一维非线性方程求根算法

赵天健
信息与计算科学　3210101830

2022 年 7 月 4 日

引言

很久以来，解方程都是数学家们非常关注的问题．而解方程最基本的就是解一元方程的问题．不过，非线性的一元方程求解并不容易，就算对于多项式来说也是如此．根据 Abel-Ruffini 定理，对于多项式方程 $p(x) = 0$ 来说，若 $\deg p \geq 5$，那么其没有求根公式，而一些非多项式方程的解析解就更加难求了．但是，很多时候我们仍然希望在某个区间 $[l, r]$ 内找到方程 $f(x) = 0$ 的解，哪怕是数值上的近似解．为了解决这个问题，许多迭代算法应运而生．

一些求根算法的介绍

二分法

设 $f(x)$ 是连续函数, 现有区间 $[a,b]$, 且 $f(a)f(b)<0$, 那么取区间中点 $c=\frac{a+b}{2}$, 则 $[a,c],[b,c]$ 必有至少一个区间存在 $f(x)$ 的根. 而由于连续函数的介值定理, 则函数值与 $f(c)$ 符号相异的端点与 c 构成的区间内必然存在根.

算法流程

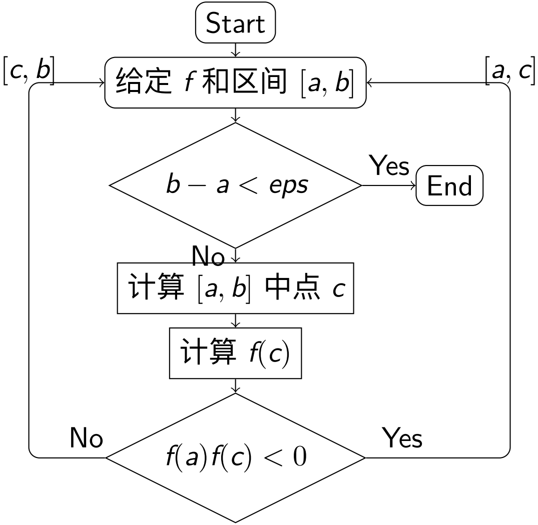

图: 二分法流程图

Newton 法

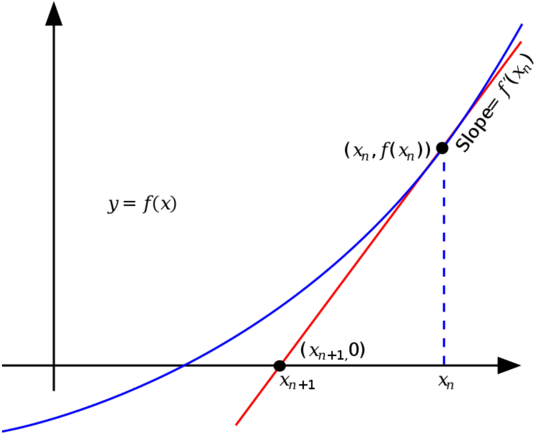

图: x_{n+1} 比 x_n 更好

算法流程

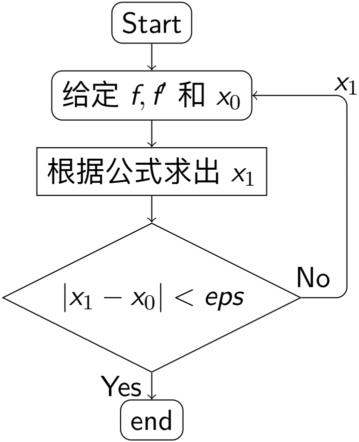

图: Newton 法流程图

收敛速度比较

$f(x) = e^{2x} - 2$

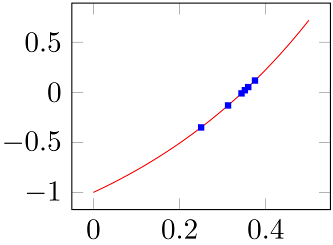

图: 二分法

二分法迭代 19 次后达到目标精度.

Newton 法

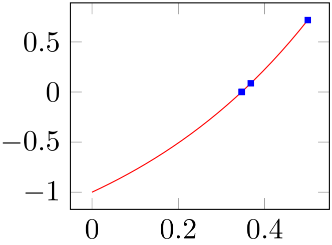

图: Newton 法

牛顿法迭代 5 次后即达到目标精度, 显著优于二分法.

$f(x) = 8x^5 + x^4 + 9x^2 + 7x + 5$

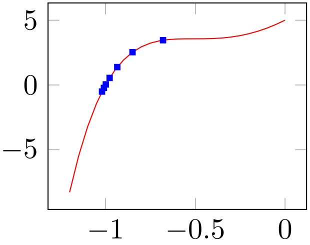

图: 二分法

二分法迭代 19 次后达到目标精度

Newton 法

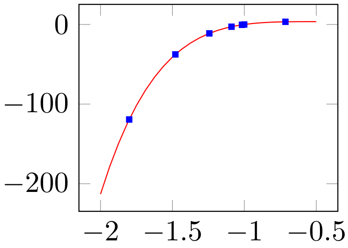

图: Newton 法

牛顿法迭代 9 次后即达到目标精度, 显著优于二分法.

结论

可以看出，不管是理论上还是实际例子中，Newton 法在求解函数的根问题上都优于二分法，不过其有可导的前提，在应用上没有二分法广泛.