TU Berlin, Fakultät IV
Brock/Pfisterer/Koenig
MAR 5-1

Aufgabenblatt 5

Dynamische Programmierung

Wichtige Ankündigungen

- Es gibt drei Aufgabentypen:
  - **Tutorium** → Besprechung im Tutorium
  - **Hausaufgabe** → Eigenarbeit mit Hilfe in Rechnerübungen
  - **Klausurvorbereitung** → Optionale Klausurübung

Abgabe (bis 16.06.2025 23:59 Uhr)

Die folgenden Dateien werden für die Bepunktung berücksichtigt:

Geforderte Dateien:	
`Blatt05/src/RowOfBowls.java`	Aufgabe 2.1 bis 2.3
`Blatt05/src/Genomics.java`	Aufgabe 3.1 (Übung ohne Punkte, aber mit Tests)

Als Abgabe wird jeweils nur die letzte Version im main branch in git gewertet.

Aufgabe 1: Palindrom-Teilfolge (Tutorium)

Ein *Palindrom* ist eine Zeichenfolge die rückwärts gelesen dieselbe Folge ergibt wie vorwärts gelesen. Das Wort RENTNER ist also ein Palindrom. Eine *Palindrom-Teilfolge* ist eine Teilfolge einer Zeichenkette, die ein Palindrom ist. Dabei muss die Teilfolge nicht an einem Stück in der gegebenen Zeichenkette vorkommen.

Beispiel: DATENSTRUKTUREN enthält u.a. die Palindrom-Teilfolgen NRUKURN und ERUTURE. Auch UKU, NN und jeder einzelne Buchstabe sind (kurze) Palindrom-Teilfolgen der Zeichenkette DATENSTRUKTUREN.

Es soll ein Algorithmus entwickelt werden, der zu einer gegebenen Zeichenkette `str` die Länge der längsten Palindrom Teilfolge bestimmt.

1.1 Welche Laufzeit hat der *brute-force* Ansatz (alle Möglichkeiten durchprobieren)?

1.2 Geben Sie eine rekursive Definition der $\textsc{Opt}(i, j)$ an, die als Grundlage für dynamisches Programmieren verwendet werden kann.

1.3 Füllen Sie die folgende Matrix aus, indem Sie die Werte von $\textsc{Opt}(i, j)$ per Hand ausrechnen. Entnehmen Sie aus der Matrix, welches die (bzw. eine) Palindrom-Teilfolge maximaler Länge ist.

	T	A	G	A	G	T	G
T							
A							
G							
A							
G							
T							
G							

1.4 Der rekursive Ansatz, der in den vorherigen Aufgaben genutzt wurde, folgt dem *top-down*-Ansatz. Nutzen Sie nun den *bottom-up*-Ansatz, den Sie mit Schleifen implementieren können. Führen Sie für diesen Ansatz wieder eine Handsimulation durch und füllen Sie dazu wieder die Tabelle aus. Welche Werte werden dabei zuerst in die Tabelle geschrieben.

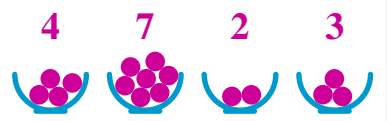
1.5 Was ist die Laufzeit einer Implementation mit Hilfe der $\textsc{Opt}$ Funktion und dynamischer Programmierung.

Aufgabe 2: Optimale Auswahl (Hausaufgabe)

Zwei Personen spielen folgendes Spiel. Es gibt eine (meist gerade) Anzahl von Schüsseln mit (jeweils unterschiedlich vielen) Murmeln. Diese Schüsseln werden nebeneinander aufgereiht. Die Anzahl der Murmeln in jeder Schüssel ist von Anfang an bekannt. Abwechselnd wählen die Spieler eine der beiden äußeren Schüsseln aus und erhalten die darin befindlichen Murmeln. Nachdem ein Spieler eine Schüssel gewählt hat, ist diese also aus dem Spiel und der Gegenspieler könnte im nächsten Zug die Schüssel direkt daneben wählen (siehe Beispiel in Abb. 1). Sieger ist, wer am Ende die meisten Murmeln hat. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine optimale Strategie zu finden, das bedeutet, die Differenz von eigenen Murmeln und gegnerischen Murmeln soll möglichst groß sein. Einfach ausgedrückt: Man möchte möglichst hoch gewinnen.

Abbildung 1: Schüsseln in einer Reihe

Beispiel 1:



Beispiel 2:

Die Spieler wählen abwechselnd eine der äußeren Schüsseln und nehmen die Murmeln. Am Ende zählt die Differenz der gesammelten Murmeln.

Die *Greedy* Strategie, immer die vollere Schüssel zu nehmen, führt oft nicht zum besten Ergebnis. Wenn Spieler 1 im Beispiel 1 als erstes die linke Schüssel mit den 4 Murmeln wählen würde, so könnte Spieler 2 danach die jetzt linke Schüssel mit den 7 Murmeln wählen. Spieler 1 würde dann die rechte Schüssel mit 3 Murmeln wählen und für Spieler 2 wären noch 2 Murmeln übrig. Der Endstand wäre dann: Spieler 1: 7 Murmeln; Spieler 2: 9 Murmeln. Aus Sicht von Spieler 1 ist der Endstand $7 - 9 = -2$.
In dem oberen Beispiel ist eine optimale Spielfolge S1: **3** – S2: **4** – S1: **7** – S2: **2**, wodurch Spieler S1 eine Punktdifferenz von $(3 + 7) - (4 + 2) = 4$ erreicht. In dem unteren Beispiel ist $(3 + 1 + 8) - (4 + 5 + 2) = 1$ das Optimum.

2.1 Implementation einer rekursiven Lösung (25 Punkte)

Implementieren Sie zunächst eine einfache rekursive Lösung für die optimale Auswahl. Auf Grund der überlappenden Teilprobleme ist der Ansatz nicht effizient und kann nur für relativ kurze Folgen angewendet werden.

Implementieren Sie

```
public int maxGainRecursive(int[] values)
```

als Methode der Klasse `RowOfBowls`. In dieser Methode können Sie einige Variablen initialisieren und dann die eigentliche rekursive Methode aufrufen, die denselben Namen und eine andere Signatur haben kann. Sie dürfen Klassenvariablen einführen und benutzen. So lässt sich die Anzahl der Parameter der rekursiven Methode verringern. Die Einträge des Arrays `values` repräsentieren die einzelnen Schüsseln mit der gegebenen Anzahl an Murmeln.

Der Rückgabewert soll die Punktzahl des beginnenden Spielers (Anzahl der Murmeln minus Anzahl der Murmeln des Gegenspielers) sein. Dabei wird vorausgesetzt, dass beide Spieler für sich optimal spielen.

2.2 Effiziente Lösung mit Dynamischer Programmierung (40 Punkte)

Implementieren Sie eine effiziente Lösung mit Hilfe von Dynamischer Programmierung als Methode

```
public int maxGain(int[] values)
```

Dadurch soll eine Laufzeit und Speicherbedarf in $\boldsymbol{O}(n^2)$ für Schüsselanzahl n erreicht werden. Die Matrix der Zwischenlösungen sollte in einer Klassenvariablen gespeichert werden, da sie für die nächste Teilaufgabe benötigt wird.

2.3 Optimale Spielsequenz (35 Punkte)

Implementieren Sie die Methode

```
public Iterable<Integer> optimalSequence()
```

die eine Spielsequenz zweier optimaler Spieler zurückgibt. Die Methode wird immer nach `maxGain()` aufgerufen und muss die *Indizes* der ausgewählten Schüsseln zurückgeben. In dem oberen Beispiel in Abb. 1 sind 3–0–1–2 und 3–2–1–0 optimale Spielsequenzen.

Bemerkungen:

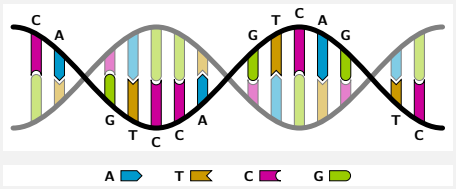
- Die optimale Spielsequenz ist nicht eindeutig. Es spielt keine Rolle, welche dieser *optimalen* Sequenzen die Methode zurückgibt.
- Achten Sie auf die Reihenfolge. Bei der Iteration über die Rückgabevariable wird erwartet, dass der erste Zug zuerst kommt.
- Die Methode `maxGain()` sollte `values` und die Matrix der Zwischenlösungen in Klassenvariablen speichern, damit sie hier zur Verfügung stehen.
- Überprüfen Sie, dass die Punkte des beginnenden Spielers, wenn gemäß der optimalen Sequenz gespielt wird, mit den Punkten, die in der `maxGain()` zurückgegeben werden, übereinstimmen.
- Der Code für unsere Lösungen ist in keiner Methode länger als 15 Zeilen. Das heißt nicht, dass Sie keinen längeren Code schreiben dürfen. Es kann Ihnen aber eine Richtlinie geben.

Aufgabe 3: Sequenzierung (Klausurvorbereitung)

Diese Aufgabe ist von der Genomsequenzierung inspiriert. Sie ist stark vereinfacht, aber es wurden tatsächlich Ansätze basierend auf dynamischer Programmierung zur DNA-Analyse entwickelt.

Es sei eine lange Zeichenfolge (*strang*), sowie ein Wörterbuch (*dictionary*) mit vielen kurzen Wörtern gegeben. Es ist die Aufgabe zu bestimmen, auf wie viele unterschiedliche Möglichkeiten die lange Zeichenfolge aus Wörtern des Wörterbuches zusammengesetzt werden kann. Dabei können Wörter beliebig oft verwendet werden.

Abbildung 2: Sequenzierung



Strang: CAGTCCAGTCAGTC
Wörterbuch: AGT, CA, CAG, GTC, TC, TCA, TCC
Es gibt vier Möglichkeiten den Strang durch Wörter aus dem Wörterbuch darzustellen:
CA | GTC | CAG | TCA | GTC,
CAG | TCC | AGT | CA | GTC und zwei weitere.

3.1 Anzahl der Sequenzierungsmöglichkeiten (0 Punkte)

Implementieren Sie in der Klasse `Genomics` die Methode

```
public static long optBottomUp(String strang, String[] dictionary)
```

zur Bestimmung der Anzahl von unterschiedlichen Sequenzierungsmöglichkeiten des gegebenen Strangs in Wörter des Wörterbuches. Der Speicherbedarf soll in $\boldsymbol{O}(n)$ für Stranglänge n liegen, unabhängig von der Anzahl und Länge der Wörter im Wörterbuch. Benutzen Sie den *Bottom Up* Ansatz der Dynamischen Programmierung. Die *Top Down* Berechnung funktioniert bei sehr langen Sequenzen nicht, da die maximale Anzahl der Rekursionen überschritten werden würde.

Tipps und Hinweise:

- Die Methode der Klasse `String`

  ```
  String.startsWith(String substring, int k)
  ```

  prüft, ob `substring` in dem String-Objekt beginnend bei Index `k` enthalten ist, wobei `k=0` dem Anfang der Zeichenkette entspricht..
- Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die rekursive Funktion OPT als Grundlage der Dynamischen Programmierung zu definieren. Eine Möglichkeit ist es, $\textsc{Opt}(k)$ als Anzahl der Sequenzierungsmöglichkeiten der Zeichenkette ab dem k-ten Buchstaben zu definieren. Tipp: Im Gegensatz zu vorherigen Dynamischen Programmen, ist hier eine Schleife zur Summierung notwendig, um den Wert von $\textsc{Opt}(k)$ zu berechnen.
- Die Anzahl der Möglichkeiten kann sehr groß werden. In der Implementation muss daher der Typ `long` verwendet werden. Für einen noch größeren Zahlenbereich stellt Java die Klasse `BigInteger` zur Verfügung. Bei den Beispielen, die in den Tests verwendet werden, reicht `long`.

- Der Code für unsere Lösung ist nicht länger als 15 Zeilen. Das heißt nicht, dass Sie keinen längeren Code schreiben dürfen. Es kann Ihnen aber eine Richtlinie geben.

Was Sie nach diesem Blatt wissen sollten:

- Was die Grundprinzipien der dynamischen Programmierung sind
- Welche beiden Voraussetzungen ein Problem erfüllen muss, damit dynamische Programmierung erfolgreich angewendet werden kann?
- Welche beiden Varianten zur Speicherung der Lösungswerte verwendet werden
- Wie man für ein gegebenes Problem eine OPT-Funktion herleiten kann