МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Ваньков Б.П.

2004 г.

Исчисление высказываний.

Теории I порядка.

Теорема Геделя о неполноте.

Исчисление высказываний

В начале XX века математический мир был потрясён открытием парадоксов Например семантический парадокс лжеца некто говорит Я лгу Если он при этом лжёт то он не лжёт Если же он при этом не лжёт то он лжёт Таким образом он лжёт и не лжёт одновременно

Логический парадокс Рассел заметим сначала что некоторые множества могут быть элементами самого себя например множество всех множеств является элементом самого себя А например множество всех людей не является человеком то есть не является элементом самого себя Если рассмотрим множество А состоящее из всех множеств которые не являются элементом самого себя то А будет одновременно принадлежать и не принадлежать самому себе

Анализ этих и других парадоксов которые не имеют логических изъянов привёл к различным планам их устранения и явился новым стимулом для получения глубоких и опустошительных результатов Гёделя Тарского Чёрча Россера Клини и многих других позволившим математической логике завоевать положение независимой ветви математики

Задачей логики является анализ и синтез правильных способов рассуждений Если при этом предметом исследований является математика и используется математический аппарат то имеет место математическая логика

1. Алгебра высказываний.

В*ысказыванием* называется повествовательное предложение относительно которого можно сказать истинно оно или ложно

Например Существуют прямоугольные треугольники является истинным высказыванием И А предложение Треугольник является прямоугольным не является высказыванием так как мы не знаем о каком треугольнике идёт речь Предложение На Луне живут тигры является ложным высказыванием Л

Высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита называемыми пропозициональными буквами

Из простых высказываний можно получить сложное высказывание при помощи логических операций *отрицание* А обозначаемое $\neg$ А и соответствующее не А *конъюнкция* А и В обозначаемая А В и соответствующая А и В *дизъюнкция* А и В обозначаемая А $\vee$ В и соответствующая А или В где или понимается в соединительном смысле *импликация* А и В обозначаемая А $\to$ В и соответствующая если А то В эквивалентность А и В обозначаемая А$\leftrightarrow$ В и соответствующая А тогда и только тогда когда В

Логические операции определяются при помощи следующей таблицы

		$\neg$		$\vee$	$\to$	$\leftrightarrow$
и	и	л	и	и	и	и
л	и	и	л	и	и	л
и	л	л	л	и	л	л
л	л	и	л	л	и	и

Таким образом ¬ Л если А И ¬ И если А Л конъюнкция И тогда и только тогда когда оба конъюнктивных члена А и В истинны дизъюнкция ∨ Л тогда и только тогда когда оба дизъюнктивных члена ложны импликация → Л тогда и только тогда когда посылка А И а заключение В Л эквивалентность ↔ И тогда и только тогда когда оба эквивалентных члена одинаково истины или одинаково ложны

Заметим что для двух букв в таблице имеем строчки распределения всех истинностных значений двух пропозициональных букв А и В Для букв будем иметь строчек

Пропозициональные формы получаются из пропозиционных букв при помощи всех этих логических операций а именно

Пропозициональные буквы пропозициональные формы

Если A, B пропозициональные формы то ¬ A B $A \vee B$ $A \to B$ $A \leftrightarrow B$ пропозициональные формы

Выражение является пропозициональной формой тогда и только тогда когда это следует из и

Например выражение ¬ → C ∨ ¬ →B ↔A является пропозициональной формой

Договоримся об экономии скобок в пропозициональных формах

Опускаем внешние скобки

Опускаем скобки если их можно восстановить следующим образом сначала восстанавливаем скобки для отрицания заключая в них наименьшую форму следующую после ¬ затем для конъюнкции заключая в них наименьшие формы окружающие затем аналогично для дизъюнкции ∨ для импликации→ и для эквивалентности ↔

Если в пропозициональной форме имеется последовательность одной и той же связки то скобки восстанавливаются слева направо

Например приведённую выше пропозициональную форму можно записать без скобок ¬ → C∨ ¬ →B ↔A

↑

главная связка

Связка которая применяется последней называется главной

Всякая пропозициональная форма определяет истинностную функцию которая принимает значения истина или ложь при некотором распределении истинностных значений входящих в нее переменных

Графиком её является таблица истинности

Например построим таблицу истинности для приведённой выше пропозициональной формы записывая под пропозициональными буквами и связками истинностные значения Так как пропозициональная форма содержит пропозициональные буквы А В С то будем иметь строчек При этом для А И и Л будем чередовать по одному для В по два для С по

¬		→			C	∨	¬		→	B	↔	A
Л	**И**	И	**И**	И	**И**	И	Л	И	И	И	**И**	И
И	**Л**	И	**И**	И	**И**	И	И	Л	И	И	**Л**	Л
Л	**И**	И	**Л**	Л	**И**	Л	Л	И	Л	Л	**Л**	И
И	**Л**	И	**Л**	Л	**И**	И	И	Л	Л	Л	**И**	Л
Л	**И**	И	**И**	Л	**Л**	Л	Л	И	И	И	**И**	И

И	**Л**	И	**И**	Л	**Л**	И	И	Л	И	И	**Л**	Л
Л	**И**	И	**Л**	Л	**Л**	Л	Л	И	Л	Л	**Л**	И
И	**Л**	И	**Л**	Л	**Л**	И	И	Л	Л	Л	**И**	Л

Упражнения

Постройте таблицы истинности для следующих пропозициональных форм

$$а \quad A \quad B \vee \neg A \quad \rightarrow B \leftrightarrow A \quad \neg B$$

$$б \quad \neg A \quad \neg B \quad \rightarrow \quad C \quad \neg B \quad A \quad \leftrightarrow \quad \neg C \vee A$$

$$в \quad A \rightarrow B \vee C \quad A \quad \leftrightarrow B \quad \rightarrow D \vee \neg D \quad - тавтология$$

2. Тавтологии.

Заметим что пропозициональная форма $\neg \quad \to \quad C\vee\neg$ принимает значение **И** при всевозможных распределениях входящих в неё пропозициональных букв

Пропозициональная форма которая принимает значение И при всевозможных распределениях истинностных значений для входящих в неё пропозициональных букв называется *тождественно-истинной* или *тавтологией.*

Например $A\vee\neg$ является тавтологией выражающей закон исключённого третьего

Для доказательства того что пропозициональная форма является тавтологией достаточно построить таблицу истинности

Например пропозициональная форма $\neg B\to \neg A \to \quad \neg B\to A \to$ является тавтологией которая выражает способ доказательства утверждений методом от противного если из предположения несправедливости утверждения В получаются два взаимно исключающие утверждения А и $\neg$ противоречие то утверждение В справедливо

Докажем методом от противного тавтологию $\neg B\to \neg A \to \quad \neg B\to A \to$ располагая предполагаемое ложное значение под главной связкой и получаемые значения пропозициональных форм последовательно в каждой строчке

$\neg\ B \to \neg\ A \quad \to \quad \neg\ B \to A \quad \to$

Л

И Л

И Л

И И

И

Л

Л

Таким образом получили что посылка $\neg\ B \to \neg\ A$ принимает одновременно значение И и Л Поэтому наше предположение что пропозициональная форма принимает значение Л при некотором распределении входящих в неё пропозициональных букв является неверным что и доказывает тавтологию

Если $\to$ является тавтологией то В называется *логическим следствием* А

Если $\leftrightarrow$ является тавтологией то А и В называются *логически эквивалентными* или *равносильными* и записывается $A\Leftrightarrow B$

Предложение 1. Для любых форм А и В справедливы равносильности

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	закон двойного отрицания
$A \quad B \Leftrightarrow B \quad A$	коммутативность конъюнкции
$A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$	коммутативность дизъюнкции
$A \quad (B \quad C) \Leftrightarrow A \quad B \quad C$	ассоциативность конъюнкции
$A\vee \ B\vee C \ \Leftrightarrow \ A\vee B \ \vee C$	ассоциативность дизъюнкции
$A \quad B\vee C \ \Leftrightarrow \ A \quad B \ \vee \ A \quad C$	дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
$A\vee \ B \quad C \ \Leftrightarrow \ A\vee B \quad A\vee C$	дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

$A \quad A \vee B \Leftrightarrow A$ законы

$A \vee \quad A \quad B \Leftrightarrow A$ поглощения

$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$ закон контрапозиции

$A \quad A \Leftrightarrow A$ идемпотентность конъюнкции

$A \vee A \Leftrightarrow A$ идемпотентность дизъюнкции

$A \quad И \Leftrightarrow A \quad A \quad Л \Leftrightarrow Л \quad A \vee И \Leftrightarrow И \quad A \vee Л \Leftrightarrow A$

$\neg \ A \quad B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ законы

$\neg \ A \vee B \Leftrightarrow \neg A \quad \neg B$ Де Моргана

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ выражение

$A \to B \Leftrightarrow \neg \ A \quad \neg B$ одних

$A \quad B \Leftrightarrow \neg \ A \to \neg B$ связок

$A \vee B \Leftrightarrow \neg A \to B$ через

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \ A \to B \quad B \to A$ другие

Доказательство Достаточно построить таблицы истинности

Заметим что например закон контрапозиции утверждает что прямая теорема вида $A \to B$ равносильна противоположной обратной теореме вида $\neg B \to \neg A$

Например утверждение Если точки плоскости равноудалены от сторон угла то они лежат на биссектрисе данного угла равносильно утверждению Если точка плоскости не лежит на биссектрисе данного угла то она не равноудалена от сторон этого угла

<u>*Предложение 2.*</u> *Если A, A→B тавтология, то B – тавтология.*

Доказательство Если предположить противное то есть что при некотором распределении *B* принимает значение Л то А являясь по условию тавтологией при этом распределении будет принимать значение И Поэтому А→В примет значение Л что противоречит условию Таким образом *B* является тавтологией

<u>*Предложение 3.*</u> *Пусть А - тавтология, содержащая пропозициональные буквы* А А А . *Если В получается из А подстановкой вместо букв* А А *пропозициональных форм* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *то В тавтология.*

Доказательство Если при некотором распределении истинных значений А А А формы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, принимают значения х х х соответственно где х $\in$ И Л то форма *B* примет такое же истинное значение при данном распределении какое примет форма *A* если вместо букв А А подставить х х в силу образования *B* то есть значение И так как А является тавтологией по условию Таким образом *B* при произвольном распределении принимает значение И то есть является тавтологией

<u>*Предложение 4.*</u> *Если пропозициональная форма В получается из пропозициональной формы А посредством замены одного или несколько вхождений подформы А на В , то пропозициональная форма* $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ *является тавтологией.*

В частности, если А и В логически эквивалентны, то A_1 *и* B_1 *- логически эквивалентны.*

Доказательство Если при некотором распределении истинных значений *A* и *B* принимают разные значения то посылка $A \leftrightarrow B$ – И Поэтому импликация истинна Если *A* и *B* принимают одинаковые значения то в силу образования *B* из

A формы A и B тоже принимают одинаковые значения Таким образом посылка и заключение истинны Следовательно импликация является истинной

Утверждение называются *логически правильным* если получено из тавтологии подстановкой вместо одних и тех же пропозициональных букв одних и тех же высказываний

Чтобы установить является ли рассуждение логически правильным надо перевести его на формальный язык обозначая одними и теми же пропозициональными буквами одни и те же простые высказывания и проверить является ли заключение логическим следствием конъюнкции посылок

Например проверим логическую правильность следующего рассуждения

Если *школа будет готовить хороших выпускников* A то *другие организации будут чувствовать себя в долгу* B а *администрация школы получит представление о возможном благополучии* C Если *другие организации будут чувствовать себя в долгу* B то *они могут оказать содействие в развитии образования* Если *администрация школы получит представление о возможном благополучии* C то *она ослабит усилия, направленные на развитие образования* Если *школа не будет готовить хороших выпускников* A то *общество рискует остаться без будущего* Следовательно либо *другие организации будут чувствовать себя в долгу* B и *школа ослабит свои усилия, направленные на развитие образования* либо *общество рискует остаться без будущего*

Получаем пропозициональную форму соответствующую данному рассуждению

$A \to B \quad C \quad B \to D \quad C \to E \quad \neg A \to F \;\to\; B \quad D \to F$ которая является тавтологией Предлагается читателю провести доказательство самостоятельно Поэтому рассуждение является логически правильным

Если в логически правильном рассуждении истины все его посылки то в силу предложения истинным будет и вывод рассуждения

Пример Определите где зарыт клад если известно что он зарыт или под дубом или под сосной или под берёзой и что три из следующих пяти посланий являются верными

X Клад зарыт или под дубом или под сосной

Y: Клад не зарыт ни под дубом ни под берёзой

Z: Первое и второе послание не верны

U: Из первых двух посланий одно верное а другое не верное

V: Четвёртое послание является не верным

Решение Введём обозначения клад зарыт под дубом клад зарыт под сосной клад зарыт под берёзой Тогда послания будут иметь вид

$X \quad D \vee B$

$Y \quad \neg C \quad \neg B$

$Z \; \neg X \quad \neg Y \Leftrightarrow \neg D \vee C \quad \neg\neg C \quad \neg B \Leftrightarrow \neg D \quad \neg C \quad \neg\neg C \vee \neg\neg B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg D \quad \neg C \quad C \vee B \Leftrightarrow \neg D \quad \neg C \quad C \vee \neg D \quad \neg C \quad B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg D \quad Л \vee \neg D \quad \neg C \quad B \Leftrightarrow Л \vee \neg D \quad \neg C \quad B \Leftrightarrow \neg D \quad \neg C \quad B$

$U\ \neg X\ \ Y\vee X\ \ \neg Y \Leftrightarrow \neg D\vee C\ \ \ \neg C\ \ \neg B \vee D\vee C\ \ \ \neg\neg C\ \ \neg B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg D\ \ \neg C\ \ \ \neg C\ \ \neg B \vee D\vee C\ \ \ \neg\neg C\vee\neg\neg B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg D\ \ \neg C\ \ \neg C\ \ \neg B \vee D\vee C\ \ \ C\vee B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg D\ \ \neg C\ \ \neg B \vee D\vee C\ \ \ C\vee B \Leftrightarrow Л\vee D\vee C\ \ \ C\vee D\vee C\ \ \ B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D\vee C\ \ \ C\vee D\vee C\ \ \ B \Leftrightarrow C\vee D\vee C\ \ \ B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C\vee D\ \ B\vee C\ \ B \Leftrightarrow C\vee Л\vee Л \Leftrightarrow C\vee Л \Leftrightarrow C$

$V\ \ \neg U \Leftrightarrow \neg C$

Таким образом верными тремя посланиями могут быть и что равносильно высказыванию то есть клад зарыт под дубом

Упражнения

1. Докажите тавтологии

$а\ \neg A\to\ A\to B$

$б\ \ A\to\ B\to C\ \ \to\ \ A\to B\ \to\ A\to C$

$в\ \ A\to B\ \vee\ B\to A$

$г\ \ A\vee\neg A$

$д\ \ A\to B\ \vee\ A\to\neg B$

$е\ \ A\to C\ \to\ \ B\to C\ \to\ A\vee B\to C$

$ж\ \ B\to C\ \to\ A\vee B\to A\vee C$

$з\ \ A\ \ \ B\to C\ \to\ A\to\ B\to C$

$и\ \ A\to B\ \ \ \ C\to D\ \to\ A\ \ \ C\to B\ \ \ D$

$к\ \ A\to\ B\to C\ \ \to\ A\ \ \ B\to C$

$л\ \ A\to B\ \ \ \ C\to D\ \to\ A\vee C\to B\vee D$

$м\ \ A\ \ \ B\to C\vee D\ \vee\ \ A\to\neg C\ \ \ \ B\to\neg D$

$н\ \ A\to C\ \to\ B\to C\ \ \vee\ A\vee D\to B\vee D$

$о\ \ A\to C\ \to\ \ B\to C\ \to\ A\vee B\to C$

2. Докажите равносильности

а $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

б $A \quad B \Leftrightarrow B \quad A$

в $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

г $A \quad B \quad C \Leftrightarrow A \quad B \quad C$

д $A \vee \ B \vee C \Leftrightarrow A \vee B \ \vee C$

е $A \quad (B \vee C) \Leftrightarrow A \quad B \vee A \quad C$

ж $A \vee \ B \quad C \Leftrightarrow A \vee B \quad A \vee C$

з $A \quad A \vee B \Leftrightarrow A$

и $A \vee \ A \quad B \Leftrightarrow A$

k $A \quad A \Leftrightarrow A$

л $A \vee A \Leftrightarrow A$

м $A \quad U \Leftrightarrow U$

н $A \quad \text{Л} \Leftrightarrow \text{Л}$

о $A \vee U \Leftrightarrow U$

п $A \vee \text{Л} \Leftrightarrow \text{Л}$

р $\neg \ A \quad B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

с $\neg \ A \vee B \Leftrightarrow \neg A \quad \neg B$

т $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

у $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg \ A \quad \neg B$

ф $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad B \rightarrow A$

х $A \vee \ B \quad C \Leftrightarrow A \vee B \quad A \vee C$

3. Проверить логическую правильность рассуждений

А) Если Джон не встречал этой ночью Смита то либо Смит был преступником либо Джон лжет Если Смит не был преступником то Джон не встречал Смита этой ночью и преступление имело место после полуночи Если преступление имело место после полуночи то либо Смит был преступником либо Джон лжет Следовательно Смит был преступником

Б) Если строить противоатомные убежища то другие государства будут чувствовать себя в опасности а наш народ получит ложное представление о своей безопасности Если другие страны будут чувствовать себя в опасности то они смогут начать войну Если наш народ получит ложное представление о безопасности то он ослабит свои мирные усилия Если же не строить убежища то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны Следовательно либо другие страны могут начать войну и наш народ ослабит свои усилия либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны

В) Если капиталовложения остаются постоянными то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица Если правительственные расходы не возрастут то налоги будут снижены Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными то безработица не возникнет Следовательно если капиталовложения останутся постоянными то правительственные расходы возрастут

4. Проверьте совместность множества утверждений для чего проверьте является ли их противоречием или нет

А) Если курс ценных бумаг растет или процентная ставка снижается то либо курс акций либо налоги не повышаются Курс акций понижается тогда и только тогда когда растет курс ценных бумаг и растут налоги Если процентная ставка снижается то либо курс акций не понижается либо курс ценных бумаг не растет Либо повышаются налоги либо курс акций

понижается и снижается процентная ставка

Б) Если вечер скучен то или Алиса начинает плакать или Анатоль рассказывает смешные истории Если Сильвестр приходит на вечер то или вечер скучен или Алиса начинает плакать Если Анатоль рассказывает смешные истории то Алиса не начинает плакать Сильвестр приходит на вечер тогда и только тогда когда Анатоль не рассказывает смешные истории

3. Полные системы связок. Нормальные формы.

Не только всякая пропозициональная форма определяет истинностную функцию но верно и обратное утверждение

<u>*Предложение 5.*</u> *Всякая истинностная функция определяется пропозициональной формой, содержащей только связки* $\neg, \&, \vee$.

Доказательство Пусть задана истинностная функция **f(x₁,...,xₙ)** при помощи таблицы истинности имеющей строк которые занумеруем посредством

Для каждой ой строчки рассмотрим конъюнкции С

где

$$u_j^i = \begin{cases} A_j & \text{если} \quad x_j - И \\ \neg A_j & \text{если} \quad x_j - Л \end{cases}$$

Тогда пропозициональная форма представляющая дизъюнкцию всех построенных для тех строк где функция **f** принимает значение истина , определяет функцию **f** То есть и принимают одинаковые истинностные значения в соответствующих строчках

Действительно Если в некотором том распределении принимает значение И то которое при этом распределения в силу определения тоже истинно является дизъюнктивным членом Поэтому тоже истинна

Заметим что при ом распределении все другие конъюнкции кроме С принимают значение ложь

Поэтому если в ой строке принимает значение ложь то С в не входит а входят другие конъюнкции принимающие при этом распределении ложные значения тогда и дизъюнкция принимает значение ложь

Таким образом определяет функцию

Определение Пропозициональная форма называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* если является дизъюнкцией конъюнкций

Если при этом в каждом дизъюнктивном члене содержится любая буква или её отрицание то пропозициональная форма называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).*

<u>Пример</u> Пусть функция x x x описывает изменение освещённости комнаты при переключении любого из трёх переключателей

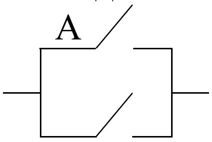
	x	x	x	x x x	
С	и	и	и	**И**	С **$A_1\&A_2\&A_3$**
С	л	и	и	л	С $\neg$A A A
С	и	л	и	л	С A $\neg$A A
С	л	л	и	**и**	С **$\neg A_1\&\neg A_2\&A_3$**
С	и	и	л	л	С A A $\neg$A
С	л	и	л	**и**	С **$\neg A_1\&A_2\&\neg A_3$**
С	и	л	л	**и**	С **$A_1\&\neg A_2\&\neg A_3$**
С	л	л	л	л	С $\neg$A $\neg$A $\neg$A

Так как функция принимает значение И в и строчках то имеет вид $C \vee C \vee C \vee C$

то есть $A \quad A \quad A \vee \neg A \quad \neg A \quad A \vee \neg A \quad A \quad \neg A \vee A \quad \neg A \quad \neg \; A$ которая является *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*

Замечание Аналогично при помощи строчек в которых функция принимает значение Л можно построить *совершенную конъюктивную нормальную форму.*

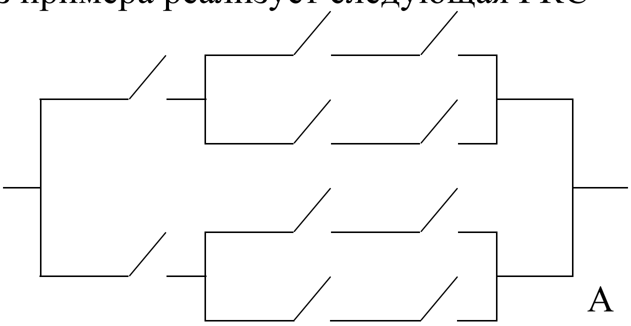
Заметим что последовательное соединение $A \quad B$ двух контактов A и B можно выразить реализовать при помощи конъюнкции $A \quad B$ а параллельное соединение



реализуется при помощи дизъюнкции $A \vee B$

Таким образом в силу предложения при помощи электрической цепи называемой релейно контактной схемой РКС можно реализовать любую истинностную функцию

Например Если предварительно упростить пропозициональную форму из примера при помощи равносильности из предложения то получим $A \quad A \quad A \vee \neg A \quad \neg A \vee \neg A \quad \neg A \quad A \vee A \quad \neg A$ Тогда истинностную функцию из примера реализует следующая РКС



A

<u>Следствие 1.</u> Любую истинную функцию можно определить при помощи пропозициональной формы, содержащей только одну из следующих трех пар связок: $\neg \quad \neg \; \vee \; \neg \; \rightarrow$.

Доказательство Учитывая предложение в силу предложения при помощи равносильности $A \vee B \Leftrightarrow \neg \; \neg A \quad \neg B$ получаем достаточность первой пары связок $\neg$ для построения всех истинностных функций

При помощи равносильности $A \quad B \Leftrightarrow \neg \; \neg A \vee \neg B$ получаем достаточность второй пары связок $\neg \; \vee$

При помощи равносильностей $A \quad B \Leftrightarrow \neg \; A \rightarrow \neg B$ и $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$ получаем достаточность третьей пары связок $\neg \; \rightarrow$

Чтобы ответить на вопрос о возможности порождения всех истинностных функций при помощи одной связки рассмотрим связку $\downarrow$ стрелка Пирса и связку штрих Шеффера которые определяются при помощи следующей таблицы

A	B	$A \downarrow B$	A B
и	и	л	л
л	и	л	и
и	л	л	и
л	л	и	и

Следствие 2. *Единственными бинарными связками, каждой из которых достаточно для выражения всех истинностных функций, являются ↓ и .*

Доказательство Достаточность стрелки Пирса↓получается в силу следствия и равносильностей $\neg A \Leftrightarrow A \downarrow A \quad A \quad B \Leftrightarrow A \downarrow A \downarrow \quad B \downarrow B$

Достаточность штриха Шеффера получается в силу следствия и равносильностей $-A \Leftrightarrow A\ A$ и $A \vee B \Leftrightarrow \ A\ A \quad B\ B$

Для доказательства единственности предположим что имеется связка которая является достаточной для выражения всех истинностных функций

И И должно быть Л так как в противном случае не возможно выразить функцию отрицания Аналогично Л Л должно быть И

Рассматривая все другие возможности

и	и	л	л	л	л
л	и	и	л	и	л
и	л	и	л	л	и
л	л	и	и	и	и
			↓	−A	−B

Так как при помощи ¬ можно выразить только переменную или ее отрицание но нельзя выразить функцию принимающую только истинные значения то стрелка Пирса и штрих Шеффера являются единственными связками в указанном смысле

Нормальные формы.

1. Постройте совершенную дизъюнктивную нормальную форму логически эквивалентную пропозициональной форме

$$a \ \neg A \quad B \to C \vee \neg B \leftrightarrow \ A \to B$$

D- совершенная дизъюнктивная нормальная форма если в каждый ее дизъюнктивный член входит каждая из возможных букв или ее отрицание

2. Постройте для следующей конъюнктивной нормальной форм СДНФ

$$\neg A \vee \neg B \vee \neg C \qquad A \vee \neg B \vee \neg C \qquad \neg A \vee B \vee \neg C \qquad A \vee B \vee \neg C$$
$$\neg A \vee \neg B \vee C \qquad \neg A \vee B \vee C \qquad A \vee B \vee C$$

3. Докажите что для получения отрицания формы содержащей связи ¬ ∨ достаточно заменить ∨ на на ∨ связку ¬ убрать а если ее не было то поставить перед каждой буквой

4. Для формы построите КНФ

$$F \Leftrightarrow \neg A \ \ B \quad \neg C \vee A \quad B \quad C \vee A \quad \neg B \quad \neg C \vee A \quad \neg B \quad \neg C \vee$$
$$\vee A \quad B \quad \neg C$$

Постройте СДНФ для

$$F \Leftrightarrow \ A \vee B \vee \neg C \qquad \neg A \vee \neg B \vee \neg C \qquad A \vee \neg B \vee C \qquad \neg A \vee \neg B \vee C$$

5. Постройте электрическую цепь осуществляющую голосование трех членов при помощи большинства

6. Постройте электрическую цепь изменяющую освещение одной лампочкой при помощи переключения любого из трех выключателей

7. Какой вопрос должен задать турист местному жителю на развилке двух дорог одна из которых ведет в столицу а другая туда не приводит чтобы по одному ответу при помощи да или нет определить дорогу ведущую в столицу если местные жители говорят только правду или только лгут

8. Постройте электрическую цепь реализующую функции от четырёз переменных

$$F\ x\ \ x\ \ x\ \ x$$

которая принимает значение И если выполнено по крайней мере одно из следующих трёх условий x И и только одна из x и x истина x Л и только две из остальных переменных принимают значение Л только две переменные исключая пару x и x принимают значение И

9. Найдите множество следствий из посылок

$$A\rightarrow\ B\vee C\quad C\rightarrow B$$

$$A\rightarrow C\ \ A$$

$$A\rightarrow B\ \neg B$$

$$A\leftrightarrow B\ \neg A$$

10. Найдите форму с **A** и **B** которая является логическим следствием формул

$$A\rightarrow C\ \neg C\rightarrow\neg B\ \ B\rightarrow D\ \neg C\quad D$$

Нахождение посылок для данных следствий.

11. Найдите все посылки для которых следующие формы являются логическим следствием

$$A\leftrightarrow B$$

$$A\rightarrow B$$

12. Найдите недостающую посылку **F** если **A&B** являются логическим следствием форм A $\neg$B $\neg$C $\neg$B C

Упрощение систем высказываний.

13. Упростите директивы если по крайней мере одна из них должна быть выполнена

Инспектору не разрешается курить на заводе

Если инспектору разрешить курить на заводе то рабочие должны быть предупреждены и бригадир должен принять меры

Рабочие должны быть предупреждены или бригадир должен принять еры

Или рабочие должны быть предупреждены и бригадир должен принять меры или инспектору не разрешается курить на заводе

14. Будут приобретены палатки рюкзаки и мы пойдем в поход

Палатки и рюкзаки приобретены не будут и мы не пойдем в поход

Будут приобретены палатки рюкзаки не будут мы пойдем в поход

Не верно что либо будут приобретены палатки либо не будут приобретены рюкзаки либо мы в поход не пойдем

Логические задачи.

15. Или Витя или Коля или Толя разбил окно

Это мог сделать только один Витя или Толя сказал Андрей

Я окно не разбивал возразил Витя и Коля тоже

Вы оба говорите неправду заявил Толя

Нет Толя один из них сказал правду а другой сказал неправду возразил Дима

Ты Дима не прав сказал Коля

Трое сказали правду Кто разбил окно

16. Четыре друга Антон Влад Семен и Дима решили провести отпуск в Москве Лондоне Киеве и в Ташкенте В какой город поедут каждый из них если известны следующие ограничения

P Если Антон не едет в Москву то Семен не едет в Лондон

Q Если Влад не едет ни в Москву ни в Ташкент то Антон едет в Москву

R Если Семен не едет в Ташкент то Влад едет в Киев

S Если Дима не едет в Москву то Влад едет в Москву

T Если Дима не едет в Лондон то Влад не едет в Москву

4. Формальные теории.

Теория **P** считается формально определенной если

Выделено счетное множество символов

Причём конечная последовательность символов называется *выражением.*

Среди множества выражений выделено множество формул

Обычно существует алгоритм распознающий выражения на формулу

Среди множества формул выделено множество аксиом

Если существует алгоритм распознания формулы на аксиому то теория называется аксиоматической или эффективно аксиоматизированной

Выделено множество отношений называемых правилами вывода

Причём для каждого существует такое что для некоторой формулы и произвольных формул можно определять находится ли она в отношении с этими формулами или нет Если находится то формула называется *непосредственным следствием этих j формул по правилу вывода R_i.*

Выводом формулы A в теории P называется конечная последовательность формул A которая заканчивается на и в которой для любого

либо

аксиома либо

непосредственное следствие предыдущих формул по некоторому правилу вывода

В этом случае формула A называется теоремой и обозначается $\vdash_P A$

Если существует эффективная процедура распознания формул на теорему то теория называется *разрешимой.*

Выводом формулы A из множества формул Г $\Gamma \vdash_P A$ называется конечная последовательность A A A которая заканчивается на и такая что для любого либо

аксиома либо

гипотеза принадлежит множеству формул Г либо

непосредственное следствие предыдущих формул по некоторому правилу вывода

Свойства.

Если из множества формул Г выводима в теории P формула и Г является подмножеством множества формул Δ то из множества формул Δ выводима формула

Из множества формул Δ выводима формула тогда и только когда когда существует конечное подмножество Г множества Δ из которого выводима формула

Если из множества формул Г выводима в теории P формула и из множества формул Δ выводима любая формула из Г то из множества формул Δ выводима формула

Доказательство свойство выполняется так как всякая гипотеза по причине принадлежности множеству Г в выводе формулы из Г по условию является формулой множества Δ

Достаточное условие свойства следует из свойства А необходимое из того что вывод являясь конечной последовательностью формул содержит конечное множество гипотез из которых образуется множество Δ

Для доказательства свойства достаточно в выводе формулы из множества Г заменить все гипотезы на их выводы из множества Δ что возможно в силу условия

Исчисление высказываний.

Исчисление высказываний теорию определим так

.*Символами* теории являются $\neg$ $\rightarrow$ A B C

Формулами теории являются пропозициональные формы содержащие только $\neg$ и $\rightarrow$

Три схемы аксиом A $A\rightarrow B\rightarrow A$

A $A\rightarrow B\rightarrow C \rightarrow A\rightarrow B \rightarrow A\rightarrow C$

A $\neg B\rightarrow\neg A \rightarrow \neg B\rightarrow A \rightarrow B$

порождают бесконечное множество аксиом теории при произвольных формулах A B и C

Единственным правилом вывода является *Modus ponens* B является непосредственным следствием формул A и $A\rightarrow B$ то есть A $A\rightarrow B \vdash$ B

<u>*Лемма*</u> *Для произвольной формулы A теории L формула* $A\rightarrow A$ *является теоремой L* $\vdash$ $A\rightarrow A$

Доказательство

$A\rightarrow A\rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A\rightarrow A\rightarrow A$ A

$A\rightarrow A\rightarrow A \rightarrow A$ A

$A\rightarrow A\rightarrow A \rightarrow A\rightarrow A$ MP

$A\rightarrow A\rightarrow A$ A

$A\rightarrow A$ MP

По выводу имеем $\vdash$ $A\rightarrow A$

<u>*Теорема дедукции.*</u> *Если из множество формул Г и формулы A выводима формула B (Г, A* $\vdash_L$ *B), то Г* $\vdash_L$ $A\rightarrow B$*. (B частности , если A* $\vdash_L$*B, то* $\vdash_L$ $A\rightarrow B$*).*

Доказательство Пусть B B B B является выводом формулы B из множества формул Г и формулы A Тогда для любого имеем

аксиома либо

гипотеза то есть $\in$ Г либо

A либо

непосредственное следствие предыдущих формул B и B по правилу MP причем B $B\rightarrow B$

Докажем утверждение теоремы индукцией по длине вывода то есть докажем что Г$\vdash$ $A\rightarrow B$ Тогда при утверждение будет справедливо для формулы

При докажем что Г$\vdash$ $A\rightarrow B$

B является аксиомой Тогда $\vdash$ B вывод состоит из одной формулы и по свойству выводимости имеем $\Gamma \vdash$ B По аксиоме учитывая свойство выводимости имеем $\Gamma \vdash$ B $\to$ A$\to$B Поэтому по правилу получаем $\Gamma \vdash$ A$\to$B

B является гипотезой

B $\in\Gamma$ Тогда $\Gamma \vdash$ B и аналогично случаю получаем $\Gamma \vdash$ A$\to$B

B A тогда учитывая лемму и свойство выводимости имеем $\Gamma \vdash$ A$\to$B

В силу невозможности случая базис рассмотрен

Предполагаем что утверждение справедливо для формул B с номерами меньшими и докажем для B

Если B аксиома или гипотеза то доказательство совпадает с базисным с заменой B на B

B непосредственное следствие предыдущих формул B и B B $\to$B то из того что по индуктивному предположению имеем что

$\Gamma \vdash$ A$\to$ B $\to$B и $\Gamma \vdash$ A$\to$ B

По аксиоме A имеем что из $\Gamma \vdash$ A$\to$ B $\to$B $\to$ A$\to$ B $\to$ A$\to$B

Применим MP дважды Тогда получим что $\Gamma \vdash$ A$\to$B

Таким образом по аксиоме индукции утверждение теоремы справедливо для любого а поэтому и для формулы

<u>*Следствие 1.*</u> *A$\to$B, B$\to$C$\vdash$ A $\to$C.*

Доказательство A$\to$B гип
B$\to$C гип
A гип
B MP
C MP

По имеем A$\to$B B$\to$C *A*$\vdash$ C

Поэтому по теореме дедукции A$\to$B B$\to$C $\vdash$ A $\to$C.

<u>*Следствие 2.*</u> *A$\to$(B$\to$C), B$\vdash$ A $\to$C.*

Доказательство A$\to$ B$\to$C гип
B гип
A гип
B$\to$C MP
C MP

По имеем A$\to$ B$\to$C B A$\vdash$ C Поэтому по теореме дедукции

A$\to$B B$\to$C $\vdash$ A $\to$C.

6. Теоремы теории L

Лемма Для любых формул A и B следующие формулы являются теоремами теории L:

a) $\neg\neg B \to B$

b) $B \to \neg\neg B$

c) $\neg A \to (A \to B)$

d) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

e) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

f) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

g) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

Доказательство

а $\quad \neg B \to \neg\neg B \to \neg B \to \neg B \to B$ A

$\neg B \to \neg B$ лемма

$\neg B \to \neg\neg B \to B$ следствие

$\neg\neg B \to \neg B \to \neg\neg B$ A

$\neg\neg B \to B$ следствие

По имеем $\vdash \neg\neg B \to B$

$\neg\neg\neg B \to \neg B \to \neg\neg\neg B \to B \to \neg\neg B$ A

$\neg\neg\neg B \to \neg B$ лемма а

$\neg\neg\neg B \to B \to \neg\neg B$ MP

$B \to \neg\neg\neg B \to B$ A

$B \to \neg\neg B$ следствие

По имеем $\vdash B \to \neg\neg B$

$\neg A$ гипотеза

A гипотеза

$\neg B \to \neg A \to \neg B \to A \to B$ A

$\neg A \to \neg B \to \neg A$ A

$\neg B \to \neg A$ MP

$\neg B \to A \to B$ MP

$A \to \neg B \to A$ A

$\neg B \to A$ MP

B MP

По имеем $\vdash \neg A\ A \vdash B$ Поэтому по теореме дедукции примененной дважды получаем утверждение леммы

$\neg B \to \neg A$ гипотеза

$\neg B \to \neg A \to \neg B \to A \to B$ A

$\neg B \to A \to B$ MP

$A \to \neg B \to A$ A

$A \to B$ следствие

По имеем $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$ Поэтому по теореме дедукции получаем

$\vdash \neg B \to \neg A \to A \to B$

$A \to B$ гипотеза

$\neg\neg A \to \neg\neg B \to \neg B \to \neg A$ лемма

$\neg\neg A \to$ лемма а

$\neg\neg A \to$ следствие

$\neg A \to A \ \to A$

$A \ B \ A \to \ B \to C \ \mapsto C$

$A \to B \ B \to C \mapsto A \to C$

$A \to \ B \to C \ \mapsto B \to \ A \to C$

$A \quad B \mapsto B$

$A \mapsto B \vee A \ \neg B \to A$

$A \leftrightarrow B \mapsto B \to A$

$\mapsto \ A \to B \ \to \ A \to \neg B \ \to \neg A$

$\mapsto \ A \to B \ \to A \ \to A$

$A \quad A \to \ B \to A$

$A \quad A \to \ B \to C \ \to \ A \to B \ \to \ A \to C$

$A \quad \neg B \to \neg A \ \to \ \neg B \to A \ \to B$

$\to \neg \ \neg B$ лемма

$\neg \ \neg A \to \neg \ \neg \neg B$ следствие

$\neg B \to \neg A$

По имеем $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ Поэтому по теореме дедукции получаем утверждение леммы е

используя МР имеем $A \quad A \to B \vdash B$ При помощи теорема дедукции применённой дважды получаем $\vdash A \to \ \ A \to B \ \to$ Имея по лемме $A \to B \ \to \ \to (\neg B \to \neg (A \to B))$ по следствию получаем

$A \to B$ гип

$\neg A \to$ гип

$\neg B \to \neg A \ \to \ \neg B \to A \ \to B \quad A$

$\to \quad \to \neg \quad \to \neg$ лемма

$\neg \quad \to \neg$

$\neg B \to A \ \to B$

$\neg A \to \quad \to \neg \quad \to \neg \ \neg$ лемма

$\neg \quad \to \neg \ \neg$

$\neg \ \neg A \to A$ лемма

$\neg B \to A$ следствие

B

По имеем $A \to B \quad \neg A \to \ \vdash B$ Поэтому по теореме дедукции применённой дважды получаем утверждение леммы

7. Полнота ИВ.

Предложение 5. Всякая теорема теории L является тавтологией 1 теорема о полноте).

Доказательство так как схемы А А и А представляют тавтологии и МР в силу предложения сохраняет свойство формул быть тавтологией то теорема которая получается из аксиом при помощи МР является тавтологией

Для доказательства второй части рассмотрим

Лемма Если формула А содержит пропозициональные буквы $B_1, B_2, \ldots, B_к$ и для каждого распределения истинностных значений $B_i^{\backslash}$ есть B_i, если B_i принимает значение И и $\neg B_i$, если B_i принимает значение Л.

Аналогично $A^{|}$ есть А, если А принимает в этом распределении значение И и $\neg A$, если А принимает в этом распределении значение Л.

Тогда $B_1^{|}, B_2^{|}, \ldots, B_k^{|} \vdash A^{|}$ для каждого распределения букв.

Например

А ¬ В → В → В

	л	и	и	и	и
	и	л	и	и	л
	л	и	и	л	и
	и	л	л	л	и

Тогда для каждого распределения имеем выводимости

$B \quad B \vdash \neg B \to B \to B$

$\neg B \quad B \vdash \neg \quad \neg B \to B \to B$

$B \quad \neg B \vdash \neg B \to B \to B$

$\neg B \quad \neg B \vdash \neg B \to B \to B$

Доказательство докажем утверждение индукцией по количеству связок в формуле А

Тогда в зависимости от значения В утверждение выражается в виде

$B \vdash B$ или $\neg B \vdash \neg B$ что очевидно верно

Пусть утверждение справедливо для формул содержащих меньше связок и докажем для формулы А

Имеем случая А имеет вид

$\neg B$ либо $B \to C$

А имеет вид $\neg B$

Так как В имеет меньше связок чем А то для В справедливо утверждение то есть В В $\vdash$ В Если при некотором распределении В истина то В есть В то есть В В $\vdash$ В Тогда

А ложно Поэтому А есть $\neg A$ то есть $\neg\neg B$ По лемме в имеем В

$B \vdash B \to \neg\neg B$ Откуда по МР получаем В В $\vdash \neg\neg B$ А

Если В ложно то по индуктивному предположению В В $\vdash \neg B$ но в этом случае так как А есть $\neg B$ то В В $\vdash$ А

А имеет вид $B \to C$ Имеем индуктивное предположение для В и С имеющих меньше связок чем А В В $\vdash$ В В В $\vdash$

В ложь Тогда А И

В $\neg B$ А $B \to C$ Учитывая лемму с то есть В В $\vdash$ $\neg B \to B \to C$ и

В В $\vdash$ $\neg B$ по МР получаем В В $\vdash$ $B \to C$ А

С истино Тогда А истино А $B \to C$ С и по индуктивному предположению В В $\vdash$ С

При помощи А имеем В В $\vdash$ $C \to B \to C$ Поэтому по правилу МР В

В $\vdash$ $B \to C$ А

В истино С ложно В В С $\neg C$

Поэтому по индуктивному предположению имеем В В $\vdash$ В В В $\vdash$ $\neg C$

Так как А ложно то А $\neg A$ $\neg$ $B \to C$ Тогда по лемме В

В $\vdash$ $B \to \neg C \to \neg$ $B \to C$ поэтому по МР В В $\vdash$ $\neg$ $B \to C$ А

В силу аксиомы индукции утверждение леммы справедливо для произвольной формулы А

Предложение 6. Всякая тавтология является теоремой ИВ. Вторая часть теоремы о полноте

Доказательство Пусть формула А содержит пропозициональные буквы В $B_к$

Тогда по лемме В В $\vdash$ А Поэтому если $B_к$ истина то $B_к$ $B_к$ В $B_к$

В $\vdash$ А Если $B_к$ Л то $B_к$ $\neg B_к$ и В $B_к$ $\neg B$ $\vdash$ А

По теореме дедукции применённоё к и получаем В $B_к$ $\vdash$ В $\to$ А и В

$B_к$ $\vdash$ $\neg B$ $\to$ А Учитывая

лемму имеем В $B_к$ $\vdash$ В $\to$ А $\to$ $\neg B$ $\to$ А $\to$ А При помощи правила МР применённого дважды получаем В $B_л$ $\vdash$ А Аналогично через к шагов получим $\vdash$ А

Полнота и непротиворечивость теории L

<u>Предложение 5.</u> Всякая теорема теории L является тавтологией 1 теорема о полноте).

Доказательство так как схемы A A и A представляют тавтологии и MP в силу предложения сохраняет свойство формул быть тавтологией то теорема которая получается из аксиом при помощи MP является тавтологией

Для доказательства второй части рассмотрим

<u>Лемма</u> Если формула A содержит пропозициональные буквы $B_1, B_2, \ldots, B_к$ и для каждого распределения истинностных значений $B_i^{|}$ есть B_i, если B_i принимает значение И и $\neg B_i$, если B_i принимает значение Л.

Аналогично $A^{|}$ есть A, если A принимает в этом распределении значение И и $\neg A$, если A принимает в этом распределении значение Л.

Тогда $B_1^{|}, B_2^{|}, \ldots, B_k^{|} \vdash A^{|}$ для каждого распределения букв.

Например

A ¬ B → B → B

	л	и	и	и	и
	и	л	и	и	л
	л	и	и	л	и
	и	л	л	л	и

Тогда для каждого распределения имеем выводимости

$B \quad B \vdash \neg B \to B \to B$

$\neg B \quad B \vdash \neg \quad \neg B \to B \to B$

$B \quad \neg B \vdash \neg B \to B \to B$

$\neg B \quad \neg B \vdash \neg B \to B \to B$

Доказательство докажем утверждение индукцией по количеству связок в формуле A

Тогда в зависимости от значения B утверждение выражается в виде

$B \vdash B$ или $\neg B \vdash \neg B$ что очевидно верно

Пусть утверждение справедливо для формул содержащих меньше связок и докажем для формулы A

Имеем случая A имеет вид

$\neg B$ либо $B \to C$

A имеет вид $\neg B$

Так как B имеет меньше связок чем A то для B справедливо утверждение то есть B $B \vdash B$ Если при некотором распределении B истина то B есть B то есть B $B \vdash B$ Тогда

A ложно Поэтому A есть $\neg A$ то есть $\neg\neg B$ По лемме в имеем B

$B \vdash B \to \neg\neg B$ Откуда по MP получаем B $B \vdash \neg\neg B$ A

Если B ложно то по индуктивному предположению B $B \vdash \neg B$ но в этом случае так как A есть $\neg B$ то B $B \vdash A$

A имеет вид $B \to C$ Имеем индуктивное предположение для B и C имеющих меньше связок чем A B $B \vdash B$ B $B \vdash$

B ложь Тогда A И

B $\neg B$ A $B \to C$ Учитывая лемму с то есть B $B \vdash \neg B \to B \to C$ и

B $B \vdash \neg B$ по МР получаем B $B \vdash B \to C$ A

C истино Тогда A истино A $B \to C$ C и по индуктивному предположению B $B \vdash C$

При помощи A имеем B $B \vdash C \to B \to C$ Поэтому по правилу МР B $B \vdash B \to C$ A

B истино C ложно B B C $\neg C$

Поэтому по индуктивному предположению имеем B $B \vdash B$ B $B \vdash \neg C$
Так как A ложно то A $\neg A$ $\neg B \to C$ Тогда по лемме B

$B \vdash B \to \neg C \to \neg B \to C$ поэтому по МР B $B \vdash \neg B \to C$ A
В силу аксиомы индукции утверждение леммы справедливо для произвольной формулы A

<u>Предложение 6.</u> *Всякая тавтология является теоремой ИВ.* Вторая часть теоремы о полноте

Доказательство Пусть формула A содержит пропозициональные буквы B $B_к$

Тогда по лемме B $B \vdash A$ Поэтому если $B_к$ истина то $B_к$ $B_к$ B $B_к$ $B \vdash A$ Если $B_к$ Л то $B_к$ $\neg B_к$ и B $B_к$ $\neg B \vdash A$

По теореме дедукции применённоё к и получаем B $B_к \vdash B \to A$ и B $B_к \vdash \neg B \to A$ Учитывая

лемму имеем B $B_к \vdash B \to A \to \neg B \to A \to A$ При помощи правила МР применённого дважды получаем B $B_л \vdash A$ Аналогично через к шагов получим $\vdash A$

Теория является непротиворечивой теорией т е ни для какой формулы A не может быть A и $\neg A$ одновременно теоремами т к из противного предположения в силу леммы с будем иметь $\vdash$ $\neg A \to A \to B$ и по правилу МР получим $\vdash$ В что невозможно в силу теоремы о полноте т к тогда В является тавтологией однако не все формулы в теории являются тавтологииями

Непротиворечивость можно доказать из того что не всякая формула является теоремой если в этой теории выводима формула из леммы с и имеется правило МР

Теория в которой не всякая формула является теоремой называется *абсолютно непротиворечивой.*

Независимость множеств аксиом

Множество аксиом Х называется *независимым* от других множеств аксиом если никакая аксиома из Х не может быть выведена из остальных аксиом при помощи правил вывода

Пример А $\neg B \to \neg A$ $\neg B \to A$ $\to B$ независимая от множеств А и А т к предполагая противное и рассматривая преобразование формул которое заключается в исключении у них отрицания будем иметь что примененное к А и А не меняют их следовательно они остаются тавтологиями В правиле МР преобразование ничего не изменяет следовательно правило МР сохраняет свойство быть тавтологией но в случае выводимости А тогда бы и от аксиомы из А оставались тавтологией

Однако $\neg B \to \neg A$ $\to$ $\neg B \to A$ $\to B$ имеет вид $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ что не является тавтологией

Таким образом А независимо от А и А

Аналогично можно показать независимость аксиом А А от остальных при помощи например *многозначных логик.*

Независимость систем аксиом.

1. Доказать что множество

A

не зависимо от множеств аксиом

A A

2. Доказать независимость множества

A

от множеств

A A

Для этого рассмотрим трехзначную логику со значениями и связями которые определяются следующим образом

$\neg$ $\to$

A	¬ A

A	→	B

Показать что

$A \quad A$

Дают выделенные формулы т е принимающие при любом распределении значение

Показать что **MP** сохраняет свойство формулы быть выделенной

Привести пример аксиом из

A

которая является невыделенной

3. Докажите независимость множества

A

от множеств

$A \quad A$

при помощи логики

¬ A	A

A	→	B

Показать что в данной логике всякая аксиома из

A

является гротескной

Показать что всякая аксиома из A является гротескной

MP сохраняет свойство быть гротескной

Привести пример аксиомы из

A

Которая не является гротескной

4. Придумать многозначную логику доказывающую независимость

A

от множеств

A A

Теории первого порядка

1. Теория порядка К имеющая предикатный символ А является *теорией I порядка с равенством* если имеет аксиомы

A_6: $\forall$x x x рефлексивность равенства

A_7: x y$\rightarrow$ A x x $\rightarrow$A x y подстановочность равенства

где A x x произвольная формула имеющая свободные вхождения переменной x

A x y получившаяся из нее посредством замены некоторых свободных вхождений переменной x на y причем y должен быть свободным термом для вхождения переменной x которое он заменяет

<u>*Теорема 1.*</u> *В теории I порядка с равенством К*

a) $\vdash$ *$t=t$, для произвольного терма t*

b) $\vdash$ *$x=y\rightarrow y=x$*

c) $\vdash$ *$x=y\rightarrow(y=z\rightarrow x=z)$*

Доказательство

$\forall$x x x A

$\forall$x x x $\rightarrow$ A

MP

$\vdash$

A $\vdash$ $\rightarrow$ x x$\rightarrow$y x $\Rightarrow$в силу a $\vdash$ x и по тавтологии

A$\rightarrow$ B$\rightarrow$ A$\rightarrow$C $\rightarrow$ B$\rightarrow$C получаем $\vdash$ $\rightarrow$ y x

c в следствие A $\vdash$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ по

тавтологии A$\rightarrow$B $\rightarrow$ B$\rightarrow$C $\rightarrow$ A$\rightarrow$C и получаем $\rightarrow$ $\rightarrow$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

x y y x y $\rightarrow$

<u>*Теорема 2.*</u> *Если в теории I порядка К имеет место (A_6): $\forall x_1(x_1=x_1)$ и $(A_7)'$: $x=y\rightarrow(A(x, x)\rightarrow A(x, y))$ только для элементарной формулы A, то теория I порядка К является теорией I порядка с равенством.*

Доказательство необходимо доказать что из A $'$ следует A Докажем это индукцией по количеству кванторов и связок в формуле A

Если то выполняется из условия теоремы

Предположим что A выполняется для произвольной формулы имеющей связок и кванторов меньше чем формула A

Докажем для A Рассмотрим три случая

A x x $\neg$B x x

По индуктивному предположению утверждение справедливо для формулы B

поэтому $\vdash$ *$y=x\rightarrow(B(x, y)\rightarrow B(x, x))$.* Вследствие того что теорема доказана только при помощи элементарных формул то в условиях теоремы теорема

справедлива Поэтому в следствие $\vdash$ x y$\rightarrow$y x по тавтологии A$\rightarrow$B $\rightarrow$ B$\rightarrow$C $\rightarrow$ A$\rightarrow$C и теоремы о частном случае тавтологии A x y

$B \;\; y \; x \; C \quad B\,x\;y \to B\,x\;x$ получаем $\vdash x \;\; y \to B\,x\;y \to B\,x\;x$ Поэтому по тавтологии $A\to B \to \neg B\to\neg A$ и по выше использованной тавтологии а также правила МР имеем $\vdash x \;\; y\to \neg B\,x\;x \to\neg B\,x\;y$ т е $\vdash x \;\; y\to A\,x\;x \to A\,x\;y$

$A\,x\;x \;\; B\,x\;x \to C\,x\;x$

По индуктивному предположению утверждение справедливо для В и С Тогда применим индуктивное предположение для В и С

$x \;\; y\to B\,x\;y \to B\,x\;x$ используется теорема

$x \;\; y\to C\,x\;x \to C\,x\;y$

Используя тавтологию $A\to B\to C \to A\to Д\to E \to A\to C\to Д \to B\to E$

$x \;\; y \;\; B\,x\,y \;\; B\,x\,x \quad x \;\; y\,C\,x\,x \;\; C\,x\,y \quad x \;\; y \;\; B\,x\,x \;\; C\,x\,x \;\; B\,x\,y \;\; C\,x\,y$

и правило МР дважды получаем $\vdash x \;\; y\to B\,x\;x \to C\,x\;x \to B\,x\;y \to C\,x\;y$ т е

$\vdash x \;\; y\to A\,x\;x \to A\,x\;y$

$A\,x\,x \;\; \forall \;\; B\,x\;x$

По индуктивному предположению утверждение справедливо для В т е

$\vdash x \;\; y\to B\,x\;x \to B\,x\;y$

Так как $\vdash B\,x \to B\,x\;y \to \forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y$ то

$\vdash x \;\; y\to \forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y \to \forall \; B\,x\;x \to\forall \; B\,x\;y$

Т к $\forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y$ гипотеза

$\forall \; B\,x\;x$ гипотеза

$\forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y \to B\,x\;y \to B\,x\;y$ А

$B\,x\;x \to B\,x\;y$ МР

$\forall \; B\,x\;x \to B\,x\;x$ А

$B\,x\;x$ МР

$B\,x\;y$ МР

$\forall \; B\,x\;y$ ПО

$\forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y \quad \forall \; B\,x\;x \vdash \forall \; B\,x\;y$

Проверим ПО не является свободной переменной значит по теореме дедукции раза получим

$\vdash \forall \;\; B\,x\;x \to B\,x\;y \to \forall \; B\,x\;x \to\forall \; B\,x\;y$

Тогда применив тавтологию транзитивности получим

$\vdash x \;\; y\to \forall \; B\,x\;x \to\forall \; B\,x\;y$

Вследствие метода математической индукции утверждение справедливо для любой формулы

Модель теории порядка с равенством называется *нормальной* если отношение интерпретирующее предикатный символ в данной интерпретации превращается в тождество

Всякая теория порядка с равенством имеющая модель имеет нормальную модель

Покажем это

Пусть теория К имеет модель с областью интерпретации и отношением E Это отношение в следствие теоремы является отношением эквивалентности Поэтому разбивает на классы эквивалентности образуя множество $|$ Рассмотрим интерпретацию теории К при помощи $|$ при этом элементы из $|$ обозначим [ ] класс эквивалентности

Тогда A которая в интерпретации с областью интерпретируется при помощи отношения в области $|$ проинтерпретируем при помощи некоторого отношении такого что э $\Leftrightarrow$ $\in$ Причем это определение корректно т к независимо от представителей выбора классов в следствие A $\vdash$ x y &x y & &x y $\rightarrow$ $\rightarrow$

Кроме того если в интерпретации с областью интерпретируется при помощи функции то в интерпретации с областью интерпретации интерпретируется при помощи функции $|$ Если

$\vdash$ x y &x y & &x y то применяя A x x x x $\rightarrow$

$\rightarrow$ x x y y

Т к B$\rightarrow$ A$\rightarrow$ B$\rightarrow$C $\rightarrow$ A$\rightarrow$C то

$\vdash$ x y x y $\rightarrow$ x x y y

Кроме того для предметной константы a из области соответствует [a] тогда вследствие определения интерпретации с областью $|$ получим что формула A выполняется на соответствующем наборе φ из тогда и только тогда когда A выполняется на соответствующем наборе $\varphi^{|}$ составленном из классов эквивалентности $|$

A φ$\in$ $\Leftrightarrow$A $\varphi^{|}\in$ $|$

Кроме того если $E^{|}$ это отношение интерпретирующее предикатный символ в области $|$ то из того что

$\in E^{|}$ следует $\in$E то есть

<u>Теорема.</u> Всякая непротиворечивая теория I порядка с равенством имеет конечную или счетную модель (продолжение леммы Гёделя о счетной модели).

Доказательство всякая непротиворечивая теория порядка К по лемме Гёделя имеет счетную модель Но вследствие вышесказанного она имеет и нормальную модель которая является сужением ее следовательно является конечной или счетной

<u>Предваренные нормальные формы.</u>

Предваренные нормальные формы представляют собой формулы вида

где

кванторы

A формула не содержащая кванторов

Всякую формулу теории порядка можно представить в ПНФ при помощи

<u>Теорема:</u> для произвольных формул C и D имеем. $\vdash$ $\forall$xC x $\rightarrow$ $\leftrightarrow\exists$y C y $\rightarrow$ где C x и не содержат y в качестве свободной переменной

$\vdash$ $\exists xC$ x $\to$ $\leftrightarrow \forall y$ C y $\to$ где C x и не содержат y в качестве свободной переменной

$\vdash$ $\to \forall xC$ x $\leftrightarrow \forall y$ $\to$C y где C x и не содержат y в качестве свободной переменной

$\vdash$ $\to \exists xC$ x $\leftrightarrow \exists y$ $\to$C y где C x и не содержат y в качестве свободной переменной

$\vdash$ $\neg\forall xA$ x $\leftrightarrow\exists x\neg A$ x

$\vdash$ $\neg\exists xA$ x $\leftrightarrow\forall x\neg A$ x

Доказательство

$\forall x$ C x $\to$ гипотеза

$\neg\exists y$ C y $\to$ гипотеза

$\neg\neg\forall y\neg$ C y $\to$ определение существования

$\forall y\neg$ C y $\to$ $\neg\neg B\to B$ MP

$\neg$ C x $\to$ A MP

C x $\&\neg$ $\neg$ $A\to B$ $\to A\&\neg B$ MP

C x $A\&B\to A$ MP

$\neg$ $A\&B\to B$ MP

$\forall x$ C x ПО

MP

$\&\neg$ $A\to$ $B\to$ $A\&B$ MP дважды

$\forall x$ C x $\to$ $\neg\exists y$ C y $\to$ $\vdash$ $\&\neg$ $\Rightarrow$ по теореме дедукции

$\vdash$ $\forall x$ C x $\to$ $\to\neg\exists y$ C y $\to$ $\to$ $\&\neg$ $\Rightarrow$ вследствие $\neg A\to B$ $\to\neg B\to A$

$A\to B$ $\to$ $B\to C$ $\to$ $A\to C$ $\Rightarrow\vdash$ $\forall xC$ x $\to$ $\to\neg$ $\&\neg$ $\to\exists y$ C y $\to$ $\Rightarrow$

$\forall xC$ x $\to$ $\to\exists y$ C y $\to$

$\vdash$ $\exists y$ C y $\to$ $\to$ $\forall xC$ x $\to$

$\exists y$ C y $\to$ гипотеза

$\forall xC$ x гипотеза

C $\to$ элемент при котором формула выполняется

C A MP

MP

$\exists y$ C y $\to$ $\forall xC$ x $\vdash$ $\Rightarrow\exists y$ C y $\to$ $\forall$ xC x $\vdash$ по теореме дедукции

применённой дважды имеем $\vdash$ $\exists y$ C y $\to$ $\to$ $\forall xC$ x $\to$

Аналогично

<u>Пример</u> $\forall x$ A x $\to\forall y$ A x y $\to\neg\forall$ A y Привести к ПНФ

$\forall x$ A x $\to\forall y$ A x y $\to\exists$ $\neg A$ y

$\forall x$ A x $\to\forall y\exists$ A x y $\to\neg A$ y

$\forall x\forall$ A x $\to\exists$ A x $\to\neg A$

$\forall x\forall$ $\exists$ A x $\to$ A x $\to\neg A$

2. Следуя Дедекинду рассмотрим формальную арифметику ФА при помощи теории порядка содержащей предметную константу а функциональный символ и предикатный символ При этом будем использовать обозначения

а

$x^{|}$

•

Тогда собственные аксиомы имеют вид

x x → x x →x x

x x →$x^{|}$ $x^{|}$

≠$x^{|}$

$x^{|}$ $x^{|}$→x x

x x

x $x^{|}$ x $x^{|}$

x •

x •$x^{|}$ x •$x^{|}$ x

A → ∀x A x →A $x^{|}$ →∀xA x

Для произвольной формулы A x в теории

Из схемы аксиомы следует *правило индукции*

A ∀xA x →A $x^{|}$ ⊢ ∀xA x

<u>Лемма.</u> Для произвольных термов t, r, s следствие формулы является теоремами для теории S.

→ →

→ | |

≠ |

| |→

| |

•

• | •

Доказательство т к применяя ПО к аксиомам и A подставляя вместо переменных соответствующие термы при помощи MP получим данное утверждение Например рассмотрим аксиому

x x x

∀x x x x ПО

∀x x x x → x x A

x x MP

∀x x x ПО и аналогично получаем

<u>Теорема.</u> Для произвольных термов t, r, s следствие формулы является теоремами теории S.

1. t=t

2. $t=r\to r=t$
3. $t=r\to(r=s\to t=s)$
4. $r=t\to(s=t\to r=s)$
5. $t=r\to(t+s=r+s)$
6. $t=0+t$
7. $t^{/}+r=(t+r)^{/}$
8. $t+r=r+t$
9. $t=r\to(s+t=s+r)$
10. $(t+r)+s=t+(r+s)$
11. $t=r\to(t\bullet s=r\bullet s)$
12. $0=0\bullet t$
13. $t^{/}\bullet r=t\bullet r+r$
14. $t\bullet r=r\bullet t$
15. $t=r\to(s\bullet t=s\bullet r)$

Доказательство

1. $\to$ $\to$

2. $\to$ $\to$

1.

$\to$ вследствие тавтолгии $B\to A\to B\to C \to A\to C$ MP

$\vdash$ *2.*

3. $\to$ $\to$

$\to$ *1.*

$\to$ $\to$ тавтология $A\to B\to B\to C\to A\to C$

$\vdash$ *3.*

4. $\to$ $\to$ *3*

$\to$ $\to$ правило замены посылок ПЗП т е $A\to B\to C \to B\to A\to C$ MP

$\to$ *2*

$\to$ $\to$ тавтология

$\to$ $\to$ ПЗП

$\vdash$ *4.*

5. Рассмотрим формулу А $\to$

гипотеза

правило силлогизма ПС

4

по теореме дедукции $\overline{}$ x y$\to$ x y

А

x y$\to$ x y гипотеза

x y гипотеза

x y MP

x | y | MP

x | x |

x | y | ПС

y | y |

x | y | *4*

x | y | ⇒по теореме дедукции x y→ x | y |

⊢ A →A | ⇒ ПО ⊢ ∀ A → A |

по правилу индукции ⊢ ∀ A Тогда применяя A заменяя на и MP и y на и x на получим утверждение *5*

6. ⊢

A x x x

⊢ ∀x A x

→ теорема*2*

⊢ A

⊢ A → |

гипотеза

x| x | MP

x| x |

x| x| *4*

x x ⊢ | ⊢ A → | по теореме дедукции и ПО ⇒

⊢ ∀x A → |

ПИ ⊢ ∀x A по A ⇒ ⊢ ∀x A →A по MP ⇒⊢ A

При помощи рассмотренной теоремы можно получить вследствие теоремы о теории порядка с равенством что является теорией порядка с равенством

Если рассмотрим интерпретацию этой теории при помощи области интерпретации состоящей из множества неотрицательных целых чисел

a

x|

•

A

Принимая данную интерпретацию в качестве модели теории получаем нормальную модель которая называется *стандартной* моделью теории Все остальные неизоморфные этой модели нестандартными

В г Гёдель доказал в любой теории формализующей формальную арифметику невозможно доказать в рамках этой теории непротиворечивость формальной арифметики т е существует утверждение о непротиворечивости формальной арифметики которое ни доказать ни опровергнуть нельзя Теорема Гёделя о неполноте

3. Интерпретация

Все формулы теорий порядка имеют смысл только в некоторой интерпретации

Под *интерпретацией* понимается непустое множество называемое *областью интерпретации* и соответствие сопоставляющее предикатному символу местное отношение какое либо подмножество прямого произведения множеств функциональному символу местные операции предметная константа понимается как элемент множества при этом предметная переменная считается пробегающей всю область

Например рассмотрим интерпретацию формул при помощи A ≤ тогда Формула A **x_1 x_2** интерпретируется как бинарное отношение так как имеет две свободные переменные ≤ на множестве натуральные числа Формула ∀x A x x интерпретируется как свойство так как имеет одну свободную переменную натурального числа быть наименьшим ∃x ∀x A x x интерпретируется как высказывание так как не имеет свободных переменных утверждающее существование наименьшего натурального числа

Рассмотрим понятие выполнимости формулы на некотором наборе в данной интерпретации Для этого под φ A будем понимать интерпретацию формулы A посредством подстановки вместо всех свободных переменных соответствующих компонент из набора φ и выполнения предписанных интерпретацией действий

Рассмотрим определение выполнимости формулы индуктивно следуя пунктам определения формулы

Формула выполняется на φ тогда и только тогда когда φ истино то есть φ φ φ ∈ где есть отношение интерпретирующее предикатный символ

Формула ¬A выполняется на φ тогда и только тогда когда A не выполняется на φ

Формула A→B выполняется на φ тогда и только тогда когда A не выполняется на φ или B выполняется на φ

Формула ∀x A выполняется на φ тогда и только тогда когда формула A выполняется на любом наборе ψ который отличается от φ не более чем только своей ой компонентой то есть ψ x φ x при ≠

Таким образом формула A является выполнимой на последовательности φ если при подстановке в формулу A вместо всех её свободных переменных соответствующих компонент набора φ и интерпретации всех символов получается истинное высказывание

Формула называется *истинной в данной интерпретации* если она выполняется на любом наборе из данной интерпретации и *ложной,* если она не выполняется на любом наборе из данной интерпретации

Формула является *логически общезначимой* если она является истинной в любой интерпретации

Пример Пусть интерпретация имеет в качестве области интерпретации множество неотрицательных целых чисел а предикатный символ интерпретируется при помощи отношения ≤ ∀x Тогда

Формула A x x является выполнимой на любом наборе первая компонента которого совпадает с Поэтому мы можем назвать эту формулу выполнимой для

Формула ∃x ∀x A x x интерпретируется как высказывание которое является истинным так как утверждает существование наименьшего натурального числа

Рассмотрим свойства выполнимости и истинности формул

¬A истина в данной интерпретации тогда и только тогда когда A ложна в данной интерпретации ¬A ложна в данной интерпретации тогда и только тогда когда A истина в данной интерпретации

Никакая формула не может быть одновременно истинной и ложной в данной интерпретации

Если A и A→B истины то и B истина

A→B ложна тогда и только тогда когда A истина B ложна

A&B выполнена на φ в данной интерпретации тогда и только тогда когда A выполнена на φ и B выполнена на φ

A∨B выполнена на φ в данной интерпретации тогда и только тогда когда A выполнена на φ или B выполнена на φ

A↔B выполнена на φ в данной интерпретации тогда и только тогда когда либо A выполнена на φ и B выполнена на φ либо A не выполнено на φ и B не выполнена на φ

∃x A выполняется на φ тогда и только тогда когда существует набор ψ который отличается от φ не более чем своей ой компонентой на котором выполнена формула A

A истина тогда и только тогда когда ∀x A истина в данной интерпретации

Навешивание кванторов со всеми свободными переменными в порядке их убывания называется *замыканием формулы*

Пример ∀x ∀x A x x →∀x A x x x является замыканием формулы A x x →∀x A x x x

Формула называется *замкнутой* если она не содержит свободных переменных

Всякий частный случай тавтологии т е формула которая получается из тавтологии посредством замены всех вхождений одних и тех же пропозициональных букв на одну и ту же формулу теории K является логически общезначимой формулой

Если наборы ψ и φ совпадают компонентами и свободные переменные формулы A находятся среди то формула A выполняется на φ тогда и только тогда когда она выполняется на ψ

Отношение интерпретирующее данную формулу называется отношением соответствующим данной формуле

Пример ∃ x A x x &A x x в интерпретации где в качестве берется множество всех людей A x y интерпретируется при помощи отношения быть братом A быть отцом соответствует отношение родства связывающее дядю и племянника

Формула $\neg A$ x a $\&\forall$x $\exists$x A x x x $\to$ A x a $\vee$ A x x в интерпретации с A x y x y a x y x • y соответствует свойству числа быть простым

Любая замкнутая формула либо истина либо ложна в данной интерпретации

Если терм является свободным для x в формуле A то формула A получающаяся подстановкой вместо всех свободных вхождений x терма выполнена на всяком наборе на котором выполняется $\forall$x A т е

$\forall$x A$\to$ A является логически общезначимой формулой

Если формула A не имеет свободных вхождений переменной x то формула $\forall$x A$\to$B $\to$ A$\to\forall$x B является логически общезначимой

Докажем свойство Предположив противное будем иметь что в некоторой интерпретации на некотором наборе φ эта формула не выполняется Тогда $\forall$x A$\to$B выполнена на φ а

A$\to\forall$x B не выполнена на φ Поэтому из имеем что A выполнена на φ а $\forall$x B не выполнена на φ то есть на некоторой последовательности ψ которая отличается от φ не более чем только своей ой компонентой формула B не выполнена A так как в силу свойства формула A выполнена на ψ то формула A$\to$B является не выполненной на ψ что противоречит утверждению

Интерпретации в которых все формулы некоторого множества формул Г являются истинными называется *моделью* данного множества Г

Если в некоторой интерпретации истинны все аксиомы некоторой теории то она называется *моделью данной теории*

Формула B называется *логическим следствием* формулы A если в любой интерпретации B выполняется на любом наборе где выполняется A Тогда A$\to$B является логически общезначимой

A B *логически эквивалентны* если B является логическим следствием A и наоборот Тогда A$\leftrightarrow$B логически общезначимая

Покажем что формула $\forall$x $\exists$x A x x $\to\exists$x $\forall$x A x x не является логически общезначимой

Рассмотрим интерпретацию с областью и A x y бинарное отношение < Тогда посылка будет истиной а заключение ложной Таким образом формула не является логически общезначимой

1. Являются ли следующие выражения формулами или термами теории порядка

$\forall x \quad A \quad x \; x \quad \to a$

$\forall x \; \exists x \quad A \quad f \quad x \quad f \quad x \; x \quad \to A \quad A \quad x \; x$

$\forall a \quad A \quad f \quad x \quad a \quad \to A \quad x$

$\forall x \quad A \; f \quad x \quad \to f \quad x$

$\forall x \quad A \quad f \quad x \quad f \quad x \; x \qquad A \quad x \quad \to \; A \quad x \; x \quad \vee$

$\vee A \quad x$

$\forall x \quad A \quad x \; f \quad x \; x \quad \to \; \exists x \quad A \quad x \; x \qquad A \quad f \quad x \; x$

$\forall x \quad A \quad x \; x \quad \to \exists x \; A \quad x \; x \quad \leftrightarrow \; A \quad x \; x \quad \to$

$\to \forall x \; A \quad x$

2. Является ли терм

$f \quad x \; f \quad x$

свободным для переменных в этой формуле

3. Свободен ли терм

$f \quad x \; f \quad x$

для переменных в формулах задания №

4. Проинтерпретируйте следующие формулы

$A \quad f \quad x \; x \quad a$

$A \quad x \; x \quad \to A \quad x \; x$

$\forall x \; \forall x \; \forall x \quad A \quad x \; x \quad \to A \quad x \; x \quad \to A \quad x \; x$

при помощи интерпретаций

$a \; D = N \; A \quad x \; y \; = x \geq y \; f \quad x \; y \; = x \bullet y$

$a \; =$

б) D- множество всех людей

$$A \quad x\ y \quad Х любит У$$

$$f \quad x\ y \quad y$$

$$a = некто$$

в) D= множество всех множеств целых чисел

$$A \quad x\ y \quad x \supset y \; f \quad x\ y \quad x \cup y \; a - пустое$$

5. Выразите на языке теории порядка следующие утверждения

Все рыбы кроме акул добры к детям

Либо всякий весомый человек весьма общителен либо некий скептик замкнут

Не все птицы могут летать

Либо каждый любит кого нибудь и ни один не любит всех либо некто любит всех и кто то не любит никого

Если кто нибудь может сделать это то и Джон может

Всякий в ком есть упорство может изучить логику

Некоторые ходят в кино только тогда когда там показывают кинокомедии

Если всякий разумный философ циник и только женщины являются разумными философами то тогда если существует разумные философы то некоторые женщины циники

4. Аксиомами логическими теории К для любых формул А В С являются формулы

(A_1): $A\to(B\to A)$

(A_2): $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(A_3): $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$

(A_4): Если t является свободным термом для x_i в формуле $A(x_i)$, то

$\forall x_i A(x_i)\to A(t)$

$(\forall x_i\, A(x_i)\to A(x_i))$

(A_5): Если формула А не имеет свободных вхождений переменной x_i, то

$\forall x_i\,(A\to B)\to(A\to\forall x_i B)$.

<u>Правила вывода</u>

MP A A→B├ B

ПО правило обобщения A├ ∀ A

Если в A избавиться от ограничения то возможна такая аксиома

∀x ¬∀x A x x →¬∀x A x x где терм x не является свободным для x в формуле A x ¬∀x A x x

Эта формула не является логически общезначимой т к в любой интерпретации в которой состоит хотя бы из двух элементов и A интерпретируется как отношение тождества посылка истина а заключение ложно

Если убрать ограничение в A то возможна например формула

∀x A x →A x → A x →∀x A x

Если ее проинтерпретировать при помощи имеющего элемента и A при помощи свойства которым обладают не все элементы из тогда посылка будет истинной а заключение будет ложным Формула не является логически общезначимой

Заметим что в силу свойств и правило вывода сохраняет свойство быть истинной формулой

Кроме логических аксиом в теориях порядка рассматриваются собственные аксиомы

Теория порядка без собственных аксиом называется *исчислением предикатов*

<u>Примеры теорий порядка</u>

Теория P имеет предикатный символ A Собственными аксиомами теории являются

Частично упорядоченная структура

∀x ¬A x x

∀x ∀x ∀x A x x → A x x →A x x транзитивность

Теория групп.

Теория P имеет предикатный символ A функциональный символ и одну предметную константу a Собственными аксиомами теории являются

∀x ∀x ∀x A x x x x x x ассоциативность

∀x A x a x правый нейтральный элемент

∀x ∃x A x x a правый симметрический элемент

∀x A x x рефлексивность равенства

$\forall x \; \forall x \quad A \quad x \quad x \; \rightarrow A \quad x \quad x$ симметричность

$\forall x \; \forall x \; \forall x \quad A \quad x \quad x \; \rightarrow A \quad x \quad x \; \rightarrow A \quad x \quad x$ транзитивность

$\forall x \; \forall x \; \forall x \quad A \quad x \quad x \; \rightarrow A \qquad x \quad x \qquad x \quad x \; \& A \qquad x \quad x \qquad x \quad x$

характеризует A как равенство

характеризует свойство подстановочности равенства

Любая модель данной теории называется *группой*

5. *<u>Теорема 1</u> (о частном случае тавтологии) Всякий частный случай тавтологии является теоремой теории I порядка, причем существует вывод с использованием только 1-3 аксиом и МР.*

Доказательство Пусть А является частным случаем некоторой тавтологии Т тогда по теореме о полноте Т является теоремой то есть существует вывод формулы Т в теории из пустого множества при помощи А А и МР Преобразуем данный вывод так

Каждую букву этого вывода которая встречается в Т заменим на ту же формулу на которую мы ее заменили при получении формулы А

Если в выводе встречается буква которой нет в Т то ее заменим на произвольную одну и ту же формулу теории К Этот вывод является выводом из пустого множества формулы А в теории К

<u>Пример Если</u> Т $\neg A \to A \to B$ и

А заменяем на $\forall x\ \neg B\ x$ В на $\forall x\ \exists\ x\ A\ x\ x$ то

$\vdash_K \exists\ B\ x \to \forall x\ \neg B\ x \to \forall x\ \exists\ A\ x\ x$

<u>Теорема 2.</u> Исчисление предикатов непротиворечиво.

Доказательство Рассмотрим преобразование А формулы А в исчислении предикатов которое убирает все кванторы термы и скобки из данной формулы А

Например А А x x x x $\to \forall x$ А x &А x x

А А $\to$А &А

Тогда $\neg A$ $\neg$ A $A \to B$ $A \to$ B

применённое к аксиомам А А приводит к тавтологии что очевидно

$\forall x$ А x $\to$A B$\to$B тавтология

$\forall x$ $A \to B \to A \to \forall x B$ C$\to$ $\to$ C$\to$ тавтология

Кроме того если А при помощи даст тавтологию то и $\forall$ А тавтология и Если А тавтологии и $A \to B$ то B тавтологии

Таким образом если исчисления предикатов не является непротиворечивым т е для некоторой формулы В имеем $\vdash$ В и $\vdash$ $\neg B$ то тогда в следствие того что от аксиомы оставляет тавтологию правило обобщения и МР при помощи сохраняет тавтологию то тогда B тавтология $\neg B$ тавтология то есть $\neg$ B является тавтологией что невозможно Таким образом исчисление предикатов непротиворечиво

6. Теорема дедукции

Теорема дедукции в общем виде *Г, A* $\vdash$ B$\Rightarrow$Г$\vdash$ A$\to$B

в исчислении предикатов не верна Например применяя к выводимости

A $\vdash_K \forall$x A x получим $\vdash$ A x $\to \forall$x A x Однако если данную формулу проинтерпретировать при помощи некоторого множества содержащего не менее одного элемента a A одноместным отношением которым обладает только один элемент из то формула не является истинной в данной интерпретации следовательно не является логически общезначимой

Поэтому имеем следующую формулировку

<u>*Теорема 3*</u> *Если из множества формул Г и из формулы A выводима в исчислении предикатов формула B и существует вывод, в котором ни при каком применении правила обобщения не связывается квантором никакая свободная переменная из формулы A, тогда из Г* $\vdash$ *A*$\to$*B.*

Доказательство Пусть B B $B_к$ B является указанным в условии теоремы выводом Г A$\vdash$ B тогда для $\forall$ является либо

аксиомой либо

гипотезой то есть либо $\in$Г либо A либо

является непосредственным следствием предыдущих либо

формул и $\to$ по правилу MP либо

формулы по правилу ПО $\forall$ При этом не является свободной переменной формулы A

Докажем утверждение теоремы индукцией по

B аксиома $\Rightarrow$ Г$\vdash$ B $\to$ A$\to$B $\Rightarrow$ MP Г$\vdash$ A$\to$B

гипотеза B $\in$Г$\Rightarrow$Г$\vdash$ B $\Rightarrow$Г$\vdash$ A$\to$B

B A$\Rightarrow$Г$\vdash$ A$\to$B в следствие теоремы

Предположим что утверждение справедливо для всех Докажем для

Если Аксиома или

$\in$Г $\Rightarrow$ аналогично с заменой на $\Rightarrow$Г$\vdash$ A$\to$

A

Если же является непосредственным следствием по

Г$\vdash$ A$\to$B &Г$\vdash$ A$\to$ B $\to$ то т к к

по A Г$\vdash$ A$\to$ B $\to$ $\to$ A$\to$B $\to$ A $\to$ $\Rightarrow$ MP Г$\vdash$ A$\to$

$\Rightarrow$Г$\vdash$ A$\to$B $\Rightarrow$ ПО Г$\vdash$ $\forall x_к$ A$\to$B

по A Г$\vdash$ $\forall x_к$ A$\to$B $\to$ A$\to\forall x_к$ B $\Rightarrow$ MP Г$\vdash$ A$\to\forall x_к$B

<u>*Следствие из теоремы дедукции.*</u> *Если формула A замкнутая и Г, A*$\vdash$ *B, то Г* $\vdash$ *A*$\to$*B.*

Пример Докажите что $\vdash_K \forall x\ \forall x\ A \to \forall x\ \forall x\ A$

$\forall x\ \forall x\ A$ гипотеза

$\forall x\ \forall x\ A \to \forall x\ A\ A$

$\forall x\ A$ МР

$\forall x\ A \to A\ A$

A МР

$\forall x\ A$ ПО

$\forall x\ \forall x\ A$ ПО

По имеем $\forall x\ \forall x\ A \vdash \forall x\ \forall x\ A$ поэтому по теореме дедукции

$\vdash \forall x\ \forall x\ A \to \forall x\ \forall x\ A$

7. <u>*Теорема 4.*</u> *Всякая теорема исчисления предикатов является логически общезначимой.*

Доказательство т к в силу свойства истинности формул частный случай тавтологии является логически общезначимой формулой то аксиомы из А А А являются логически общезначимыми Вследствие свойства аксиомы из А логически общезначимы по свойству А логически общезначима по свойству правило МР сохраняет свойство формул быть логически общезначимыми ПО сохраняет истинность в силу свойства Следовательно теорема является логически общезначимой

Формула называется *подобной* если получена из нее при помощи подстановки вместо всех свободных вхождений переменной переменной не имеет свободных вхождений переменной и является свободным термом для в

Тогда терм является свободным для в и не имеет свободных вхождений переменой т е формула подобна Поэтому подобие является симметричным

Две формулы и подобны если свободное вхождение переменной в имеются в тех же местах что и свободное вхождение в

<u>*Лемма 1.*</u> *Если формулы $A(x_i)$ и $A(x_j)$ подобны, то* $\vdash_K \forall x_i A(x_i) \leftrightarrow \forall x_j A(x_j)$.

Доказательство докажем что $\vdash$ $\forall$ $\to$ $\forall$

$\forall$ $\to$ А

$\forall$ $\forall$ $\to$ ПО

$\forall$ $\forall$ $\to$ $\to$ $\forall$ $\to\forall$ А

$\forall$ $\to\forall$ МР

По имеем $\vdash$ $\forall$ $\to$ $\forall$

Аналогично $\vdash$ $\forall$ $\to\forall$ Тогда по теореме о частном случае тавтологии по тавтологии $A\to B\to A\&B$ и правилу МР применённому дважды

получаем $\vdash_K\forall$ $\leftrightarrow$ $\forall$

<u>*Лемма 2.*</u>*Если для некоторой замкнутой формулы А теории I порядка К не выводится из пустого множества* $\neg A$*, то теории* $K^{/}=K\cup\{A\}$*, где А добавляется в качестве аксиомы, непротиворечивы.*

Доказательство От противного Пусть для некоторой формулы В имеем $\vdash_K B$ и $\vdash_K \neg B \Rightarrow$ в следствие тавтологии $\neg A\to A\to B$ теоремы о тавтологии $\Rightarrow$ $\vdash_K \neg B\to B\to\neg A$ где $\neg A$ любая формула $\Rightarrow$ МРдважды $\vdash_K \neg A \Rightarrow A \vdash_K \neg A \Rightarrow$ теорема дедукции $\vdash_K A\to\neg A \Rightarrow$ по теореме $\vdash_K A\to\neg A\to\neg A$ $\Rightarrow$ МР $\vdash_K \neg A$ что противоречит условию следовательно $K^{|}$ непротиворечива

<u>*Замечание.*</u> *Если для некоторой замкнутой формулы А из теории К формула А не является теоремой, то теория* $K^{/}\cup\{\neg A\}$ *- непротиворечива.*

Доказательство аналогично лемме

<u>Лемма Гёделя (о нумерации).</u> Множество всех выражений исчисления предикатов счётно, следовательно, счётно и множество всех термов и формул.

Доказательство каждому символу исчисления поставим в соответствие некоторое нечетное число следующим образом

$\neg$ $\rightarrow$

$\forall$

Тогда каждому выражению сопоставляется четное число · · · · где ое простое число

Тогда разным выражениям соответствуют разные числа следовательно все выражения можно занумеровать И все аксиомы и теоремы тоже однако по числу не всегда можно установить является ли данная формула теоремой т к не во всякой теории для всех формул можно определить теорема она или нет то есть не всякая теория является разрешимой

6. Установите истинность высказываний

$\exists y \forall z \exists x \ \ x+y=z \ D=N$

$\exists x \forall y \exists z \ \ x+y=z \ D=N$

$\exists x \forall y \exists z \ \ x+yz= \quad D=N$

$\forall z \exists y \forall x \ \ НОД \ x \ y \ =z \ D=Z$

$\exists x \forall y \exists z \ \ x+y+z=x\cdot y\cdot z \ D=N$

$\forall x \exists y \forall z \ \ x+y \ \cdot z= \quad D=Z$

$\forall x \exists y \forall z \ \ x+y=xz \ D=N$

$\forall x \exists y \forall z \ \ x+z=x\cdot y \ D=N$

$\exists x \forall y \ \ x>y \ \rightarrow \ x>y \quad D=N$

$\exists y \forall x \ \ x<y \ \rightarrow \ x \ >y \ \ D=Z$

$\exists x \exists y \ \ x>y \qquad x \ <y \ \ D=Q$

7. Напишите формулы которым в интерпретации с

$D=N$

символ

$A \quad = \quad f \quad =+ \quad f \quad =\times$

соответствует отношение

быть нулем

быть

быть

быть четным

быть нечетным

быть простым

: „ > „

быть простыми числами близнецами

быть НОК

отношение делит

быть НОД

8. Докажите что следующие формулы не являются логически общезначимыми

$\forall x \ A \ \ x \ \ \vee A \ \ x \ \ \rightarrow \forall x \ A \ \ x \ \ \vee \forall x \ A \ \ x$

$\forall x \ A \ \ x \ \ \rightarrow \forall x \ A \ \ x \ \ \rightarrow \forall x \ \ A \ \ x \ \ \rightarrow A \ \ x$

9. Докажите логическую общезначимость формул

$A\ t\ \to \exists x_i A\ x_i$

Если $\boldsymbol{t}$ свойство терм для

x_i

в

$A\ x_i$

$\forall x_i A \to \exists x_i A$

$\forall x_i \forall x_j A \leftrightarrow \forall x_j \forall x_i A$

$\forall x_i A \leftrightarrow \neg \exists x_i \neg A$

$\forall x_i\ A \to B\ \to\ \forall x_i A \to \forall x_i B$

$\forall x_i A \quad \forall x_i B \leftrightarrow \forall x_i A \quad B$

$\forall x_i A \vee \forall x_i B \to \forall x_i A \vee B$

$\exists x_i \exists x_j A \leftrightarrow \exists x_j \exists x_i A$

$\exists x_i \forall x_j A \to \forall x_j \exists x_i A$

10. Докажите построив вывод

$\mapsto \forall x\ A \to B\ \to\ \forall x A \to \forall x B$

$\mapsto \forall x\ A \to B\ \to\ \exists x A \to \exists x B$

$\mapsto \forall x\ A \quad B\ \leftrightarrow \forall x A \quad \forall x B$

$\mapsto \forall x\ \forall x \quad \forall x_n A \to A$

11. Докажите что если формы

$A\ x_i \quad A\ x_j$

подобны то

$\mapsto \exists x_i A\ x_i\ \leftrightarrow \exists x_j A\ x_j$

$\mapsto A \leftrightarrow \forall x A$

если $\boldsymbol{x}$ не является свободной переменной $\boldsymbol{A}$**.**

$\mapsto \exists x A \to A$

$\mapsto \forall x\ B \to A\ \leftrightarrow\ \exists x B \to A$

где $\boldsymbol{x}$ связная в $\boldsymbol{A}$**.**

$\mapsto A\ t\ \to \exists x A\ x$

Если $\boldsymbol{t}$ свободная для $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{A}$**.**

$$\mapsto \forall x \; A \leftrightarrow B \;\; \to \;\; \forall x A \leftrightarrow \forall x B$$

$$\mapsto \exists x \;\; A \;\; x \;\; \to B \;\; x \quad \to \;\; \forall x A \;\; x \;\; \to \exists x B \;\; x$$

$$\forall x \;\; A \to B \;\; \leftrightarrow \;\; A \to \forall x B$$

8. Теория   порядка К называется *полной,* если для любой замкнутой формулы А в этой теории либо А либо ¬А является теоремой

Теория К$^{|}$ называется *расширением* теории К если всякая теорема теории К является теоремой теории К$^{|}$

Чтобы доказать что К$^{|}$ является расширением теории К достаточно показать что в К$^{|}$ выводятся все аксиомы теории К

<u>Лемма 4 (Линденбаума).</u> Всякая непротиворечивая теория I порядка имеет непротиворечивое полное расширение.

Доказательство Пусть теория К   непротиворечивая теория   порядка и допустим в следствие леммы   что В   В $В_к$ пересчет всех замкнутых формул теории К

Построим теории К   К   К   следующим образом

К   К

К $\left\{\begin{array}{l}\text{если } \vdash_К \neg \\ \cup \quad \text{если } \nvdash_К \neg\end{array}\right.$

Рассмотрим теорию   которая будет являться объединением всех теорий
Заметим что   является расширением теории К

Покажем что теория   является непротиворечивой Заметим что вывод любого противоречия в теории   предполагает конечное число аксиом то есть он будет являться и выводом этого противоречия в некоторой теории   Таким образом для непротиворечивости теории   достаточно показать что все теории К непротиворечивы Докажем это индукцией по

справедливо по условию К   К

Пусть для   будет верно то есть   непротиворечива

Покажем справедливость для   то есть непротиворечивость теории

Для этого рассмотрим принцип построения наших теорий

Если $\vdash_К \neg$ $\Rightarrow$ непротиворечива по индуктивному предположению

Если $\nvdash_К \neg$ $\Rightarrow$ $\cup\{\quad\}$ непротиворечива вследствие леммы

является непротиворечивой для любого   Таким образом теория   не может быть противоречивой

Покажем что   является полной теорией При этом для любой замкнутой формулы А имеем   А   тогда либо $\vdash_К \neg$ либо $\cup\{\quad\}\Rightarrow$ $\vdash_К$

Таким образом $\vdash$ $\neg$ или $\vdash$

Следовательно   непротиворечивое полное расширение теории   порядка К

9. <u>*Лемма Гёделя.*</u> *Всякая непротиворечивая теория I порядка имеет счетную модель.*

Доказательство Пусть К непротиворечивая теория порядка Рассмотрим теорию К которая получается из теории К добавлением счётного множества предметных констант Тогда

К является непротиворечивой т к вывод любого противоречия в теории К можно преобразовать в вывод противоречия в теории К заменив для этого вхождения константы на некоторую переменную Однако такой вывод в теории К невозможен т к по условию она непротиворечива

Рассмотрим пересчёт всех формул в теории К содержащих не более одной свободной переменной

Если формула не содержит свободные переменные то обозначим ее

Пусть последовательность предметных констант такова что отличается от всех предыдущих и не встречается в формулах

Пусть $\neg\forall$ $\to\neg$

Рассмотрим теории К $\cup$

K_∞ К $\cup$

Покажем что K_∞ является непротиворечивой теорией Заметим что в следствие использования конечного множества аксиом в выводе некоторого противоречия а поэтому возможность говорить о выводе этого противоречия в теории достаточно показать непротиворечивость теорий для любого натурального числа

Предположим противное и рассмотрим доказательство методом математической индукции по

в следствие условия К непротиворечива

K_τ непротиворечива

Докажем непротиворечивость K_τ

Если K_τ противоречива то для некоторой формулы В $\vdash_{K\tau} B$ $\vdash_{K\tau} \neg B$ тогда в следствие тавтологии $A\to \neg A\to B$ и теоремы о частном случае тавтологии по правилу МР получим что $\vdash_{K\tau}\neg\ {}_\tau$ Тогда ${}_\tau$ $\vdash_{K\tau}\neg\ {}_\tau\Rightarrow$по следствию из теоремы дедукции$\Rightarrow$ $\vdash_{K\tau}\ {}_\tau\to\neg\ {}_\tau\Rightarrow$в следствие тавтологии $A\to\neg A\to\neg A$ и теоремы о частном случае тавтологии $\Rightarrow$ МР $\vdash_{K\tau}\neg\ {}_\tau$

то есть$\vdash_{K\tau}\neg\neg\forall x_\tau\ {}_\tau\ x_\tau\to\neg\ {}_\tau\ {}_\tau$ $\Rightarrow$ в следствие тавтологий $\neg A\to\neg B\to A\&B$ $A\&B\to A$ $A\&B\to B$ $\neg\neg B\to B$ по теореме и МР применённому трижды $\Rightarrow$

$\vdash_{K\tau}\neg\forall x_\tau\ {}_\tau\ x_\tau$ и $\vdash_{K\tau}\ {}_\tau\ {}_\tau\Rightarrow$заменяя ${}_\tau$ на некоторую переменную х которая не встречается в этом выводе $\Rightarrow$ $\vdash_{K\tau}\ {}_\tau\ x$ Тогда по ПО

$\vdash_{K\tau}\forall x\ {}_\tau\ x\Rightarrow$однако в следствие того что ${}_\tau\ x$ подобна ${}_\tau\ x_\tau$ то по лемме имеем что $\vdash_{K\tau}\forall x\ {}_\tau\ x\to\forall x_\tau\ {}_\tau\ x_\tau$ по МР $\Rightarrow\vdash_{K\tau}\forall x_\tau\ {}_\tau\ x_\tau$

и противоречат индуктивному предположению

Таким образом наше предположение не верно т е K_τ непротиворечива В следствие замечания и теория K_∞ непротиворечива

По лемме существует непротиворечивое полное расширение теории K_∞ которое поэтому является и расширением теории К

В качестве модели теории К поэтому и теории К выберем интерпретацию с областью интерпретации состоящую из множества всех замкнутых термов теории К т е термов без переменных

Это множество счетно при этом предметная константа а интерпретирует сама себя функциональный символ будет интерпретироваться при помощи местной функции которая в качестве значений будет иметь замкнутый терм Если отношение интерпретирующее то упорядоченная

ка $\in$ тогда и только тогда когда $\vdash$

Для доказательства того что данная интерпретация является моделью теории К достаточно доказать утверждение

замкнутая формула А теории К истина в данной интерпретации тогда и только тогда когда $\vdash$

Т к если какая либо А является теоремой теории К то $\vdash_K \forall x$ замыкание но $\Rightarrow\vdash$ $\forall x A$ Поэтому по имеем что $\forall x A$ И а следовательно А И

Докажем индукцией по количеству связок и кванторов в замкнутой формуле А

Тогда А есть элементарная формула утверждение следует из интерпретации предикатного символа

Имея индуктивное предположение докажем утверждение для замкнутой формулы А

А $\neg$В

Для В утверждение справедливо по индуктивному предположению тогда если А$\Leftrightarrow$И то $\neg$В И В Л По индуктивному предположению

$\Rightarrow\nvdash$ В$\Rightarrow\vdash$ $\neg$В$\Leftrightarrow\vdash$ А

Если А Л то В И$\Rightarrow$ $\Rightarrow\vdash$ В$\Rightarrow$в следствие непротиворечивости $\Rightarrow$ $\nvdash$ $\neg$В$\Leftrightarrow\nvdash$ А

Таким образом доказано

А В$\rightarrow$С

Если А Л то В И С Л

По индуктивному предположению для В и С $\Rightarrow\vdash$ В $\nvdash$ С$\Rightarrow\vdash$ $\neg$С$\Rightarrow$ А$\rightarrow$ $\neg$В$\rightarrow\neg$ А$\rightarrow$В $\Rightarrow$ МР $\Rightarrow\vdash$ $\neg$ В$\rightarrow$С $\Rightarrow$ $\nvdash$ В$\rightarrow$С $\Leftrightarrow$ $\nvdash$ А

Если$\nvdash$ С то в следствие полноты $\Rightarrow\vdash$ $\neg$А т е $\vdash$ $\neg$ В$\rightarrow$С $\Rightarrow$ в следствие тавтологий $\neg$ А$\rightarrow$В $\rightarrow$А $\neg$ А$\rightarrow$В $\rightarrow\neg$В и теоремы о частном случае тавтоло гии по МР применённому дважды $\Rightarrow\vdash$ $\neg$В $\vdash$ $\neg$С$\Rightarrow\nvdash$ С$\Rightarrow$ В И С Л$\Rightarrow$

А В→С Л
А ∀x x то В x
А ∀
Если при этом В замкнуто то утверждение следует из индуктивного предположения для В так как замкнутая формула В И тогда и только тогда когда истинна ее замыкание и является теоремой тогда и только тогда когда теоремой является ее замыкание
Докажем в случае когда В имеет свободную переменную

Пусть А ∀ истина Докажем ├ А Предположим противное т е ⊬ А

Тогда в следствие полноты теории ├ ¬А т е ├ ¬ ∀

Имеем ├ $_к$ так как $_к$ аксиома в и следовательно она теорема

├ ¬∀ →¬ ⇒ ├ ¬

∀ истина ⇒ истина ⇒ ├ ¬ по индуктивному предположению что противоречит из за непротиворечивости

Таким образом ├ А
Докажем достаточное условие от противного

Пусть А ложна в данной интерпретации и ├ А

├ А⇔├ ∀ ⇒ MP А ├ ∀ → замкнутый терм ⇒

├ ⇒ по индуктивному предположению истина
Однако в следствие того что А ∀ ложна в данной интерпретации ложна Получили противоречие
Таким образом А истина

10. *Следствия.*

Теорема 4 (вторая теорема о полноте). Всякая логически общезначимая формула теории I порядка K является теоремой.

Доказательство пусть формула A логически общезначимая причем можем рассмотреть замкнутую формулу т к A истина тогда и только тогда когда истино ее замыкание и A теорема тогда и только тогда когда теоремой является ее замыкание

От противного Пусть $\nvdash_K A \Rightarrow$по замечанию из леммы $\Rightarrow$теория $K^{|}$ $K\cup\{\neg A\}$ непротиворечива Тогда по лемме Гёделя для $K^{|}$ существует счетная модель с областью Так ка $\neg A$ аксиома в $K^{|}$ то она истина в данной интерпретации Вследствие того что A логически общезначимая то она истина в данной интерпретации Получили противоречие

Таким образом вследствие теоремы о полноте и следствия из леммы Гёделя справедлива

Теорема 5 (Гёделя). Формула A исчисления предикатов K логически общезначна тогда и только тогда, когда является теоремой в исчислении предикатов.

Доказательство необходимость следует из теоремы достаточность следует из следствия

Теорема 6. Если формула A - истина в любой счетной модели теории I порядка K, то она является теоремой в этой теории K.

Доказательство аналогично теореме

Теорема 7. Если в каждой интерпретации формула B выполняется на любом наборе, на котором выполняются все формулы из множества формул Г теории K, то $Г \vdash_K B$.

Теорема 8. (лемма Сколема-Лёвенгейма) Если теория I порядка имеет модель, то она имеет и счетную модель.

Доказательство раз теория имеет модель то она непротиворечива следовательно по лемме Гёделя имеет счетную модель

Теорема Геделя о неполноте

Элементы теории алгоритмов.

1. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества.
2. Машина Тьюринга.
3. Рекурсивные функции.

Интуитивно под *алгоритмом* понимается точная система инструкций определяющая дискретный детерминированный процесс приводящий через конечное число тактов к результату если он существует и в противном случае либо работает вечно либо заходит в тупик

Поэтому рассмотрим числовую функцию определенную на множестве и принимающую те же значения Назовем ее *вычислимой* если существует алгоритм который для любого значения аргумента из области определения функции вычисляет ее значение или работает вечно если для аргументов функция не определена

Если рассмотрим подмножество $\subset$ · · · то М *разрешимо* если существует алгоритм который для любого x определяет $x \in M$ или $x \notin M$ При этом имеется возможность рассмотреть характеристическую функцию

$$X_M \; x \; \begin{cases} x \notin M \\ x \in M \end{cases}$$

Множество М является разрешимым множеством тогда и только тогда когда его функция X_M является вычислимой функцией

Если $M \subset$ то оно называется перечислимым если М $\varnothing$ или является областью значений некоторой вычислимой функции т е состоит из значений вычислимой функции

Пример Множество М составленное из кубов натуральных чисел является перечислимым так как может быть получено при помощи алгоритма взятие последовательных натуральных чисел и возведение их в куб то есть задано при помощи вычислимой функции

Кроме того оно является разрешимым так как достаточно всякое натуральное число разложить на множители и посмотреть является ли оно кубом натурального числа

Любое перечислимое множество является разрешимым

Однако обратное утверждение не верно то есть можно построить разрешимое множество которое не является перечислимым

<u>Лемма.</u> Если M, L - перечислимы, то $M \cup L$, $M \cap L$ - перечислимые.

Доказательство существуют вычислимые функции и порожденные М и Тогда множество $M \cup$ может породить одновременное включение алгоритмов вычисляющих и для последовательности значений

$M \cap$ получим алгоритм

для $M \cap$

<u>Теорема 1.</u> Множество М разрешимо тогда и только тогда, когда М $\overline{\text{и}}$ М - перечислимы.

Доказательство $\Rightarrow$ X_M является вычислимой тогда эта формула порождает множества М и $\overline{M}$

$\Leftarrow$ M≠∅ ∃a∈M⇒X_M x $\begin{cases} a & x \notin M \\ x & x \in M \end{cases}$

$\notin \Rightarrow$ $\begin{cases} b & x \in M \quad b \in \overline{M} \\ x & x \notin M \quad x \in M \end{cases}$

$\in$

$\in$ $\Rightarrow$ M разрешимо

Чтобы показать необратимость утверждения всякое разрешимое множество является перечислимым достаточно привести пример перечислимого множества дополнение которого не будет перечислимым Тогда по теореме оно будет неразрешимо

Заметим что можно перенумеровать все пары натуральных чисел диагональ ным методом

При этом пара будет иметь номер

$\rightarrow$

<u>Теорема 2.</u> Существует перечислимое множество U, которое неразрешимо.

Доказательство рассмотрим эффективные перечисления всех перечислимых множеств M M $M_к$ т е такое перечисление что по каждому к можно однозначно восстановить $M_к$ Такое перечисление возможно после уточнения понятия алгоритма Тогда рассмотрим алгоритм для образования множества который на шаге с номером C проверит ый элемент множества M на случай совпадения его с Если он совпадает то отправляется в Таким образом

$\in \Leftrightarrow \in$

С другой стороны если x∉ т е x∈ x∉

Поэтому с одной стороны перечислимо с другой стороны не может совпадать ни с одним из перечислимых множеств следовательно само не перечислимо

Последнее утверждение фактически включает в себя в неявном виде теорему Гёделя о неполноте формальной арифметики

Теорема теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики

Любая непротиворечивая формальная теория формализующая арифметику натуральных чисел не является абсолютно полной

Это означает что какая бы система аксиом для арифметики не была бы выбрана всегда найдётся такое высказывание о натуральных числах выразимое на языке этой формальной теории которое в данной теории не может быть ни доказано ни опровергнуто

2. Под *машиной Тьюринга (МТ)* понимают конечное множество команд которое составляется из двух алфавитов внешнего А и внутреннего При этом алфавитом А заполняется потенциальная бесконечная лента разбитая на клетки т е в данный дискретный момент времени имеющая конечное число клеток но в каждый следующий момент может расширяться приписать клетку как слева так и справа При этом пустая клетка считается заполненной а

А алфавит характеризует внутреннее состояние машины в котором она находится в некоторый дискретный момент времени обозревая при помощи читающей головки некоторую конкретную ячейку При этом состояние будем считать начальным заключительным состоянием

Команды МТ имеют вида

которая указывает что машина находится в состоянии при помощи читающей головки воспринимает ячейку с символом переходит в состояние заменяет на и продолжает обозревать ту же ячейку

которая указывает которая указывает что машина находится в состоянии при помощи читающей головки воспринимает ячейку с символом переходит в состояние заменяет на сдвигаясь на одну ячейку влево

которая указывает что машина находится в состоянии при помощи читающей головки воспринимает ячейку с символом переходит в состояние заменяет на сдвигаясь на одну ячейку вправо

При этом слово называется конфигурацией которая означает что в данный дискретный момент времени находясь в состоянии читающая головка воспринимает символ слова

При этом конфигурация называется начальной если читающая головка обозревает последний непустой символ слева направо находясь в состоянии заключительной если читающая головка обозревает последний непустой символ слева направо находясь в состоянии

Например рассмотрим МТ состоящую из множества команд

Т

Посмотрим как работает машина Тьюринга преобразуя слово т е имеем два алфавита А

Таким образом получаем в результате работы машины последовательность конфигураций $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

Рассмотрим МТ с внешним алфавитом А и внутренним

Пусть МТ имеет команды

Посмотрим в какое слово преобразует машина слово находясь в стандартной начальной конфигурации

$\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$

$\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$

$\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$ $\to$

$\to$ $\to$ $\to$ $\to$

Говорят что данная МТ реализует операцию сложения при этом она вычисляет функцию сложения т к из начальной конфигурации воспринимающей аргументы данной функции переходит в заключительную конфигурацию обозревающее значение данной функции

Говорят что тогда функция сложения вычислима по Тьюрингу

Тезис Тьюринга гласит

Числовая функция вычислима тогда и только тогда когда существует МТ вычисляющая ее

Тезис дает точное определение алгоритма

3. Рекурсивные функции

x x функция следствия

x нуль функция

x функция выделения

И оператора

Суперпозиции определяющий местную функцию при помощи местных функций следующим образом

ψ

Примитивной рекурсии определяющий функцию φ при помощи и функций

φ

φ φ

Минимизации

где

является наименьшим аргументом для которого совпадают

то есть

$\neq$

$\neq$

$\neq$

Функция называется *рекурсивной* если существует конечная последовательность функций такая что и для любого

является либо

исходной функцией либо

получена из предыдущих при помощи операторов

При этом если во втором используется то функция называется *примитивно-рекурсивной*

Таким образом всякая примитивно рекурсивная функция является рекурсивной

Часто в литературе рекурсивную функцию называют общерекурсивной функцией

Пример Операция сложения x y x y является рекурсивной функцией так как определяется равенствами

x x x y x y которые можно записать в виде

x x

x y x y x y

то есть получаем схему примитивной рекурсии основывающуюся на исходных функциях и

Поэтому функция сложения является рекурсивной функцией

Имеет место *тезис Чёрча:*

Функция вычислима тогда и только тогда, когда она является рекурсивной

Справедлива следующая теорема

Теорема. Класс функций, вычисляемых по Тьюрингу, и класс рекурсивных функций совпадают.

Можно отметить что существуют и другие теории алгоритмов которые равносильны рассмотренным теориям