18．433 组合最优化

匹配多胞形：二部图

9 月 18 日　　授课教师：*Santosh Vempala* 教授

一个匹配 M 对应于一个大小为 $|E|$ 的向量 $\chi^M = (0,0,1,1,0...0)$，其中若 $e \in M$ 则 χ_e^M 取 1，否则取 0。令 $\mathcal{M}$ 表示所有对应于匹配的向量的凸包，即

$$\mathcal{M} = conv\{x = \chi^M \mid M \text{ is a matching}\}$$

将上述的整数限制放松后可得

$$P = \{x \mid \quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \; \forall v \in V\}$$

我们断言 $\mathcal{M} \subseteq P$. 注意到 $\mathcal{M}$ 是一个凸集，显然 P 也是一个凸集（因为约束条件都是线性的）。$\mathcal{M} = conv(x_1 \ldots x_N)$，其中 $x_1 \ldots x_N$ 都在 P 内，又因为 P 也是凸集，所以 $conv(x_1 \ldots x_N) \subseteq P$.

那什么时候 $\mathcal{M} = P$ 呢？这在一般情况下是不成立的。

$\mathcal{M}$ 的所有顶点都是 0-1 点。如果 P 的顶点是整数形式的，那一定也是 0 或 1，而且一定是一个匹配。那么 P 的顶点什么时候是整数形式呢？它们是 n 个无关方程的解，也是不能表示为其它两个不同点的凸组合的点。

定理 1. 如果 G 是一个二部图，那么 $\mathcal{M} = P$。

证明 I. 假设结论不成立，那么 P 中必有一个顶点不是整数形式的（由 $P \neq \mathcal{M}$ 得出）。取一个有最少非整数分量的非整数顶点 x，令 $G_x = (V, E_x)$，这个图仅有分数值的边。假设图中存在一个圈，它一定为偶长，因为图为二部图。令 ϵ 等于 min(a, 1-b), 这里 a (b)是圈中边权的最大（小）值。交替地给圈中的边加上或减去 ϵ 而其它边不变得到 $x' = x + \epsilon z$，这里沿着圈中的边 $z = (1,-1,1,-1 \ldots 1,-1)$ 而其它边上为 0。这样 x' 仍然满足 P 的约束条件，因此 $x' \in P$。接着令 $x'' = x - \epsilon z$，它也在 P 中，即 $x'' \in P$。注意到 $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$，即 x 是 P 中其它两个不同点的凸组合，因此它不可能是一个顶点。如果图中不含圈，那我们可以沿某条路运用同样的方法。 因此 P 的顶点是整数形式的，定理得证。 □

我们要注意到二部图中不含奇圈，而定理 1 的证明恰是利用了这个事实。定理中的证明技巧不能运用于奇圈，因为圈上某个顶点的顶点约束可能对 x' 或 x'' 不成立。

下面我们给出定理 1 的另一个证明，它是建立在多胞形顶点的另一个定义上的。

证明 II. 要证明如果 G 是一个二部图，那么 P 的所有顶点都是整数形式的。为此，我们可以把多胞体的顶点看作 n(这里 n 是空间的维数)个线性独立的超平面（即极大面）的一个解，这意味着它必须使 n 个线性无关的不等式（约束）成为等式。

我们可以通过用矩阵不等式表示给定的约束条件来描述 P：

$$P = \{x \mid Ax \le b\}$$

如果 y 是一个由约束矩阵 A 确定的多胞形的顶点，那么必存在 A 的一个行子阵 A_1 和相应的 $b_1 \subseteq b$ 满足

$$A_1 y = b_1$$

且

$$det(A_1) \neq 0$$

给定上面的系统，利用 Cramer 法则可以很容易的解出 y：

$$y_i = \frac{det(A_1^{(i)})}{det(A_1)} \quad ,$$

这里 $A_1^{(i)}$ 是用 b_1 代替 A_1 的第 i 列得到的矩阵。

问题是：这个顶点什么时候是整数形式呢？一个充分条件如下：

性质 2. 顶点 y 是整数形式的，如果上述公式中的分子是整数且 $det(A_i) = \pm 1$。

注意，条件要对任意的 $n \times n$ 子阵 A_1（ $det(A_1) \neq 0$）成立。第一个条件自然成立因为 A 是一个整数矩阵且 b 是一个整型向量。而要证明第二个条件，则需要下面的定义。

定义 3. 称一个矩阵是完全幺模的，如果它每一个子方阵的行列式值均为 0, 1 或 -1。

下面将说明给定多胞形的约束矩阵（定义如下）的确是完全幺模的，从而得出我们想要的结论。

矩阵的第一部分来自 P 的第二个约束集合：

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1$$

这就给出了图 G 的顶点-边关联矩阵 A_{adj}。它有 $|V|$ 行 $|E|$ 列，每个元素定义如下：

$$a_{ve} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ e \notin \delta(v) \\ 1 & \text{if } \ e \in \delta(v) \end{cases}$$

这里 $\delta(v)$ 是 v 的相邻点的集合。

我们还想把第一个约束集合 $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$ 放入形式 $A\mathbf{x} \leq b$ 中，这个可以利用负的单位矩阵。

因此，我们的约束矩阵 A 由两部分组成：

1、 上面是 $|V| \times |E|$ 阶的关联矩阵。
2、 下面是 $|E| \times |E|$ 阶的负单位矩阵。

引理 4. 如果 G 是一个二部图，那么约束矩阵是完全幺模的。

证明. 取 A 的任意 k 阶子方阵，我们对 k 进行归纳证明。

当 $k = 1$ 时，引理成立，因为由 A 的构造可知，其中每个元素均为 0 或 ± 1。
假设引理对 $k-1$ 阶子方阵成立。
考虑 k 阶子方阵 Q：

1、 如果 Q 中的每一行都全为 0，那么 $|Q| = 0$，结论得证。
2、 如果 Q 中的每一行仅有一个非零元素即 ± 1，那么可以在 1 或 -1 处展开，利用对 $k-1$ 阶子方阵的归纳假设，可以推出 $|Q| = 0$ 或 ± 1，结论得证。
3、 如果 Q 中的每一行都有不止一个非零元素，那么 Q 一定完全取自约束矩阵的上半部分 A_{adj}，因为下半部分是单位矩阵。但是，如果是这种情况，那由图的二分性可知，对应于 G 的顶点拆分，可以把 Q 的行分成两部分。而且，如果把每部分中的行相加会得到同一个向量，因为 E 中每条边的两个端点分别在两个部分中，因此每部分中每列均有一个 1。这就意味着 Q 是一个相关系统（非满秩的），所以 $|Q| = 0$。结论得证。

我们已经说明了 A 是完全幺模的，即证明了引理，那么可得 P 中的顶点的确是整数形式的，这就证明了 $P = \mathcal{M}$。

对完美匹配多胞形 $\mathcal{PM}(G)$，图 G 的完美匹配的凸包，也有类似的定理成立。需要对 P 做的唯一改变就是用等式替换每个顶点的不等式约束，即每个顶点处边的和等于 1。

对于非二部图情况又如何呢？显然同样的约束条件不再适用，因为有一个每边权重均为 $\frac{1}{2}$ 的三角形。在这种情况下，点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P(G)$，但不存在 G 的完美匹配，所以 $P(G) \neq \mathcal{M}(G)$。