18．433 组合最优化

线性规划

Oct　14 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　授课教师：*Santosh Vempala*

线性规划是研究在一组线性约束之下，某个线性目标函数的最小值或最大值问题。

我们来看最大流问题：

$$G = (V, E)$$

在这个问题中，用 u_{ij} 表示容量， x_{ij}表示流。一个流必须满足如下条件：

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall\ i, j \in E$$
$$\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji} \qquad \forall\ v \in V \setminus \{s, t\}$$

注意在这里我们的约束条件都是线性的，因为它们都形如：

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \gtreqqless b$$

而我们想要找到$\sum_j x_{sj} - \sum_j x_{js}$的最大植。

我们再来看一下最小费用流问题。约束条件为：

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij},$$
$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b(i) \qquad \forall\ i \in V.$$

目标函数为：

$$\sum_{i,j \in E} c_{ij} x_{ij}.$$

而我们的目的是使目标函数最小化。

最大匹配问题具有下列约束条件：

$$0 \leq x_e \leq 1 \qquad \forall\ e \in E$$
$$\sum_{e:e \text{ meets } v} x_e \leq 1 \qquad \forall\ v \in V$$
$$\sum_{e \in S} x_e \leq \frac{|s| - 1}{2} \qquad \forall\ s \subseteq V,\ |s| \text{ odd}$$

线性规划的一般形式为：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad x, c \in \Re$$

$$\text{Max } c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \text{或} \qquad \text{Min } c^T x = \text{Max} - c^T x$$

$$Ax \leq b,\ x \geq 0 \qquad\qquad a^T x \geq b \iff -a^T x \leq -b$$

而要求解：

$$\text{Max } c^T x \quad Ax \leq b$$

我们可以令$x = y - z$, 这里 $y, z \geq 0$.

（注意：$a^T x \geq b \iff -a^T x \leq -b$）

我们要设法找出使目标函数最大化的x。我们要问自己是否存在解的好的表征。给定了x^*，x^*是否为最优解呢？

如果不是：x^*要么不满足某个约束条件要么存在x^{**}满足$c^T x^{**} > c^T x^*$.

如果是：？？（将在后面讨论）

再来看一个例子：求$(4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4)$满足下列约束条件

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 && (1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 && (2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 3 && (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 && (4) \end{aligned}$$

时的最大值z^*。

我们先设法找具体点估计一下z^*的值：

$$\begin{aligned} x = (0,0,1,0) &\qquad z^* \geq 5 \\ x = (2,1,1,\frac{1}{3}) &\qquad z^* \geq 15 \end{aligned}$$

这个方法的缺点是我们根本不知道z^*是否为最大值，所以我们需要找出最优值的一个上界。

我们来试另一种方法：等式（2）乘以$\frac{5}{3}$得

$$\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \le \frac{275}{3}.$$

注意到这个等式的左边每项都大于或等于目标函数。因此，

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le \frac{275}{3}.$$

所以，

$$z^* \le \frac{275}{3}.$$

等式（2）和等式（3）相加可以得出一个更严格的上界。即：

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \le 58.$$

同样，这个等式的左边每项都大于或等于目标函数，因此，

$$z^* \le 58.$$

我们把这个方法一般化。选择乘数 $y_1, y_2, y_3 \ge 0$ 分别乘以等式(1), (2)和(3)并取和，可得

$$\begin{aligned}&(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + \\ &+ (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \le y_1 + 55y_2 + 3y_3.\end{aligned} \tag{5}$$

批注 [lin1]: 做了修改

为了让等式（5）的左边成为目标函数的一个上界，需要满足：

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 5y_2 - y_3 &\ge 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\ge 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow z^* \le y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

因此，要得到目标函数最好的上界，只需要在上面的约束条件下求出$(y_1 + 55y_2 + 3y_3)$的最小值。这就形成了一个新的线性规划。

更一般地：

$$\left.\begin{aligned} \max\ c^T x \\ Ax \le b \\ x_i \ge 0 \quad \forall\, i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}\right.$$

同样，选择乘数 $y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0$ 乘以上面m个约束等式。
得到对偶规划：

$$\begin{gathered}\min\ b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_my_m\\ a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\geq c_1\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\geq c_2\\ \vdots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\geq c_n\\ y_i\geq 0\quad\forall\ i\end{gathered}$$

综上所述：

$$\underbrace{\begin{gathered}\max\ c^Tx\\ Ax\leq b\\ x\geq 0\end{gathered}}_{\text{原始规划}}\qquad\qquad\underbrace{\begin{gathered}\min\ b^Ty\\ A^Ty\geq c\\ y\geq 0\end{gathered}}_{\text{对偶规划}}$$

（注意：对偶规划（对偶规划）= 原始规划）

而且有，

$$\max\ c^Tx\leq\min\ b^Ty,$$

因此，

$$\begin{gathered}c^Tx\leq(A^Ty)^Tx=y^TAx\leq y^Tb=b^Ty\\ \Rightarrow c^Tx\leq b^Ty.\end{gathered}$$

这就给出了*弱对偶定理* ：

$$\max\ \{c^Tx\ /\ Ax\leq b\}\leq\min\ \{y^Tb\ /\ A^Ty=c,\ y\geq 0\}\tag{6}$$

下周我们将证明*强对偶定理，*它把式(6)中的不等号替换为了等号。利用它我们可以给出什么时候 x^*为最优解的一个简短证明（也就是前面提到的“是”的情况），这意味着对解有一个好的描述。