

一维非线性方程求根算法

赵天健

信息与计算科学 3210101830

2022 年 7 月 4 日

引言

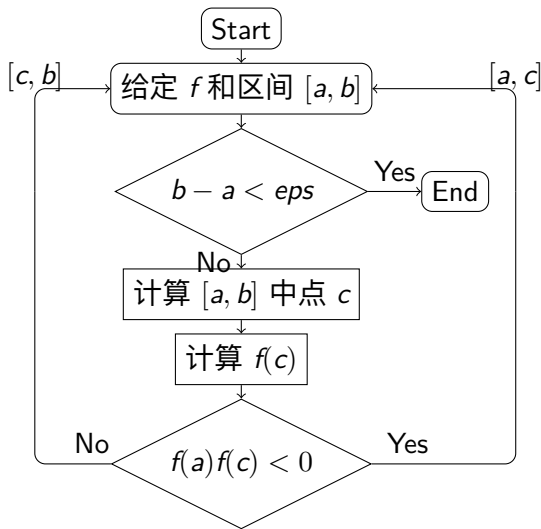
很久以来, 解方程都是数学家们非常关注的问题. 而解方程最基本的就是解一元方程的问题. 不过, 非线性的一元方程求解并不容易, 就算对于多项式来说也是如此. 根据 Abel-Ruffini 定理, 对于多项式方程 $p(x) = 0$ 来说, 若 $\deg p \geq 5$, 那么其没有求根公式, 而一些非多项式方程的解析解就更加难求了. 但是, 很多时候我们仍然希望在某个区间 $[l, r]$ 内找到方程 $f(x) = 0$ 的解, 哪怕是数值上的近似解. 为了解决这个问题, 许多迭代算法应运而生.

一些求根算法的介绍

二分法

设 $f(x)$ 是连续函数, 现有区间 $[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 那么取区间中点 $c = \frac{a+b}{2}$, 则 $[a, c], [b, c]$ 必有至少一个区间存在 $f(x)$ 的根. 而由于连续函数的介值定理, 则函数值与 $f(c)$ 符号相异的端点与 c 构成的区间内必然存在根.

算法流程



图：二分法流程图

一维非线性方程求根算法

Newton 法

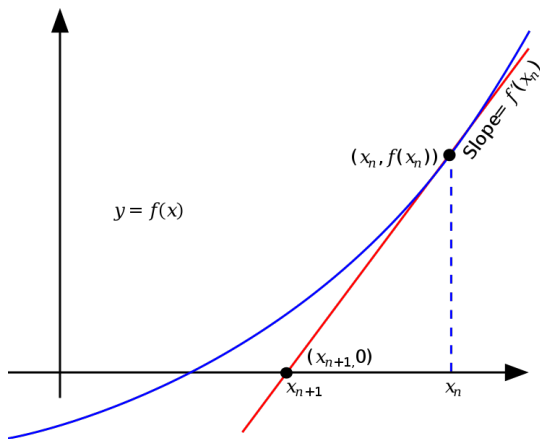


图: x_{n+1} 比 x_n 更好

算法流程

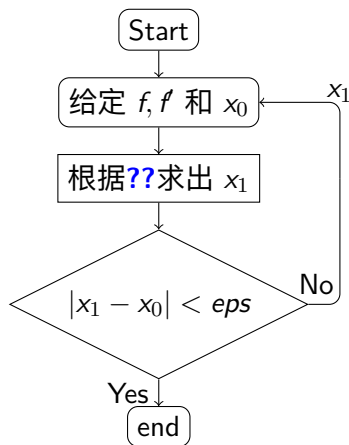


图: Newton 法流程图

收敛速度比较

$$f(x) = e^{2x} - 2$$

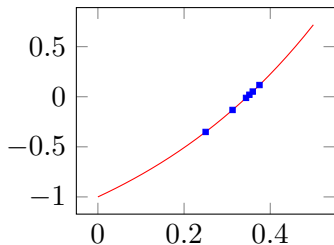


图: 二分法

二分法迭代 19 次后达到目标精度.

Newton 法

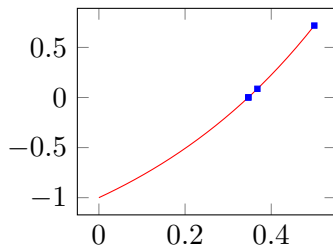


图: Newton 法

牛顿法迭代 5 次后即达到目标精度, 显著优于二分法.

$$f(x) = 8x^5 + x^4 + 9x^2 + 7x + 5$$

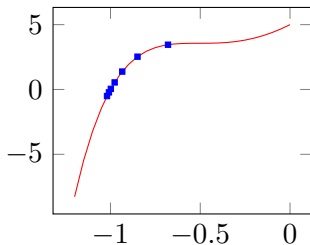


图: 二分法

二分法迭代 19 次后达到目标精度

Newton 法

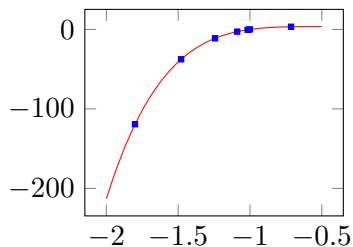


图: Newton 法

牛顿法迭代 9 次后即达到目标精度, 显著优于二分法.

结论

可以看出, 不管是理论上还是实际例子中, Newton 法在求解函数的根问题上都优于二分法, 不过其有可导的前提, 在应用上没有二分法广泛.