

# 从零开始的 IMU 状态模型推导

2016-11-20

## 目录

- 0. 总览
- 1. IMU 运动模型
  - 1-1. 前置(1): 旋转量求导
  - 1-2. 前置(2): 四元数
  - 1-3. IMU 运动模型
- 2. IMU 观测和噪声模型
  - 2-1 前置(1): 科氏加速度
  - 2-2 前置(2): 惯性导航相关坐标系定义
  - 2-3 前置(3): 高斯白噪声与随机游走
  - 2-4. IMU 观测模型
- 3. IMU 状态估计误差模型
  - 3-1. 前置: 四元数误差小量
  - 3-2. IMU 状态估计误差模型
- 4. 小结
- 参考文献

提示: 请使用 Firefox, Chrome, Edge 等较新的浏览器阅读, 以获得完整的公式排版。  
IE 请使用 IE 11。

本文已授权「泡泡机器人 SLAM」微信公众号 (paopaorobot\_slam) 发表。

## 0. 总览

IMU 是移动机器人、移动智能设备上常见的传感器。常见的 IMU 为六轴传感器, 配备输出三轴加速度的加速度计和输出三轴角速度的陀螺仪。九轴 IMU 还会配备输出三轴姿态角的磁力计。我们这里只讨论六轴 IMU。

IMU 的状态量通常表示为：

$$\mathbf{X}_{IMU} = [{}^I_G \bar{\mathbf{q}}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad {}^G \mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad {}^G \mathbf{p}_I^T] \quad (0.0)$$

这里我们使用和 MSCKF [1] 一样的 notation。用 {I} 表示 IMU 坐标系，{G} 表示参考坐标系。IMU 的姿态由旋转量  ${}^I_G \bar{\mathbf{q}}$  和平移量  ${}^G \mathbf{p}_I$  表示。更具体来说，前者为将任意向量从 {G} 坐标映射到 {I} 坐标的旋转量，用单位四元数表示；后者为 IMU 在 {G} 下的三维位置。 ${}^G \mathbf{v}_I$  表示 IMU 在 {G} 下的平移速度。另外两个量  $\mathbf{b}_g$  和  $\mathbf{b}_a$  表示陀螺仪（角速度计）和加速度计的 bias。可以注意一下这里除了 bias 之外的状态量的时间维度：平移量表达为速度（ $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{v}$ ，对时间的一阶导），因为 IMU 只提供到加速度（对时间的二阶导）的测量；旋转量只表达姿态量（对时间的零阶导），因为 IMU 提供到角速度（对时间的一阶导）。状态量的估计可以由 IMU 测量积分得到。

对于 IMU 状态估计问题，需要提供运动模型、观测（噪声）模型、估计误差模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (0.1)$$

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \quad (0.2)$$

$$\delta \mathbf{x} = e(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \quad (0.3)$$

这是一个通用模型，我们用  $\mathbf{x}$  表示真实状态量（待估计，不可知），用  $\mathbf{z}$  表示观测量， $\mathbf{n}$  表示观测噪声， $\hat{\mathbf{x}}$  表示当前的状态估计量。这篇小文主要讲 IMU（即  $\mathbf{x} := \mathbf{X}_{IMU}$  时）这三个模型的推导。

## 1. IMU 运动模型

### 1-1. 前置(1)：旋转量求导

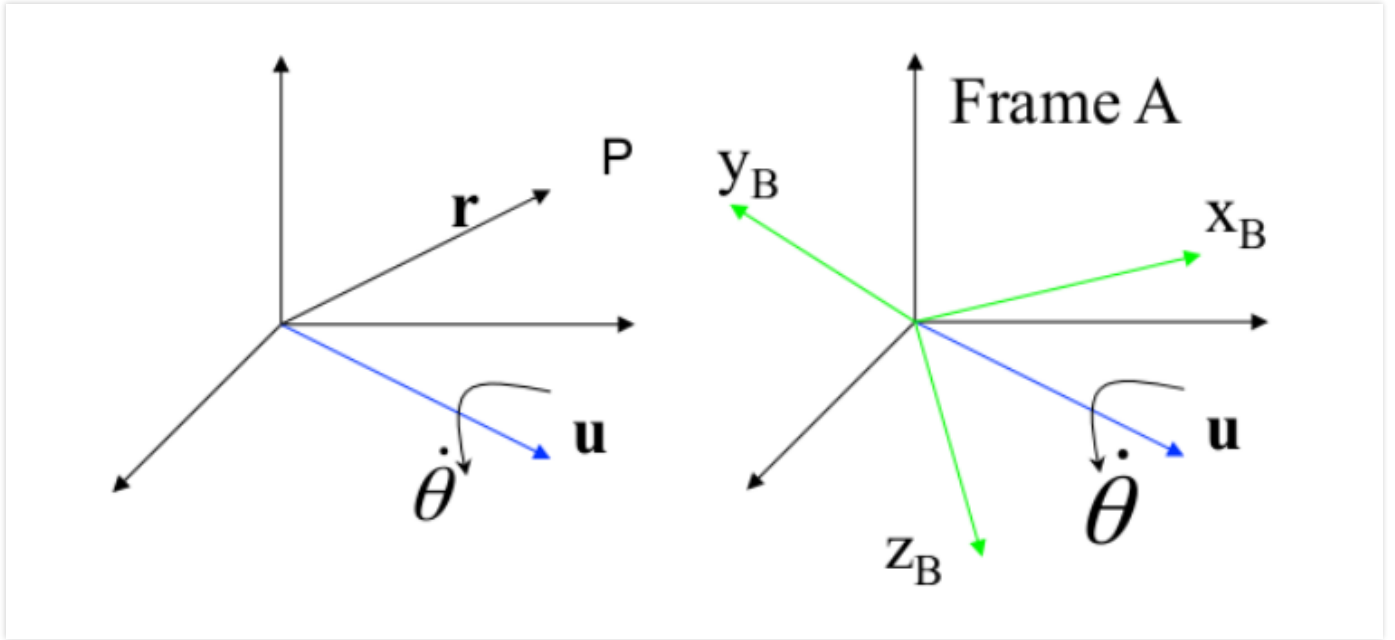
这部分讲刚体动力学相关的前置知识，熟悉的读者可以跳过。

众所周知，一个刚体在同一个惯性坐标系下进行平移运动，其平移量对时间的一阶导和二阶导即速度和加速度：

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$$

对于旋转量以及非惯性系参考坐标系，情况稍微复杂些。

首先，如下图（左）所示，考虑一个从原点出发的向量  $\mathbf{r}$  绕单位轴  $\mathbf{u}$  旋转，角速度大小为  $\dot{\theta}$ 。



角速度矢量可以表示为  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{u}$ 。易得向量  $\mathbf{r}$  末端点 P 的速度矢量，即  $\mathbf{r}$  的时间一阶导为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

现在考虑上图（右），坐标系 {B} 绕单位轴  $\mathbf{u}$  旋转，如上所述，其三个轴的时间一阶导同样为

$$\frac{d\mathbf{i}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_B, \frac{d\mathbf{j}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_B, \frac{d\mathbf{k}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_B$$

我们知道， $[\mathbf{i}_B \quad \mathbf{j}_B \quad \mathbf{k}_B]$  实际上就是坐标系 {B} 相对于参考坐标系的旋转矩阵  $\mathbf{R}$ 。所以  $\mathbf{R}$  的时间一阶导为

$$\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_B \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_B \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_B] = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (1.0)$$

我们知道上面的叉乘运算可以转化为负对称矩阵的乘法：

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}^\wedge \mathbf{R} \quad (1.1)$$

其中负对称矩阵为

$$\boldsymbol{\omega}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意这里的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  是在参考坐标系下表达的。角速度也经常表达在体坐标系  $\{B\}$  下，记为  ${}^B\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}$ ，即  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^B \boldsymbol{\omega}$ ，于是 (1.1) 可以写作

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}^B \boldsymbol{\omega})^\wedge \mathbf{R} \quad (1.2)$$

这里我们要利用负对称矩阵的一个很好的性质：对任意旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和三维向量  $\mathbf{v}$ ，都有  $(\mathbf{R}\mathbf{v})^\wedge = \mathbf{R}\mathbf{v}^\wedge \mathbf{R}^T$ （参看《 $(\mathbf{R}\mathbf{v})^\wedge = \mathbf{R}\mathbf{v}^\wedge \mathbf{R}^T$  的简单证明》），于是 (1.2) 可以写成

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}({}^B\boldsymbol{\omega})^\wedge \quad (1.3)$$

比较一下 (1.1) 和 (1.3)，可以发现一个很有趣的事实，角速度如果表达在参考坐标系下，负对称矩阵写在左边；如果表达在体坐标系下，负对称矩阵写在右边。这点微小的区别，读者在阅读文献时可以特别留意。

## 1-2. 前置(2)：四元数

这部分讲四元数如何表示旋转的前置知识，熟悉的读者可以跳过。

用旋转矩阵来表示旋转很直观，但过于冗余，因为旋转只有三个自由度，而旋转矩阵有九个量。表征旋转还可以用欧拉角，但有万向锁问题，而且计算也不方便。旋转向量（即李代数  $\mathfrak{so}(3)$ ）和四元数是更常用的表征方法，在惯性导航中四元数似乎更普遍些。这里采用四元数。

一个四元数由一个实部和三个虚部构成，书写顺序各家不同，这里和 MSCKF [1] 一样，虚部在前实部在后：

$$\mathbf{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 = [\mathbf{v}^T \quad q_4]^T$$

虚部  $\mathbf{v} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ 。虚部三个基  $i, j, k$  满足  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 。四元数仍是一种冗余表达法，为了更紧凑，通常使用使用单元四元数  $\bar{\mathbf{q}}$ ，通过将四元数的模直为 1 得到。

四元数和旋转向量有很直接的转换关系。绕单位轴  $\mathbf{u}$  转了  $\theta$  角度，用四元数表达为

$$\mathbf{q} = [\mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad \cos \frac{\theta}{2}] \quad (1.4)$$

四元数乘法  $\otimes$  为类似于多项式乘法的逐项相乘：

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= (q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4)(p_1 i + p_2 j + p_3 k + p_4) \\ &= (q_1 p_4 + q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_4 p_1) i + (-q_1 p_3 + q_2 p_4 + q_3 p_1 + q_4 p_2) j + \\ &\quad (q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 + q_4 p_3) k + (-q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_4 p_4)\end{aligned}$$

这个计算结果可以表达为多种形式：

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_3 + \mathbf{v}_q^\wedge & \mathbf{v}_q \\ -\mathbf{v}_q^T & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ p_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_p^\wedge & \mathbf{v}_p \\ -\mathbf{v}_p^T & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_q \\ q_4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

四元数乘法和其对应的两个旋转矩阵相乘物理意义是一样的，即

$\mathbf{R}(\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) = \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{R}(\mathbf{p})$ 。四元数对应的旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = (2q_4^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2q_4\mathbf{v}^\wedge + 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (1.5)$$

四元数的逆为  $\mathbf{q}^{-1} = [-\mathbf{v}^T \quad q_4]^T$ 。易得  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T := \mathbf{q}_I$ ，故  $\mathbf{q}_I$  表示旋转量为零。

四元数对时间一阶导为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^\wedge & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_3 - \mathbf{v}^\wedge \\ -\mathbf{v}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}\end{aligned} \quad (1.6)$$

读者可能注意到了 (1.6) 和 (1.1) 形式上的相似。这里  $\boldsymbol{\omega}$  的意义也是一样的。(1.6) 的推导可以参考 [2]，这里不赘述。

### 1-3. IMU 运动模型

有了前置知识的铺垫之后，我们可以给出 IMU 的运动模型：

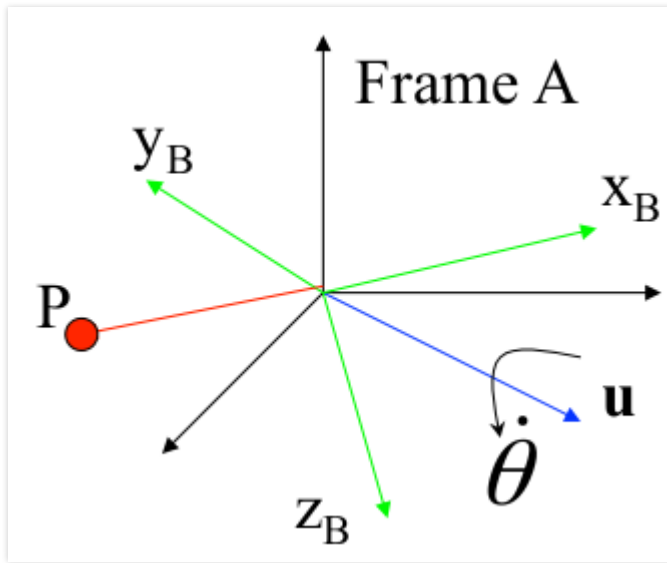
$$\begin{aligned}
{}^I_G \dot{\bar{q}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) {}^I_G \bar{q} \\
\dot{\mathbf{b}}_g &= \mathbf{n}_{wg} \\
{}^G \dot{\mathbf{v}}_I &= {}^G \mathbf{a} \\
\dot{\mathbf{b}}_a &= \mathbf{n}_{wa} \\
{}^G \dot{\mathbf{p}}_I &= {}^G \mathbf{v}_I
\end{aligned} \tag{1.7}$$

${}^I_G \dot{\bar{q}}$  由 (1.6) 直接得到。注意这里角速度  $\boldsymbol{\omega}$  是在体坐标系  $\{I\}$  下表达的，与 (1.1) 处相反。原因是  ${}^I_G \bar{q}$  表示的旋转方向与 (1.1) 处的  $\mathbf{R}$  是相反的。其他的四项，速度和加速度都很简单，bias 两项在下面观测模型部分讲。

## 2. IMU 观测和噪声模型

### 2-1 前置(1): 科氏加速度

这部分在 1-1 的基础上，讨论参考坐标系不是惯性系的情况，熟悉科氏加速度的读者可以跳过。我们仍利用 1-1 中的图，但这次把绕惯性系  $\{A\}$  中固定单位轴  $\mathbf{u}$  旋转的  $\{B\}$  作为参考坐标系。考虑下图，点  $P$  相对于  $\{B\}$  运动，记  ${}^B \mathbf{r}$  分别为  $P$  在  $\{B\}$  下的坐标， $\mathbf{r}$  为  $P$  的绝对坐标（即  $\{A\}$  下坐标）， $\mathbf{R}$  仍为  $\{B\}$  相对于  $\{A\}$  的旋转矩阵，易知  $\mathbf{r} = \mathbf{R} {}^B \mathbf{r}$ 。



求一阶时间导，并利用公式 (1.1):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} {}^B \mathbf{r} + \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}^\wedge \mathbf{R} {}^B \mathbf{r} + \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}}$$

记  $P$  在  $\{B\}$  下速度为  ${}^B \mathbf{v}$ ，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega}^{\wedge} \mathbf{r} + \mathbf{R}^B \mathbf{v} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r\end{aligned}\quad (2.0)$$

请注意，这里用  $\mathbf{v}_r$  来表达「相对速度」的概念，准确定义为 P 相对于 {B} 的速度，在惯性系 {A} 下的表达。请分清  $\mathbf{v}_r$ 、 $\mathbf{v}$  以及  $\mathbf{R}^B \mathbf{v}$  三者之间的区别和联系。

再对 (2.0) 求时间导：

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}^B \mathbf{v} + \mathbf{R}^B \dot{\mathbf{v}} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}^B \mathbf{v} + \mathbf{R}^B \mathbf{a} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r\end{aligned}\quad (2.1)$$

我们来逐项分析上面这个式子。第一项中  $\boldsymbol{\alpha}$  为 {B} 的角加速度，所以第一项的物理意义是 {B} 旋转所造成的 P 的切向加速度。第二项是 {B} 旋转所造成的向心加速度。第四项为 P 相对于 {B} 的加速度，但在惯性系 {A} 下表达——类似于  $\mathbf{v}_r$ ，定义相对加速度  $\mathbf{a}_r$ 。第三项比较特殊，为 {B} 的旋转运动与 P 相对 {B} 的平移运动耦合产生的加速度，称为「科氏加速度」。可以看到，除了第四项外，另外三项都和 {B} 的旋转有关。

## 2-2 前置(2)：惯性导航相关坐标系定义

这部分讲惯性导航中经常出现的几个坐标系的定义 [5]。

**Earth-Centered-Earth-Fixed (ECEF) Frame**：地心地固坐标系 ECEF。以地心为坐标原点，向北为 z 轴，x-y 平面为赤道平面，x 轴指向经纬度 (0,0) 点。ECI 固连在地球上，跟随地球自转，非惯性坐标系。MSCKF 一代 [1] 使用 ECEF 为参考坐标系 {G}。

**Earth-Centered-Inertial (ECI) Frame**：地心惯性坐标系 ECI。以地心为坐标原点，向北为 z 轴，x-y 平面为赤道平面，x 轴指向春分点（vernal equinox point，即每年春分时日心-地心连线与赤道的交点）。ECI 不跟随地球自转，在惯性导航中视为惯性坐标系。MSCKF 二代 [3] 使用 ECI 为参考坐标系 {G}。

**Body Frame**：体坐标系。原点在导航体的质心，固连在导航体上，用来表示导航体的姿态。在本文前置推导部分为 {B}，在 MSCKF 中为 {I}。

## 2-3 前置(3)：高斯白噪声与随机游走

这部分讲高斯白噪声和随机游走(random walk)模型，及其离散化。这部分在 kalibr 库中的 IMU noise model [4] 有简单的介绍，这里在其基础上添加了离散化的推导，因为离散

化中部分内容还是有些令人疑惑的。离散化的推导部分参考自 [5]。

先讲高斯白噪声。一个连续时间的高斯白噪声  $n(t)$ ，满足以下两个条件

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t_1)n(t_2)] &= \sigma_g^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

其中  $\delta()$  表示狄拉克函数。可以看出，不同时刻的高斯白噪声相互独立。 $\sigma_g^2$  为方差，值越大，表示噪声程度越大。

将高斯白噪声离散化，可得到：

$$n_d[k] = \sigma_{gd} w[k]$$

其中

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_{gd} &= \frac{\sigma_g}{\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

其中  $\Delta t$  为采样时间。为什么离散化后分母会多出  $\sqrt{\Delta t}$  这一项呢？我们假定在一个采样周期内  $n(t)$  为常数，于是

$$\begin{aligned} n_d[k] &\triangleq n(t_0 + \Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n(\tau) d\tau \\ E(n_d[k]^2) &= E\left(\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n(\tau)n(t) d\tau dt\right) \\ &= E\left(\frac{\sigma_g^2}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \delta(t - \tau) d\tau dt\right) \\ &= E\left(\frac{\sigma_g^2}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

所以有  $\sigma_{gd}^2 = \frac{\sigma_g^2}{\Delta t}$ ，即  $\sigma_{gd} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{\Delta t}}$ 。

接下来讨论随机游走模型。准确地讲，随机游走其实是一个离散模型，其连续模型称为维纳过程（Wiener Process）。维纳模型是高斯白噪声的积分：

$$\dot{b}_g(t) = n(t) = \sigma_{bg} w(t)$$



其中  $w$  为单位高斯白噪声。将其离散化后得到随机游走模型：

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bgd} w[k]$$

其中

$$w[k] \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\sigma_{gd} = \sigma_{bg} \sqrt{\Delta t}$$

这里多出来的  $\sqrt{\Delta t}$  又是哪来的呢？仍假定一个采样周期内高斯白噪声为常数，有：

$$b_d[k] \triangleq b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t) dt$$

$$\begin{aligned} E((b_d[k] - b_d[k-1])^2) &= E\left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)n(\tau) d\tau dt\right) \\ &= E\left(\sigma_{bg}^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau) d\tau dt\right) \\ &= E(\sigma_{bg}^2 \Delta t) \end{aligned}$$

所以有  $\sigma_{bgd}^2 = \sigma_{bg}^2 \Delta t$ ，即  $\sigma_{bgd} = \sigma_{bg} \sqrt{\Delta t}$ 。

于是我们得到随机游走模型的完整表达。实际上，观察离散模型的表达式，可以发现它生动阐释了「随机游走」的含义：每一时刻都是上一个采样时刻加上一个高斯白噪声得到的，犹如一个游走的粒子，踏出的下一步永远是随机的。在我们前面给出的 IMU 的运动模型中，**bias** 就设定为服从随机游走模型。

## 2-4. IMU 观测模型

根据上述前置知识，现在我们可以给出 IMU 的观测模型。需要注意的是，观测在不同参考坐标系下形式不同。

**以 ECEF 为参考坐标系：**这是 MSCKF 一代 [1] 的做法。因为 ECEF 不是惯性系，需要考虑地球自转，于是加速度模型中将会引入科氏加速度。记  $\omega_G$  为地球自转角速度， ${}^G\mathbf{g}$  为重力加速度， $\omega_m, \mathbf{a}_m$  为陀螺仪和加速度计的观测量，观测模型由以下公式给出：

$$\omega_m = \omega + \mathbf{R}_G^I(\bar{q})\omega_G + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}_G^I(\bar{q})({}^G\mathbf{a} - {}^G\mathbf{g} + 2\omega_G^\wedge {}^G\mathbf{v}_I + (\omega_G^\wedge)^2 {}^G\mathbf{p}_I) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \quad (2.3)$$

观测量都是在体坐标系  $\{I\}$  下表达的，所以在参考坐标系  $\{G\}$  下表达的量都需要左乘一个旋转矩阵转化到体坐标系。每个观测量的不确定量都用一个随机游走的 **bias** 和一个高斯白噪声之和来表达。陀螺仪的观测模型是比较易懂的。加速度计的观测模型，我们先将其改写为形如 (2.1) 的形式：

$$\mathbf{R}^T(l_G \bar{q})(\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) = (\omega_G^\wedge)^2 {}^G \mathbf{p}_I + 2\omega_G^\wedge {}^G \mathbf{v}_I + {}^G \mathbf{a} - {}^G \mathbf{g}$$

但这还不够，因为各个量只是在 ECEF 坐标系  $\{G\}$  下的表达，而 (2.1) 中的量都是表达在惯性坐标系下的。记  $\mathbf{R}_G$  为将  $\{G\}$  下坐标映射到惯性坐标系下坐标的旋转矩阵。由于 ECEF 绕固定的  $z$  轴匀速转动，易得  $\mathbf{R}_G \omega_G = \omega_G$ 。于是上式两边左乘  $\mathbf{R}_G$ ，可得

$$\mathbf{R}_G \mathbf{R}^T(l_G \bar{q})(\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) = \omega_G \times (\omega_G \times \mathbf{R}_G {}^G \mathbf{p}_I) + 2\omega_G \times (\mathbf{R}_G {}^G \mathbf{v}_I) + \mathbf{R}_G ({}^G \mathbf{a} - {}^G \mathbf{g})$$

这里我们还利用了  $\mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{b}$  的性质。上式对应到 (2.1) 中各项，左边为绝对加速度  $\mathbf{a}$ ；因为地球自转是匀速的，故切向加速度项  $\alpha \times \mathbf{r}$  为零。其余各项，依次为向心加速度项  $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ ，科氏加速度项  $2\omega \times \mathbf{v}_r$ ，以及相对加速度项  $\mathbf{a}_r$ 。

**以 ECI 为参考坐标系：**这是 MSCKF 二代 [3] 的做法。由于 ECI 为惯性系，不需要考虑地球自转，于是观测模型简单很多：

$$\omega_m = \omega + \mathbf{R}(l_G \bar{q})\omega_G + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}(l_G \bar{q})({}^G \mathbf{a} - {}^G \mathbf{g}) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \quad (2.5)$$

因为比较简单，就不多做解释了。从文献上看，现在移动机器人领域 ECI 用得更多些。

至此，我们推导完了 IMU 的观测模型。

### 3. IMU 状态估计误差模型

#### 3-1. 前置：四元数误差小量

旋转量是非线性的，不宜像线性量那样使用  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  来定义误差量。这里我们使用四元数误差小量来定义误差量。根据 (1.4)，四元数可以用旋转向量经简单的转换得到。假定绕单位轴  $\mathbf{u}$  旋转了一个角度小量  $\delta\theta$ ，用四元数表达为：

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \frac{\delta \theta}{2} \\ \cos \frac{\delta \theta}{2} \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} \mathbf{u} \frac{\delta \theta}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\delta \theta}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是，可以用  $\delta \mathbf{q}$  来表示旋转的真实值和估计值之间的误差，具体关系为

$$\mathbf{q} = \delta \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}$$

直接使用  $\delta \theta$ ，可以实现参数最小化，适用于优化问题中的目标函数。

### 3-2. IMU 状态估计误差模型

我们直接给出和 MSCKF 一样的 IMU 状态估计误差模型：

$$\tilde{\mathbf{X}}_{IMU} = [\delta \boldsymbol{\theta}_I^T \quad \tilde{\mathbf{b}}_g^T \quad {}^G \tilde{\mathbf{v}}_I^T \quad \tilde{\mathbf{b}}_a^T \quad {}^G \tilde{\mathbf{p}}_I^T] \quad (3.0)$$

其中旋转量按照四元数误差小量给出，其余直接由真实值和估计值相减得到。

## 4. 小结

本文从基础出发推导了 IMU 的运动模型(1.7)、观测和噪声模型(2.2) – (2.5)、估计误差模型(3.0)，适用于用 IMU 来做状态估计的场合。至于以上这些模型如何再经过线性化、离散化等处理进入具体状态估计问题的框架中，这里不做赘述，留待读者阅读和探索。

## 参考文献

- [1] Mourikis, Anastasios I., and Stergios I. Roumeliotis. “A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation.” Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2007.
- [2] Trawny, Nikolas, and Stergios I. Roumeliotis. “Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation.” University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep 2 (2005): 2005.
- [3] Li, Mingyang. “Visual-inertial odometry on resource-constrained systems.” (2014).
- [4] IMU noise model <https://github.com/ethz-asl/kalibr/wiki/IMU-Noise-Model>

[5] Crassidis, John L., and John L. Junkins. Optimal estimation of dynamic systems. CRC press, 2011.

---

标签: [robotics](#) [VIO](#)

留言请用 [Github Issues](#)

聊天请在 [Gitter/fan-farm](#)

授权协议 (CC) BY-NC-SA | 订阅 RSS | 邮箱 [hi@fzheng.me](mailto:hi@fzheng.me)