1. LÓGICA

PROPOSICIONES

Ejercicio 1.

a) Es una proposición verdadera.
b) No es una proposición.
c) No es una proposición.
d) Es una proposición falsa.
e) Es una proposición falsa.
f) Es una proposición verdadera.
g) No es una proposición.
h) No es una proposición.
i) Es una proposición falsa.
j) Es una proposición falsa.
k) Es una proposición verdadera.
l) No es una proposición.
m) Es una proposición pero no se puede determinar su valor de verdad.
n) Es una proposición verdadera.
o) Es una proposición falsa.
p) Es una proposición falsa.
q) Es una proposición verdadera.
r) Es una proposición falsa.
s) No es una proposición.
t) No es una proposición.
u) Es una proposición pero no se puede determinar su valor de verdad.

Ejercicio 2.

a) En la UNLu, algunos estudiantes son mayores de edad.
b) Todas las mujeres tienen el cabello largo.
c) Algún intendente de Luján fue peronista.
d) Alguna vez volé a la luna.
e) En Jáuregui no hay ninguna ardilla.
f) Algunas ardillas de Jáuregui no son lindas.

Ejercicio 3. Todos los triángulos isósceles tienen dos lados congruentes.

Ejercicio 4. Todos los triángulos escalenos tienen sus tres lados distintos.

PROPOSICIONES COMPUESTAS Y TABLAS DE VERDAD

Ejercicio 5.

A continuación se enumeran los ítems cuyas proposiciones son equivalentes.

- ✓ $(a) \equiv (c) \equiv (d) \equiv (j)$
- ✓ $(b) \equiv (g)$
- ✓ $(e) \equiv (h)$
- ✓ $(i) \equiv (f)$

Ejercicio 6. A cargo del estudiante.

Ejercicio 7. (*Se propone la resolución de algunos ítems a modo de ejemplo, el resto de los ejercicios quedan a cargo del estudiante*)

Ítem a)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Ítem c)

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Ítem g)

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \Longrightarrow (q \vee \neg p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ítem h)

p	q	r	$q \wedge r$	$(q \wedge r) \vee q$	$p \wedge ((q \wedge r) \vee q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Ítem k)

p	q	r	$\neg q$	$r \wedge p$	$\neg q \Rightarrow (r \wedge p)$	$p \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (r \wedge p))$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Ítem l)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \Leftrightarrow r$	$\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

Ítem m)

q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$
V	F	F
F	V	F

Ejercicio 8.

Ítem a)

i) $p \Rightarrow r$
ii) $\neg q \Rightarrow p$
iii) $\neg r$

Ítem b)

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow r \\ \neg q \Rightarrow p \\ \underline{\neg r} \\ \therefore q \end{array}$$

Ejercicio 9. Se resuelve de manera similar al ejercicio anterior.

Ejercicio 10. A cargo del estudiante.

RAZONAMIENTOS LÓGICOS

Ejercicio 11. (Se propone la resolución de algunos ítems a modo de ejemplo, el resto queda a cargo del estudiante)

Ítem i)

- Si tomamos la primera de las premisas $(p \wedge q)$ y aplicamos la regla de *"simplificación"* que aparece en la tabla de reglas de inferencia, obtenemos:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

- Ahora tomemos la segunda de las premisas $(p \Rightarrow (r \wedge q))$, más el resultado que obtuvimos recién, y usando *"Modus Ponens"* llegamos a que:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow (r \wedge q) \\ p \\ \hline \therefore\ r \wedge q \end{array}$$

- Aplicamos nuevamente *"simplificación"* al resultado anterior y obtenemos:

$$\frac{r \wedge q}{\therefore\ r}$$

- Nuevamente *"Modus Ponens"* con el resultado anterior y la tercer premisa:

$$\begin{array}{c} r \Rightarrow (s \vee t) \\ r \\ \hline \therefore\ s \vee t \end{array}$$

Ítem j)

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & (1) \\ p \vee s & (2) \\ t \Rightarrow q & (3) \\ \neg s & (4) \\ \hline \therefore\ \neg r \Rightarrow \neg t & (5) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} p \vee s & (2) \\ \neg s & (4) \\ \hline \therefore\ p & (6) \end{array}$$

Modus Ponens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & (1) \\ p & (6) \\ \hline \therefore\ q \Rightarrow r & (7) \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{ll} t \Rightarrow q & (3) \\ q \Rightarrow r & (7) \\ \hline \therefore\ t \Rightarrow r & (8) \end{array}$$

Equivalencia Contrarecíproco

$$(8) \qquad (t \Rightarrow r) \ \equiv\ (\neg r \Rightarrow \neg t) \qquad (5)$$

Ítem k)

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \vee q & (1) \\ \neg p \vee r & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} \neg p \vee r & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ \neg p & (5) \end{array}$$

Silogismo Diyuntivo

$$\begin{array}{ll} p \vee q & (1) \\ \neg p & (5) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

Ítem l)

Enumeramos las premisas

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow r & (1) \\ \neg q \Rightarrow p & (2) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ q & (4) \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow r & (1) \\ \neg r & (3) \\ \hline \therefore\ \neg p & (5) \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} \neg q \Rightarrow p & (1) \\ \neg p & (5) \\ \hline \therefore\ \neg(\neg q) & (6) \end{array}$$

Equivalencia Doble negación

$$(6) \qquad \neg(\neg q) \ \equiv\ q \qquad (4)$$

Ítem m)

- En la tabla de "Equivalencias Lógicas" vemos que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Si aplicamos esta regla a la primer premisa, obtenemos: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv \neg(p \vee q) \vee r$

- Otra equivalencia lógica (conocida como una de la leyes de De Morgan) que se encuentra en la tabla, dice que $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Entonces: $\neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

- Usamos ahora, sobre el resultado anterior, otra equivalencia lógica (una de las leyes distributivas) que dice que $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee C)$ $\quad (\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

- Ahora usamos *"simplificación"* a la fórmula $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$:

$$\frac{(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)}{\therefore\ \neg q \vee r}$$

- Aplicamos nuevamente la primer equivalencia lógica que usamos en la resolución de este ejercicio: $\neg q \vee r \equiv q \Rightarrow r$

- Aplicamos la regla de inferencia "silogismo hipotético" entre el último resultado y la segunda premisa y obtenemos:

$$\begin{array}{c} q \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore\ q \Rightarrow s \end{array}$$

- Por último, usamos la equivalencia lógica llamada *"contrarecíproco"* a la fórmula $q \Rightarrow s$ y llegamos al resultado que buscábamos: $\neg s \Rightarrow \neg q$

Ítem n)

- Una de las equivalencias lógicas llamada regla de "Adición" dice que de A se deduce $A \vee B$. Es decir, si una premisa es válida, entonces seguro es válida esa premisa más cualquier otra. Lo que nos va servir en este caso (por algo que veremos enseguida) es agregarle a $\neg q$ la premisa $\neg p$. Concretamente:

$$\frac{\neg q}{\therefore\ \neg q \vee \neg p}$$

- Otra de las leyes de De Morgan, dice que $\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$. Entonces:

$$\neg q \vee \neg p \equiv \neg(q \wedge p)$$

- Usando la *"propiedad conmutativa"* que figura en la tabla de equivalencias lógicas ($A \wedge B \equiv B \wedge A$) tenemos, a partir de $\neg(q \wedge p)$, que vale:

$$\neg(p \wedge q)$$

- Ahora, usando *"silogismo disyuntivo"* con la premisa $(p \wedge q) \vee r$ y el resultado anterior, llegamos a lo que buscábamos:

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \vee r \\ \neg(p \wedge q) \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

- Por último, aplicando la regla *"silogismo disyuntivo"* entre lo que obtuvimos en el paso anterior y la cuarta premisa, llegamos al resultado que buscábamos:

$$\begin{array}{c} s \vee t \\ \neg s \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

Ejercicio 12.

Ítem a)

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\neg r$	$[(p \wedge \neg q) \wedge p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow \neg r$
V	F	V	V	V	V	V	F	F

Ítem b)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow p$
F	V	V	F	V	F

Ítem c)

p	q	r	$\neg p$	$r \vee \neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$[(r \vee \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow q)] \Rightarrow p$
F	V	V	V	V	V	F

Ejercicio 13.

Ítem a)

$p \vee [p \wedge (p \vee q)]$

Por ley distributiva podemos escribir: $p \vee [(p \wedge p) \vee (p \wedge q)]$

Por leyes de idempotencia $p \wedge p \equiv p$, luego nos queda:

$p \vee [p \vee (p \wedge q)]$

Por ley asocitiva: $(p \vee p) \vee (p \wedge q)$

Por leyes de idempotencia: $p \vee (p \wedge q)$

Por leyes de absorción, queda finalmente p.

Ítem b)

$q \wedge [(p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (r \vee t \vee \neg t))]$

Las expresiones $q \vee \neg q$ y $t \vee \neg t$ son tautologías por lo que siempre serán verdaderas, decimos entonces que equivalen a 1.

Nos queda:

$q \wedge [(p \wedge (\neg r \vee 1)) \vee (\neg q \wedge (r \vee 1))]$

Las expresiones: $\neg r \vee 1$ y $r \vee 1$ también son tautologías por lo que equivalen a 1.

$q \wedge [(p \wedge 1) \vee (\neg q \wedge 1)]$

Nos quedan las equivalencias: $p \wedge 1 \equiv p$ y $\neg q \wedge 1 \equiv \neg q$

Luego queda, $q \wedge [p \vee \neg q]$

Por propiedad distributiva: $(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)$

Como $q \wedge \neg q \equiv 0$ por ser una contradicción y resultar siempre falsa, nos queda:

$(q \wedge p) \vee 0$

Luego por leyes de idempotencia y absorción resulta la simplificación: $q \wedge p$.

Ítem c) Simplificando se obtiene $p \wedge t$. La resolución queda a cargo del estudiante.

CUANTIFICADORES

Ejercicio 14.

a) Falso porque $Si\ x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$. Negación: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0$
b) Verdadero. Negación: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$
c) Falso porque $Si\ x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 > 0$. Negación: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$

d) Verdadero. Negación: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$

Ejercicio 15.

a) Falso. Negación: $\exists x \in A: x \notin B$
b) Verdadero. Negación: $\exists x \in B: x \notin A$
c) Verdadero. Negación: $\forall x \in A, x \notin B$
d) Verdadero. Negación: $\forall x \in B, x \notin A$
e) Verdadero. Negación: $\forall x \in A, x \notin A$

APLICACIONES A CIRCUITOS Y A COMPUTACIÓN

Ejercicio 16. A cargo del estudiante.

Ejercicio 17.

a) $y \coloneqq 8;\ x := 1$
b) No se puede ejecutar la proposición (b). Se pasa al apartado (c).
c) $x := 16$
d) No se puede ejecutar la proposición (d). Se pasa al apartado (e).
e) $y := 10$
f) No se puede ejecutar la proposición (f).

Ejercicio 18. A cargo del estudiante.

Ejercicio 19. A cargo del estudiante.