18.433 组合最优化

分离谕示

11.6，11.13 *授课教师：Santosh Vempala*

在上一讲中，我们给出了求解线性规划问题的一个名为椭球算法的多项式算法。通过利用二进制搜索我们可以看到优化问题和可行问题是如何等价的。

在椭球算法中，首先考虑包含整个多面体 P 的一个初始椭球，如果这个椭球的中心 z 属于 P，那么可行性问题就解决了，算法结束。否则，我们需要找一个半空间 $a_k x \leq b_k$ 满足 P 位于半空间的内侧而 z 则位于其外侧。然后得到包含前面的椭球和这个半空间交集的另一个椭球。如此迭代直到找到多面体内的一个点或者推断出不存在这样的点。这里每次迭代时椭球体体积以 $e^{\frac{-1}{2n+2}}$ 递减。

在今天的课中，我们将看到椭球算法可以被应用于更广泛的情况中。主要的问题是回答：z 是否在 P 中，如果不在则要找到一个分离超平面。 解决这个问题的过程称为一个*分离谕示*。

考虑最小费用树形图问题：给定一个有向图 $G = (V, E)$，一个特殊顶点 $r \in V$ 和每条边 $(i, j) \in E$上的一个正的费用 c_{ij}，找一个费用最小的子图，使其包含从 r 到其它所有顶点的有向路。其中，子图的费用指其中每条边费用的和。这个问题看起来与最小生成树问题非常相似。

可以利用线性规划来解决这个问题。令 K 等于集合 $\{x^T \in R^{|E|} : T$ 是一个树形图$\}$的凸包，其中如果 $e \in T$ 则 $x_e^T = 1$，否则 $x_e^T = 0$。那我们的问题就转变为 *min*$\{c_{ij} x_{ij} : x \in K\}$。可以看出它的最优解与下面的问题相同：

$$\min\ c^T x$$

$$\forall S \subseteq V\ where\ r \in S \quad \sum_{i \in S, j \notin S, (i,j) \in E} x_{ij} \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

事实上，上面的条件就等价于存在着从 r 到其它顶点 $v \in V$ 的有向路。进一步，Edmonds 证明如果把最后一个约束放松为 $0 \leq x_{ij} \leq 1$，那么上述线性规划问题的可行解的集合刚好是 K。

现在我们有了一个具有指数个约束条件的线性规划。尽管如此，我们可以设计出运行时间为多项式的分离谕示。检查 $0 \leq x_{ij} \leq 1$ 很容易在多项式时间内完成，而测试第一个约束集合最多需要 $(n-1)$ 次最小割过程。把顶点 r 作为发点，每个顶点 $s \in V, s \neq r$ 作为收点，

而每个x_{ij}就作为最小割问题中边(i,j)的容量。检查最小割的容量是否小于 1，如果存在这样的割，也即有向割的值小于 1，那我们就找到了一个不满足的约束条件。

有了上面的事实，我们就可以利用椭球算法在多项式时间内解决最小费用树形图问题。

更一般的是*凸规划*问题：给定一个凸集K，找出K内的一个点x。要想用椭球算法来解决这个问题，首先需要一个相对于K的有界球，然后需要找一个分离谕示，最后找出K体积（或者包含于K内的球的半径）的一个下界。在这些任务中，寻找分离谕示经常是最困难的，而其它的通常情况下都很容易完成。对于前面的例子，包含坐标介于 0 与 1 之间的所有点的球就是初始球。如果初始球的半径是R而最终球的半径是r，那么初始椭球的体积是$f(n)R^n$而最终椭球的体积大于等于$f(n)r^n$ ($f(n)$是一个以维数为自变量的函数)。令 i 表示迭代的次数，则一定有

$$f(n)R^n e^{\frac{-i}{2n+2}} \geq f(n)r^n$$

从而 i 为$O(n^2\log(R/r))$。每次迭代中调用分离谕示一次，设其运行时间为$g(n)$，那么总的运行时间为$O(n^2\log(R/r)\cdot g(n))$。

考虑另一个可以运用椭球算法的问题，*最大独立集*问题，定义如下：给定图 $G=(V,E)$，寻找含最多顶点的子集$S\subseteq V$，满足S的顶点之间没有边。这个问题的整数规划(IP)形式如下：

$$\begin{aligned} & max\sum_i x_i \\ \forall(i,j)\in E \quad & x_i+x_j\leq 1 \\ & x_{ij}\in\{0,1\} \end{aligned}$$

且其松弛线性规划(LP)为

$$\begin{aligned} & max\sum_i x_i \\ \forall(i,j)\in E \quad & x_i+x_j\leq 1 \\ & 0\leq x_{ij}\leq 1 \end{aligned}$$

但是，$Opt(LP)/Opt(IP)$可能会很大。例如，对一个完全图，令所有的x_i取$1/2$可得最优值$Opt(LP)=n/2$，而$Opt(IP)=1$，此时，解决了线性规划问题甚至都没有给出整数规划最优解的一个好的近似。

让我们给线性规划增加另一个约束集合。注意到对每个奇圈C最多有$\frac{|C|-1}{2}$个顶点在独立

集中，新的线性规划(LP)如下：

$$
\begin{aligned}
max\sum_{i} x_i & & \\
\forall (i,j)\in E\ x_i + x_j &\leq& 1 \\
\forall \text{ odd cycles } \ C\ \ \sum_{i\in C} x_i &\leq& \frac{|C|-1}{2} \\
0 \leq x_{ij} &\leq& 1
\end{aligned}
$$

要注意，增加这个约束集合后，线性规划问题和整数规划问题仍然是不同的（反例留作习题）。

让我们为这些约束条件找一个分离谕示. 第一个和第三个集合的检验可以在多项式时间内完成。对第二个约束集合：在每条边 $(i,j)\in E$ 上定义 $y_{ij}=1-x_i-x_j$，那么它等价于对任意奇圈 C，$\sum_{(i,j)\in E(C)} y_{ij}\geq 1$。所以，通过寻找图 G 中的最小长度奇圈，就可以给出一个分离谕示.

接下来要说明最小长度奇圈可以在多项式时间内找到。为此，构造一个无向二分图 $G'=(V'=V_1\cup V_2, E')$，使得任意顶点 $i\in V$ 均对应到 $i_1\in V_1$ 且 $i_2\in V_2$。

对每条边 $(i,j)\in E$，也相应的在 E' 中增加两条边：(i_1,j_2) 和 (j_1,i_2)。可以看出，G 中的奇圈对应于 G' 中从 i_1 到 i_2 的路，而找出一条从 i_1 到 i_2 的最短路很容易在多项式时间内完成。所以我们有一个多项式时间的分离谕示。