矩阵理论试题作业

学号　　　　　　　　　　　姓名

一. (20 分)判断正误(填写√或×)

(1) $rank(A^H A)=rank(AA^H)=rank(A)$ (　　)

(2)设λ为方阵 A 的一个特征根，则谱半径 $\rho(A)$ 满足 $|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|_1$ (　　)

(3) 设 $A=A_{n\times p}, B=B_{p\times n}$，则 AB，BA 有相同非 0 特征根，且 $tr(BA)=tr(AB)$ (　　)

(4) 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，则 $A^+=\begin{pmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & A_2^+ \end{pmatrix}$ (　　)

(5) 若 B 是列满秩(高阵)，C 是行满秩，则 $B^+=(B^H B)^{-1}B^H$，$C^+=C^H(CC^H)^{-1}$ (　　)

(6) 若 A 是正规阵，则存在酉矩阵 P 使 $P^H AP=D$ 为对角阵. (　)

(7)正规阵 A 特征根为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则它的全体奇异值为 $\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$ (　)

(8)若 A 是 n 阶方阵，则存在酉阵 P 使 $P^H AP=D$ 为对角阵 (　　)

(9) 若 Ax=b 不相容，则 $A^H A$x=A^Hb 也无解(不相容) (　　)

(10) I 是单位阵，则存在相容的矩阵范数 $\|\bullet\|$，使得 $0<\|I\|<1$ (　　)

二. (30 分)填空题

(1) 若 $A(\lambda)$ 的不变因子是 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda^2+1, d_3(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda+1)^2$，

则 A 的最小多项式为____________________，

则 A 在 R 上初等因子是____________________，

在 C 上初等因子是________________________，

A 的 Jordan 标准形为____________________。

(2) 设 A 为正交矩阵，则 A 的谱半径 $\rho(A)$ =______，$\rho(A^5)$ =______

(3) 设 E 为幂等矩阵，则 E 的特征值为_____，若 E 的迹为 5，则 $rank(E)$ =__

(4) 已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$ =_____，$\|A\|_2$ =________，$\|A\|_\infty$ = ________。

(5)若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1=(1,0,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0,1)$，$\beta_1=(1,1,1,0)$，

$\beta_2=(0,0,0,1)$，则V_1+V_2的维数为________。

(6)已知$\sin(\mathbf{A}t)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\sin 2t & 4\sin 2t-2\sin t & 2\sin 2t-4\sin t\\ 0 & 0 & 6\sin t\\ 0 & 6\sin t & 0\end{pmatrix}$，则 **A =**________。

(7)设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2\\ 0.3 & 1\end{bmatrix}$，则矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}\mathbf{A}^k$是______（收敛或者发散）的矩阵级数。

(8) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=A^TA$ 的特征值分别为 3，1，0，则矩阵 **A** 奇异值为________。

(9) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，则 **A** 的谱分解式中的谱值为 ______。

(10) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，定义 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$，设 $x=(1,1)^T$，$y=(2,2)^T$，则在 2-范数下，$\boldsymbol{T}x$ 与 $\boldsymbol{T}y$ 的距离为________。

(11) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$， 则 $(e^{A})^H e^{A}=$____ ______。

(12) 设 A 的各列向量互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^+-\mathbf{A}^H=$________；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{pmatrix}^+=$__________。

三.计算(**50** 分)

（一）（**10** 分）已知多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间 $W=\mathrm{span}\{f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\}$，

其中 $f_1(t)=1+t^3$， $f_2(t)=t+t^2$， $f_3(t)=1+t^2$， $f_4(t)=t+t^3$.

1．求子空间 W 的一个基；

2．对于 W 中的多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^2+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$$

求 W 的一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

（二）(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，求 e^{A} 的谱分解与谱半径

（三）(15 分) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{2t}\\ 0\\ \mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}；

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解.

（四）（15 分）已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 2\\ 4 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

（1）验证方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是否相容；

（2）如果相容求其极小范数解；

（3）如果不相容，写出其最小二乘解所对应的线性方程组，并且求极小范数最小二乘解。

答题纸

学号　　　　　　　姓名

一. (20 分)判断正误(填写√或×)

题号										
答案										

二. (30 分)填空题

(1)________________, ______________________, ________________________________,

________________________。

(2)_________, _________

(3)_________, __________

(4)_________, _________, _________

(5)____________

(6)___________

(7)________

(8)_____________

(9) _________

(10)____________

(11) ________

(12)_________, ______________

三 三.计算(50 分)

（一）（10 分）

（二）（10 分）

（三）（15 分）

（四）（15 分）