

## 作业3 凸规划

指导教师: Santosh Vempala

- 1、一肉产品加工厂每天生产 480 根火腿, 400 五花肉和 230 根野餐火腿。每种产品都可以新鲜或熏制后卖出。一个正常的工作日可以熏制的火腿、五花肉和野餐火腿的总数为 420。此外, 加班可以熏制 250 个, 只是成本稍高。各自的利润如下:

	新鲜	熏制 (正常)	熏制 (加班)
火腿	\$ 8	\$ 14	\$ 11
五花肉	\$ 4	\$ 12	\$ 7
野餐	\$ 4	\$ 13	\$ 9

制定产品的生产计划使总利润最大化, 并证明它是最优解。

- 2、给出导致单纯形算法产生循环的一个转轴规则, 并举例说明。
- 3、证明 Gordon 引理: 对任意的  $n \times n$  矩阵  $A$ , 下列必有其一成立

- $Ax = 0$ , 对某个  $x \neq 0, x \geq 0$
- $y^T A < 0$ , 对某个  $y$

这里  $x$  和  $y$  是  $R^n$  中的向量。并给出这个引理的一个几何解释。

- 4、设  $K$  是一个凸体 (一个闭的有界凸集),  $x$  是一个点。证明存在唯一的点  $y \in K$ , 使  $x$  到  $K$  中点 (假设存在这样的点) 的欧氏距离最短。
- 5、体积计算:

- (a) 设  $S$  是  $R^n$  中的一个凸体,  $A$  是一个  $n \times n$  的非奇异矩阵 (即  $\det(A) \neq 0$ )。证明集合  $\{Ax \mid x \in S\}$  也是凸的且它的体积为  $|\det(A)| \cdot \text{vol}(S)$ 。

- (b)  $R^n$  中的椭球指点的集合  $\{x \mid (Ax)^T (Ax) \leq r^2\}$ , 其中  $A$  是一个  $n \times n$  的非奇异矩阵。

证明椭球的体积为  $\text{vol}(B_{n,r}) / |\det(A)|$ , 这里  $B_{n,r}$  指半径为  $r$  的  $n$ -维球。

- 6、给定一个完全图  $G = (V, E)$ , 任意两个顶点  $i, j \in V$  间有正的长度  $w_{ij}$ , 旅行售货员问题是寻找图  $G$  的长度最短的哈密顿圈。

- (a) 给出求解旅行售货员问题的整数规划。

- (b) 放松整数约束得到一个线性规划。证明这个线性规划可以利用分离谕示在多项式时间内完成。