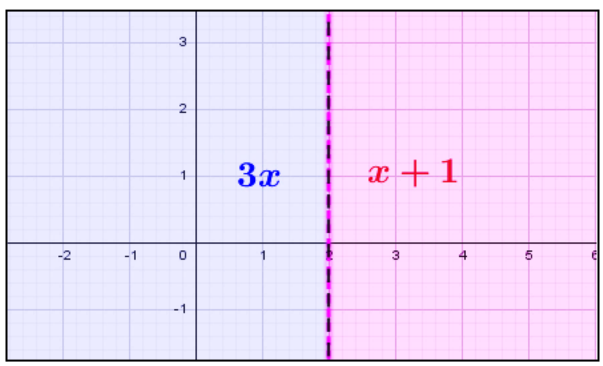


f) $Dom(i) = R$ (El gráfico queda a cargo del estudiante)

g) Al tratarse de una función definida a trozos (o por distinción de casos), debemos analizar cada una de las partes por separado. Tenemos:

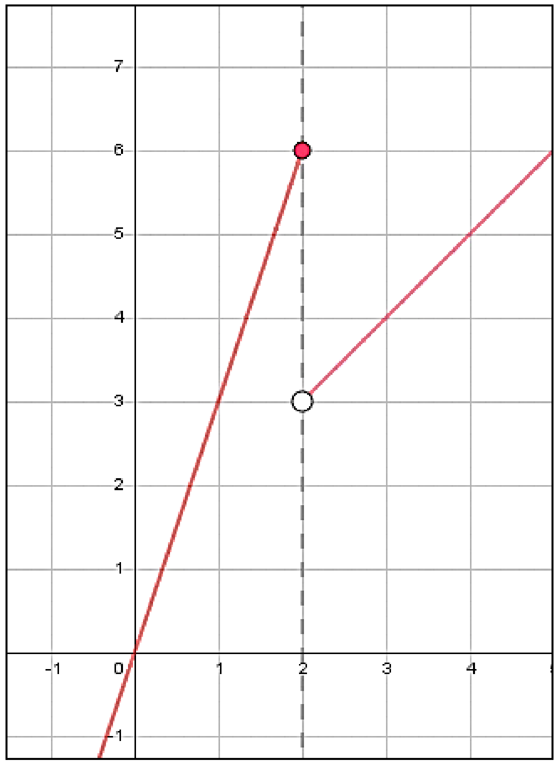
$$j(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x > 2 \\ 3x & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

Y la idea es que para valores de x mayores que 2 debemos utilizar la primera fórmula y para valores menores o iguales que 2 debemos utilizar la segunda.



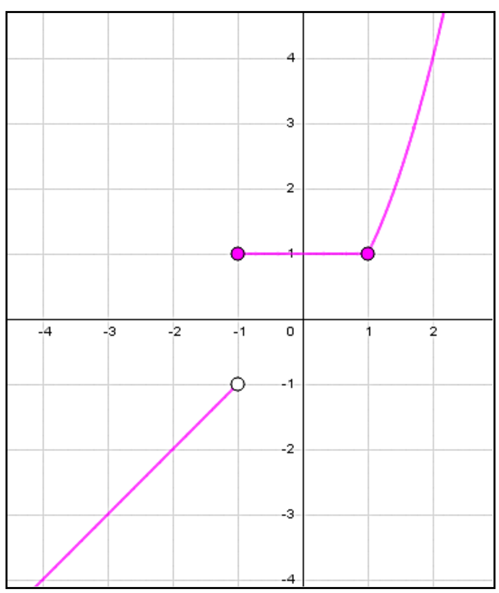
Ambas fórmulas tienen como dominio a todos los reales, por lo que $Dom(j) = R$.

Y la gráfica resulta:



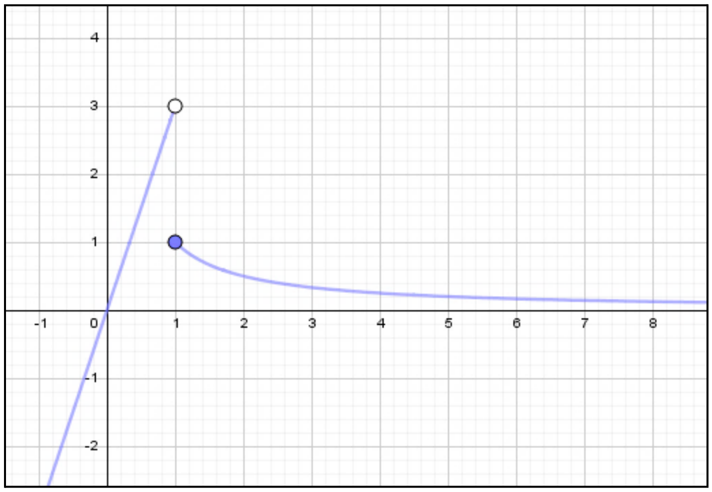
Observemos que es importante que quede claro en el gráfico cuál es la imagen de $x = 2$ (que es el valor en el que se produce el cambio de fórmula). Si $x = 2$, debemos utilizar la primera fórmula y nos queda $j(2) = 6$ y ese punto en el gráfico es un punto lleno. En cambio, para la segunda fórmula x no puede valer 2, y por eso el punto $(2; 3)$ resulta vacío.

h) $Dom(k) = R$



i) $Dom(l) = R - \{0\}$ (El gráfico queda a cargo del estudiante)

j) $Dom(f) = R$

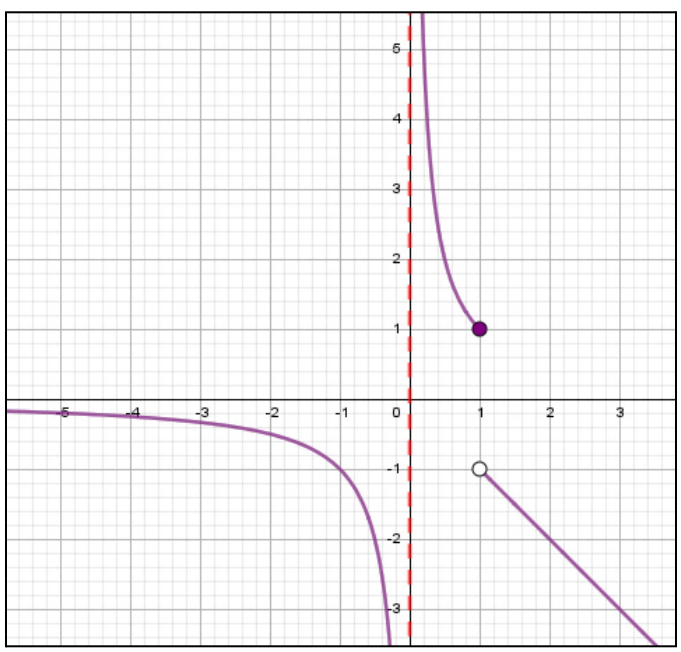


k) Tenemos:

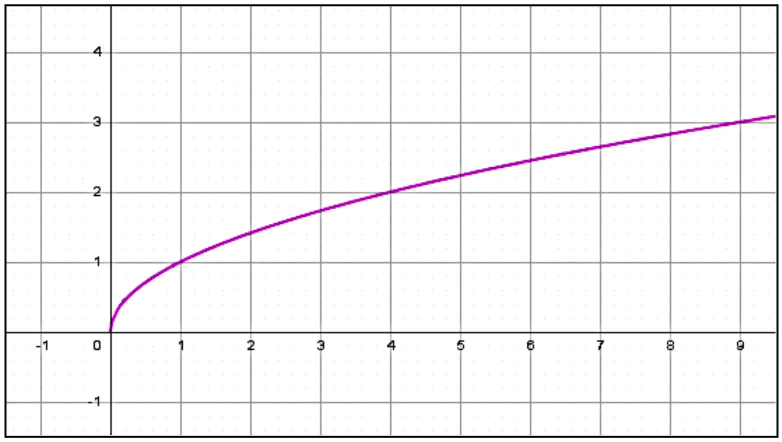
$$f(x) = \{\frac{1}{x} \quad si\, x \leq 1 \quad -x \quad si \quad x > 1$$

Y la idea es que para valores de x menores o iguales que 1 debemos utilizar la primera fórmula y para valores mayores que 1 debemos utilizar la segunda. La segunda fórmula tiene como dominio a todos los reales, pero la primera no está definida para el cero que es un valor menor o igual que 1. Por lo que, en este caso, nos queda $Dom(f) = R - \{0\}$.

La gráfica de f tendrá asíntota vertical en $x = 0$ (que se marcó con línea punteada en el gráfico) y nos quedará de la siguiente manera:



l) $Dom(f) = R_{\geq 0}$



m) n) $Dom(f) = R_{\geq 0}$ (Los gráficos quedan a cargo de los estudiantes).

o) $Dom(f) = R_{\geq -1}$ (El gráfico queda a cargo de los estudiantes).

p) $Dom(f) = R_{\geq 4}$ (El gráfico queda a cargo de los estudiantes).

q) Para calcular el dominio natural de $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2$ debemos buscar aquellos valores de x para los que el radicando (que es lo que está dentro de la raíz cuadrada) sea positivo o cero, esto es:

$$x - 1 \geq 0$$

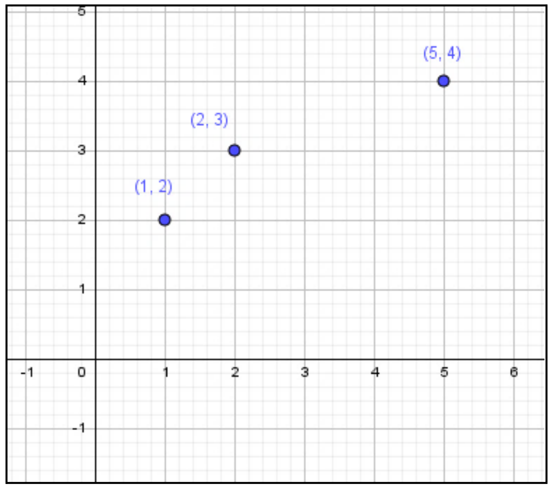
$$x \geq 1$$

Luego, queda $Dom(f) = R_{\geq 1}$.

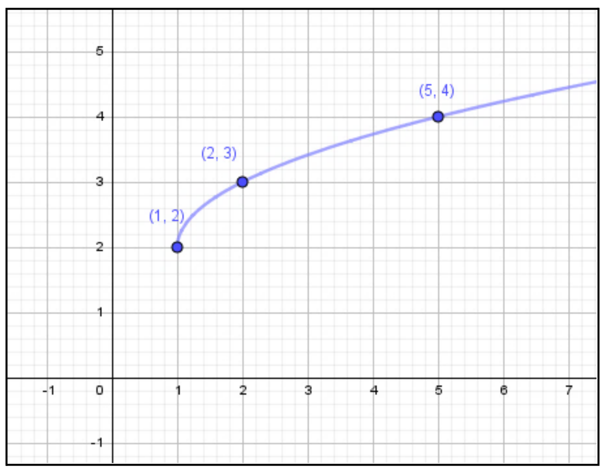
Para realizar la gráfica, recuerda que puedes utilizar una tabla de valores. Podría ser, por ejemplo:

x	$y = f(x)$
1	$\sqrt{1 - 1} + 2 = 2$
2	$\sqrt{2 - 1} + 2 = 3$
5	$\sqrt{5 - 1} + 2 = 4$

Al marcarlos en el gráfico, nos queda:



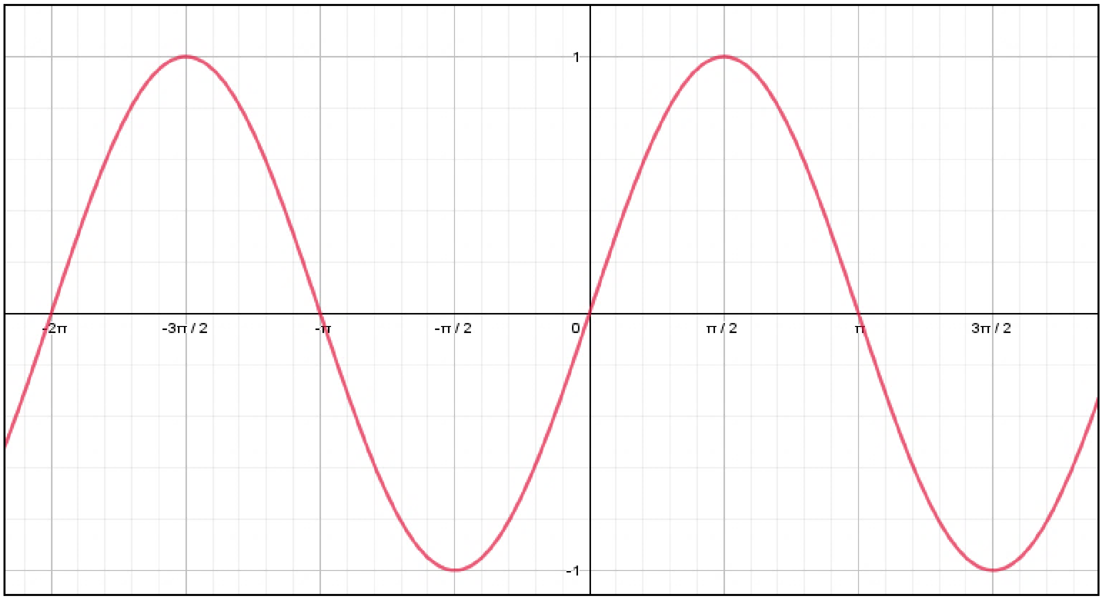
Y al trazar la gráfica, recuerda que la x no puede tomar valores a la izquierda del 1 (esto es, valores menores que 1).



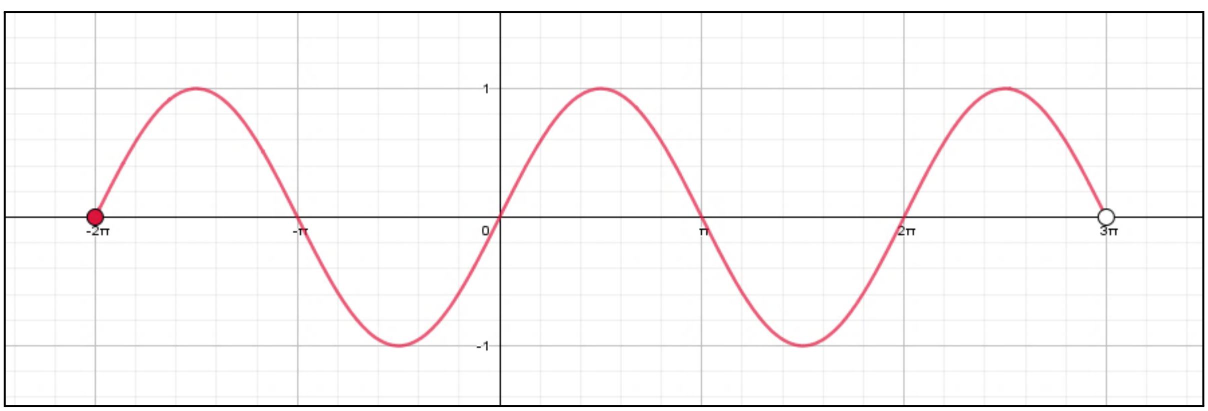
r) En este caso, el mismo ejercicio nos da un dominio a considerar. Éste no es el dominio natural, pero es un dominio posible. Tenemos $f(x) = sen(x)$ con $x \in [-2\pi; 3\pi)$. Este último, es el dominio de f. Para hacer la gráfica convendrá realizar una tabla de valores (considerando valores del dominio dado). Los valores los podrán calcular utilizando la circunferencia trigonométrica o la tabla de ángulos notables que vimos en la práctica 3.

x	$y = f(x)$
-2π	$sen(-2\pi) = 0$
$\frac{-3\pi}{2}$	$sen\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 1$
$-\pi$	$sen(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{2}$	$sen\left(\frac{-\pi}{2}\right) =-1$
0	$sen(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

La gráfica de la función seno es periódica (repite siempre un mismo dibujo) y está acotada entre -1 y 1.



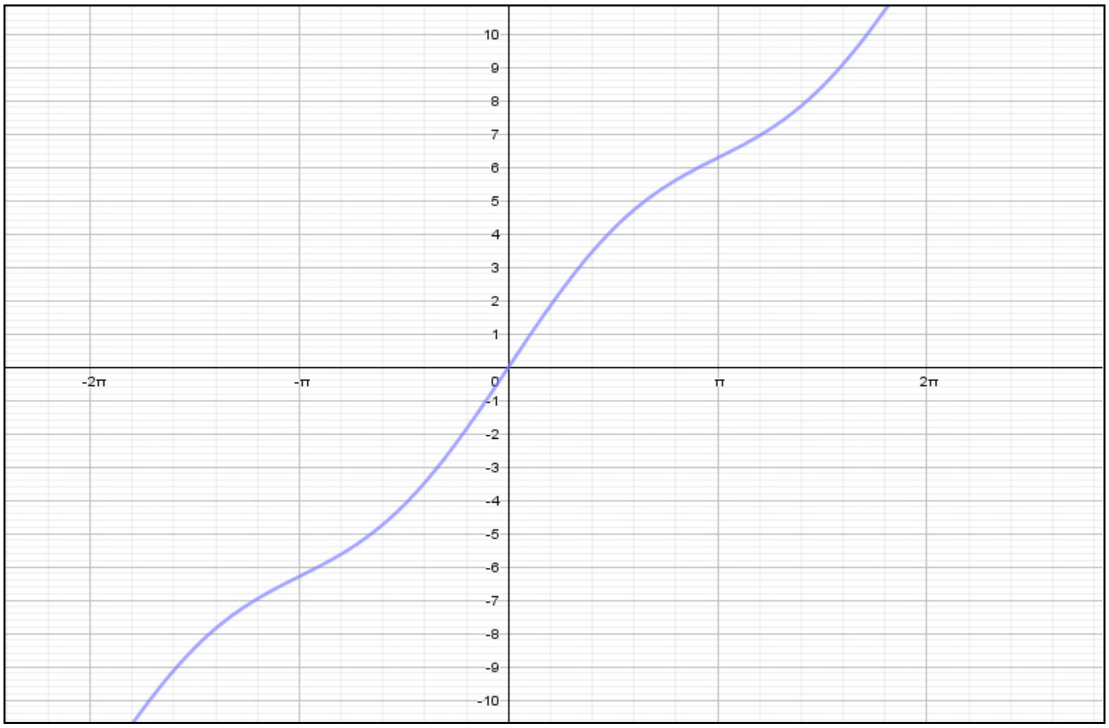
Por el dominio dado, debemos recortar esta curva entre -2π y 3π. Observemos que -2π está incluido y 3π no lo está. Por lo que para $x = -2\pi$, el punto en el gráfico será lleno y para $x = 3\pi$, será vacío.



s) t) u) Los dominios son los que da el ejercicio y el gráfico resulta muy parecido al anterior.

v) Tenemos $f(x) = sen(x) + 2x$ cuyo dominio natural son todos los reales, es decir, las operaciones que propone la fórmula se pueden resolver con cualquier número dentro de los reales. Nos queda, $Dom(f) = R$.

Para hacer el gráfico recomendamos hacer una tabla de valores considerando algunos valores entre -2π y 2π. A la hora de marcar estos valores sobre el gráfico considere que $\pi \cong 3,14$.



22) En este problema nos piden que encontremos los valores de x para los cuales la imagen es 3. Es decir que debemos hallar el o los valores de x que verifican que $f(x) = 3$.

a) Lo que haremos es resolver la ecuación $f(x) = 3$ que en este caso queda:

$$5x + 1 = 3 \qquad 5x = 3 - 1 \qquad x = \frac{2}{5}$$

Sería bueno verificar que este valor encontrado pertenece al dominio de la función. En este caso, $Dom(f) = R$. Por lo que el valor hallado es solución de este ejercicio.

b) $x = \frac{1}{5}$

c) En este caso tenemos que resolver la ecuación: $(x + 2)(3x - 7) = 3$. Observemos que no se trata de un producto igualado a cero, por lo que no podremos aplicar la técnica de igualar cada factor a cero, ya que en este caso no sería correcto. Para resolver, tendremos que aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación y nos va a quedar una ecuación cuadrática:

$$3x^2 - 7x + 6x - 14 = 3$$

$$3x^2 - x - 14 - 3 = 0$$

$$3x^2 - x - 17 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente, considerando $a = 3$, $b =- 1$ y $c =- 17$, obtenemos $x_1 \cong 2,55$ y $x_2 \cong -2,22$.

Como $Dom(f) = R$ y estos son dos valores que pertenecen al dominio, el conjunto solución queda formado por estos dos valores encontrados.

d) En este caso tendremos que considerar cada una de las partes de la función a trozos que nos dan en el ejercicio. Nos quedarán entonces dos ecuaciones para resolver (cada una definida para los valores de x que nos indica la fórmula):

1) $2x - \frac{1}{2} = 3$ (para $x \geq 3$)

2) $x = 3$ (para $x < 3$)

Es evidente que la ecuación **(2)** no nos da un valor que sea válido para la x, ya que x debería ser igual a 3 y eso no es menor que 3.

De la ecuación **(1)** obtenemos:

$$2x - \frac{1}{2} = 3 \qquad 2x = 3 + \frac{1}{2} \qquad x = \frac{7}{2} : 2$$

$$x = \frac{7}{4}$$

Veamos que $x = \frac{7}{4} = 1,75$ y este valor no es mayor o igual que 3. Como esta primera fórmula estaba definida para valores mayores o iguales que 3, tenemos que no hay ningún valor de x que cumpla con lo pedido.