**18.433 组合最优化**

椭球算法

*Oct 30, Nov 4* *授课教师：Santosh Vempala*

## 1 求解线性规划的算法

**问题 1.** 给定一个多面体$P$，记为$Ax \le b$，找一个$P$内的点。

处理这个问题之前，先给出一些定义。称一个实对称矩阵$A$是*正定*的，若对任意$x \neq 0$有$x^T Ax > 0$成立。如果$A$是正定的，那么存在一个可逆矩阵$P$，满足$A = P^T P$。设$D$是一个正定矩阵，考虑椭球体$\mathrm{Ell}(D,z) = \{x : (x-z)^T D^{-1}(x-z) \le 1\}$。令$\nu$表示描述$P$的一个顶点所需的最大位数，并设$R = 2^\nu$。用下面的方法来求解问题 1：

椭球算法
从椭球体$E_0 = \mathrm{Ell}(R^2 I, 0)$开始。
在第 i 步叠代中，检查$z_i$是否在$P$内。
- 是：输出$z_i$，作为一个可行点。
- 否：在$P$的约束条件中找到一个$z_i$不满足的约束$a_k \cdot x \le b_k$，把包含$E_i \cap \{x \mid a_k \cdot x \le a_k \cdot z_i\}$的最小体积椭球体记为$E_{i+1}$，递归。

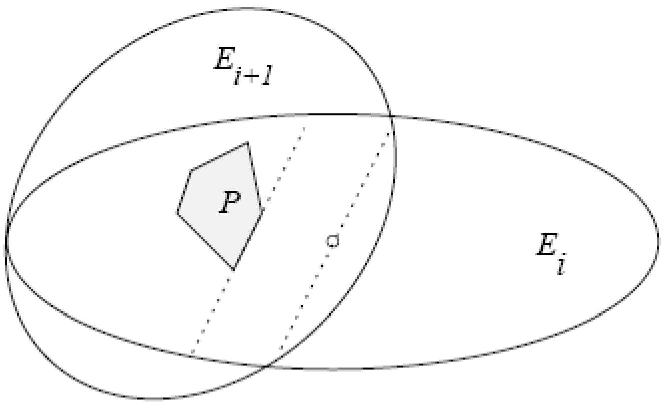


图 1：算法的一个循环

当找到一个点在$P$内时，算法停止。它一定会停止，因为在任意的第 i 步，$P$是$E_i$的一个子集，而且我们可以看出算法进行过程中$E_{i+1}$的体积是以一个可估计的速度在递降的。那一定存在某个 i 使$E_i$的体积小于$P$的体积，所以算法会在达到这个值之前停止。在下一节中我们来说明算法可以在多项式时间内完成。

## 2 时间限制

**引理 1.** 包含$\mathrm{Ell}(D,z) \cap \{x \mid a \cdot x \le a \cdot z\}$的最小体积椭球体为$E' = \mathrm{Ell}(D', z')$，其

中

$$z' = z - \frac{1}{n+1}\frac{Da}{\sqrt{a^T Da}} \tag{1}$$

$$D' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(D - \frac{2}{n+1}\frac{Daa^T D}{a^T Da}\right) \tag{2}$$

且

$$\frac{\mathrm{vol}(E')}{\mathrm{vol}(E)} \leq e^{\frac{-1}{2n+2}} \tag{3}$$

**证明梗概：**首先，注意 $\mathrm{Ell}(A,0)$ 可以从 $\mathrm{Ell}(I,0)$(单位球)中利用变换 $y = Bx$，其中 $A = B^T B$得到。这一点用下面的式子说明：

$$\begin{aligned} x^T x &\leq 1 \\ y^T (B^{-1})^T (B^{-1}) y &= x^T x \\ y^T (B^{-1})^T (B^{-1}) y &\leq 1 \\ y^T A^{-1} y &\leq 1 \end{aligned}$$

其中第一个和最后一个分别是单位球和$\mathrm{Ell}(A,0)$的定义。

我们先对单位球$E = \mathrm{Ell}(I,0)$来证明结果(1)和(2)。在这种情况下，(1)式简化为

$$z' = z - \frac{1}{n+1}\frac{a}{\sqrt{a^T a}}$$

而(2)式则简化为

$$D' = \frac{n^2}{n^2-1}(I - \frac{2}{n+1}\frac{aa^T}{a^T a})$$

因为$E$是一个球，所以我们可以旋转 $a$ 而没有任何影响。不妨假定 $a = [1, 0, \cdots, 0]^T$，

那么 $z' = [-1/(n+1), 0, \cdots, 0]^T$。

$$D' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(I - \frac{2}{n+1}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{n^2}{n^2-1}\begin{bmatrix} 1-\frac{2}{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

可以利用微积分得到 $z'$ 和 $D'$ 的简化形式。然后，利用一个从 $A$ 到单位球的转换（上面的 $B^{-1}$；这个转换用因子 det（B）改变了凸集的体积大小）就可以证明一般的情形。

有了(1)和(2)，接下来我们证明(3)。注意到

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Ell}(D',z'))}{\mathrm{vol}(\mathrm{Ell}(D,z))} = \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Ell}(I,0))}{\mathrm{vol}(\mathrm{Ell}(I,0))}\,\frac{\sqrt{\det(D')}}{\sqrt{\det(D)}}$$

我们仍通过转换取 E 为球，转换后的 $E'$ 仍然是包含 $E$ 的一半的最小椭球体。

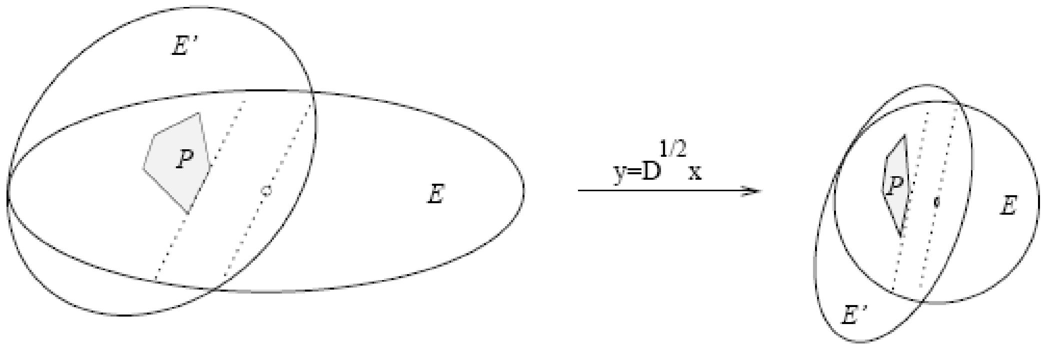


图 2：把 E 转换为球

那么，取 $D=I$，有 $\sqrt{\det(D')} = \mathrm{vol}(E')/\mathrm{vol}(E)$，现在就可以利用(2)了。

$$D' = \frac{n^2}{n^2-1}\left( I - \frac{2}{n+1}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right)$$

这个矩阵的行列式值为

$$\det(D') = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{vol}(E')}{\mathrm{vol}(E)} &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n/2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{(n-1)^{1/2}(n+1)^{1/2}} \frac{(n-1)^{1/2}}{(n+1)^{1/2}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\
&\le e^{\frac{1}{(n-1)(n+1)}\frac{(n-1)}{2}} e^{\frac{-1}{n+1}} = e^{\frac{-1}{2(n+1)}}
\end{aligned}
$$

（ 利 用 了 $e^x \ge 1+x$ ）

□

我们需要计算出 $P$ 到底要多小才能达到 $E'$ 减小次数的一个界限。下面通过寻找 $P$ 内的一个单形来说明 $\mathrm{vol}(P) \ge 2^{-2n\nu}$。显然单形体的体积小于或等于 $P$ 的体积。

目前 $P$ 存在 $n+1$ 个仿射独立的顶点，不妨设为 $x_0, x_1, \ldots, x_n$。

$$
\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(x_0,\ldots,x_n)) = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ & & \cdots & \\ x_0 & x_1 & & x_n \end{bmatrix}\right|
$$

顶点 $x_i$ 是约束 $Ax \le b$ 中 $A$ 的行子集 $C_i$ 的一个解。我们可以利用 Cramer 法则来求解，$x_{ij} = \frac{\det(C_{ij})}{\det(C_j)}$，其中 $C_{ij}$ 是用 $b$ 限制到 $C_i$ 对应行得到的向量代替 $C_i$ 中的第 i 列得到的矩阵。因此，

$$
\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(x_0,\ldots,x_n)) = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ \frac{\det C_{11}}{\det C_1} & \frac{\det C_{12}}{\det C_2} & \cdots \\ \frac{\det C_{21}}{\det C_1} & \frac{\det C_{22}}{\det C_2} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}\right|
$$

挪出分母，可得

$$
\frac{1}{n!}\left|\det\left(\begin{bmatrix} \det C_1 & \det C_2 & & \\ \det C_{11} & \det C_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\det C_1} & & & \\ & \frac{1}{\det C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\det C_n} \end{bmatrix}\right)\right|
$$

$$\geq \frac{1}{n!} \frac{1}{\det(C_1)\det(C_2)\cdots\det(C_n)}$$

因为 $\det C_i \leq 2^{\nu}$，所以有 $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(x_0,\ldots,x_n)) \geq n^{-n}(2^{-\nu})^n \geq 2^{-2n\nu}$。

经过 i 步以后，$\mathrm{vol}(E_i) \leq (2R)^n e^{\frac{-i}{2n+2}}$。算法要在 $\mathrm{vol}(E_i) < \mathrm{vol}(P)$前停止，所以，

$$2^{(\nu+1)n} e^{\frac{-i}{2n+2}} < 2^{-2n\nu}$$

这就意味着 $i = \mathrm{O}(n^2\nu)$时算法停止。回顾前面，$\nu$要小于写出$\{A, b\}$的任意$n \times n$子阵所需的位数与 logn 位数之和。因此，叠代的次数为 $\mathrm{O}(n^2\langle C, d\rangle)$。如果使用 L 进制数，那么$\langle C, d\rangle = \mathrm{O}(n^2 L)$。而要检查一个点的有效性，需要检查$P$的每一个约束条件，这需时$\mathrm{O}(mn)$。这个控制了计算最小椭球体所需要的时间。所以，结束算法需要的总时间最多为 $\mathrm{O}(mn^5 L)$。