姓名： 学号： A

一. 判断正误(30 分)

(1) $A=A_{n\times n}$, I 是 n 阶单位阵，则 $e^{tI}=e^{t}I$、$e^{t(A+I)}=e^{tI}e^{tA}=e^{t}e^{tA}$ （√）

(2)若 B 是列满秩阵(高阵)，C 是行满秩阵(低阵)，则 $B^{+}B=I$、$CC^{+}=I$、 （√）

(3)若 B 是列满秩，C 是行满秩，则 $B^{+}=(B^{H}B)^{-1}B^{H}$、$C^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}$ （√）

(4)若 $A=BC$ 是满秩分解(高低分解)，则 $A^{+}=C^{+}B^{+}$，即 $(BC)^{+}=C^{+}B^{+}$ （√）

(5)设复矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩为 1，则 $A^{+}=(\sum|a_{ij}|^{2})^{-1}A^{H}=(\sum a_{ij}^{2})^{-1}A^{H}$ （×）

(6)设 $A=(a_{ij})_{m,n}$ 则有迹公式：$tr(A^{H}A)=tr(AA^{H})=\sum|a_{ij}|^{2}$ （ ）

(7)若 $A^{2}=0$，则有可能 $A\neq 0$ （√）；若 $tr(A^{H}A)=0$，则有可能 $A\neq 0$ （×）

(8)设 $A=(a_{ij})_{n,n}$ 特征值为 $\lambda_{1},\cdots,\lambda_{n}$，则有许尔不等式：$\sum_{k=1}^{n}|\lambda_{k}|^{2}\leq\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^{2}$ （√）

(9)若 A 是酉矩阵($A^{H}A=AA^{H}=I$)，则 $A^{+}=A^{-1}=A^{H}$、 （√）

不一定可逆、

(10)若 A 是列酉矩阵($A^{H}A=I$)，则 $A^{+}=A^{H}$ （√），且 $A^{-1}=A^{H}$ （×）

(11)若 A 是正规阵，P 是同阶酉矩阵，则 $P^{H}AP$ 也是正规阵、（ ）

(12)若 A 是正规阵，$f(x)$ 是多项式，则 $f(A)$ 也是正规阵、（ ）

(13)若 A,B 是同阶正规阵，则 AB, $A+B$ 也一定是正规阵、（ ）

(14)若 A 是正规阵，则存在酉矩阵 P 使得 $P^{H}AP=D$ 为对角阵、（ ）

(15)许尔定理：若 A 是 n 阶方阵，则存在酉矩阵 P 使 $P^{H}AP=D$ 为对角阵、（×）

(16)若正规阵 A 的特征根为 $\{\lambda_{1},\cdots,\lambda_{n}\}$，则奇异值为 $\{|\lambda_{1}|,\cdots,|\lambda_{n}|\}$ （ ）

(17)若 A 是 n 阶方阵，则行列式 $\det(e^{A})=e^{tr(A)}$，且 $e^{-A}e^{A}=I$ (单位阵)、（ ）

(18)若 A 是 n 阶方阵，则 $(e^{A})^{+}=(e^{A})^{-1}=e^{-A}$ （ ）

(19) A,B 是任意矩阵，则 $(A\otimes B)^{H}=A^{H}\otimes B^{H}$，$(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$ （ ）

若 A, B 都可逆，则 $A^{+}=A^{-1}$ （ ）；且 $(A\otimes B)^{-1}=B^{-1}\otimes A^{-1}$ （ ）

(20) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & 3\\ 0 & b\end{pmatrix}$, 则 $A\otimes B$ 的特征根为 $a,b,2a,2b$ （✓）

(21)方阵A的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 满足 $|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|$ （✓）

(22) $\|\bullet\|$ 是矩阵范数, I_n 是单位阵, 则 $\|I_n\|\ge 1$ （✓），或 $\|I_n\|<1$ （✗）

(23)若 $A=A_{m\times n}$， $B=B_{n\times m}$，则 $tr(AB)=tr(BA)$，$tr(AB)^2=tr(BA)^2$ （ ）

(24)已知 $A^2=0$，则 $e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+tA$ （ ）

(25)已知 $A^3=0$，则 $e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+tA$ （ ）

二.计算(15 分)

1 设 $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$，$|a|<1$. 求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 与 $(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)$

2 设 $A=\begin{pmatrix}i & 0\\ 1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，说明公式 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$ 成立的条件，并求出 A^+

3 已知 $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -\sin 3t & \cos 3t\end{pmatrix}$，求 $\frac{de^{tA}}{dt}$ 与 A

三.(18 分) 1.设正规阵 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^H$，$P$ 是酉阵. 求 A^H 与 $A^H A$；写出 A 的奇异值

2.求 $A=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$ 的奇异值与奇异值分解

3.设 $A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & c & c\\ c & c & c\\ c & c & c\end{pmatrix}-cI$. (1)求特征根，谱半径 $\rho(A)$ 与 $\det(e^A)$；

(2)给出复数 c 的条件,使得 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛；(3)说明 A 是正规阵，直接写出它的奇异值

四.计算(12 分)

1. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，验证 A 为单纯阵，求极小式 $m(x)$ 与 $\sin\pi A$

2. $A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$. (1)求 $(A-I)^2$ 与 $\rho(A)$；

(2)用指数函数定义推出 $e^{t(A-I)}=I+t(A-I)$；(3)利用(2)推出 $e^{tA}=e^t[I+t(A-I)]$

五.(8 分) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，(1)求最小式与 e^{tA}，(2)求解 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$,其中 $x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

六. 计算(7 分)设 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=(1, 0, 0, 1)^T$，$A=\begin{pmatrix}\mathbf{B} & 0\\ 0 & \mathbf{D}\end{pmatrix}_{4\times 5}$.

求 A^+ 与 $Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

七. 证明题(10 分)

1.若 $tr(A^H A)=0$，则必有 $A=0$（零阵）(2 分)

2.已知 $A^2=A^H A$，则 A 是 Hermite 阵($A^H=A$).(8 分)