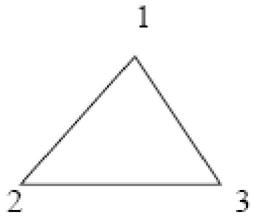
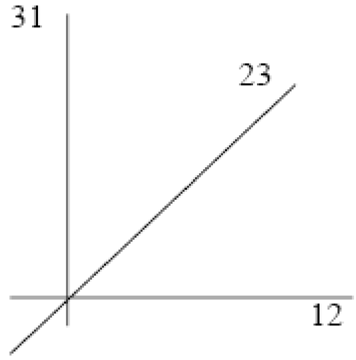
18．433 组合最优化

多面体组合学

9 月 16 日 授课教师：*Santosh Vempala* 教授

到目前为止我们都把图看作边和顶点的集合，即$G=(V,E)$。我们也可以把每条边看作一个轴。空间中的任意一点对应一个图。它的坐标决定边的权重。





这个空间中的点(1,0,1)对应一个仅有两条边出现（即权重大于 0）的图，边为(1,2)和(3,1)。那我们如何定义匹配？匹配也是一个点，其所有的坐标是 0 或 1。如果$M = e_1, ..., e_k$，则$X_m = (1, 0, 1, ..., 0, 1)$，其中第一个坐标为 1 意味着$e_1 \in M$，第二个坐标为 0 意味着$e_2 \notin M$，等等。

我们可以把匹配看作方程的解（如果它是一个点）。把$\mathbf{x} = (x_{e_1}, x_{e_2}, ..., x_{e_m})$看作图中所有边的一个向量，

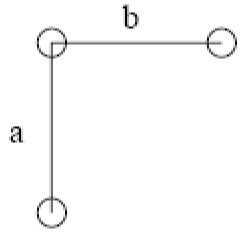
1、$x_e \in \{0,1\} \ \forall e \in E$

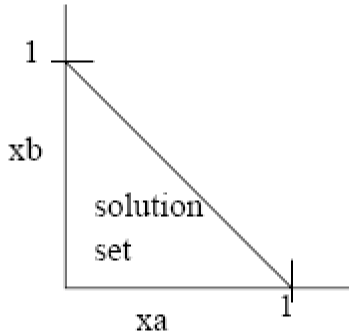
2、$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \ \forall v \in V$

论断 1. 满足上面两个方程的任一解是一个匹配。

证明. 如果一个顶点不止与一条边相关联那它就不是一个匹配。 □

约束(1)看起来是非常严格的。假设我们用限制条件$0 \leq x_e \leq 1$来代替它，那么就存在不是匹配的解。





考虑上方两条边的图，它的匹配是(0,1), (1,0)和(0,0)。注意到匹配限制了解的集合（也就是说，它们的凸包等于解集）。这个一定成立吗？“角”一定是匹配吗？

考虑 3 个顶点的完全图，其中每条边的权重均为 $\frac{1}{2}$。这就满足上面两个方程。这个形状的角是(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)和 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。最后一个角不是匹配，因此“角是匹配”并不是永远成立的。

线性代数和凸性回顾

- $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}^n$(每个 x_i 是有 n 个坐标的向量)。
- $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}$.
- $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_m x_m=\sum \lambda_i x_i$是一个*线性组合*。
- 在一个线性组合中若 $\sum \lambda_i = 1$，则称为*仿射组合*。
- 在一个仿射组合中若对 $\forall i$ 都有 $\lambda_i \geq 0$，则称为*凸组合*。

例如，给定两个点 x_1 和 x_2，那它们的凸组合是什么点呢？答案是它们之间的线段部分。那它们的仿射组合是什么点呢？是通过这两点的直线。那线性组合呢？是整个平面(在 3 维空间中由 x_1，x_2 和原点定义的平面)。

$x_1,\ldots,x_n$ 的*线性包*是向量 $\{\Sigma\lambda_i x_i \ : \ \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}\}$ 的集合。类似地，*仿射包*是 x_i 的所有仿射组合构成的向量的集合，*凸包*是 x_i 的所有凸组合构成的向量的集合。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中三个线性无关的点，它们的线性包是整个空间，仿射包是由这三个点确定的平面，凸包是由三个点确定的平面上以这三个点为顶点的三角形。一个线性包始终包含原点 $(\lambda_i=0)$。
集合 S 是*凸集*，如果 $\forall x,y\in S$，从 x 到 y 的直线段也包含在 S 中。也就是说，x 和 y 的任意凸组合仍然在这个集合中：$\lambda x+(1-\lambda)y\in S \ \forall\lambda, 1\geq\lambda\geq 0.$

可以证明，$x_1,\ldots,x_m$ 的凸包是包含它们的最小凸集。

*凸多胞形*是一个有限点集的凸包。它是一个有尖、有角的结构。*超平面*是集合 $\{x\in\mathbb{R}^n \ : \ a\cdot x=t\}$，其中 $a\in\mathbb{R}^n$，$t\in\mathbb{R}$。因此，超平面是由 (a,t) 决定的。*半空间*是位于一个超平面一侧的所有向量组成的集合，对某个 $a\in\mathbb{R}^n$，$t\in\mathbb{R}$，由 (a,t) 决定的半空间就是集合 $\{x : a\cdot x\leq t\}$。半空间是凸集吗？答案是肯定的，注意到 $a\cdot x\leq t$ 且 $a\cdot y\leq t$，则对任意的 $0\leq\lambda\leq 1$ 均有 $a\cdot(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq t$。易证两个凸集的交是凸集。*多面体*是有限个半空间的交。

下面的定理在多面体理论中扮演着一个重要的角色。

定理 2 (Minkowski-Weyl). 凸多胞形是多面体。

定义

- *满维数多面体*是存在内点（使所有的半空间不等式为严格不等式而非等式的点）的多面体。
- 描述一个满维数多胞形所需的半空间的最小集合称为它的*本性不等式*。*极大面*指多面体中使一个本性不等式成为等式的点的集合。
- 多面体的*顶点*或*极点*是集合中不能表示成两个其它点的凸组合的任意点。它是 n 个线性无关的半空间的唯一交点，也即，使得 n 个线性无关的本性不等式成为等式的点。
- 多面体的一个*面*是子集{x：x使本性不等式的某个子集成为等式}。*面的维数*指这个面的仿射包的维数，它等于 n－(满足的等式的个数)。所以，一个顶点的维数是 0，一个极大面的维数是 n-1。

如果一个多胞形的所有顶点的度数都相同，且每个极大面上的边数也相同，则称其为*正则多胞形*。接下来我们将证明在三维空间中存在五种正则多胞形（在对称的意义下），古希腊人称它们为正则固体。

用 f_i 表示多胞形中维数为 i 的面的个数，Euler 证明了下述恒等式：

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f_i = 1-(-1)^n$$

因此当 $n=3$时，$f_0-f_1+f_2=2$。我们可以在一个四面体上进行验证：
$f_0=4$（顶点）
$f_1=6$（边）
$f_2=4$（极大面）
所以上面的关系式成立。
用 v 表示每个顶点上的边数， e 表示每个极大面上的边数。

1. $f_1=\frac{ef_2}{2}$，因为每条边出现在 2 个极大面上。
2. 顶点个数为$f_0=\frac{2e}{v}$。
3. 由 Euler 公式，$f_0-f_1+f_2=2$。

综上可以推出

$$\frac{e}{v}f_2-\frac{e}{2}f_2+f_2=2$$

从而有

$$f_2=\frac{4v}{2e-(e-2)v}$$

这里$e \geq 3$，因为多胞体在 3 维空间中。

考虑$e = 3$的情况：

$$f_2 = \frac{4v}{6-v} \Rightarrow 1 \leq v \leq 5$$

因为$v \geq 3$，所以其可能取值为 3、4 和 5。另外，f_2必须是整数。这样我们得到f_2等于 4, 8 和 20，从而给出正则多胞形(f_0, f_1, f_2)的三个解：$(4, 6, 4)$，$(6, 12, 8)$和$(12, 30, 20)$。

接下来考虑$e = 4$的情况。此时$f_2 = \frac{4v}{8-2v}$，可得解$(8, 12, 6)$，再没有其它的解。当$e = 5$时，$f_2 = \frac{4v}{10-3v}$，仅有一个解$(20, 30, 12)$。当$e \geq 6$时无解。所以在 3 维空间中，仅有 5 个正则多胞形。