18.433 组合最优化　　　　　　　　　　　上交日期：9.30

作业 1　　匹配理论

指导教师：Santosh Vempala

1、 证明：一个图是二部图当且仅当图中不含奇圈。

2、 考虑下面的寻找最大匹配的 *贪心* 算法：选择任意一条边作为初始匹配。寻找另一条边使其和当前匹配没有共同顶点，如果找到，则将其添加到当前匹配。重复上述过程，直到没有边被添加。

（a） 在一个有 n 个顶点 m 条边的图上，上述算法的运行时间是多少？

（b） 给出一个上述算法找不到最大匹配的具体实例。

（c） 证明此算法得到的匹配边数至少为最大匹配边数的一半。

3、 接下来考虑一个相似的算法，在边赋权图中寻找 *最大权* 匹配：贪婪地添加可以被添加到当前匹配中的所有边中权重最大的一条，直到没有边可以添加。证明这个算法得到的匹配的权重至少为最优解的一半。

4、 如果图的属性 P（如二部性，完美匹配的存在性，哈密顿圈的存在性）的真假能够被*有效地* 证明，则称此属性具有*好的描述*。这意味着如果图有n个顶点，则属性真假性的证明长度至多为n的多项式。在授课过程中我们看到对二部图G，“G存在完美匹配”有一个好的描述。下面哪些属性具有好的特性描述？（证明你的结论）

（a）G是连通的。

（b）G是欧拉图，即G存在一条途径经过每个顶点且只经过一次。

（c）G是 2-色图，即可以对G的每个顶点赋两种颜色之一，保证每条边的两个顶点不同色。

5、回忆在二部图中寻找最大匹配的匈牙利算法。为了发现交错路，算法使用了一个交错森林。另外，算法的改进版本在每个寻找可增广路的阶段增广不交增广路的一个最大集合。证明最短可增广路的长度在每个阶段是递增的。

6、设图$G=(V,E)$没有孤立点。图G的*顶点覆盖* 是指一个顶点子集$U\subseteq V$，满足G中任一边至少有一个端点含于U中。*独立集* 是指子集$U\subseteq V$，满足G中没有一条边的两个顶点均在U中。*边覆盖* 指边的子集F，满足G的任一顶点均与F中的一条边邻接。令

$\alpha(G) = G$ 的最大独立集的大小

$\rho(G) = G$ 的最小边覆盖的大小

$\tau(G) = G$ 的最小顶点覆盖的大小

$\nu(G) = G$ 的最大匹配的大小

证明 $$\alpha(G)+\tau(G)=|V|=\nu(G)+\rho(G).$$

提示：对第一个等式，可以在图G的独立集和顶点覆盖之间建立一个对应关系。而第二个等式，先证明不等式 $|F| \leq |V| - \nu(G)$，其中F是由最大匹配得到的边覆盖，然后证明$|M| \geq |V| - \rho(G)$，其中M是由最小边覆盖得到的匹配。

7、图的*独立集* 指任意两个顶点之间不存在边的顶点的集合。

（a）给出一个整数规划，使其解为图$G=(V,E)$的独立集。

（b）接下来考虑放松整数规划后得到的多胞体，证明如果图G是二部图，那么这个多胞体的顶点均为整数。