Ejercicios 5 a),b), f) y m) de la Práctica II

Conocimientos previos:

Vamos a hacer una lista de algunas propiedades y conocimientos que usaremos constantemente en la resolución de estos ejercicios (la mayoría figuran en la página 9 de la práctica 2). Los que no las conozcan deben leerlas con atención ya que sin ellas es casi imposible resolver los problemas.

- Si un producto da cero, es porque alguno de sus términos es cero. O sea:

$$\text{Si} \quad a.b = 0, \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

$$\text{Si} \quad a.b.c = 0, \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{o} \quad c = 0$$

$$\vdots$$

etc.

- Resolución de ecuaciónes cuadráticas. Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $a.x^2 + b.x + c = 0$, donde a, b y c son números reales fijos llamados "coeficientes" y x es la incógnita cuyo valor (o valores) se pretende averiguar.

  Este tipo de ecuaciones se resuelven usando una fórmula muy conocida:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Ya veremos cómo se usa esta fórmula cuando resolvamos el problema 5) m).

- Algunas reglas con la "igualdad".
  - Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y sumo un mismo número a ambos miembros, entonces los dos nuevos términos son iguales también.
  - Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y resto un mismo número a ambos miembros, entonces los dos nuevos términos son iguales también.
  - Si $a = b$ entonces $a.c = b.c$ para todo número c. Es decir, si dos términos son iguales y multiplico ambos miembros por el mismo número, entonces los dos nuevos términos son iguales también.

- Si $a = b$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ para todo número c distinto de cero. Es decir, si dos términos son iguales y divido ambos miembros por el mismo número (un número distinto de cero), entonces los dos nuevos términos son iguales también.

- "Despejes"

  La reglas anteriores, dan lugar a la técnica de "despejes" con la que uno logra "despejar" una incógnita de una ecuación. Normalmente uno aprende esa técnica en la escuela secundaria aunque no siempre se ve de donde sale. Por ejemplo uno aprende en la escuela que:

  - Si un término está sumando, entonces "pasa" restando al otro lado de la igualdad.
  - Si un término está restando "pasa" sumando.
  - Si un número está multiplicando "pasa" dividiendo.
  - Si un número está dividiendo "pasa" multiplicando.

    Todo esto funciona siguiendo la regla de que primero se "pasan" las sumas y las restas y luego las multiplicaciones y divisiones.

  Veamos como se deduce la primera de estas reglas de despejes a partir de las reglas con la igualdad que citamos antes. Despejemos la x de la ecuación $x + 6 = 10$

$$\begin{aligned} x + 6 &= 10 \\ x + 6 - 6 &= 10 - 6 \\ x &= 10 - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

  Aquí restamos 6 a ambos miembros de la igualdad que, según las reglas de arriba, mantiene la igualdad y además nos permite dejar a la x sola (ya que $6 - 6 = 0$).

  Notemos que si en la cuenta anterior pasamos directamente del primer paso al tercero (nos salteamos el paso de restar 6 a ambos miembros), el efecto visual es que el 6 que estaba sumando a la izquierda del signo igual, "pasó" restando a la derecha. Esa es la primer regla de despejes que figuran arriba.

$$\begin{aligned} x + 6 &= 10 \\ &\downarrow \\ x &= 10 - 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

  Las demás reglas se demuestran de forma similar (sumando, multiplicando o dividiendo a ambos miembros de la igualdad por el valor que queremos eliminar para dejar sola a la x).

- Módulo.

  Hay un concepto que aparecerá varias veces en esta materia (y en otras que cursarán más adelante), se conoce como "módulo" o "valor absoluto". Aquí veremos apenas una idea que nos bastará para resolver estos ejercicios. Luego, más adelante deberemos profundizar este concepto.

Primero, se simboliza el módulo de un número a de la siguiente forma: $|a|$.

La primera idea que podríamos dar es que el módulo vuelve positivo lo que se le pone adentro, por ejemplo $|-3| = 3$, $|3| = 3$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $|5| = 5$, ... etc.

Para ver como aparece esto en nuestros ejercicios, comencemos haciendo esta pregunta ¿cuánto debe valer x para que $|x| = 5$? O sea ¿qué números satisfacen que su módulo es 5? Bueno, como el módulo solo vuelve positivo al número que está adentro, seguro sabemos que $|5| = 5$ y que $|-5| = 5$ ¿hay algún otro número que satisfaga que su módulo sea 5? la respuesta es no, si pongo dentro del módulo cualquier otro número, el resultado ya no es 5 ($|-8| = 8 \neq 5$, $|20| = 20 \neq 5$, $|-0,4| = 0,4 \neq 5$, ...). Dicho de otra forma, si $|x| = 5$, entonces o $x = 5$ o $x = -5$.

Generalizando, tenemos nuestra primera regla con el módulo:

$$\boxed{\text{Si} \quad |a| = b \quad (\text{con } b \geq 0) \quad \text{entonces, o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a = -b}$$

Ahora, hagamos otra observación. Me ha ocurrido muchísimas veces de encontrarme con alumnos que en el secundario se les enseñó a simplificar la raíz con la potencia de esta forma: $\sqrt[\cancel{2}]{x^{\cancel{2}}} = x$, o $\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}} = x$, o $\sqrt[\cancel{4}]{x^{\cancel{4}}} = x$, ... etc. Lamento decir que eso no es tan así. En realidad ese tipo de simplificaciones valen si el número x es positivo o si la potencia y el índice de la raíz son el mismo número y ese número es impar. El problema aparece cuando tenemos x negativo y la potencia y el índice de la raíz son un mismo número par. Veamos con un mínimo ejemplo que pasa en ese caso:

Miremos $\sqrt[2]{(-3)^2}$. Si valiera simplificar el cuadrado con la raíz, llegaríamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[\cancel{2}]{(-3)^{\cancel{2}}} = -3$ pero si hacemos la cuenta vemos que $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3$. Ahora, acá hay algo que no funciona bien. Algo está mal. Por un lado llegamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = 3$ y por otro lado llegamos a que $\sqrt[2]{(-3)^2} = -3$ ¿Cual de las dos cuentas está bien?

La respuesta correcta es $\sqrt[2]{(-3)^2} = 3$, no vale simplificar la raíz con el cuadrado así nomás. O mejor dicho, se pueden simplificar pero <u>no nos</u> devuelve lo de adentro, si no <u>el módulo de lo de adentro!</u> , o sea $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[\cancel{2}]{(-3)^{\cancel{2}}} = |-3| = 3$. Este problema pasa cada vez que quiera simplificar la potencia y la raíz cuando ambos son el mismo número y ese número es par

Resumiendo:

1°) Si n es un número impar, entonces $\sqrt[n]{x^n} = x$ (vale simplificar)
2°) Si n es un número par, entonces $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (vale simplificar pero no queda lo de adentro si no <u>el módulo de lo de adentro)</u>

Pasemos ahora a resolver los ejercicios:

Ejercicio 5)a) Resolver la ecuación $(x+4).(2x+\frac{1}{5})=0$

Resolución:

Por la primera propiedad que vimos arriba, si $(x+4).(2x+\frac{1}{5})=0$ entonces o $x+4=0$ o $2x+\frac{1}{5}=0$. Despejando de esas dos ecuaciones el valor de x obtenemos:

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ x &= 0-4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+\frac{1}{5} &= 0 \\ 2x &= 0-\frac{1}{5} \\ 2x &= -\frac{1}{5} \\ x &= -\frac{1}{5}:2 \\ x &= -\frac{1}{5}:\frac{2}{1} \\ x &= -\frac{1}{5}.\frac{1}{2} \\ x &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Obtenemos las respuestas

$$\boxed{x=-4 \quad \text{y} \quad x=-\frac{1}{10}}$$

Ejercicio 5)b) Resolver la ecuación

$$\frac{2x+1}{3}=\frac{5}{2}$$

Resolución:

Vamos a hacerlo de dos formas distintas, usando solo las reglas con la igualdad y usando la técnica de despejes.

Usando solo las reglas de la igualdad:

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{3}\cdot 3 &= \frac{5}{2}\cdot 3 && \text{Multiplicamos por 3 a ambos miembros.}\\
2x+1 &= \frac{15}{2} && \text{Simplificamos y hacemos las cuentas.}\\
2x+1-1 &= \frac{15}{2}-1 && \text{Restamos uno a ambos miembros.}\\
2x &= \frac{13}{2} && \text{Hacemos las cuentas.}\\
\frac{2x}{2} &= \frac{\frac{13}{2}}{2} && \text{Dividimos por dos a ambos miembros.}\\
x &= \frac{13}{2}.\frac{1}{2} && \text{Hacemos las cuentas y obtenemos.}\\
x &= \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

Usando la técnica de despejes:

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
2x+1 &= \frac{5}{2}\cdot 3 && \text{Pasamos el 3 multiplicando.}\\
2x+1 &= \frac{15}{2}\\
2x &= \frac{15}{2}-1 && \text{Pasamos el 1 restando.}\\
2x &= \frac{13}{2}\\
x &= \frac{\frac{13}{2}}{2} && \text{Pasamos el 2 dividiendo.}\\
x &= \frac{13}{2}.\frac{1}{2}\\
x &= \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

De las dos formas obtenemos la solución

$$\boxed{x = \frac{13}{4}}$$

Ejercicio 5)f) Resolver la ecuación $x^4 = 16$

Resolución:

Aquí vamos a usar lo que vimos sobre el módulo. Si es necesario vuelvan a leerlo ya que usando esos resultados la resolución del problema es muy sencilla.

$$\begin{aligned}
x^4 &= 16 \\
\sqrt[4]{x^4} &= \sqrt[4]{16} \qquad \text{aplicamos raíz cuarta a ambos miembros de la igualdad} \\
|\,x| &= 2 \qquad \text{aquí aplicamos la propiedad recuadrada más arriba}
\end{aligned}$$

Por último, usando una regla del módulo recuadrada arriba obtenemos que

$$\boxed{x = 2 \qquad \text{o} \qquad x = -2}$$

Ejercicio 5)m) Resolver la ecuación $(x^2 + x - 2).(3x^2 - 5x) = 0$

Resolución:

Si $(x^2 + x - 2).(3x^2 - 5x) = 0$ entonces o $x^2 + x - 2 = 0$ o $3x^2 - 5x = 0$.

Nos encontramos con dos expresiones cuadráticas igualadas a cero. Resolvemos cada una por separado usando la fórmula que vimos arriba.

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 2 &= 0 \\
\text{Esta ecuación puede verse como} \qquad 1.x^2 + 1.x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 1$ y $c = -2$.

Usando la fórmula obtenemos:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

que es una abreviatura de dos cuentas: $\dfrac{-1\ +\ 3}{2}$ y $\dfrac{-1\ -\ 3}{2}$

de donde obtenemos por ahora dos resultados: $x = 1$ y $x = -2$

Ahora resolvemos la otra ecuación: $3x^2 - 5x = 0$.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 5x &= 0 \\
\text{Esta ecuación puede verse como} \qquad 3.x^2 - 5.x + 0 &= 0
\end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática con $a = 3$, $b = -5$ y $c = 0$.

Usando la fórmula obtenemos:

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.0}}{2.3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-0}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{5 \pm 5}{6}$$

$$\text{que es:} \quad \frac{5\ +\ 5}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{5\ -\ 5}{6}$$

$$\text{de donde obtenemos otros dos resultados:} \quad x = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad x = 0$$

Juntando todo, obtuvimos cuatro soluciones de la ecuación $\quad (x^2+x-2).(3x^2-5x) = 0 \quad$:

$$\boxed{x = 1\ , \qquad x = -2\ , \qquad x = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad x = 0}$$