Universidad Nacional de Luján
Álgebra y Lógica Computacional

## Respuestas Ejercicios 39 y 40 - Práctica 3

39. La idea de este ejercicio es resolver SIN CALCULADORA. Para esto podrá ser utilizada la tabla de ángulos notables y la circunferencia trigonométrica. Pueden utilizar el recurso de GeoGebra® visto en el video sobre *Circunferencia Trigonométrica*, disponible en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/rycptabv

Recordemos, además, la tabla de ángulo notables:

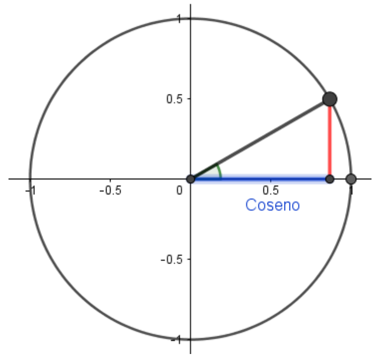
| $\alpha$ | $0\ rad$ | $\frac{\pi}{6}\ rad$ | $\frac{\pi}{4}\ rad$ | $\frac{\pi}{3}\ rad$ | $\frac{\pi}{2}\ rad$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | 0 | 0,5 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0,5 | 0 |
| $\tan(\alpha)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | No definida |

(a) $\alpha = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi \right\}$

(b) Nos piden que $cos(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ con $-3\pi \leq \beta \leq \pi$. Si buscamos en la tabla de ángulos notables, encontramos que el ángulo que tiene por coseno a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es el ángulo $\frac{\pi}{6}$. Ese valor ya es una solución a nuestro problema. Debemos encontrar ahora otros ángulos que tengan el mismo coseno y estén dentro del intervalo pedido. La representación gráfica del ángulo sería la siguiente:

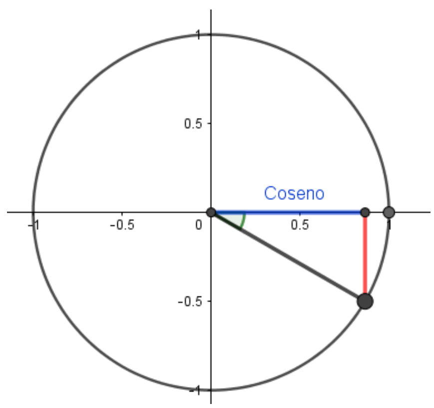
Como $-3\pi \leq \beta \leq \pi$, podemos considerar media vuelta en sentido antihorario y una vuelta y media en sentido horario (como van las agujas del reloj). Veamos en la figura, que si consideramos un ángulo en el segundo cuadrante su coseno sería negativo. E s por esto que dentro de la media vuelta que podemos dar en sentido positivo (antihorario) la única solución es $\frac{\pi}{6}$.

Veamos que lo mismo ocurre si consideramos el tercer cuadrante. Ahí también los ángulos tiene coseno negativo. Es por esto que cuando demos la vuelta y media en

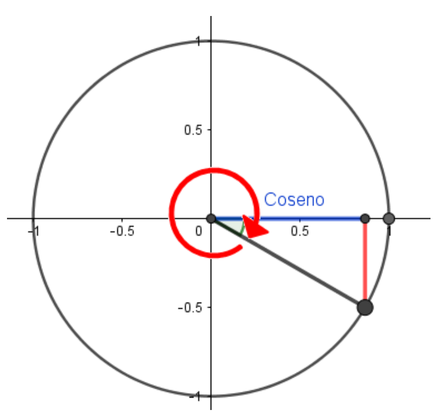



sentido negativo (horario), solamente consideraremos ángulos en el primer y cuarto cuadrante.

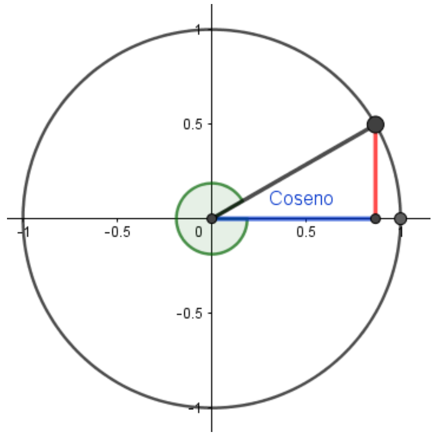
Veamos que el ángulo $-\dfrac{\pi}{6}$ tiene el mismo coseno (ya que resulta simétrico respecto del eje $x$).




Si consideramos el ángulo colateral que resulta de de sumarle una vuelta (en sentido negativo) resulta ser: $-\dfrac{\pi}{6} + (-2\pi) = -\dfrac{13}{6}\pi$




Por último, también tendrán el mismo coseno, el ángulo colateral con el ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ pero medido en sentido contrario (negativo). Sería el ángulo $-\dfrac{11}{6}\pi$.




En síntesis el conjunto solución de esta ecuación es:

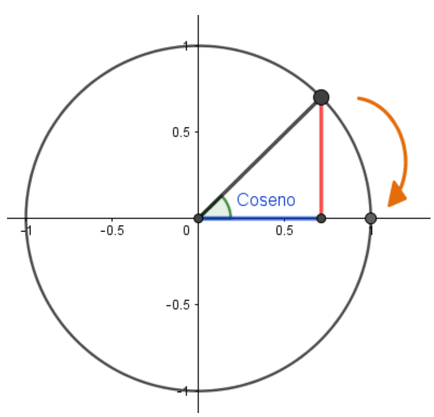
$$\beta = \left\{ -\frac{13}{6}\pi; -\frac{11}{6}\pi; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

(c) $\gamma = \left\{ -\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{\pi}{4} \right\}$

(d) $\gamma = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\}$

(e) En este ítem se presenta una diferencia con respecto a los anteriores. Ya no nos piden que el seno, el coseno o la tangente sea **igual** a un valor, sino que lo que se nos presenta es una inecuación. Nos piden que $cos(\alpha) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es decir, queremos un ángulo cuyo coseno sea **mayor o igual** a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sabemos que $\frac{\pi}{4}$ tiene coseno $\frac{\sqrt{2}}{2}$, observemos que cualquier ángulo menor o igual a $\frac{\pi}{4}$ y mayor o igual a 0 tendrá coseno mayor o igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.




Luego, el conjunto solución es un intervalo de valores:

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

(f) No existen ángulos cuyo seno sea mayor que 1, de hecho hemos dicho que el seno está siempre acotado entre $-1$ y 1. Por lo que el conjunto solución en este caso es vacío.

(g) En este caso nos piden que $sin(\gamma) \geq -1$ para un ángulo $\gamma$ tal que $-4\pi < \gamma < 3\pi$ y esto va a pasar para cualquier ángulo que tomemos dentro de ese intervalo ya que el menor valor que tomar el seno es $-1$.

Luego, nos queda que $\gamma \in (-4\pi; 3\pi)$.

(h) En este caso, parecido al ítem (f) tenemos que no es posible que el seno de un ángulo sea menor a $-1$, pero si podría ser **igual** a $-1$.

Un ángulo cuyo seno es igual a $-1$ es $-\frac{\pi}{2}$. A partir de ahí tendríamos que ver cuántos ángulos colaterales con éste podemos encontrar en sentido positivo y negativo. Y esto, en el intervalo dado, no es posible.

Nos quedará: $\epsilon = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.

(i) Haciendo un análisis similar al del ítem (e) nos quedará que: $\delta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right)$.

40. En este ejercicio debemos realizar un procedimiento parecido al anterior, pero ahora podemos utilizar la calculadora.

(a) $S = \left\{-\frac{7}{4}\pi; -\frac{5}{4}\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right\}$

(b) $S = \varnothing$

(c) $S = \left\{-\frac{8}{3}\pi; -\frac{7}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{10}{3}\pi; \frac{11}{3}\pi\right\}$

(d) $S = \left\{\frac{7}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi; \frac{15}{4}\pi; \frac{17}{4}\pi; \frac{23}{4}\pi\right\}$

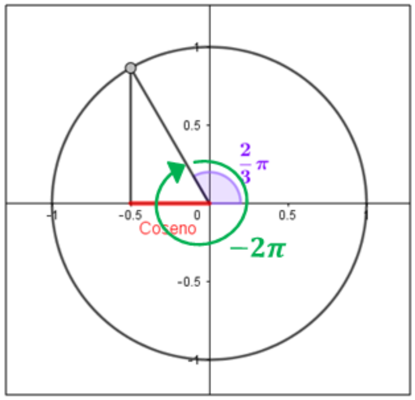
(e) En este caso nos piden que $cos(x) = -\frac{1}{2}$, con $x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. Veamos que podemos considerar ángulos en un cuarto de vuelta en sentido positivo y en una vuelta completa en sentido negativo. Como en el primer cuadrante los ángulos tienen coseno positivo y en este caso queremos que el coseno sea $-\frac{1}{2}$, no buscaremos soluciones en el cuarto de vuelta positivo que podemos considerar.
Despejando:

$$cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \notin \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$$

Debemos hallar ángulos colaterales con $\frac{2}{3}\pi$ que estén dentro del intervalo pedido. Para esto consideraremos la circunferencia trigonométrica:




Luego, el ángulo buscado es $\frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi$. Y dicho ángulo si pertenece al intervalo $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

Considerando la propiedad trigonométrica $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$, tenemos que

$$cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

Buscando un ángulo colateral a éste con un procedimiento similar al anterior, tendremos que $\frac{4}{3}\pi$ es colateral con $\frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$.

Luego, $S = \left\{-\frac{4}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi\right\}$

(f) $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi\right\}$

(g) En este ítem nos piden que $tan(x) = -1$ en el intervalo $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Observemos que este intervalo abarca únicamente el primer cuadrante. Dentro del mismo todos los ángulos tiene tangete positiva. Por este motivo, $S = \varnothing$.