МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И АЛГОРИТМЫ

1. Высказывания и логические связки. Формулы логики высказываний и высказывательные (пропозициональные) формы. Истинностная функция, определённая данной формулой логики высказываний и данным набором пропозициональных переменных. Тождественно истинные формулы логики высказываний (тавтологии). Замкнутость множества тавтологий относительно операции подстановки и правила ‘‘modus ponens".

1. Пропозициональные связки и формы

Определение 1.1. Повествовательное предложение, которое может быть истинно *(И)* или ложно *(Л)*, называется *высказыванием*.

Пример 1.3.

1. «Волга впадает в Каспийское море».
2. «Этот треугольник является равнобедренным».
3. « Существует равнобедренный треугольник».
4. «На Луне живут тигры».
5. «Большая Медведица это созвездие».

Первое высказывание является истинным, третье – истинным, четвёртое – ложным. второе и пятое предложения не являются высказываниями, так как нельзя сказать истинны они или ложны.

Над высказываниями, которые обозначаются буквами A, B, C,… можно выполнять логические операции:

Операция	Обозначение	Связка
отрицание	$\neg$	«не»
конъюнкцию	&	«и»
дизъюнкцию,	$\vee$	«или»
импликацию	$\rightarrow$	«если…,то…»
эквиваленция	$\leftrightarrow$	«тогда и только тогда, когда»

Результаты логических операций вычисляются при помощи следующей таблицы:

Таблица 1

Результаты логических операций

A	**B**	**$\neg$A**	**A & B**	**A $\vee$ B**	**A$\to$B**	**A$\leftrightarrow$B**
И	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*Л*	*И*	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*

Таким образом:

Отрицание высказывания *A истинно* тогда и только тогда, когда высказывание *A* ложно.

Конъюнкция двух высказываний *истинна* тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания, то есть оба конъюнктивных члена.

Дизъюнкция двух высказываний *ложна* тогда и только тогда, когда оба дизъюнктивных члена ложны.

Импликация двух высказываний *A* и *B ложна* тогда и только тогда, когда *посылка A истинна, а заключение B – ложно*.

Эквиваленция двух высказываний *истинна* тогда и только тогда, когда *оба эквивалентных члена одинаковы.*

Определение 1.2. Введём понятие пропозициональной формы:

Буквы *A*, *B*, ... , обозначающие простейшие высказывания – пропозициональные формы.

Если *A, B* – пропозициональные формы, то $\neg A$, $A\&B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ – пропозициональные формы.

Выражение является пропозициональной формой тогда и только тогда, когда это следует из 1.1. и 1.2.

Пример 1.4. Выражение

$$((((((\neg A) \& B) \vee C) \to A) \to B) \leftrightarrow C)$$ является пропозициональной формой.

↑

главная связка.

Определение 1.3. Форма, которая принимает значение *И* при всевозможных распределениях истинностных значений для входящих в неё букв, называется *тождественно-истинной* или *тавтологией.*

Теорема 1.1. Если *A*, $A \to B$ тавтологии, то *B* – тавтология.

Доказательство.

Если предположить противное, то есть, что при некотором распределении B принимает значение *Л*, то A, являясь по условию тавтологией, при этом распределении будет принимать значение *И*. Поэтому $A \to B$ примет значение *Л*, что противоречит условию. Таким образом, B является тавтологией.

Теорема 1.2. Пусть A - тавтология, содержащая буквы $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если B получается из A подстановкой вместо букв $A_1, \ldots, A_n$ формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$, то B тавтология.

Доказательство.

Если при некотором распределении истинностных значений формы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ из формы B принимают значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, где $x_i \in \{И, Л\}$, то форма B примет такое же истинное значение при данном распределении, какое примет форма A.

Если вместо букв $A_1, \ldots, A_n$ поставить $x_1, \ldots, x_n$ соответственно (в силу образования B), то есть значение *И*, т.к. A - тавтология по условию. Таким образом, B при произвольном распределении принимает значение *И*, то есть является тавтологией.■

Теорема 1.3. Если форма B получается из формы A посредством замены одного или несколько вхождений подформы A_1 на B_1, то форма

$$(A_1 \leftrightarrow B_1) \to (A \leftrightarrow B) \qquad (*)$$

– *тавтология.* В частности, если A_1 и B_1 равносильны, то A и B- равносильны.

Доказательство.

Если при некотором распределении истинных значений A_1 и B_1 принимают разные истинностные значения, то посылка импликации (*) $(A_1 \leftrightarrow B_1)$ будет *Л* и вся импликация истинна.

Если A_1 и B_1 принимают одинаковые истинностные значения, то в силу условия A и B тоже принимают одинаковые значения. Таким образом, посылка и заключение импликации (*) истинны. Следовательно, импликация (*) также *И*.

■

Теоремы 1.1. – 1.3. позволяют выполнять равносильные преобразования форм, то есть заменять подформы на им равносильные формы.

Правило 1. (правило заключения; правило отделения или правило *modus ponens*). Если формулы F и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула H также является тавтологией.

Доказательство.

Докажем методом «от противного». Предположим, что существует набор значений переменных, при которых значение формулы $H = 0$. Тогда, так как $F = 1$ (по условию формула F – тавтология), значение импликации $F \to H = 0$. Получили противоречие с условием ($F \to H$ – тавтология и не может принимать значение 0). Следовательно, наше предположение неверно и формула H является тавтологией.

Правило 2. (правило подстановки). Если формула F, содержащая пропозициональную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F всюду вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии. Новая формула при этом обозначается $S_X^H F$.

2. Равносильность формул логики высказываний. Связь с тавтологиями. Выражение одних логических связок через другие. Выразимость произвольной булевой функции посредством формулы логики высказываний. Полные системы функций алгебры логики.

Признак равносильности формул. Две формулы X и Y алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $X \leftrightarrow Y$ является тавтологией, и обратно, если формула $X \leftrightarrow Y$ – тавтология, то формулы X и Y равносильны.

Теорема 1.4. Для любых форм A и B справедливы равносильности (законы логики):

1. $A \& B \Leftrightarrow B \& A$ – коммутативность конъюнкции;
2. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ – коммутативность дизъюнкции;

3. $A\&(B\&C)\Leftrightarrow(A\&B)\&C$ – ассоциативность конъюнкции;
4. $A\vee(B\vee C)\Leftrightarrow(A\vee B)\vee C$ – ассоциативность дизъюнкции;
5. $A\&(B\vee C)\Leftrightarrow(A\&B)\vee(A\&C)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
6. $A\vee(B\&C)\Leftrightarrow(A\vee B)\&(A\vee C)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;
7. $\neg(A\&B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$ – закон Де Моргана;
8. $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\&\neg B$ – закон Де Моргана;
9. $A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$ – закон контрапозиции;
10. $A\&(A\vee B)\Leftrightarrow A$ – закон поглощения;
11. $A\vee(A\&B)\Leftrightarrow A$ – закон поглощения;
12. $A\&A\Leftrightarrow A$, $A\vee A\Leftrightarrow A$ – законы идемпотентности;
13. $A\&И\Leftrightarrow A$, $A\&Л\Leftrightarrow Л$, $A\vee И\Leftrightarrow И$, $A\vee Л\Leftrightarrow A$ – законы идемпотентности;
14. $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$ – выражение
15. $A\to B\Leftrightarrow\neg(A\&\neg B)$ одних
16. $A\&B\Leftrightarrow\neg(A\to\neg B)$ связок
17. $A\vee B\Leftrightarrow\neg A\to B$ через
18. $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\&(B\to A)$ другие
19. $\neg\neg A\Leftrightarrow A$ – закон двойного отрицания.

Доказательство.

Достаточно построить таблицы истинности

Установим сначала соответствие между формулами алгебры высказываний и булевыми функциями. Это делается следующим образом. Во-первых, определяется взаимно-однозначное соответствие между пропозициональными переменными и булевыми переменными, при котором прописная буква, обозначающая пропозициональную переменную, соответствует той же самой строчной букве, обозначающей булеву переменную:

$$P,\ Q,\ R,\ X,\ Y,\ Z,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots$$
$$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ y_1,\ y_2,\ \ldots$$

Во-вторых, устанавливается соответствие между знаками логических связок и одноименных булевых функций:

Logic connectives	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Boolean functions	$'$	$\cdot$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Наконец скобкам ставятся в соответствие те же скобки. Тогда каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная булева функция, а каждой булевой функции соответствует формула алгебры высказываний. Чтобы найти для данной формулы алгебры высказываний соответствующую ей булеву функцию, достаточно каждую прописную букву формулы заменить на такую же строчную букву, а каждый символ логической операции — на символ одноименной булевой функции.

Система функций алгебры логики $F=\{f_1, f_2,\ldots, f_s,\ldots\}\subseteq P_2$ называется *полной* или *функционально полной*, если любая функция алгебры логики может быть записана в виде формулы через функции этой системы (или, как говорят, выражена формулой над F).

Теорема. О полных системах функций алгебры логики

Пусть имеются две системы функций алгебры логики: $F=\{f_1, f_2,\ldots, f_p,\ldots\}$ и $G=\{g_1, g_2,\ldots, g_r,\ldots\}$, относительно которых известно, что система F полна и каждая её функция может быть выражена формулой через функции системы G. Тогда система функций G – является полной.

3. Понятие подформулы данной формулы. Главное вхождение логической связки в данную формулу. Алгоритм распознавания формул среди всех слов в данном алфавите. Соглашение об экономном употреблении скобок.

Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой.
Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

(Индуктивное определение подформулы).
1. Подформулой элементарной формулы является она сама.
2. Если формула имеет вид X , то её подформулой является она сама и все подформулы формулы X.
3. Если формула имеет вид XY, X ∨ Y, X→Y, X~Y, то их подформулами являются они сами и все подформулы формул X и Y.

4. Формула является подформулой данной формулы тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью пунктов 1-3.

Теорема 1.5. Всякая истинностная функция определяется формой, имеющей только связки $\neg, \&, \vee$.

Доказательство.

Пусть задана истинностная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, имеющая 2^n строчек в таблице истинности, которые и занумеруем 1,2, ..., 2^n.

Для каждой i-ой строчки построим

$$C_i: U_1^i \& U_2^i \& \ldots \& U_n^i,$$

где

$$U_j^i = \begin{cases} A_j, \text{если } x_j - \text{И}, \\ \neg A_j, \text{если } x_j - \text{Л}. \end{cases}$$

Тогда форма D: $\vee C_i$, где C_i взяты из тех строк, в которых функция f принимает значение *истина*, называемая *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ),* определяет функцию f.

Так как если в некотором i-том распределении f принимает значение *истина*, то C_i которая при i-том распределении истинна, входит в дизъюнкцию D, которая тоже получается истиной.

Заметим, что при i-ом распределении все другие конъюнкции принимают значение ложь. Поэтому, если в i-ой строке f принимает значение ложь, то C_i в D не входит, а входят другие конъюнкции, принимающие при этом распределении ложные значения, тогда и дизъюнкция D принимает значение ложь, то есть D определяет функцию f.■

Заметим, что в силу равносильности

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \& \neg B,$$

$$A \& B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$

$$A \& B \Leftrightarrow \neg(A \to \neg B),$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg A \to B,$$

получаем следствие из теоремы 1.5:

Следствие 1. Любую истинную функцию можно определить при помощи формы, содержащей только одну из следующих трех пар связок:

$$\neg, \&; \neg, \vee; \neg, \rightarrow.$$

Рассмотрим связки $\downarrow$ (стрелка Пирса) и | (штрих Шеффера):

Связка $\downarrow$ (*конъюнкция отрицаний*).

A	**B**	**A↓B**
И	*И*	*Л*
Л	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*

Связка | (*дизъюнкция отрицаний*).

A	**B**	**A|B**
И	*И*	*Л*
Л	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*Л*	*И*

Следствие 2. Единственными связками, которых достаточно для выражения всех истинных функций, являются $\downarrow$ *и* |.

Доказательство.

Достаточность этих связок для выражения всех истинных функций следует из следствия 1 в силу равносильности

$$\neg A \Leftrightarrow A \downarrow A,$$

$$A\&B \Leftrightarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \vee B),$$

$$\neg A \Leftrightarrow A|A,\ A \vee B \Leftrightarrow (A|A)|(B|B).$$

Для доказательства единственности рассмотрим связку ***h(A,B)***.

Тогда

$$\boldsymbol{h(И,И)=Л,\ h(Л,Л)=И,}$$

так как иначе нельзя будет выразить функцию отрицания. Поэтому ***h*** получается либо $\downarrow$, либо |, либо $\neg$.

Однако при помощи $\neg$ нельзя выразить функцию, принимающую только истинные значения.

Договоримся об экономии скобок в пропозициональных формах, которые получаются из букв, обозначающих простейшие высказывания, при помощи всех этих логических операций:

1) опускаем внешние скобки;

2) опускаем скобки, если их можно восстановить следующим образом: сначала для отрицания, заключая в них наименьшую форму, следующую за ним; затем для конъюнкции, заключая в них наименьшие формы, окружающие её; далее аналогично для дизъюнкции, импликации, эквиваленции;

3) если в форме имеется последовательность одной и той же связки, то скобки восстанавливаются слева направо.

4. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы данной формулы. Теорема о приведении формулы логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.

Совершенной ДНФ называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, Y \,\&\, Z).$$

Совершенной КНФ называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(X \vee Y \vee \neg Z) \vee (X \vee Y \vee Z).$$

Теорема 3. Любую функцию, кроме констант 0 и 1, можно представить в виде как СДНФ, так и СКНФ.

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

1. Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят «1».
2. Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в

данной строке равно «1», то в конъюнкцию включают саму эту переменную, если «0», то ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию.

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

1. Отметить те строки ТИ, в последнем столбце которых стоят «0».
2. Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке равно «0», то в дизъюнкцию включают саму эту переменную, если «1», то ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию.

5. Формальные аксиоматические теории. Аксиомы и правила вывода. Понятие вывода в формальной теории. Простейшие свойства понятия выводимости из данного множества гипотез. Аксиоматизируемые теории.

1. *Формальные теории*

Теория P считается формально определенной, если:

1. Выделено счетное множество символов, конечная последовательность их называется *выражениями.*
2. Среди множества выражений выделяются формулы (обычно существует алгоритм, распознающий выражения на формулу).
3. Среди множества формул выделяются аксиомы, если существует алгоритм, то теория аксиоматическая (или эффективно аксиоматизированная).
4. Выделяется множество отношений R_1, R_2, ..., R_n, называемые правилами вывода. Для формулы и некоторых формул можно определять находится ли она в отношении R_i с этими формулами и тогда она называется *непосредственным следствием этих формул по правилу* R_i.

Выводом формулы A в теории P называется конечная последовательность формул A_1, ..., A_n=A такая, что для любого i от 1 до n формула A_i есть

1) либо аксиома;

2) либо непосредственное следствие предыдущих формул по некоторому правилу вывода;

В этом случае формула A называется теоремой теории P и обозначается

$\vdash_P A$

Выводом формулы A в теории *P* из множества формул Γ ($\Gamma \vdash_P A$) называется конечная последовательность формул $A_1, \ldots, A_n = A$ такая, что для любого *i* от *1* до *n* формула A_i есть

1) либо аксиома;
2) либо гипотеза ($A_i \in \Gamma$);
3) либо непосредственное следствие предыдущих формул по некоторому правилу вывода;

Свойство 2.1. $\Gamma \vdash_P A., \Gamma \subset \Delta \Rightarrow \Delta \vdash_P A.$

Свойство 2.2. $\Delta \vdash_P A. \Leftrightarrow \Gamma \subset \Delta \, |\Delta| < \infty, \Gamma \vdash_P A.$

Свойство 2.3. $\Gamma \vdash_P A, \Delta \vdash_P B_i, (B_i \in \Gamma) \Rightarrow \Delta \vdash_P A.$

6. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Теорема дедукции. Производные правила. Правила силлогизма, перестановки посылок и контрапозиции.

2. Исчисления высказываний (ИВ) (теория L)

Исчисление высказываний (теория L) определяется следующим образом:

1. *Символами* теории L являются A, B, C, ..., $\neg$, $\rightarrow$, (,).
2. Формулами теории L являются пропозициональные формы, содержащие только $\neg$ и $\rightarrow$.
3. Три схемы аксиом: (A_1), $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

   (A_2), $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

   (A_3), $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

порождают бесконечное множество аксиом теории L при произвольных формулах *A, B* и *C*.

4. Единственным правилом вывода является *Modus ponens* (MP):

$$A, A \rightarrow B \vdash_L B.$$

Лемма 2.1. $\vdash_L A \rightarrow A$ для произвольной формулы *A* теории *L*.

Доказательство.

1) $(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))$ (A_2)

2) $(A\to((A\to A)\to A)$ (A_1)

3) $(A\to(A\to A))\to(A\to A)$ (2,1,MP)

4) $A\to(A\to A)$ (A_1)

5) $A\to A$ (3,4,MP)

Из цепочки выводов 1) – 5) имеем $\vdash_L A\to A$.■

3. Теорема дедукции теории L

Теорема 2.1. (Теорема дедукции для исчисления высказываний)

Если $\Gamma, A \vdash_L B$, то $\Gamma \vdash_L A\to B$, где Γ– некоторое множество формул.

В частности, $A \vdash_L B \Rightarrow \vdash_L A\to B$.

Доказательство.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n = B$ является выводом формулы B из множества Γ и A. Тогда для любого i от 1 до n формула B_i есть

1) либо аксиома;

2) либо гипотеза 2.1. $B_i\in\Gamma$

2.2. $B_i=A$

3) либо непосредственное следствие предыдущих формул B_j и B_k по правилу MP, причем $B_k=B_j\to B_i$.

Докажем утверждение теоремы индукцией по i.

При $i=1$ в случаях 1) и 2.1 имеем $\Gamma\vdash_L B_1$, но по аксиоме 1 получаем

$$\Gamma\vdash B_1\to(A\to B_1).$$

Поэтому по правилу MP остаётся доказываемая выводимость $\Gamma\vdash A\to B_1$.

В случае 2.2 $B_1 = A$, тогда по лемме также $\Gamma\vdash A\to B_1$.

В силу невозможности 3) базис рассмотрен.

Предполагаем, что утверждение справедливо для формул с номерами меньшими, чем i и докажем для i.

Если B_i 1) аксиома или 2) гипотеза, то доказательство совпадает с базисным с заменой B_1 на B_i

B_i непосредственное следствие по правилу МР предыдущих формул B_j и $B_k = B_j \to B_i$, то из того $j<k$, $k<i$ имеем, что $\Gamma \vdash A \to (B_j \to B_i)$ и $\Gamma \vdash A \to B_j$.
По аксиоме 2 имеем, что $\Gamma \vdash (A \to (B_j \to B_i)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_j))$.

Применим МР дважды: $\Gamma \vdash A \to B_i$ и при $i=n$ в силу индуктивности получим справедливость нашего утверждения.■

Следствие 1. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$. *(Правило силлогизма)*

Доказательство.

1) $(A \to B)$ (гипотеза)
2) $B \to C$ (гипотеза)
3) A (гипотеза)
4) B *(1, 3, MP)*
5) C *(2, 4, MP)*

По 1) - 5) $A \to B, B \to C, A \vdash C$. Поэтому по теореме дедукции

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C. ■$$

Следствие 2. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$. *(Правило контрапозиции)*

Доказательство.

1) $A \to (B \to C)$ - гипотеза
2) B (гипотеза)
3) A (гипотеза)
4) $B \to C$ *(1, 3, MP)*
5) C *(2, 4, MP)*

По 1) - 5) $A \to (B \to C), B, A \vdash C$, поэтому по теореме дедукции

$$A \to (B \to C), B \vdash A \to C. ■$$

Следствие 3. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$ *(Правило перестановки посылок)*

Доказательство.

4. Теоремы теории L

Лемма 2.2. Для любых формул A и B следующие формулы являются теоремами теории L:

1) $\neg\neg B \to B$

2) $B \to \neg\neg B$

3) $\neg A \to (A \to B)$

4) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

5) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

6) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

7) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

Доказательство.

1) 1) $(\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg B) \to B)$ (A_3)

2) $\neg B \to \neg B$ (лемма 2.1.)

3) $(\neg B \to \neg\neg B) \to B$ (1, 2, следствие 2)

4) $\neg\neg B \to (\neg B \to \neg\neg B)$ (A_1)

5) $\neg\neg B \to B$ (4, 3, следствие 1)

По 1) - 5) $\vdash \neg\neg B \to B$. ■

2) 1) $(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to ((\neg\neg\neg B \to B) \to \neg\neg B)$ (A_3)

2) $\neg\neg\neg B \to \neg B$ (лемма 2.1. а)

3) $(\neg\neg\neg B \to B) \to \neg\neg B$ (1, 2, MP)

4) $B \to (\neg\neg\neg B \to B)$ (A_1)

5) $B \to \neg\neg B$ (4, 3, следствие 1)

По 1)- 5) $\vdash B \to \neg\neg B$ ■

3) 1) $\neg A$ (гипотеза)

2) A (гипотеза)

3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ (A_3)

4) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (A_1)

5) $\neg B \to \neg A$ (1, 4, MP)

6) $(\neg B \to A) \to B$ (3, 5, MP)

7) $A \to (\neg B \to A)$ (A_1)

8) $\neg B \to A$ (2, 7, MP)

9) B (6, 8, MP)

По 1)- 9) $\neg A, A \vdash B \Rightarrow$ по теореме дедукции, примененной дважды, получаем с) ■

4) 1) $\neg B \to \neg A$ (гипотеза)

2) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ (A_3)

3) $(\neg B \to A) \to B$ (1, 2, MP)

4) $A \to (\neg B \to A)$ (A_1)

5) $A \to B$ (4, 3, следствие 1)

По 1)- 5) $\neg B \to \neg A \vdash A \to B \Rightarrow$ теорема дедукции $\Rightarrow \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$. ■

5) доказательство проводится с использованием леммы 2.2 4)

6) используя MP, $A, A \to B \vdash B$ Поэтому по теореме дедукции имеем

$$\vdash A \to ((A \to B) \to B)$$

и по следствию 1 получаем лемму 2.2 6).■

7) рассмотрим две гипотезы (первые 2 скобки) при помощи леммы 2.2 5) и MP получим посылку (A_3) и вторую посылку (A_3). По правилу MP, применённому к (A_3) дважды, получим лемму 2.2 7).■

7. Тождественная истинность всех выводимых в ИВ формул. Непротиворечивость исчисления высказываний.

8. Выводимость в ИВ любой тождественно истинной формулы. Полнота исчисления высказываний.

9. Непротиворечивость исчисления высказываний. (3 вопроса вместе)

5. Полнота и непротиворечивость теории L

Теорема 2.2. (Первая часть теоремы о полноте теории L (ИВ))

Всякая теорема теории L является тавтологией.

Доказательство.

Так как схемы (A_1),(A_2) и (A_3) представляют тавтологии и MP сохраняет свойство формул быть тавтологией, то теорема, которая получается из аксиом при помощи MP, является тавтологией.■

Для доказательства второй части рассмотрим:

Лемма 2.3.

Если формула A содержит пропозициональные буквы B_1, B_2,…, $B_к$, то для каждой из $2^к$ строчек таблицы истинности пусть

$$B_i' = \begin{cases} B_i, \text{если } B_i - \text{И}, \\ \neg B_i, \text{если } B_i - \text{Л}. \end{cases}$$

Аналогично $$A' = \begin{cases} A, \text{ если } A - \text{И}, \\ \neg A, \text{ если } A - \text{Л}. \end{cases}$$

Тогда B_1', B_2', …, $B_k' \vdash A'$ для каждого распределения букв.

Поясним формулировку теоремы на примере:

$$A = \neg B_1 \to B_2 \to B_1,$$

1	*Л*	*И*	*И*	*И*
2	*И*	*И*	*И*	*Л*
3	*Л*	*И*	*Л*	*И*
4	*И*	*Л*	*Л*	*И*

И тогда

для строк 1), 3), 4) имеем: $B_1, B_2 \vdash \neg B_1 \to B_2 \to B_1$
для строки 2) имеем: $\neg B_1, B_2 \vdash \neg (\neg B_1 \to B_2 \to B_1)$

Доказательство.

Доказательство утверждения проводится индукцией по количеству связок n в формуле A.

Теорема 2.3. (Вторая часть теоремы о полноте теории L (ИВ))

Всякая тавтология является теоремой теории L.

Доказательство.

Доказательство следует из выводимости тавтологии из истинного восприятия букв по лемме 2.3., от которых можно избавиться при помощи MP, используя лемму 2.2 7).

Теория L является непротиворечивой теорией, т.е. ни для какой формулы A не может быть, чтобы одновременно являлись теоремами A и $\neg A$, т.к. в противном случае в силу леммы 2.2. 3) по правилу MP получим, что произвольная формула B является теоремой, а поэтому в силу теоремы 2.2 о полноте и тавтологией. Однако не все формулы в теории L являются тавтологиями.■

Непротиворечивость можно доказать из того, что не всякая формула является теоремой, если в этой теории выводима формула из леммы 2.2. 3) и имеется правило MP.

Теория, в которой не всякая формула является теоремой, называется абсолютно *непротиворечивой.*

Если существует эффективная процедура распознания формулы на теорему, то она называется *разрешимой.* Исчисление высказываний L - разрешимая теория, в силу теоремы о полноте, так как для каждой формулы можно построить таблицу истинности.

10. Независимость системы аксиом ИВ.

6. Независимость аксиом теории L

Подмножество X называется *независимым* от множества аксиом Y, если никакая аксиома из X не может быть выведена при помощи правил вывода из Y.

Пример 2.1. (A_3): $(\neg B\to \neg A)((\neg B\to A)\to B)$ – независимо от множеств (A_1) и (A_2)

Доказательство.

Рассуждая от противного и рассматривая преобразование h формул путем извлечения из них отрицания, будем иметь, что h, примененные к A_1 и A_2 не меняют их истинность, следовательно они остаются тавтологиями. В правиле *MP* преобразование h сохраняет свойство быть тавтологией, но в случае выводимости A_3, тогда бы и h от аксиомы из (A_3) оставалась тавтологией. Однако,

$$h(\neg B\to \neg A)\to((\neg B\to A)\to B)=(B\to A)\to((B\to A)\to B)$$

не является тавтологией. Таким образом, A_3 независимо от A_1 и A_2.
Аналогично можно показать независимость аксиом A_1, A_2 от остальных при помощи *многозначных логик.* Таким образом, множества аксиом (A_1), (A_2) и (A_3) исчисления высказываний L независимы.■

11. Понятие формулы логики предикатов. Область действия данного вхождения квантора. Свободные и связанные вхождения предметных переменных. Замкнутая формула.

Символами теорий *I* порядка *K* является непустое, счетное или конечное множество предикатных символов A_j^n; счетное, конечное, возможно пустое множество функциональных символов f_j^n ,(причем n – количество аргументов (размерность), j – для различения символов одинаковой размерности); счетное, возможно конечное или пустое множество предметных констант a_{i} ; счетное множество предметных переменных x_i ; а

также $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$,(,) и , .

Квантор $\exists$ не рассматривается, т.к. выражение $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$.

В выражении $\forall x\, A(x)$, x – переменная квантора, а $A(x)$ – область действия квантора с переменной x.

Введем понятие терма:

1. Предметная константа a_i и переменная x_{i}, i – термы.
2. Если $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то $f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}(t_1,\ldots,t_n)$ –терм.
3. Термами являются те и только те выражения, для которых это следует из первого и второго пунктов.

Введем понятие формулы:

1. $A_j^n(t_1,\ldots,t_n)$, где t_i – термы, называются элементарной формулой. Элементарные формулы являются формулами.
2. Если A, B – формулы, то $\neg A$, $A\rightarrow B$, $\forall x\, A$ – формулы.
3. Формулами являются те и только те выражения, для которых это следует из первого и второго пунктов. Связки &, $\vee$, $\leftrightarrow$ и квантор $\exists$ используются для сокращённой записи формулы.

Дополним правило экономии скобок в формулах при помощи расположения $\neg$, &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. То есть вместо $(\forall x_1\, A_1^2\,(x_1, x_2))\rightarrow A_1^1\,(x_1)$ можем иметь

$\forall x_1\, A_1^2\,(x_1, x_2)\rightarrow A_1^1\,(x_1)$.

Кроме того, восстанавливать скобки для последовательности кванторов будем справа налево, то есть для формулы $\forall x_3 \forall x_2 \exists x_1 A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ будем иметь $(\forall x_3 (\forall x_2 (\exists x_1 A_1^3(x_1, x_2, x_3))))$.

Определение 3.1. Вхождение переменной в формулу называется *связным,* если она при этом является переменной квантора или находится в области действия квантора с этой переменной.

Определение 3.2. Вхождение, которое не является связным, называется *свободным*.

Определение 3.3. Переменная в формуле называется *связной* (*свободной*), если имеет место ее связное (свободное) вхождение в данную формулу.

Пример 3.1.

1) $A_1^2(x_1, x_2)$ – переменные x_1, x_2 свободные

(1)

2) $\forall x_1 A_1^2(x_2, x_1)$ – переменная x_2 свободная, x_1 связная

(2)

3) $\exists x_2 \forall x_1 A_1^2(x_2, x_1)$ – переменные x_2 и x_1 связные

(3)

4) $\forall x_1 A_1^2(x_2, x_1) \to A_1^1(x_1)$

(4)

в посылке импликации (4) переменная x_1 связная, а x_2 свободная, в заключении – x_1 свободная

Определение 3.4. Терм *t* называется *свободным* для x_i в формуле *A*, если никакое свободное вхождение x_i в формуле *A* не находится в области действия квантора с переменной из терма.

Пример 3.2.

Терм x_2 является свободным для x_1 в формуле $A_1^1(x_1)$, но не является свободным в формуле $\forall x_2 A_1^1(x_1)$

Пример 3.3.

Терм $f_1^2(x_1, x_2)$ не является свободным для x_1 и x_3 в формуле

$\forall x_2 A_1^2(x_1, x_3) \to A_1^1(x_3)$.

Определение 3.5. Терм, не содержащий переменных, является *свободным* для любой переменной в формуле.

Определение 3.6. Терм является *свободным* для любой переменной в формуле, если формула не содержит свободных переменных.

Пример 3.4.

Терм x_i свободен для x_i в $A(x_i)$, т.к. в противном случае свободное вхождение переменной x_i должно было находиться в области действия квантора с переменной x_i, что противоречит свободному вхождению переменной x_i.

12. Интерпретация формул логики предикатов. Выполнимость и логическая общезначимость формулы. Примеры логически общезначимых формул. Понятие модели для данного множества формул.

Интерпретация, модели

Все формулы теорий 1 порядка K имеют смысл только в некоторой интерпретации.

Определение 3.7. Под *интерпретацией* понимается не пустое множество $\boldsymbol{D}$, называемое *областью интерпретации*, и соответствие, сопоставляющее предикатному символу A_j^n n - местное отношение; функциональному символу f_j^n – n - местную функцию; предметная константа a_i интерпретируется как элемент множества D, при этом предметная переменная пробегает область D.

Пример 3.5.

Рассмотрим интерпретацию при помощи $D = N$, A_1^2-$\leq$ формул

1) $A_1^2(x_1, x_2)$
2) $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$
3) $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

Тогда формула $A_1^2(x_1, x_2)$, содержащая две свободные переменные, интерпретируется как отношение $\leq$ на множестве $\boldsymbol{N}$ (натуральные числа). Формула $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$, содержащая одну свободную переменную, интерпретируется как свойство натурального числа быть наименьшим. Формула $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2$

(x_1, x_2), не имеющая свободных переменных, интерпретируется как высказывание, утверждающее существование наименьшего натурального числа.

Рассмотрим понятие выполнимости формулы на некотором наборе φ (последовательности) в данной интерпретации. Под $\varphi(t)$ будем понимать результат подстановки вместо всех переменных терма t соответствующих компонент последовательности φ и выполнения всех предписанных интерпретацией действий.

Пример 3.6.

Если $D=N$, A_1^2-$\le$, $f_1^2 - +, f_2^2 - \cdot$, $\varphi=(1,3,5,\ldots)$, то $\varphi(f_1^2(x_1, f_2^2(x_2,x_3))) = 16$.

Рассмотрим выполнимость формулы соответственно пунктам определения формулы:

1) $A_j^n(t_1,\ldots,t_n)$ выполняется на $\varphi \Leftrightarrow (\varphi(t_1), \varphi(t_2),\ldots,\varphi(t_n)) \in B_j^n$, где B_j^n – n-местное отношение, интерпретирующее предикатный символ A_j^n.

2) Формула $\neg$A выполняется на φ тогда и только тогда, когда A не выполняется на φ.

3) $A \to B$ выполняется на $\varphi \Leftrightarrow A$ не выполняется на φ или B выполняется на φ.

4) $\forall x_i A$ выполняется на φ тогда и только тогда, когда формула A выполняется на $\forall \psi / \psi$ отличается от φ не более, чем только своей i-ой компонентой: $\psi(x_j)=\varphi(x_j)$ при $i \neq j$.

Таким образом, интуитивно формула является выполнимой на φ, если при подстановке вместо всех свободных вхождений переменных в формулу соответствующих компонент последовательности φ и выполнения всех предписанных интерпретацией действий получается истинное утверждение.

Определение 3.8. Формула называется *истинной в данной интерпретации*, если она выполняется на любом наборе из данной интерпретации, и наоборот, *ложной,* если она не выполняется ни на каком наборе из данной интерпретации.

Определение 3.9. Формула является *логически-общезначимой*, если она является истинной в любой интерпретации.

Пример 3.7.

$D = N$, A_1^2 - $\le$, $\varphi = (1,3,5,\ldots)$

$\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ является выполнимой на φ, так как $A_1^2(x_1, x_2)$ выполнима на любом наборе $\psi = (1, n, 5,\ldots)$, где $n \in N$. Назовем эту формулу выполнимой для 1.

Пример 3.8.

Формула вида $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ интерпретируется как высказывание, которое является истинным, т.к. утверждает существование наименьшего натурального числа.

13. Равносильность формул логики предикатов. Выразимость одних логических связок через другие. Алгоритм приведения формул к равносильной предварённой нормальной форме.

Определение 22.1. Две формулы, F и H логики предикатов называются равносильными на множестве M, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определенных на M, формулы превращаются в равносильные предикаты. Если две формулы равносильны на любых множествах, то их будем называть просто равносильными. Равносильность формул будем обозначать так: $F \cong H$.

Определение 22.4. ***Предваренной нормальной формой*** для формулы логики предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы стоят в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. это формула вида $(K_1 x_1)\ldots(K_m x_m)(F(x_1,\ldots,x_n))$, где K_i есть один из кванторов $\forall$ или $\exists$ $(i = 1,\ldots,m)$, $m \leqslant n$, причем формула F не содержит кванторов и является приведенной формулой. (Заметим, что кванторы в формуле могут отсутствовать вовсе.)

Теорема 22.5. *Для каждой формулы логики предикатов существует предваренная нормальная форма.*

14. Теории 1-го порядка. Аксиомы и правила вывода. Необходимость ограничений в схемах аксиом. Примеры теорий 1-го порядка.

Аксиомы и правила вывода теорий I порядка. Примеры теорий I порядка

Аксиомами (логическими) теории I порядка К для любых формул A, B, C являются формулы:

(A_1): $A\to(B\to A)$

(A_2): $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(A_3): $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$

(A_4): $\forall x_i A(x_i)\to A(t)$.

где t является свободным термом для x_i в формуле $A(x_i)$.

В частности $\forall x_i\, A(x_i)\to A(x_i)$

(A_5): Если формула A не имеет свободных вхождений переменной x_i, то $\forall x_i\,(A\to B)\to(A\to\forall x_i B)$.

Определение 3.16. Правила вывода:

1. **MP:** A, $A\to B\vdash B$.

2. **ПО** (правило обобщения): $A\vdash\ \forall x_i A(x_i)$.

Если в A_4 избавиться от ограничения, то возможна такая формула:

$$\forall x_1\ \neg\forall x_2\ A_1^2(x_1, x_2)\to\neg\forall x_2\ A_1^2(x_2, x_2),$$

где терм x_2 не является свободным для x_1 в формуле $A(x_1)=\neg\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$.

Эта формула не является логически общезначимой, т.к. в любой интерпретации, в которой D состоит хотя бы из двух элементов и A_1^2 интерпретируется как отношение тождества, посылка – истина, а заключение – ложь.

Если убрать ограничение в A_5, то возможна такая формула

$$\forall x_1(A_1^1(x_1)\to A_1^1(x_1))\to(A_1^1(x_1)\to\forall x_1 A_1^1(x_1)).$$

Если ее проинтерпретировать при помощи D, имеющего хотя бы 2 элемента и A_1^1 интерпретируется как свойство, которым обладают не все элементы из D, тогда формула не является логически общезначимой.

Заметим, что в силу свойств 3.3. и 3.6., правило вывода сохраняет свойство быть истинной формулой.

Определение 3.17. Теория 1 порядка, имеющая только логические аксиомы называется *исчислением предикатов.*

Кроме того в теориях I порядка есть собственные аксиомы.

Пример 3.13. Пример теории I порядка.

Теория P (ч*астично упорядоченная структура*) имеет 1 предикатный символ A_1^1. Собственными аксиомами теории являются:

1) $\forall x_1 \neg A_1^2 (x_1, x_1)$ – антирефлексивность

2) $\forall x_1 \ \forall x_2 \ \forall x_3 \ (A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_2, x_3) \to A_1^2(x_1, x_3)))$ – транзитивность.

Пример 3.14. *Теория групп* G имеет A_1^2, f_1^2, a и собственные аксиомы

1) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)), f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$ – ассоциативность;

2) $\forall x_1 \ A_1^2 \ (f_1^2 \ (x_1, a), x_1)$ – правый нейтральный элемент;

3) $\forall x_1 \exists x_2 A_1^2 \ (f_1^2 \ (x_1, x_2))$ – правый симметрический элемент;

4) $\forall x_1 A_1^2 \ (x_1, x_1)$ – рефлексивность;

5) $\forall x_1 \forall x_2 (A_1^2 \ (x_1, x_2) \to A_1^2 \ (x_2, x_1))$ – симметричность;

6) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (A_1^2 \ (x_1, x_2) \to (A_1^2 \ (x_2, x_3) \to A_1^2 \ (x_1, x_3)))$ – транзитивность;

7) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (A_1^2 \ (x_1, x_2) \to (A_1^2 \ (f_1^2 \ (x_1, x_3), f_1^2 \ (x_2, x_3)) \& A_1^2 \ (f_1^2 \ (x_3, x_1), f_1^2 \ (x_3, x_2)))$

– подстановочность;

4), 5), 6), 7) – характеризует A_1^2 как равенство.

Любая модель данной теории называется *группой*

15. Исчисление предикатов. Выводимость в ИП частных случаев всех тавтологий. Непротиворечивость ИП и теорий первого порядка, имеющих модель.

. *Теоремы о частном случае тавтологии и непротиворечивости исчисления предикатов*

Теорема 3.1. (О частном случае тавтологии)

Всякий частный случай тавтологии является теоремой теории I порядка, причем существует вывод с использованием 1-3 аксиом и *MP*.

Доказательство.

Пусть A является частным случаем некоторой тавтологии T, тогда по теореме о полноте (теорема 2.2. и теорема 2.3.), T является теоремой теории L, то есть существует вывод формулы T в теории L из пустого множества при помощи A_1-A_3 и *MP*. Преобразуем данный вывод так:

1. Каждую букву этого вывода, которая встречается в T, заменим на ту же формулу, на которую мы ее заменили при получении формулы A.
2. Если в выводе встречается буква, которой нет в T, то ее заменим на произвольную одну и ту же формулу теории K, которая в этом выводе не встречалась.

Полученный вывод является выводом из пустого множества формулы A в теории K.■

Пример 3.15.

Подставляя в тавтологию $\neg A \to (A \to B)$ вместо A – $\forall x_i\ \neg B(x_i)$ и вместо B - $\forall x_i\ \exists x_j\ A(x_i, x_j)$, получаем

$$\vdash_K \exists x_i\ B(x_i) \to (\forall x_i\ \neg B(x_i) \to \forall x_j\ \exists A(x_i, x_j))$$

Теорема 3.2.

Исчисление предикатов не противоречиво.

Доказательство.

Рассмотрим преобразование $h(A)$ в исчислении предикатов, которое убирает из данной формулы A все кванторы, термы вместе со скобками и запятыми. Например,

$$h(A_1^3(x_1, f_1^{\,1}(x_2), f_1^{\,2}(x_1,x_2)) \to \forall x_1 A_1^1(x_1) \& A_1^2(x_1,x_2)) = A_1^3 \to A_1^1 \& A_1^2.$$

Тогда, $h(\neg A) = \neg h(A)$; $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$.

Применительно к аксиомам (A_1)-(A_3) преобразование h приводит к тавтологии.

$h(A_4) = (\forall x_i A(x_i) \to A(t))$ приводится к виду $B \to B$,

$h(A_5) = h(\forall x_2(A \to B) \to (A \to \forall x\ B)$ приводится к виду $(C \to D) \to (C \to D)$,

то есть к тавтологиям.

Кроме того, если A при помощи h даст тавтологию, то и для $h(\forall x_i A)$ даст тавтологию и если $h(A)$ – тавтологии и $h(A \to B)$, то $h(B)$ – тавтологии. Таким образом, h от аксиомы оставляет тавтологию, правило обобщения и MP при помощи h сохраняет тавтологию. Если предположить, что исчисления предикатов не является непротиворечивым, т.е. B и $\neg B$ являются теоремами для некоторой формулы B, то тогда $h(B)$ – тавтология и $h(\neg B)$, то есть $\neg(h(B))$ – является тавтологией, что невозможно, т.к. отрицание тавтологии не может быть тавтологией.■

16. Зависимость формулы в данном выводе ИП от данной гипотезы *A*. Теорема дедукции для ИП и её следствия.

Теорема дедукции для исчисления предикатов

Если к выводу $A_1^1(x_1) \vdash_K \forall x_1 A_1^1(x_1)$,выражающему *ПО*, применить теорему дедукции, то получим $\vdash A_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 A_1^1(x_1)$.

Если данную формулу проинтерпретировать при помощи *D* содержащей не менее одного элемента, а A_1^1 – свойством, которым обладает только один элемент из *D*, тогда посылка может принимать истинные значения, а заключение – ложные, т.е. формула может быть не выполнена, следовательно, не является истинной в данной интерпретации, следовательно, не является логически общезначимой. Поэтому рассмотрим теорему дедукции в следующем виде.

Теорема 3.3. (Теорема дедукции для исчисления предикатов)

Если в исчислении предикатов из множества формул *Г* и из формулы *A* выводима *B* и существует вывод, в котором ни при каком применении правила обобщения не связана квантором никакая свободная переменная из формулы *A*, тогда $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Доказательство.

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_к\text{-}B$ является указанным в условии теоремы выводом Γ, $A \vdash B$, тогда для $\forall i = 1, \dots, n$ формула B_i:

1) либо аксиома;
2) либо гипотеза, то есть

   2.1 $B_i \in \Gamma$ или

   2.2. $B_i = A$;

3) либо B_i является непосредственным следствием предыдущих, по правилу:

   3.1. *MP*, формул B_j, $B_j \rightarrow B_i = B_k$, $j, k < i$.

3.2. *ПО*, формулы B_j, $j<i$, то есть $B_i = \forall x_k B_j$, где x_k не является свободной переменной формулы A.

Докажем утверждение теоремы индукцией по i.

I. $i=1$

1) B_1 – аксиома $\Rightarrow \Gamma \vdash B_1 \to (A \to B_1) \Rightarrow (MP)\ \Gamma \vdash A \to B_1$.

2) гипотеза 2.1. $B_1 \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash B_1 \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B_1$.

2.2. $B_1 = A \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B_1$ (в силу теоремы 3.1.).

II. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех $j<i$. Докажем для B_i.

В случаях 1, 2 рассуждение аналогично базису с заменой 1 на i.

Если же B_i является непосредственным следствием, то

3.1. $\Gamma \vdash A \to B_j$, и $\Gamma \vdash A \to (B_j \to B_i)$, *т.к. к,* $j<i$.

По (A_2): $\Gamma \vdash (A \to (B_j \to B_i)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_i)) \Rightarrow (MP$, применённому дважды) $\Gamma \vdash A \to B_i$

3.2. $j<i \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B_j \Rightarrow (ПО) \Gamma \vdash \forall x_к (A \to B_j)$.

По (A_5): $\Gamma \vdash \forall x_к (A \to B_j) \to (A \to \forall x_к (B_j)) \Rightarrow (MP)\ \Gamma \vdash A \to \forall x_к B_j$.■

Следствие 1. Если формула A замкнутая и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$.

Пример 3.16.

Докажите, что $\vdash_К \forall x_1 \forall x_2\ A \to \forall x_2 \forall x_1\ A$.

Доказательство.

1. $\forall x_1 \forall x_2 A$ (гипотеза).
2. $\forall x_1 \forall x_2 A \to \forall x_2 A. (A_4)$
3. $\forall x_2 A (1, 2, MP)$
4. $\forall x_2 A \to A\ (A_4)$
5. $A (3, 4, MP)$
6. $\forall x_1 A (5, ПО)$

7. $\forall x_2 \forall x_1 A(6, ПО)$

Из 1 – 7 имеем $\forall x_1 \forall x_2 A \vdash \forall x_2 \forall x_1 A$.

Следовательно, по теореме дедукции (теорема 3.3.)

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 A \rightarrow \forall x_2 \forall x_1 A. \blacksquare$$

17. Подобные формулы.

Подобные формулы

Определение 3.18. Формула $A(x_j)$ называется *подобной* $A(x_i)$, если получена из нее при помощи подстановки вместо всех свободных вхождений переменной x_i переменной x_j. x_j является *свободным термом* для x_i в $A(x_i)$ и $A(x_i)$ не имеет свободных вхождений переменной x_j.

Тогда терм x_i является свободным термом для x_j в $A(x_j)$ и $A(x_j)$не имеет свободных вхождений переменой x_i, т.е. формула $A(x_i)$ подобна $A(x_j)$. Поэтому подобие является симметричным свойством.

Определение 3.19. Две формулы $A(x_i)$ и $A(x_j)$ подобны, если свободное вхождение переменной x_j в $A(x_j)$ имеется в тех же местах, что и свободное вхождение x_i в $A(x_i)$.

Лемма 3.1.

Если формулы $A(x_i)$ и $A(x_j)$ подобны, то $\vdash_K \forall x_i A(x_i) \leftrightarrow \forall x_j A(x_j)$.

Доказательство.

Докажем, что $\vdash \forall x_i A(x_i) \rightarrow \forall x_j A(x_j)$.

1. $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_j)$ (A_4)
2. $\forall x_j (\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_j))$ $(1, ПО)$
3. $\forall x_j (\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_j)) \rightarrow (\forall x_i A(x_i) \rightarrow \forall x_j A(x_j))$ (A_5)
4. $\forall x_i A(x_i) \rightarrow \forall x_j A(x_j)$ $(2, 3, MP)$

Из 1 – 4 имеем $\vdash \forall x_i A(x_i) \rightarrow \forall x_j A(x_j)$.

Аналогично $\vdash \forall x_j A(x_j) \rightarrow \forall x_i A(x_i)$. Тогда в следствие теоремы 3.1. (о частных случаях тавтологии) по тавтологии $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$ получаем

$$\vdash_K \forall x_i A(x_i) \leftrightarrow \forall x_j A(x_j).\blacksquare$$

18. Гёделева нумерация формул

Нумерация Гёделя — это функция g, сопоставляющая каждому объекту некоторого формального языка её номер. С её помощью можно явно пронумеровать следующие объекты языка: переменные, предметные константы, функциональные символы, предикатные символы и формулы, построенные из них. Построение нумерации Гёделя для объектов теории называется арифметизацией теории — оно позволяет переводить высказывания, аксиомы, теоремы, теории в объекты арифметики. При этом требуется, чтобы нумерация g была эффективно вычислимой и для любого натурального числа можно было определить, является ли оно номером или нет, и если является, то построить соответствующий ему объект языка. Нумерация Гёделя очень похожа на посимвольное кодирование строк числами, но с той разницей, что для кодирования последовательностей номеров букв используется не конкатенация номеров одинаковой длины, а основная теорема арифметики.

Данная нумерация была применена Гёделем в качестве инструмента для доказательства неполноты формальной арифметики.

Вариант нумерации Гёделя формальной теории первого порядка

Пусть K — теория первого порядка, содержащая переменные $x_1, x_2, \ldots$, предметные константы $a_1, a_2, \ldots$, функциональные символы f_k^n и предикатные символы A_k^n, где k — номер, а n — арность функционального или предикатного символа.

Каждому символу u произвольной теории первого порядка K поставим в соответствие его гёделев номер $g(u)$ следующим образом:[1]

$g(() = 3;\ g()) = 5;\ g(,) = 7;\ g(\neg) = 9;\ g(\to) = 11;$

$g(x_k) = 5 + 8k,\ k = 1, 2, \ldots;$

$g(a_k) = 7 + 8k,\ k = 1, 2, \ldots;$

$g(f_k^n) = 9 + 8 \cdot 2^n 3^k,\ k, n \geqslant 1;$

$g(A_k^n) = 11 + 8 \cdot 2^n 3^k,\ k, n \geqslant 1.$

Гёделев номер произвольной последовательности $e_0, \ldots, e_r$ выражений определим следующим образом: $g(e_0, \ldots, e_r) = 2^{g(e_0)} \cdot 3^{g(e_1)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(e_r)}$.

19. Непротиворечивое полное расширение непротиворечивой теории 1-го порядка.

Теорема 29.11 (о непротиворечивости). Множество формул узкого исчисления предикатов семантически непротиворечиво тогда и только тогда, когда оно синтаксически непротиворечиво

20. Существование счётной модели для непротиворечивой теории 1-го порядка.

Теорема 29.12 (о непротиворечивости). Множество формул узкого исчисления предикатов синтаксически (дедуктивно) непротиворечиво тогда и только тогда, когда оно имеет модель.

21. Теорема Гёделя о полноте ИП.

Теорема 29.13 (теорема адекватности). *Формула F синтаксически выводима из множества формул Φ тогда и только тогда, когда она семантически выводима из Φ:* $\Phi \vdash F \Leftrightarrow \Phi \models F$.

Если теорема оправданности означала, что при выборе аксиом и правил вывода мы не были слишком щедры (настолько, что сможем доказать лишь общезначимые формулы), то обратная теорема — теорема адекватности — означает, что при этом выборе мы не были и излишне скупы (ровно настолько, что сможем доказать всякую общезначимую формулу).

Заметим, что нетрудно показать, что теорема о существовании модели вытекает из теоремы адекватности. В самом деле, предположим, что Φ — непротиворечивое множество формул, не имеющее модели. Тогда ясно, что для любой формулы F справедливо семантическое следование $\Phi \models F$. В силу теоремы адекватности отсюда следует, что $\Phi \vdash F$ для любой F, что означает противоречивость множества Φ, в противоречие с условием.

Теорема 29.14 (теорема Гёделя о полноте ФИП). *Класс доказуемых замкнутых формул совпадает с классом общезначимых (или тождественно истинных) формул:* $\vdash F \Leftrightarrow \models F$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно вытекает из предыдущей при $\Phi = \varnothing$.

Справедлива она и для открытых формул. В самом деле, если $\models F(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — свободные предметные переменные в формуле F, то в силу определения квантора общности это будет равносильно тому, что $\models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(F(x_1, \ldots, x_n))$. По теореме 29.14 это равносильно тому, что $\vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(F(x_1, \ldots, x_n))$. В силу свойств выводимости последнее утверждение равносильно тому, что $\vdash F(x_1, \ldots, x_n)$.

22. Интуитивное понятие алгоритма. Основные черты алгоритмов. Интуитивное понятие вычислимой арифметической функции.

1. Интуитивное определение алгоритма

Определение 5.1. Под *алгоритмом* интуитивно понимается точная конечная система инструкций, определяющая дискретный (пошаговый), детерминированный (однозначно определенный) процесс, приводящий через конечное число шагов к результату, если он существует, и в противном случае, либо работает вечно, либо заходит в тупик.

Несмотря на остающиеся вопросы об уточнении понятия, интуитивное определение алгоритма, как правило, для каждого конкретного случая позволяет определить, можно ли считать данное описание алгоритмом.

23. Машина Тьюринга с неограниченной лентой. Вычислимость на машине Тьюринга функций, определённых на множестве натуральных чисел. Тезис Тьюринга.

2. Машины Тьюринга (**1936 г.)**

Определение 5.2. Под *машиной Тьюринга (МТ)* понимают конечное множество команд (программу), которое составляется из двух алфавитов: внешнего: $A=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ и внутреннего: $Q=\{q_0, q_1, ..., q_m\}$.

При этом алфавитом A заполняется потенциально бесконечная лента, разбитая на клетки, т.е. в данный дискретный момент времени, имеющая конечное число клеток, но в каждый следующий момент может расширяться (приписать клетку) как слева, так и справа. При этом пустая клетка считается заполненной пустым символом a_0.

Алфавит Q характеризует внутреннее состояние машины, в котором она находится в некоторый дискретный момент времени, обозревая при помощи читающей головки, символ из A в некоторой конкретной ячейке. Состояние q_1 будем считать начальным, q_0 – заключительное состояние.

Определение 5.4. Слово Pq_iS называется *конфигурацией*, которая означает, что в данный дискретный момент времени, находясь в состоянии q_i, читающая головка воспринимает первый символ слова S.

Определение 5.5. Конфигурация называется *начальной*, если читающая головка обозревает последний непустой символ (слева направо) в состоянии q_1, и заключительной, если читающая головка обозревает последний непустой символ (слева направо) в состоянии q_0.

Пример 5.1. Рассмотрим МТ, состоящую из множества команд:

$$T=\{q_1 1 q_2 1R,\ q_2 0 q_3 0R,\ q_3 0 q_0 1\}$$

Посмотрим, как работает машина Тьюринга, преобразуя слово 101, т.е.

$$A=\{0, 1\},\ Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

q_1

1	0	1

q_2

1	0	1	0

q_3

1	0	1	0	0

q_0

1	0	1	0	1

Запишем преобразование при помощи конфигураций

$$10q_1 1 \to 101q_2 0 \to 1010q_3 0 \to 1010q_0 1.$$

Пример 5.2. Рассмотрим МТ с внешним алфавитом $A=\{0, 1, *\}$, алфавитом внутренних состояний $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ и программой:

$$q_1 1q_2 0L,\ q_2 1q_2 1L,\ q_2 {*} q_2 {*} L,\ q_2 0q_3 1R,\ q_3 1q_3 1R,\ q_3 {*} q_3 {*} R,\ q_3 0q_1 0L,\ q_1 {*} q_0 0L,$$

которую запишем в виде таблицы:

	q_1	q_2	q_3
0		$q_3 1R$	$q_1 0L$
1	$q_2 0L$	$q_2 1L$	$q_3 1R$
*	$q_0 0L$	$q_2 {*} L$	$q_3 {*} R$

Посмотрим, в какое слово преобразует машина слово $111{*}1q_1 1$, находясь в стандартной начальной конфигурации:

$$111{*}1q_1 1 \to 111{*}1q_2 10 \to 111q_2{*}10 \to 11q_2 1{*}10 \to 1q_2 11{*}10 \to q_2 111{*}10 \to$$

$$\to q_2 0111{*}10 \to 1q_3 111{*}10 \to 11q_3 11{*}10 \to 111q_3 1{*}10 \to 1111q_3{*}10 \to 1111{*}q_3 10 \to$$

$$\to 1111{*}1q_3 0 \to 1111{*}q_1 10 \to \to 1111q_2{*}00 \to 111q_2 1{*}00 \to 11q_2 11{*}00 \to$$

$$\to 1q_2 111{*}00 \to q_2 1111{*}00 \to q_2 01111{*}00 \to 1q_3 1111{*}00 \to 11q_3 111{*}00 \to$$

$$\to 1111q_3 1{*}00 \to 11111q_3{*}00 \to 11111{*}q_3 00 \to 11111q_1{*}00 \to 1111q_0 10$$

Говорят, что данная *МТ* вычисляет функцию сложения, т.к. начальную стандартную конфигурацию для аргументов данной функции переводит в заключительную стандартную конфигурацию, воспринимающую при помощи читающей головки значение данной функции.

Таким образом, функция сложения вычислима по Тьюрингу.

Определение 5.6. Под *композицией машин Тьюринга* G и H понимается машина Тьюринга, обозначаемая $G \cdot H$, у которой заключительное внутренне состояние G совпадает с начальным внутренним состоянием H.

Для построения машин Тьюринга используются основные машины Тьюринга:

$\boldsymbol{O}$: $q_\alpha\, 01^x0 \to q_\beta\, 0\, 0^x0;$

$\boldsymbol{A}$: $q_\alpha\, 001^x0 \to q_\beta\, 01^x00;$

$\boldsymbol{B}^+$: $q_\alpha\, 01^x0 \to 01^x\, q_\beta\, 0;$

$\boldsymbol{B}^-$: $01^x\, q_\alpha\, 0 \to q_\beta\, 01^x\, 0;$

$\boldsymbol{C}$: $q_\alpha\, 01^x0 \to 01^x\, q_\beta\, 01^x0;$

$\boldsymbol{D}$: $01^x\, q_\alpha\, 0\, 1^y0 \to 01^y\, q_\beta\, 01^x0.$

Пример 5.3. Построим машину Тьюринга двойного копирования:

$$K_2:\ q_\alpha\, 01^x\, 01^y0 \to 01^x\, 01^y\, q_\beta\, 0\, 1^x\, 01^y0.$$

Решение.

$$q_\alpha\, 01^x\, 01^y0 \xrightarrow{B^+} 01^x\, q\, 01^y0 \xrightarrow{D} 01^y\, q\, 0\, 1^x0 \xrightarrow{C} 01^y\, 01^x\, q\, 01^x\, 0 \xrightarrow{B^-}$$

$$\xrightarrow{B^-} 01^y\, q\, 01^x\, 01^x0 \xrightarrow{D} 01^x q\, 01^y01^x0 \xrightarrow{B^+} 01^x\, 01^y q01^x0 \xrightarrow{D} 01^x\, 01^x q01^y\, 0 \xrightarrow{C}$$

$$\xrightarrow{C} 01^x01^x\, 01^y\, q\, 01^y \xrightarrow{B^-} 01^x\, 01^x q01^y\, 01^y \xrightarrow{D} 01^x\, 01^y\, q\, 01^x\, 01^y.$$

Таким образом, $K_2{:}(B^+DCB^-D)^2$.

Определение 5.7. Считается, что МТ *правильно вычисляет функцию*, если при необходимости протягивает ленту только влево, то есть приписывает новые ячейки только справа.

Все основные (элементарные) МТ являются правильно вычислимыми.

Определение 5.7. Числовая функция, определенная на множестве N и принимающая те же значения, называется *вычислимой*, если существует алгоритм, который для любого значения аргумента из области определения функции вычисляет ее значение.

Тезис Тьюринга.

Числовая функция вычислима тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу, то есть существует МТ, вычисляющая ее значения.

При помощи машины Тьюринга получаем точное определение алгоритма.

24.Операции над машинами Тьюринга.

Определение 5.3. Команды МТ имеют 3 вида:

1. $q_i a_k q_j a_l$, которая указывает, что машина находясь в состоянии q_i и обозревая при помощи читающей головки ячейку с символом a_k, переходит в состояние q_j, , заменяет a_k на a_l, оставаясь обозревать ту же ячейку.
2. $q_i a_k q_j a_l$, которая указывает, что машина находясь в состоянии q_i и обозревая при помощи читающей головки ячейку с символом a_k, переходит в состояние q_j, , заменяет a_k на a_l, сдвигаясь на одну ячейку влево.
3. $q_i a_k q_j a_l$, которая указывает, что машина находясь в состоянии q_i и обозревая при помощи читающей головки ячейку с символом a_k, переходит в состояние q_j, заменяет a_k на a_l, сдвигаясь на одну ячейку вправо.

25.Нормальные алгоритмы Маркова.

Определение 5.8. *Нормальным алгоритмом Маркова* (НАМ) называется функциональная схема, то есть конечная упорядоченная система марковских подстановок (формул)

$$R_1 \to Q_1,\ R_2 \to Q_2, \ldots, R_n \to Q_n,$$

где R_i, Q_i $(i=1,\ldots,n)$ – слова в алфавите $A=\{a_1,\ldots a_n\}$, для преобразования некоторого слова R.

При этом к слову R применяется первая формула $R_1 \to Q_1$, по которой в слове R самое первое (слева направо) вхождение подслова R_1 (если имеется) заменяется на слово Q_1. Если формула $R_i \to Q_i$ заключительная, то есть после неё никакая формула не применима, то она обозначается $R_i \to\cdot Q_i$.

К полученному слову R' (и ко всем последующим) преобразования также производятся начиная с первой формулы. Если она не применима, то применяют следующую и т.д.

Нормальный алгоритм преобразует входные слова в алфавите A в выходные слова в том же алфавите.

Таким образом, процесс построения выходного слова Q по входному слову R состоит в последовательном построении слов $U_0, \dots U_s$, где $U_0=R$, $U_s=Q$, слово U_{i+1} получается из слова U_i заменой слова R_j на слово Q_j, где j-наименьшее из чисел $1, \dots, k$ такое, что слово R_j входит в качестве подслова в слово U_i .

Определение 5.9. Слово Q считается результатом применения нормального алгоритма к слову R. Если соответствующего слова Q не существует, то говорят, что нормальный алгоритм неприменим к слову R.

Предполагается наличие пустого символа Δ, который как будто имеется в любом месте слова.

Пример 5.4. Рассмотрим НАМ с алфавитом $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и функциональной схемой

$$\begin{cases} a_1 \to \Delta, \\ a_2 \to \Delta, \\ \quad \dots \\ a_n \to \Delta, \\ \Delta \to \cdot\, \Delta. \end{cases}$$

Тогда каждое слово в алфавите A преобразуется в пустое. Таким образом, НАМ вычисляет нуль функцию.

Определение 5.10. В общем случае, нормальный алгоритм над алфавитом $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ задает n-местную целочисленную неотрицательную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если для любых натуральных $x_1, \dots, x_n$ он преобразует слово $a_1^{x1} * \dots * a_n^{xn}$ в слово $a_{n+1}^{f(x1, \dots, xn)}$.

Определение 5.11. Функции, задаваемые нормальными алгоритмами, называются *вычислимыми по Маркову* или нормально вычислимыми.

Пример 5.5. Для функции следования, преобразующей аргумент x в алфавите $A=\{0,1,\dots,9\}$ в $x+1$ построим НАМ при помощи расширения алфавита A, то есть в алфавите $B=A\cup\{\alpha,\beta\}$.

$$\begin{cases} \alpha x \to x\alpha, x \in A, \\ x\alpha \to x\beta, x \in A, \\ x\beta \to \cdot\, (x+1), x \in A \setminus \{9\}, \\ 9\beta \to \beta 0, \\ \beta \to \cdot\, 1, \\ \Delta \to \alpha. \end{cases}$$

Например, для 123 имеем: $123 \to \alpha 123 \to 1\alpha 23 \to 12\alpha 3 \to 123\alpha \to 123\beta \to \cdot 124$.

Для 129 имеем: $129 \to \alpha 129 \to 1\alpha 29 \to 12\alpha 9 \to 129\alpha \to 129\beta \to 12\beta 0 \to \cdot 130$.

Таким образом, функция следования является нормально вычислимой.

Тезис Маркова (принцип нормализации)

Числовая функция вычислима тогда и только тогда, когда она вычислима по Маркову, то есть нормально вычислима.

Таким образом, получаем уточнение понятия алгоритма при помощи нормального алгоритма Маркова.

26. Оператор подстановки, оператор примитивной рекурсии, оператор минимизации, определение и свойства.

Рекурсивные функции (**А. Чёрч, 1937г.)**

Рассматриваются три исходных функции:

1. $S(x) = x+1$ – функция следования,
2. $0(x) = 0$ – нуль-функция,
3. $J_k^n(x, x, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = x_k$ – функция индивидуализации (функция проектор) или функция выделения

и три оператора:

1. Оператор *суперпозиции* (подстановки), определяющий n-местную функцию f при помощи m-местной функции ψ и m n-местных функций

$$f_1, \ldots, f_m$$

следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \psi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

2. Оператор *примитивной рекурсии*, определяющий $n+1$ –местную функцию φ при помощи n-местной функции f и $n+1$ –местной функции g следующим образом:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, 0)= f(x_1, ..., x_n)$$

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y+1)=g(x_1, x_2, ..., x_n, y, \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y))$$

3. Оператор *минимизации* (μ-оператор), определяющий $n+1$ – местную функцию f при помощи двух $n+1$ – местных функций f_1 и f_2 следующим образом:

$$f(x_1, x_2,..., x_n)= \mu_y \mid \quad f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y)= f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y),$$

то есть y - является наименьшим аргументом, для которого они совпадают:

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, 0)\neq f_2(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$$

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, 1)\neq f_2(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$$

....

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y\text{-}1)\neq f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y\text{-}1)$$

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y)=f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y).$$

27.Примитивно и частично рекурсивные функции, их свойства. Тезис Черча.

Определение 5.12. Функция f называется *примитивно-рекурсивной*, если существует конечная последовательность функций $f_1, f_2, ..., f_n,(f_n=f)$ такая, что для любого $i=1,..., n$ функция f_i является:

1. либо исходной функцией;
2. либо f_i получена из предыдущих при помощи оператора суперпозиции (подстановки) и оператора примитивной рекурсии.

Определение 5.13. Функция f называется *частично-рекурсивной*, если существует конечная последовательность функций $f_1, f_2, ..., f_n, (f_n=f)$ такая, что для любого $i=1,..., n$ функция f_i является

1. либо исходной функцией;
2. либо f_i получена из предыдущих при помощи оператора суперпозиции (подстановки), оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации (μ-оператора)).

Таким образом, всякая примитивно-рекурсивная функция является частично-рекурсивной.

Пример 5.6.

Операция сложения является примитивно-рекурсивной функцией $f(x,y)$, так как сложение определяем следующим образом:

$f(x,0)=x+0=x$

$f(x,y+1)=x+(y+1)=(x+y)+1$, то есть получаем

1. $f(x,0)=J_1^1(x)$
2. $f(x,y+1)=S(f(x,y))$

Таким образом, функция сложения является примитивно-рекурсивной функцией, т.к. получается из исходных функций: функции-проектора и функции следования при помощи оператора примитивной рекурсии.

Пример 5.7.

Функция $f(x)=\mu_y|y-x=1$ не определена при $x=1$, так как нахождение минимального y производится последовательной подстановкой $y = 0, 1, \dots ,$ пока не выполнится равенство. Если до выполнения равенства встретится случай, когда выражение в уравнении не определено, значение оператора минимизации считается неопределенным. Здесь не определено значение 0 – 1.

Пример 5.8.

Функция $f(x,y)=x-y$ является частично-рекурсивной, так как может быть получена при помощи примитивно-рекурсивной функции сложения и оператора минимизации: $f(x,y)=\mu_z|y+z=x$.

Определение 5.14. Всюду определённая частично-рекурсивная функция называется *рекурсивной*.

Часто в литературе рекурсивную функцию называют общерекурсивной функцией.

Тезис Чёрча.

Числовая функция вычислима тогда и только тогда, когда она является частично рекурсивной.

28. Теорема о вычислимости по Тьюрингу всякой частично рекурсивной функции.

Теорема 5.1.

Классы функций, вычисляемых по Тьюрингу, нормально вычислимых и частично рекурсивных функций совпадают.

Таким образом, имеем точное определение понятия алгоритма при помощи машины Тьюринга, нормальных алгоритмов Маркова и частично рекурсивных функций Чёрча.

5. Перечислимые и разрешимые множества

Определение 5.15. Подмножество M множества натуральных чисел N называется *разрешимым*, если существует алгоритм, который для любого x определяет $x \in M$ или $x \notin M$.

При этом имеется возможность рассмотреть характеристическую функцию.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0, x \notin M \\ 1, x \in M \end{cases}$$

Определение 5.16. Множество M является разрешимым множеством тогда и только тогда, когда его характеристическая функция χ_M является вычислимой функцией.

29. Теорема об объединении и пересечении рекурсивно перечислимых множеств

Определение 5.17. Если $M \subset N$, то оно называется *перечислимым*, если $M = \varnothing$ или, если оно есть область значений некоторой вычислимой функции.

Теорема 5.2.

Если M, L – перечислимые множества, то $M \cup L$, $M \cap L$ – перечислимые множества.

Доказательство.

По условию существуют вычислимые функции f и g, порождающие M и L. Тогда множество $M \cup L$ можно получить при помощи одновременного включения алгоритмов, вычисляющих f и g для последовательности $0, 1, 2...$.

Для образования множества $M \cap L$ последовательно применяем алгоритмы для вычисления функций f и g для последовательности *0, 1, 2...* , сравнивая значение одной функции с предыдущими значениями другой, чтобы в случае совпадений отправить это значение в $M \cap L$, если его ещё там не было. Таким образом, получаем перечислимость $M \cup L$ и $M \cap L$.

Теорема 5.3.

Множество M разрешимо тогда и только тогда, когда M и $\overline{\mathrm{M}}$ перечислимы.

Доказательство.

Если множество M разрешимо, то $\chi_{\mathrm{M}}(x)$ - является вычислимой, и тогда при помощи $\chi_{\mathrm{M}}(x)$ получаются функции f и g, порождающие множества M и $\overline{\mathrm{M}}$ следующим образом:

Если $\mathrm{M} \neq \varnothing$, то $\exists\, a \in \mathrm{M}$. Тогда, если $\chi_{\mathrm{M}}(x) = 1,$ то $\mathrm{f(x) = x}$; если $\chi_{\mathrm{M}}(x) = 0,$ то $\mathrm{f\,(x)} = a.$

Таким образом, M-перечислимо.

Если $\overline{\mathrm{M}} \neq \varnothing$, то $\exists\, b \in \overline{\mathrm{M}}$. Тогда,

$$\text{если } \chi_{\mathrm{M}}(x) = 1, \text{то } \mathrm{g(x)} = b;$$

$$\text{если } \chi_{\mathrm{M}}(x) = 0, \text{то } \mathrm{f\,(x)} = x.$$

Таким образом, $\overline{\mathrm{M}}$-перечислимо.

Если M и $\overline{\mathrm{M}}$ перечислимы, то есть вычислимые функции $\mathrm{f(x)}$ и $\mathrm{g(x)}$ задают множества M и $\overline{\mathrm{M}}$ соответственно, то для любого натурального k будем его сравнивать со значениями функций $f(x)$ и $\mathrm{g(x)}$, применяя их последовательно к ряду *0, 1, 2....* Если совпадение произойдёт при помощи функции $f(x)$, то $k \in$ M; если совпадение произойдёт при помощи функции $\mathrm{g(x)}$, то $k \in \overline{\mathrm{M}}$.

Таким образом, M - разрешимо.■

Из теоремы 5.3. имеем следующее утверждение.

*Следствие***.** Всякое разрешимое множество является перечислимым.

Однако обратное утверждение не верно, так как справедливо следующее утверждение:

30. Примеры неразрешимых алгоритмических проблем в традиционной математике (без доказательств):

Теорема 5.4.

Существует перечислимое множество, которое неразрешимо.

Доказательство.

В силу теоремы 5.3. для доказательства теоремы 5.4. достаточно указать перечислимое множество U такое, что $\overline{U}$ не перечислимо.

Заметим, что можно перенумеровать все пары натуральных чисел (диагональным методом).

(0, 0), (0, 1), (0, 2)...

(1, 0), (1, 1), (1, 2)...

(2, 0), (2, 1), (2, 2)...

…

То есть, располагая их следующим образом:

(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)...

При этом пара (m, n) будет иметь номер:

$$C(m, n)=\frac{m^2+2mn+n^2+3m+n}{2}$$

*Р*ассмотрим эффективное перечисление всех перечислимых множеств $M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots$, т.е. такое перечисление, что по каждому k можно однозначно восстановить M_k. Такое перечисление возможно (после уточнения алгоритма).

Тогда рассмотрим алгоритм для образования множества U, который на шаге с номером $C(m, n)$ проверит m-ый элемент множества M_n на случай совпадения его с n. Если он совпадает, то отправляется в U. Таким образом, $n \in U \Leftrightarrow n \in M_n$. При этом $\overline{U}$ отличается от каждого $M_к$ хотя бы одним элементом, то есть не является перечислимым. Тогда по теореме 5.3. множество U не является разрешимым.■

Получили доказательство аналога теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики.