

O módulo da força elétrica de uma carga  $q_1$  sobre outra  $q_2$ , à distância  $r$ , é dado por

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \quad 22-2$$

em que  $k$  é uma constante determinada experimentalmente, a **constante de Coulomb**, que tem o valor no SI,

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad 22-3$$

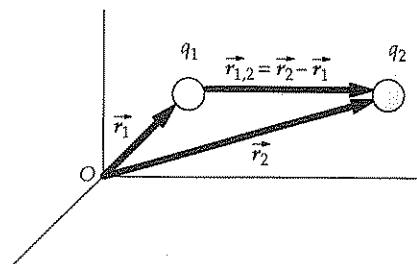
Se  $q_1$  estiver na posição  $\vec{r}_1$  e  $q_2$  em  $\vec{r}_2$  (Fig. 22-6), a força  $\vec{F}_{1,2}$  de  $q_1$  sobre  $q_2$  é

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{kq_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} \quad 22-4$$

Lei de Coulomb em notação vetorial

em que  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  é o vetor que aponta de  $q_1$  para  $q_2$  e  $\hat{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2} / r_{1,2}$  é o vetor unitário da direção de  $q_1$  para  $q_2$ .

Pela terceira lei de Newton, a força  $\vec{F}_{2,1}$  de  $q_2$  sobre  $q_1$  é o negativo da força  $\vec{F}_{1,2}$ . É interessante acentuar a semelhança entre a lei de Coulomb e a lei de Newton da gravitação (Eq. 11-3). As duas leis são ambas leis do inverso do quadrado da distância. Porém, a força gravitacional entre duas partículas é proporcional ao produto das massas e é sempre atrativa, enquanto a força elétrica é proporcional ao produto das cargas e pode ser atrativa se as cargas tiverem sinais opostos, ou repulsiva se os sinais forem iguais.



**Figura 22-6** Carga  $q_1$  em  $\vec{r}_1$  e carga  $q_2$  em  $\vec{r}_2$ . A força que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$  está na direção do vetor  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  se as cargas tiverem o mesmo sinal, e na direção oposta se tiverem sinais opostos.

### Exemplo 22-2

Num átomo de hidrogênio, a separação média entre o elétron e o próton é cerca de  $5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Calcular o módulo da força eletrostática de atração do próton sobre o elétron.

Basta entrar com os dados na expressão da lei de Coulomb:

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 8,19 \times 10^{-8} \text{ N}$$

**Observações** Diante das interações macroscópicas, essa força é muito pequena. Porém, como a massa do elétron é cerca de  $10^{-30} \text{ kg}$ , provoca aceleração extraordinariamente grande  $F/m = 8 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$ .

**Exercício** Duas cargas puntiformes de  $0,05 \mu\text{C}$  estão à distância de 10 cm uma da outra. Calcular o módulo da força eletrostática entre elas. (Resposta  $2,25 \times 10^{-3} \text{ N}$ )

Como a força elétrica e a força gravitacional entre quaisquer duas partículas são inversamente proporcionais ao quadrado da distância de separação das partículas, é claro que a razão entre estas forças não depende da separação. Podemos então comparar a razão entre as forças elétrica e gravitacional exercidas pelas partículas elementares, por exemplo, entre um elétron e um próton.

### Exemplo 22-3

Calcular a razão da força elétrica para a força gravitacional entre um próton e um elétron num átomo de hidrogênio.

**Raciocínio da Resolução** Vamos aproveitar a lei de Coulomb com  $q_1 = e$  e  $q_2 = -e$  para ter a força elétrica e a lei da gravidade de Newton com a massa do próton  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  e a do elétron  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

1. Expressão dos módulos das forças elétricas  $F_e$  e gravitacional  $F_g$  em função das cargas, das massas, da separação  $r$  e das constantes das respectivas leis:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}, \quad F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

2. Razão entre as duas expressões anteriores. A distância  $r$  desaparece por cancelamento:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

3. Entrando com os valores numéricos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 2,27 \times 10^{39}$$

**Observação** O resultado justifica o desprezo dos efeitos gravitacionais na investigação das interações atômicas ou moleculares.

Embora a força gravitacional seja inacreditavelmente pequena diante da força elétrica e não tenha qualquer papel perceptível nos efeitos atômicos, é a força dominante entre corpos de grande massa, como planetas e estrelas. Esses corpos têm quase que iguais números de cargas elétricas positivas e negativas, e as forças elétricas entre eles são praticamente nulas. A força entre corpos astronômicos é, por isso, quase exclusivamente a força gravitacional.

## Força de um Sistema de Cargas

Num sistema de cargas, cada uma exerce, sobre todas as outras, uma força dada pela Eq. 22-4. A força resultante sobre uma certa carga é igual à soma vetorial das forças exercidas sobre ela pelas outras cargas do sistema. Esta conclusão é consequência do princípio da superposição de forças.

### Exemplo 22-4 Tente Fazer

Três cargas puntiformes estão sobre o eixo dos  $x$ . A carga  $q_1 = 25 \text{ nC}$  está na origem,  $q_2 = -10 \text{ nC}$  está em  $x = 2 \text{ m}$  e  $q_0 = 20 \text{ nC}$  em  $x = 3,5 \text{ m}$  (Fig. 22-7). Calcular a força resultante em  $q_0$  provocada por  $q_1$  e  $q_2$ .

**Raciocínio da Resolução** A força resultante sobre  $q_0$  é a soma vetorial da força  $\vec{F}_{1,0}$  exercida por  $q_1$  com a força  $\vec{F}_{2,0}$  exercida por  $q_2$ . Cada uma das forças é calculada pela lei de Coulomb. Veja que  $\hat{r}_{1,0} = \hat{r}_{2,0} = \hat{i}$ , pois  $q_0$  está à direita de  $q_1$  e de  $q_2$ .

**Tente resolver sem olhar as respostas na coluna da direita.**

#### Etapas

#### Respostas

1. Cálculo da força  $\vec{F}_{1,0}$  devida a  $q_1$ .  $\vec{F}_{1,0} = (0,367 \mu\text{N})\hat{i}$
2. Cálculo da força  $\vec{F}_{2,0}$  devida a  $q_2$ .  $\vec{F}_{2,0} = (-0,799 \mu\text{N})\hat{i}$
3. Cálculo da resultante.  $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0} = -(0,432 \mu\text{N})\hat{i}$

**Observação** A Fig. 22-8 mostra a  $F_x$  sobre  $q_0$  em função da respectiva posição  $x$ . Nas vizinhanças de uma das cargas, a força sobre  $q_0$  se deve, praticamente, a esta carga. Na posição da carga  $q_1$ , em  $x = 0$ , e na  $q_2$ , em  $x = 2$ , a força sobre  $q_0$  não fica definida.

**Exercício** Se  $q_0$  estiver em  $x = 1 \text{ m}$ , determinar (a)  $\hat{r}_{1,0}$  (b)  $\hat{r}_{2,0}$  e (c) a força resultante sobre  $q_0$ . (Respostas (a)  $\hat{i}$ , (b)  $-\hat{i}$ , (c)  $(6,29 \mu\text{N})\hat{i}$ )

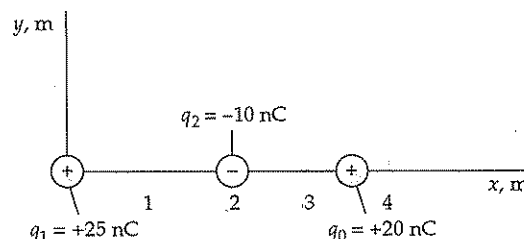


Figura 22-7

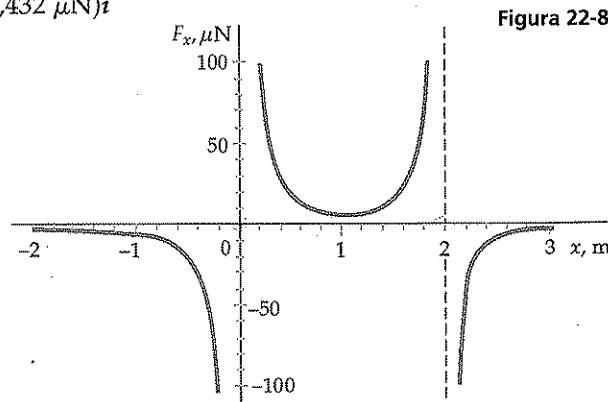


Figura 22-8

Para que um sistema de cargas fique estacionário é indispensável que existam outras forças atuando sobre as cargas, de modo que a força resultante das ações de todas as espécies, sobre cada carga, seja nula. No exemplo anterior, e nos que vêm a seguir, vamos admitir implicitamente que existem tais forças, de modo que as cargas possam permanecer em repouso.

### Exemplo 22-5

A carga  $q_1 = +25 \text{ nC}$  está na origem,  $q_2 = -15 \text{ nC}$  no eixo dos  $x$  em  $x = 2 \text{ m}$  e a carga  $q_0 = +20 \text{ nC}$  no ponto  $x = 2 \text{ m}$ ,  $y = 2 \text{ m}$ , como mostra a Fig. 22-9. Calcular a resultante das forças sobre  $q_0$ .

#### Raciocínio da Resolução

A força resultante é a soma vetorial das forças exercidas pelas cargas separadamente sobre  $q_0$ . Cada força pode ser determinada pela lei de Coulomb e expressa na forma das respectivas componentes cartesianas. A Fig. 22-9a mostra a força resultante como a soma vetorial das forças  $\vec{F}_{1,0}$ , devida a  $q_1$ , e  $\vec{F}_{2,0}$  devida a  $q_2$ . A Fig. 22-9b mostra as componentes cartesianas desta força resultante.

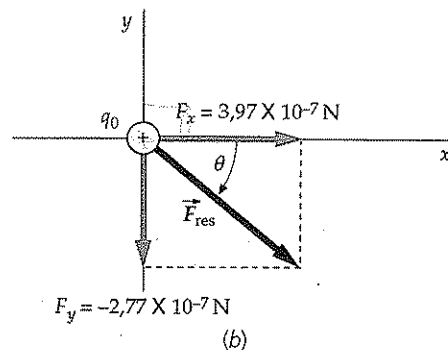
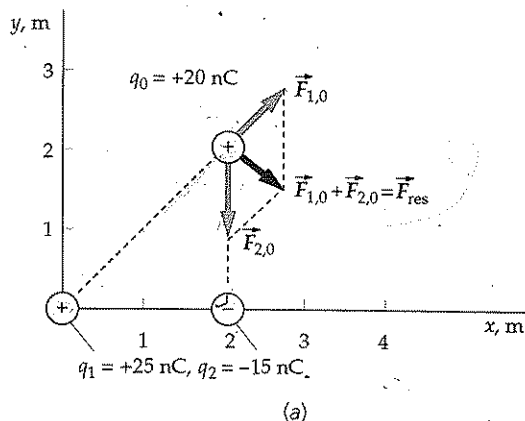


Figura 22-9

1. A força resultante sobre  $q_0$  é a soma vetorial das forças separadas:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0}$$

$$\sum F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x}$$

$$\sum F_y = F_{1,0y} + F_{2,0y}$$

2. A força  $\vec{F}_{1,0}$  está orientada pela reta que vai de  $q_1$  até  $q_0$ . A distância entre as duas cargas é  $r_{1,0} = 2\sqrt{2} \text{ m}$ , e este valor entra na lei de Coulomb:

$$F_{1,0} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2\sqrt{2} \text{ m})^2} = 5,62 \times 10^{-7} \text{ N}$$

3. Como  $\vec{F}_{1,0}$  faz um ângulo de  $45^\circ$  com os eixos dos  $x$  e dos  $y$ , as componentes  $x$  e  $y$  da força são iguais:

$$F_{1,0x} = F_{1,0y} = \frac{F_{1,0}}{\sqrt{2}} = \frac{5,62 \times 10^{-7} \text{ N}}{\sqrt{2}} = 3,97 \times 10^{-7}$$

4. A força  $\vec{F}_{2,0}$  de  $q_2$  sobre  $q_0$  é atrativa e está na direção dos  $y$  negativos, como mostra a Fig. 22-9a:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2,0} &= \frac{kq_2q_0}{r_{2,0}^2} \hat{r}_{2,0} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(-15 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2 \text{ m})^2} \hat{j} \\ &= (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N})\hat{j} \end{aligned}$$

5. As componentes da força resultante são então:

$$\sum F_x = F_{1,0x} + F_{2,0x} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + 0 = 3,97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= F_{1,0y} + F_{2,0y} = (3,97 \times 10^{-7} \text{ N}) + (-6,74 \times 10^{-7} \text{ N}) \\ &= -2,77 \times 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

6. O módulo da força resultante é calculado a partir das componentes:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3,97 \times 10^{-7} \text{ N})^2 + (-2,77 \times 10^{-7} \text{ N})^2} \\ &= 4,84 \times 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

7. A força resultante está dirigida para a direita e para baixo, como mostra a Fig. 22-9b. O ângulo  $\theta$  que faz com o eixo dos  $x$  é calculado por

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2,77}{3,97} = -0,698 \\ \theta &= -34,9^\circ \end{aligned}$$

O campo elétrico no ponto  $P$  da carga  $q_i$  é então

$$\vec{E}_i = \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0} \quad 22-7$$

Lei de Coulomb e campo  $\vec{E}$  de carga puntiforme

em que  $\hat{r}_{i,0}$  é o vetor unitário que aponta da carga para o ponto do campo  $P$ . O campo elétrico resultante de uma distribuição de cargas puntiformes se calcula pela soma vetorial dos campos das cargas tomadas separadamente:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0} \quad 22-8$$

Campo elétrico de sistema de cargas puntiformes

### Exemplo 22-6

Uma carga positiva  $q_1 = +8 \text{ nC}$  está na origem e uma segunda carga  $q_2 = +12 \text{ nC}$  está sobre o eixo dos  $x$  em  $a = 4 \text{ m}$  (Fig. 22-11). Calcular o campo elétrico resultante (a) no ponto  $P_1$  sobre o eixo dos  $x$  em  $x = 7 \text{ m}$  e (b) no ponto  $P_2$  sobre o eixo dos  $x$  em  $x = 3 \text{ m}$ .

**Raciocínio da Resolução** Como o ponto  $P_1$  está à direita das duas cargas, cada uma delas provoca um campo que está dirigido para a direita do ponto. No ponto  $P_2$ , que está entre as cargas, a carga de  $5 \text{ nC}$  provoca um campo dirigido para a direita e a carga de  $12 \text{ nC}$  um campo para a esquerda. Cada campo será calculado pela Eq. 22-8,

$$\vec{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0}$$

No ponto  $P_1$ , os dois vetores unitários apontam para a direita, na direção dos  $x$  positivos, e então  $\hat{r}_{1,0} = \hat{r}_{2,0} = \hat{i}$ . No ponto  $P_2$  teremos  $\hat{r}_{1,0} = \hat{i}$  e  $\hat{r}_{2,0} = -\hat{i}$ , correspondendo ao campo da carga de  $12 \text{ nC}$ .

- (a) Cálculo de  $\vec{E}$  no ponto  $P_1$  com  $r_{1,0} = x = 7 \text{ m}$  e  $r_{2,0} = (x - a) = 7 \text{ m} - 4 \text{ m} = 3 \text{ m}$ :
- $$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq_1}{r_{1,0}^2} \hat{r}_{1,0} + \frac{kq_2}{r_{2,0}^2} \hat{r}_{2,0} = \frac{kq_1}{x^2} \hat{i} + \frac{kq_2}{(x-a)^2} \hat{i} \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(7 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &\quad + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &= (1,47 \text{ N/C})\hat{i} + (12,0 \text{ N/C})\hat{i} = (13,5 \text{ N/C})\hat{i} \end{aligned}$$
- (b) Cálculo de  $\vec{E}$  no ponto  $P_2$  com  $r_{1,0} = x = 3 \text{ m}$  e  $r_{2,0} = a - x = 4 \text{ m} - 3 \text{ m} = 1 \text{ m}$ :
- $$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq_1}{r_{1,0}^2} \hat{r}_{1,0} + \frac{kq_2}{r_{2,0}^2} \hat{r}_{2,0} = \frac{kq_1}{x^2} \hat{i} + \frac{kq_2}{(a-x)^2} (-\hat{i}) \\ &= \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &\quad + \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9} \text{ C})}{(1 \text{ m})^2} (-\hat{i}) \\ &= (7,99 \text{ N/C})\hat{i} - (108 \text{ N/C})\hat{i} = (-100 \text{ N/C})\hat{i} \end{aligned}$$

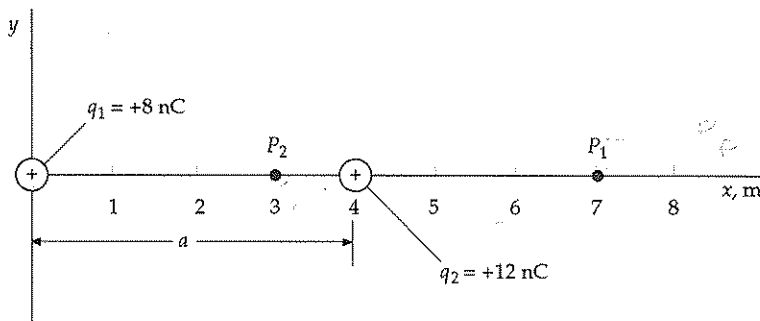


Figura 22-11

**Observações** O campo elétrico no ponto  $P_2$  está orientado na direção dos  $x$  negativos, pois o campo da carga de 12 nC, que está a 1 m do ponto, é maior que o da carga de 8 nC, que está a 3 m do ponto. Quando o ponto do campo se aproxima da carga de +8 nC, o valor do campo desta carga aumenta e o da outra carga, de +12 nC, diminui. Há um ponto entre as duas cargas em que o campo elétrico é nulo e a carga de prova não sofre a ação de qualquer força. O gráfico da variação de  $E_x$  em função de  $x$  aparece na Fig. 22-12.

**Exercício** Determinar o ponto sobre o eixo dos  $x$  em que o campo elétrico é nulo. (Resposta  $x = 1,80$  m)

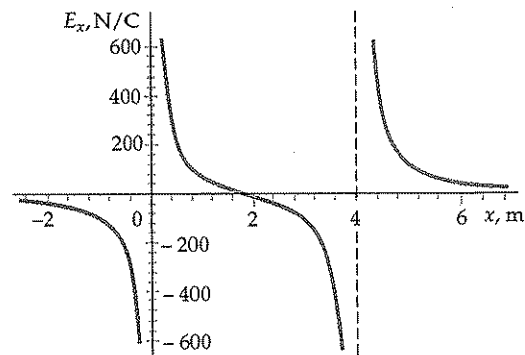
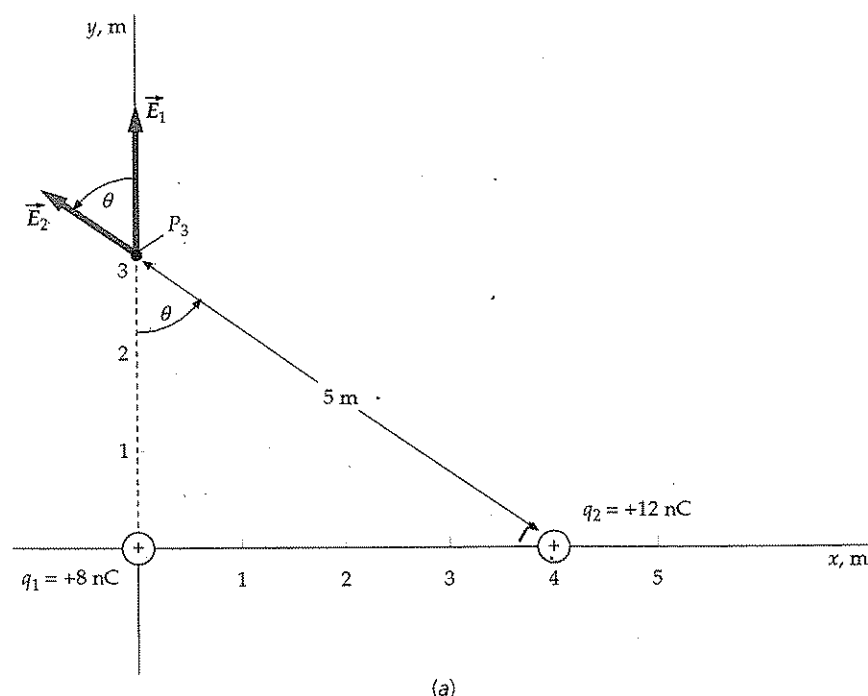


Figura 22-12

### Exemplo 22-7 Tente Fazer

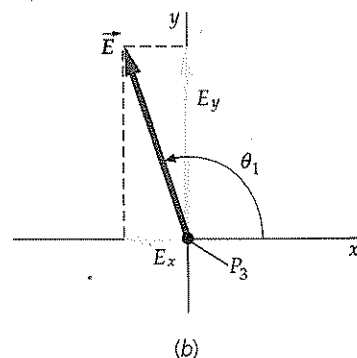
Determinar o campo elétrico, sobre o eixo dos  $y$ , em  $y = 3$  m, do sistema de cargas mencionado no Exemplo 22-6.

**Raciocínio da Resolução** Sobre o eixo dos  $y$ , o campo elétrico  $\vec{E}_1$ , da carga  $q_1$ , está sobre o eixo dos  $y$ , e o campo  $\vec{E}_2$ , da carga  $q_2$ , faz um ângulo  $\theta$  com o eixo dos  $y$  (Fig. 22-13a). Para ter o campo resultante, vamos calcular inicialmente as componentes  $x$  e  $y$ , como mostra a Fig 22-13b.



(a)

Figura 22-13



(b)

**Tente resolver sem olhar as respostas na coluna da direita.**

#### Etapas

1. Calcular o módulo do campo  $\vec{E}_1$  da carga  $q_1$ . Calcular as componentes  $x$  e  $y$  deste campo.
2. Cálculo do módulo do campo  $\vec{E}_2$  da carga  $q_2$ .

#### Respostas

$$E_1 = kq_1/y^2 = 7,99 \text{ N/C}, \quad E_{1x} = 0, \quad E_{1y} = 7,99 \text{ N/C}$$

$$E_2 = 4,32 \text{ N/C}$$

3. Componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{E}_2$  em termos do ângulo  $\theta$ .  $E_x = -E_2 \sin \theta$ ,  $E_y = E_2 \cos \theta$
4. Cálculo de  $\sin \theta$  e de  $\cos \theta$ .  $\sin \theta = 0,8$ ,  $\cos \theta = 0,6$
5. Cálculo de  $E_{2x}$  e de  $E_{2y}$ .  $E_{2x} = -3,46 \text{ N/C}$ ,  $E_{2y} = 2,59 \text{ N/C}$
6. Cálculo das componentes  $x$  e  $y$  do campo resultante  $\vec{E}$ .  $E_x = -3,46 \text{ N/C}$ ,  $E_y = 10,6 \text{ N/C}$
7. Cálculo do módulo de  $\vec{E}$  a partir das componentes.  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11,2 \text{ N/C}$
8. Cálculo do ângulo  $\theta_1$  entre o campo  $\vec{E}$  e o eixo dos  $x$ .  $\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{E_y}{E_x} \right) = 108^\circ$

### Exemplo 22-8

Uma carga  $+q$  está em  $x = a$  e uma segunda carga  $-q$  em  $x = -a$  (Fig. 22-14).

- (a) Calcular o campo elétrico num ponto arbitrário do eixo dos  $x$ , com  $x > a$ .  
 (b) Calcular o limite do campo elétrico quando  $x$  for muito maior do que  $a$ .

**Raciocínio da Resolução** O campo elétrico é dado pelo somatório

$$\vec{E} = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0}$$

(Eq. 22-8). Quando  $x > a$  o vetor unitário correspondente a cada carga é  $\hat{i}$ . A distância à carga positiva é  $x - a$  e à negativa é  $x - (-a) = x + a$ .

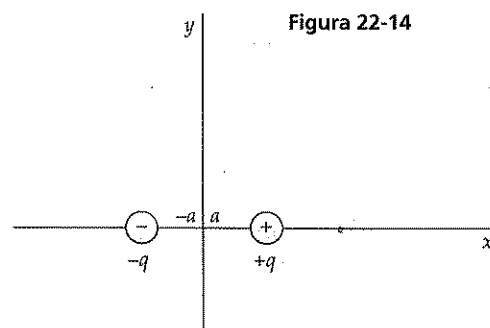


Figura 22-14

- (a) 1. Cálculo de  $\vec{E}$  das duas cargas para  $x > a$ . [Observação: Os sinais das parcelas no segundo membro valem exclusivamente para  $x$  maior do que  $a$ . Se  $x$  for menor do que  $-a$ , as duas parcelas têm os sinais invertidos. Se  $x$  estiver entre  $-a$  e  $+a$ , as duas parcelas são negativas:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq}{(x-a)^2} \hat{i} + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \hat{i} \\ &= kq \left[ \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \hat{i} \end{aligned}$$

2. Redução das frações do segundo membro a um denominador comum e simplificação do resultado:

$$\vec{E} = kq \left[ \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right] \hat{i} = kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}$$

- (b) No limite, quando  $x \gg a$ , podemos desprezar  $a^2$  diante de  $x^2$  no denominador e então:

$$\vec{E} = kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i} \approx kq \frac{4ax}{x^4} \hat{i} = \frac{4kqa}{x^3} \hat{i}$$

**Observações** A Fig. 22-15 mostra como varia  $E_x$  em função de  $x$ , para qualquer  $x$ , para  $q = 1 \text{ nC}$  e  $a = 1 \text{ cm}$ . Nos pontos muito afastados das cargas o campo é dado por

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{|x|^3} \hat{i}$$

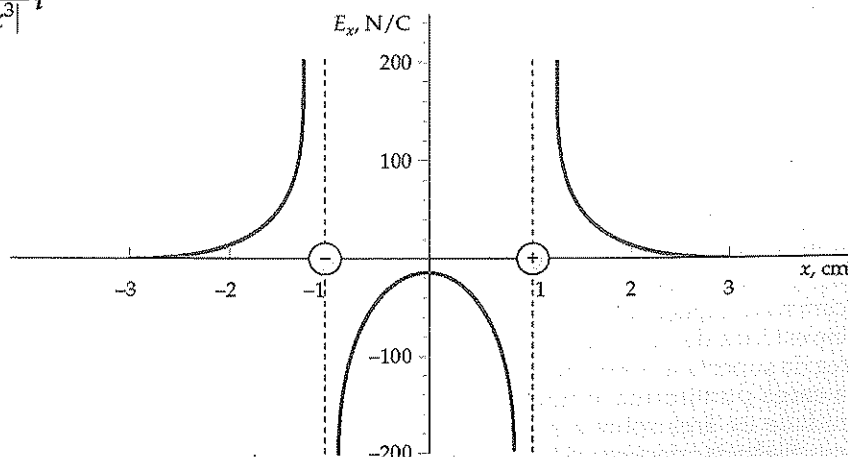


Figura 22-15

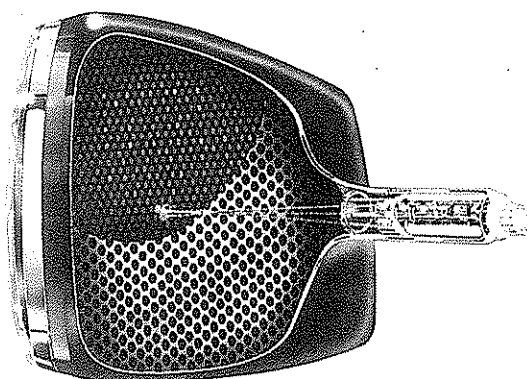
A convenção da representação do campo elétrico por intermédio das linhas do campo elétrico é operativa, pois o campo elétrico varia inversamente com o quadrado da distância a uma carga puntiforme. Como o campo gravitacional de uma massa puntiforme também varia com o inverso do quadrado da distância, as linhas de força também são convenientes para representar o campo gravitacional. Nas proximidades de uma massa puntiforme, as linhas do campo gravitacional convergem para a massa, tal e qual as linhas do campo elétrico convergem para uma carga negativa puntiforme. Não há, porém, pontos no espaço de onde as linhas do campo sejam divergentes, como é o caso dos pontos em que se localizam cargas positivas, pois a força gravitacional é sempre atrativa e nunca repulsiva.

## 22-6 Movimento de Cargas Puntiformes nos Campos Elétricos

Quando uma partícula com uma carga  $q$  está num campo elétrico  $E$ , sofre uma força  $qE$ . Se a força elétrica for a única força que atua sobre a partícula, a aceleração que adquire é

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

em que  $m$  é a massa da partícula.\* Se o campo elétrico for conhecido, a razão entre a carga e a massa da partícula pode ser determinada pela medida da aceleração. O desvio dos elétrons num campo elétrico uniforme foi aproveitado por J. J. Thomson, em 1897, para demonstrar a existência dos elétrons e medir a respectiva razão entre a carga e a massa. Exemplos comuns de dispositivos que operam graças ao movimento de elétrons em campos elétricos são os osciloscópios, os monitores de computadores e os tubos de imagem de aparelhos de televisão.



Esquema de tubo de raios catódicos de televisão em cores. Os feixes de elétrons do canhão eletrônico à direita ativam o material fluorescente na tela, à esquerda, provocando pontos luminosos brilhantes cuja cor depende da intensidade relativa dos feixes. Os campos elétricos entre as placas defletoras do canhão (ou os campos magnéticos de bobinas) desviam e orientam os feixes. Cada feixe varre horizontalmente a tela, cobrindo sucessivamente cada segmento horizontal. A tela é varrida, desta maneira, 30 vezes por segundo.

### Exemplo 22-10

Um elétron entra num campo elétrico uniforme  $\vec{E} = (1.000 \text{ N/C})\hat{i}$  com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (2 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$ , portanto na direção do campo (Fig. 22-22). Que distância o elétron percorre até ficar momentaneamente em repouso?

**Raciocínio da Resolução** A carga do elétron é negativa e a força  $-e\vec{E}$  que atua sobre ele está na direção oposta à do campo. Como  $\vec{E}$  é constante, a força é constante e podemos usar a teoria do movimento uniformemente acelerado, do Cap. 2. Vamos tomar como positivo o campo na direção dos  $x$  positivos.

1. O deslocamento  $\Delta x$  está relacionado com as velocidades inicial e final por:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$$

2. A aceleração é calculada pela segunda lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m} = -\frac{qE}{m}$$

3. Quando  $v = 0$ , o deslocamento é:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - v_0^2}{2(-eE/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE} \\ &= \frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ N/C})} = 1,14 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

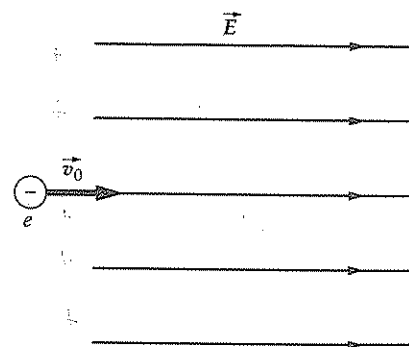


Figura 22-22

\*Se a partícula for um elétron, a sua velocidade num campo elétrico pode atingir, com facilidade, fração significativa da velocidade da luz. Neste caso, a fórmula deve ser modificada para se levar em conta a teoria da relatividade restrita, de Einstein.

**Exemplo 22-11**

Um elétron entra num campo elétrico uniforme  $\vec{E} = (-2000 \text{ N/C})\hat{j}$  com a velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (10^6 \text{ m/s})\hat{i}$  perpendicular ao campo (Fig. 22-23). (a) Comparar a força gravitacional que atua sobre o elétron à força elétrica no campo. (b) De quanto será o elétron desviado da horizontal depois de ter avançado 1 cm na direção  $x$ ?

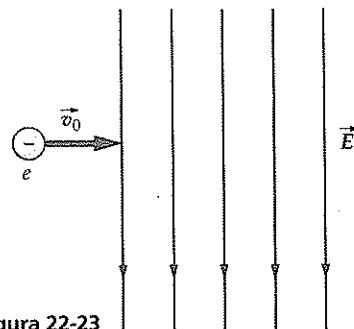


Figura 22-23

**Raciocínio da Resolução** (a) Calcular a razão entre a força elétrica  $qE = -eE$  e a força gravitacional  $mg$ . (b) Como  $mg$  é desprezível, a força sobre o elétron é  $-eE$ , vertical para cima. O elétron move-se com velocidade horizontal constante  $v_x$  e é desviado para cima de uma grandeza  $y = at^2/2$ , em que  $t$  é o tempo necessário para avançar 1 cm na direção horizontal  $x$ .

(a) Cálculo da razão entre o módulo da força elétrica,  $F_e$ , e o da força gravitacional  $F_g$ :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})} = 3,6 \times 10^{13}$$

(b) 1. Desvio vertical em função da aceleração  $a$  e do tempo  $t$ :

$$y = \frac{1}{2}at^2$$

2. O tempo necessário para o elétron percorrer a distância  $x$  com a velocidade horizontal constante  $v_0$  é:

$$t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s}$$

3. Com o tempo  $t$  e com  $a = eE/m$ , calcula-se  $y$ :

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}} (10^{-8} \text{ s})^2 = 1,76 \text{ cm}$$

**Observações** (a) Como é o caso comum, a força elétrica é muito maior do que a gravitacional. Por isso não é necessário levar em conta a gravidade no planeamento de um tubo de raios catódicos ou na resolução de problemas de desvio, como o anterior. Um tubo de televisão opera igualmente bem de cabeça para baixo, ou de lado, como se não houvesse gravidade. (b) A trajetória de um elétron que se move num campo elétrico uniforme é uma parábola, semelhante à parábola descrita por um corpo que se move num campo gravitacional uniforme.

## 22-7 Dipolos Elétricos em Campos Elétricos

No Exemplo 22-8 calculamos o campo elétrico de um dipolo, sistema de duas cargas puntiformes iguais e de sinais opostos, próximas uma da outra. Vejamos o comportamento do dipolo elétrico num campo elétrico externo. Algumas moléculas têm momentos de dipolo elétrico permanentes, em virtude da distribuição inhomogênea das cargas elétricas. São as moléculas polares. Exemplo é o HCl, que é constituído por um íon de hidrogênio positivo de carga  $+e$  combinado com um íon de cloro negativo, de carga  $-e$ . O centro de carga do íon positivo não coincide com o centro de carga do íon negativo, e a molécula tem momento de dipolo permanente. Outro exemplo é o da água (Fig. 22-24). Um campo elétrico externo uniforme tem nula a força resultante sobre um dipolo elétrico, porém o torque sobre o dipolo não é nulo. Vemos, na Fig. 22-25, que o torque em relação à carga negativa\* tem o módulo  $F_1L \sin \theta = qEL \sin \theta = pE \sin \theta$ . A direção deste torque é da frente para o verso da folha de papel, de modo que o momento de dipolo  $\vec{p}$  gira no sentido do campo  $\vec{E}$ . Pode-se representar o torque pelo produto vetorial entre o momento de dipolo  $\vec{p}$  e o campo elétrico  $\vec{E}$ :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

22-11

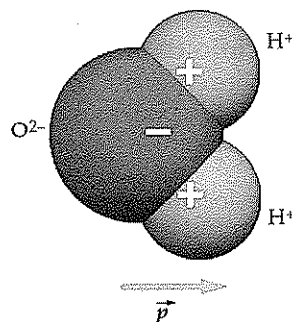


Figura 22-24 Molécula de  $\text{H}_2\text{O}$  com momento de dipolo permanente que aponta da direção do centro das cargas negativas para o centro das positivas.

\*O torque de um par de forças iguais e opostas é independente do ponto ou eixo em relação ao qual se calcula.



$$\phi_{\text{liq}} = \oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}} \quad 23-20$$

Lei de Gauss em termos de  $\epsilon_0$

o valor de  $\epsilon_0$  em unidades SI é

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

A lei de Gauss vale para quaisquer superfícies e quaisquer distribuições de cargas. Quando as distribuições forem muito simétricas, ela pode ser usada para o cálculo do campo elétrico, como mostraremos na próxima seção. No caso de distribuições estáticas de cargas, a lei de Gauss e a de Coulomb são equivalentes. A lei de Gauss, porém, é mais geral, pois vale sempre, quer as cargas sejam ou não estáticas.

### Exemplo 23-4

Um campo elétrico é  $\vec{E} = (200 \text{ N/C}) \hat{i}$  para  $x > 0$  e  $\vec{E} = (-200 \text{ N/C}) \hat{i}$  para  $x < 0$ . Um cilindro com o comprimento de 20 cm e o raio  $R = 5 \text{ cm}$  está com o centro na origem e o eixo coincidente com o eixo dos  $x$ , de modo que uma base está em  $x = +10 \text{ cm}$  e a outra em  $x = -10 \text{ cm}$  (Fig. 23-17). (a) Qual o fluxo através de cada base? (b) Qual o fluxo através da superfície lateral do cilindro? (c) Qual o fluxo líquido para fora através da superfície cilíndrica fechada? (d) Qual a carga líquida no interior do cilindro?

**Raciocínio da Resolução** O campo nas duas bases do cilindro é paralelo ao vetor normal a cada base (dirigido para fora) e o fluxo é  $EA$ . Não há fluxo do campo através da superfície lateral do cilindro, pois a normal à superfície é perpendicular ao campo  $\vec{E}$ . O fluxo líquido através da superfície cilíndrica fechada pelas bases está diretamente relacionado com a carga no interior do cilindro pela lei de Gauss.

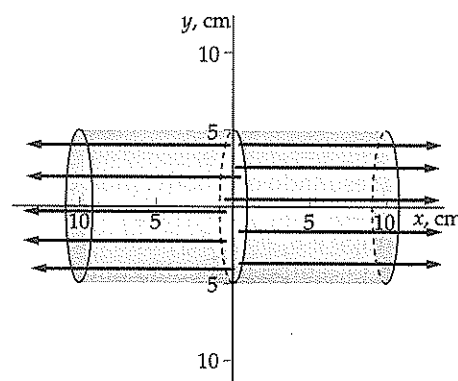


Figura 23-17

- |   |   |
|---|---|
| (a) 1. Cálculo do fluxo através da base da direita:   | $\begin{aligned} \phi_{\text{dir}} &= \vec{E}_{\text{dir}} \cdot \hat{n}_{\text{dir}} A \\ &= (200 \text{ N/C}) \hat{i} \cdot \hat{i} (\pi)(0,05 \text{ m})^2 = 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$                             |
| 2. Cálculo do fluxo através da base da esquerda:  | $\begin{aligned} \phi_{\text{esq}} &= \vec{E}_{\text{esq}} \cdot \hat{n}_{\text{esq}} A \\ &= (-200 \text{ N/C}) \hat{i} \cdot (-\hat{i}) (\pi)(0,05 \text{ m})^2 = +1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$                        |
| (b) O fluxo através da superfície lateral do cilindro é nulo pois $\vec{E}$ é perpendicular a $\hat{n}$ : | $\phi_{\text{lat}} = \vec{E}_{\text{lat}} \cdot \hat{n}_{\text{lat}} A = 0$   |
| (c) O fluxo total é a soma dos fluxos através de todas as superfícies:                                    | $\begin{aligned} \phi_{\text{liq}} &= \phi_{\text{dir}} + \phi_{\text{esq}} + \phi_{\text{lat}} \\ &= 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} + 1,57 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} + 0 = 3,14 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$ |
| (d) A lei de Gauss dá a carga no interior do cilindro:  | $\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \epsilon_0 \phi_{\text{liq}} \\ &= (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3,14 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) \\ &= 2,78 \times 10^{-11} \text{ C} \end{aligned}$                      |

## 23-3 Cálculo de $\vec{E}$ pela Lei de Gauss

Muitas vezes é bastante fácil calcular, pela lei de Gauss, o campo elétrico de uma distribuição muito simétrica de cargas elétricas. Inicialmente, escolhe-se uma superfície, a **superfície gaussiana**, sobre a qual o módulo de  $E$  seja constante. O fluxo através desta superfície será então proporcional ao campo  $E$  na superfície. Este campo, pela lei de Gauss, está relacionado à carga elétrica no interior da superfície.

Portanto, o campo elétrico no exterior de superfície esférica uniformemente carregada coincide com o campo de uma carga puntiforme colocada no centro da esfera.

Se a superfície gaussiana esférica estiver no interior da esfera, com  $r < R$ , o fluxo do campo através dela continua a ser  $E_r 4\pi r^2$ , mas a carga elétrica no seu interior é nula. Então, se  $r < R$ , a lei de Gauss nos dá

$$\phi_{\text{liq}} = E_r 4\pi r^2 = 0$$

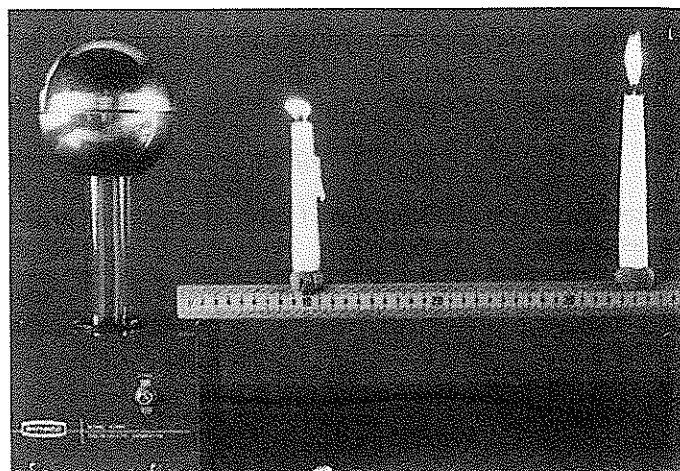
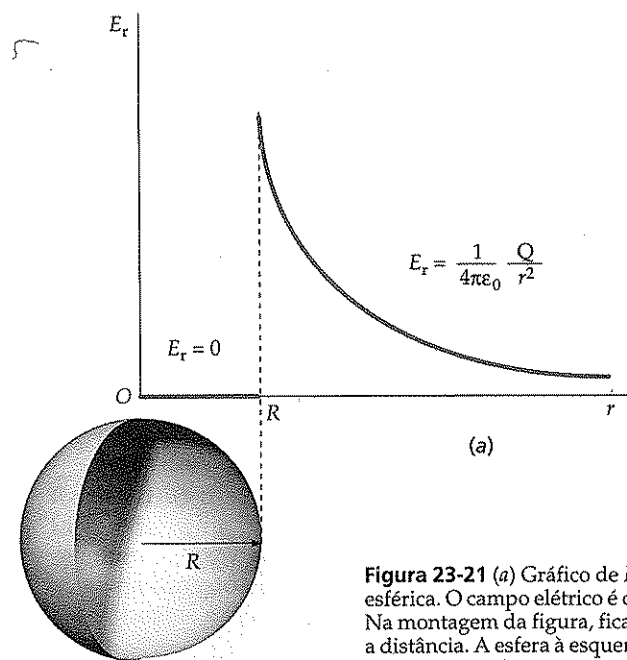
e

$$E_r = 0, \quad r < R \quad 23-22b$$

*Campo  $\vec{E}$  no interior de superfície esférica carregada*

Estes resultados podem ser conseguidos, com dificuldade um tanto maior de cálculo, pela integração da lei de Coulomb.

A Fig. 23-21 mostra o campo  $E$ , da distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma superfície esférica em função de  $r$ . O campo elétrico é descontínuo em  $r = R$ , onde a densidade superficial de carga é  $\sigma$ . No exterior da esfera, em  $r \approx R$ , o campo elétrico é  $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$ , pois  $\sigma = Q/4\pi R^2$ . No interior da esfera o campo é nulo, e a descontinuidade finita do campo na superfície carregada é de  $\sigma/\epsilon_0$ .



**Figura 23-21** (a) Gráfico de  $E$ , em função de  $r$  no caso da distribuição de cargas uniforme sobre uma superfície esférica. O campo elétrico é descontínuo em  $r = R$ , onde está presente uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . (b) Na montagem da figura, fica evidente, pelo efeito do campo sobre as chamas das velas, a diminuição de  $E$ , com a distância. A esfera à esquerda (parte de um gerador van de Graaff, que discutiremos no Capítulo 24) tem uma grande carga elétrica negativa. Os íons positivos da chama da vela mais próxima são atraídos por essas cargas. A outra chama, muito mais afastada, quase não é afetada pelo campo.

### Exemplo 23-6

Uma esfera de raio  $R = 3 \text{ m}$  tem o seu centro na origem e é portadora de uma densidade superficial de carga  $\sigma = 3 \text{ nC/m}^2$ . Uma carga puntiforme  $q = 250 \text{ nC}$  está sobre o eixo dos  $y$  em  $y = 2 \text{ m}$ . Determinar o campo elétrico, no eixo dos  $x$ , em (a)  $x = 2 \text{ m}$  e (b)  $x = 4 \text{ m}$ .

**Raciocínio da Resolução** Determinam-se os campos da carga puntiforme e da superfície esférica carregada e somam-se vetorialmente os dois. Em (a) o ponto está no interior da esfera e o campo é exclusivamente o da carga puntiforme (Fig. 23-22a). Em (b) o ponto do campo está fora da superfície esférica que pode ser considerada, então, uma carga puntiforme na origem. Temos que calcular, portanto, o campo de duas cargas puntiformes (Fig. 23-22b).

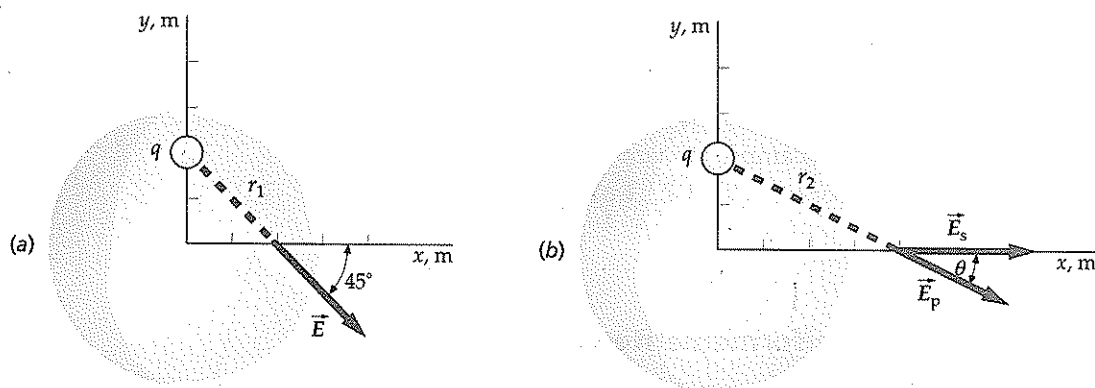


Figura 23-22

- (a) 1. No interior da esfera carregada, o campo  $\vec{E}_1$  é o campo da carga puntiforme:  $\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2} \hat{r}$
2. Cálculo da distância  $r_1$ :  $r_1 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = \sqrt{8} \text{ m}$
3. Cálculo do valor do campo, com a distância  $r_1$ :  $E_1 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{(\sqrt{8} \text{ m})^2} = 281 \text{ N/C}$
4. A Fig. 23-22a mostra que o campo faz um ângulo de  $-45^\circ$  com o eixo dos  $x$ :  $\theta = -45^\circ$
- (b) 1. No exterior da superfície esférica, o seu campo é o de uma carga puntiforme colocada na origem, e portanto tem, num ponto do campo sobre o eixo dos  $x$ , a direção deste eixo:  $\vec{E}_s = \frac{kQ}{x^2} \hat{i}$
2. Cálculo da carga  $Q$  sobre a esfera:  $Q = \sigma 4\pi R^2 = (3 \text{ nC/m}^2)4\pi(3 \text{ m})^2 = 339 \text{ nC}$
3. Cálculo do campo devido à carga puntiforme  $Q$ :  $E_s = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9} \text{ C})}{(4 \text{ m})^2} = 190 \text{ N/C}$
4. Campo da outra carga puntiforme  $q$ :  $\vec{E}_p = \frac{kq}{r_2^2} \hat{r}_2$
5. Cálculo da distância entre a carga puntiforme  $q$  sobre o eixo dos  $y$  e o ponto do campo no eixo dos  $x$ , em  $x = 4 \text{ m}$ :  $r_2 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = \sqrt{20} \text{ m}$
6. Cálculo do valor do campo da carga puntiforme  $q$  no ponto do campo:  $E_p = \frac{kq}{r_2^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{(\sqrt{20} \text{ m})^2} = 112 \text{ N/C}$
7. Este campo faz com o eixo dos  $x$  o ângulo  $\theta$  dado por:  $\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{20}}$   
 $\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{20}}$
8. As componentes  $x$  e  $y$  deste campo são:  $E_{px} = E_p \cos \theta = (112 \text{ N/C}) \left( \frac{4}{\sqrt{20}} \right) = 100 \text{ N/C}$   
 $E_{py} = E_p \sin \theta = (112 \text{ N/C}) \left( -\frac{2}{\sqrt{20}} \right) = -50 \text{ N/C}$