18．433 组合最优化

匹配多胞形：一般图

September 23 授课教师：*Santosh Vempala*

一个匹配 M 对应于一个大小为 $|E|$ 的向量 $\chi^M = (0,0,1,1,0...0)$，其中若 $e \in M$ 则 χ_e^M 取 1，否则取 0。令 $\mathcal{M}$ 表示所有对应于匹配的向量的凸包，即

$$\mathcal{M} = conv\{x = \chi^M \mid M \text{ is a matching}\}$$

将上述的整数限制放松后可得

$$P = \{x \mid \quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \ \forall v \in V\}$$

在上一讲中我们已经看到，对任意的二分图 G 有 $\mathcal{M}(G) = P$。而且要描述完美匹配多胞形 $\mathcal{PM}(G)$，仅需要把 P 中每个顶点处的不等式约束替换为等式。

对于非二分图情况又如何呢？显然同样的约束条件不再适用，因为有一个每边权重均为 $\frac{1}{2}$ 的三角形。在这种情况下，点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in P(G)$，但不存在 G 的完美匹配，所以 $P(G) \neq \mathcal{M}(G)$。

一般图的情况下，除了已经提到的约束条件

约束 1：$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$

约束 2：$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V$

以外还需要一个附加的约束条件，如下：

约束 3’：给定图 G 的一个子图，$S \subseteq V$，且满足 $|S|$ 是奇数，那么 S 中被添加到匹配中的边数限制为：

$$\sum_{e \in S} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}$$

考虑到 G 必须有偶数个顶点才可能存在完美匹配的事实，有一种方法可以较简单地叙述第三个约束集合。假设 $|V|$ 是偶数，那可以把 G 拆分成 S 和 $\overline{S}$，两者都含有奇数个顶点，可得：

$$\sum_{e\in S} x_e \le \frac{|S|-1}{2}$$

$$\sum_{e\in \overline{S}} x_e \le \frac{|\overline{S}|-1}{2}$$

从而，

$$\Rightarrow \sum_{e\in S, e\in \overline{S}} x_e \le \frac{|S|+|\overline{S}|}{2} - 1$$

因为我们仅考虑完美匹配，有

$$\sum_{e\in E} x_e = \frac{|V|}{2}$$

由上面两式可知，对完美匹配，约束 3’等价于下面的不等式：

约束 3：$\sum_{e\in(S,\overline{S})} x_e \ge 1$，对有奇数顶点的任意 S。

下面的 Edmonds 定理说明这三个约束条件决定任意图的完美匹配多胞形。

定理 1.*(Edmonds)*

$$P = \{x | x \text{ 满足约束 } 1, 2 \text{ 和 } 3\} = PM(G)$$

证明. 很容易得出 $PM(G) \subseteq P$，因为任意完美匹配都满足 P 的约束条件。

下面用反证法来证明 $P \subseteq PM(G)$。

假设 $P \not\subseteq PM(G)$。设 G 为最小（边数最少）的反例，则 P 中有 x 不在 $PM(G)$ 中，即 $x \notin PM(G)$。下面我们将从这两个假设：i) G 是最小的反例，ii) $x \notin PM(G)$ 出发来做一系列推理。

1、$0 < x_e < 1 \quad \forall\, e \in E$

假设对某个 e 满足 $x_e = 0$，那么我们就可以删掉这条边得到一个更小的反例 $G-e$，但这是不可能的，因为我们已经假定了 G 是最小反例。同样，如果对某个 e 满足 $x_e = 1$，那么它一定是图中的一个独立分支（由约束 2 可知与这条边关联的顶点肯定没有其它的相邻点）。但是如果是这种情况，我们删掉 e 的端点后仍然是一个反例，又得到一个矛盾。

2、G 中没有孤立顶点（见约束 3）。

3、G 中没有度数为 1 的顶点。

如果存在度数为 1 的顶点，那么与之相关联的边必须权重为 1，但我们已经在第一个推断中说明 $x_e = 1$是不可能的。因此每个顶点的度数至少为 2。

4、至少存在一个度数严格大于 2 的顶点。

假设不成立，也就是所有顶点的度数均为 2，那么图中存在某个不交圈的集合。对这样的图，很容易证明 $P = PM(G)$。

5、$|E| > |V|$

这个成立是因为

$$2|E| = \sum_v \deg(v) > 2|V| \Rightarrow |E| > |V|$$

注意到 P 和 $\mathcal{PM}(G)$都在 $m = |E|$维空间中，因此 P 的每个顶点都是 m 个独立约束的唯一解，所以顶点 x 也一定是 m 个等式的解。这 m 个等式来自我们的约束条件集：

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 \quad \forall\, e \in E \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e &= 1 \quad \forall\, v \in V \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e &\geq 1 \quad \forall\, S \subseteq V,\, |S| \text{ is odd} \end{aligned}$$

观察这三个约束，可以看出从第一个得不到等式约束，而从第二个可以得到 $n = |V|$ 个等式约束。但 $m > n$，所以我们一定从第三个中获得了等式。

$$\Rightarrow\ \exists\, W, \quad \sum_{e \in \delta(W)} x_e = 1, \quad |W| \text{ odd and } \geq 3$$

考虑 $(W, \overline{W})$割，这个割中所有边权重之和为 1。把 $\overline{W}$ 收缩为单个顶点 u后，得到新图 G'，图中的边权重新定义如下：

$$x'_e = \begin{cases} x_e \ \text{ if } e \in E(W) \\ x_{wu} = \sum_{v \in \overline{W}} x_{wv} \ \text{ if } wv \in (W, \overline{W}) \end{cases}$$

也就是说，割外的边 x_e 保持不变，而所有的 x_e 都是割中源自 W 中同一个顶点的所有边权相加之和。

容易验证向量 x' 满足图 G' 的三个约束条件。因此如果 M' 是 G' 的匹配，其中关联向量为 $\chi^{M'}$，则

$$x' \in PM(G')$$
$$\Rightarrow x' = \sum_{M'} \lambda_{M'} \chi^{M'}$$

这是一个凸组合，所以 $\lambda_{M'} \geq 0$ 且 $\sum_{M'} \lambda_{M'} = 1$。

同上，但收缩 W 而非 $\overline{W}$，得到新图 G''。我们也可以得到一个 $x'' \in PM(G'')$，所以

$$x'' = \sum_{M''} \alpha_{M''} \chi^{M''}$$

利用 x' 和 x'' 的分解式，我们可以直觉地描述出如何把 x 写成原图 G 的完美匹配的凸组合（那就与关于 G 的初始假设相矛盾了）。

基本思想是：对某个大整数 K，Kx' 和 Kx'' 可以看作是对应它们各自的匹配 M' 和 M'' 的 K 个关联向量的和。然后，通过寻找其在 G 中相应的匹配，可以把它们组合，给出 G 中的完美匹配。然后就可以说明 x 是 G 中完美匹配向量的一个凸组合了。

首先，我们已经知道

$$\Rightarrow x' = \sum_{M'} \lambda_{M'} \chi^{M'} \tag{1}$$
$$\Rightarrow x'' = \sum_{M''} \alpha_{M''} \chi^{M''} \tag{2}$$

下面用(1)和(2)说明 x 是完美匹配的一个凸组合。

对于 G 的每个完美匹配 M，可以对应到 G' 和 G'' 中的完美匹配 M' 和 M''。下面我们利用它们在 x' 和 x'' 中的系数来定义 M 的系数。

要证 x 是一个凸组合，我们可以先找到一个分解，然后说明它的确是一个凸组合。令

$$M = M' \cup M'' \text{ have weight} = \left(\frac{\lambda_{M'}\alpha_{M''}}{x_e}\right)$$

有了这个凸乘子的集合，x 将会是一个凸组合。取 $e \in M' \cap M''$，有

$$x_e = \sum_{M':\, e\in M'} \lambda_{M'} = \sum_{M'':\, e\in M''} \alpha_{M''}$$

下面的论断就给出了我们想要的结果。

论断 2.

$$x = \sum_{e\in(W,\overline{W})} \sum_{M:\, e\in M} \left(\frac{\lambda_{M'}\alpha_{M''}}{x_e}\right) \chi^M$$

证明. 考虑一条边 f。首先假定$f \in E(W)$，那么

$$\begin{aligned}
x_f &= \sum_{e\in(W,\overline{W})} \frac{1}{x_e} \sum_{M\colon e\in M} \lambda_{M'} \alpha_{M''} \chi_f^M \\
&= \sum_{e\in\delta(W)} \frac{1}{x_e} \sum_{M\colon e,f\in M} \lambda_{M'} \left(\sum_{M''\colon e\in M''} \alpha_{M''} \right) \\
&= \sum_{e\in\delta(W)} \sum_{M'\colon e,f\in M'} \lambda_{M'} \\
&= \sum_{M'\colon f\in M'} \lambda_{M'} \\
&= x_f
\end{aligned}$$

当$f \in E(\overline{W})$或$f \in (W, \overline{W})$时同理可证。 $\square$

我们已经证明了x是一个完美匹配的凸组合，这就意味着它本身也是一个完美匹配。但是这与我们前面的假定$x \notin PM(G)$相矛盾，从而与初始假设$P \not\subseteq PM(G)$矛盾。所以，$P \subseteq PM(G)$，定理得证。 $\square$