ГЛАВА 8. Квадратичные формы

§ 1. Линейные и билинейные формы

Пусть L – линейное пространство над полем F (в качестве поля F может быть поле действительных чисел, поле комплексных чисел или какое-либо другое поле. ***Линейной формой*** называется отображение $\alpha : L \to F,$ удовлетворяющее для всех $x, y \in L,\ \lambda \in F$ следующим условиям:

1) $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y);$ 2) $\alpha(\lambda x) = \lambda \cdot \alpha(x).$

Свойства 1), 2) называются *линейностью*.

Примеры линейных форм.

1. Если L – евклидово пространство и $a \in L$ – фиксированный вектор, то отображение $x \mapsto (a, x)$ является линейной формой.
2. Если L – линейное пространство всех многочленов $p(x)$ с коэффициентами из поля F и $\theta \in F$ – фиксированный элемент, то отображение $p(x) \mapsto p(\theta)$ – линейная форма.
3. Если L – линейное пространство всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, то отображение $f(x) \mapsto 2f(a) + 3f(b)$ – линейная форма.

Предположим, что пространство L конечномерно и $e_1, \ldots, e_n$ – его базис. Положим $\alpha_i = \alpha(e_i)$ $(i = 1, \ldots, n).$ Для каждого вектора $x \in L$ имеет место разложение по базису: $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ $(x_1, \ldots, x_n \in F)$. Если $\alpha : L \to F$ – линейная форма, то, используя определение (свойства 1), 2)), получим: $\alpha(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$ Это *канонический вид* линейной формы. Вышеприведённые рассуждения позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, *линейная форма полностью определяется своими значениями на базисных векторах*. Во-вторых, *линейная форма является однородным многочленом 1-й степени от переменных* $x_1, \ldots, x_n$ (координат вектора).

Линейные формы можно складывать друг с другом: $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ и умножать на элементы поля: $(\lambda\alpha)(x) = \lambda \cdot \alpha(x).$ Можно проверить, что относительно этих операций множество всех линейных форм будет образовывать линейное пространство над полем $F.$

Отображение $B : L \times L \to F$ называется ***билинейной формой***, если оно для всех $x, y, z \in L$ и $\lambda \in F$ удовлетворяет условиям:

1) $B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z);$

2) $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y);$

3) $B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z);$

4) $B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y).$

Свойства 1) и 2) называются *линейностью по первому аргументу*, а свойства 3) и 4) – *по второму*.

Примеры билинейных форм.

1. Если L – евклидово пространство, то скалярное произведение (x, y) является билинейной формой.
2. Если $\alpha : L \to F$ и $\beta : L \to F$ – линейные формы, то $B(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ – билинейная форма. Она называется *тензорным произведением* форм α и $\beta.$

Пусть в пространстве L есть конечный базис $e_1,\ldots,e_n$. Если обозначить $b_{ij}=B(e_i,e_j)$, то для любых векторов $x,y\in L$ мы будем иметь: $B(x,y)=\sum_{i,j}b_{ij}x_iy_j$ (здесь $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_1,y_2,...,y_n$ – координаты векторов x и y. Это *канонический вид* билинейной формы.

Аналогично линейным и билинейным формам определяются трилинейные формы $T(x,y,z)$, k-линейные формы и т.д.; общее название для этих объектов – *полилинейные формы*.

§ 2. Квадратичные формы

Квадратичной формой от n неизвестных $x_1,x_2,...,x_n$ называется сумма вида

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ , \tag{1}$$

то есть

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+...+a_{1n}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+...+$$
$$+a_{2n}x_2x_n+...+a_{n1}x_nx_1+...+a_{nn}x_n^2. \tag{2}$$

Матрица $A=\|a_{ij}\|$, $i,j=1,...,n$, называется матрицей квадратичной формы (1), а ее ранг – рангом формы (1). Если ранг формы равен n, форма называется *невырожденной* (в этом случае ранг матрицы A равен n и матрица A невырожденная).

В формуле (2) $x_ix_j=x_jx_i$ при всех i,j, поэтому мы можем считать, что коэффициенты при слагаемых x_ix_j и x_jx_i равны между собой, т.е. выполняется равенство $a_{ij}=a_{ji}$. Итак, далее мы считаем, что *матрица А квадратичной формы – симметрическая*.

Из формулы (2) видно, что квадратичная форма является *однородным многочленом 2-й степени* от переменных $x_1,x_2,...,x_n$. Кроме того, квадратичную форму можно считать *функцией от вектора*: $f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$. (Здесь мы отождествляем вектор x с набором $x_1,x_2,...,x_n$ его координат в каком-либо базисе). Наконец, квадратичную форму можно получить из билинейной формы $B(x,y)$, взяв векторы x,y одинаковыми: $f(x)=B(x,x)$. Обычно берут симметричную билинейную форму, т.е. такую, у которой $B(x,y)=B(y,x)$ при всех x,y (это равносильно равенству $b_{ij}=b_{ji}$).

Запишем квадратичную форму (1) в матричном виде. Пусть $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$, тогда $X^T=(x_1,x_2,...,x_n)$, откуда получаем:

$$f=X^TAX. \tag{3}$$

Задача 1. Составить матрицу квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2-x_1x_2+4x_2x_3.$$

Решение. Так как у нас 3 переменные, то матрица квадратичной формы будет иметь размеры 3×3. На диагонали матрицы должны стоять коэффициенты при x_1^2,x_2^2,x_3^2, т.е. 1, 2 и -1. Коэффициент при x_1x_2 “разделим поровну” между x_1x_2 и x_2x_1: $-1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$. Аналогичным образом поступим с другими выражениями вида x_ix_j. В результате получим: $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Дана матрица квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Написать квадратичную форму.

Решение. Выписываем выражение (1), приводя подобные члены. Получаем:

$$f=x_1^2-3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3.$$

Линейным преобразованием неизвестных *называется такой переход от системы* n *неизвестных* $x_1,x_2,...,x_n$ *к системе* n *неизвестных* $y_1,y_2,...,y_n$, *при котором старые неизвестные выражаются через новые линейно с некоторыми коэффициентами:*

$$\begin{cases} x_1=q_{11}y_1+q_{12}y_2+...+q_{1n}y_n, \\ x_2=q_{21}y_1+q_{22}y_2+...+q_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=q_{n1}y_1+q_{n2}y_2+...+q_{nn}y_n. \end{cases} \tag{4}$$

Систему равенств (4) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & ... & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & ... & q_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ q_{n1} & q_{n1} & ... & q_{n1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Линейное преобразование неизвестных с матрицей Q *называется невырожденным, если* Q *– невырожденная матрица.*

Теорема 1. *Пусть вслед за линейным преобразованием (4)* $Y=QX$ *с матрицей* Q *осуществляется линейное преобразование* $Y=RZ$ *с матрицей* $R=\left\|r_{ij}\right\|, i, j=1,2,...,n$. *Тогда результирующее преобразование также будет линейным, и его матрица равна* QR.

Задача 3. Пусть выполняются последовательно линейные преобразования

$$\begin{cases} x_1=y_1-2y_2+y_3 \\ x_2=\quad\quad y_2-y_3 \\ x_3=y_1+2y_2+3y_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1=z_1+z_2+2z_3 \\ y_2=z_1-z_2-\ z_3 \\ y_3=2z_1\quad\ -z_3. \end{cases}$$

Найти матрицу результирующего преобразования и выписать выражения x_1,x_2,x_3 через z_1,z_2,z_3.

Решение. Имеем: $X=QY$, $Y=RZ$, где

$$Q=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

По теореме 1 матрица результирующего преобразования есть произведение

$$C=QR=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 0\\ 9 & -1 & 3\end{pmatrix},$$

и, таким образом, $\begin{cases}x_1=z_1+3z_2+3z_3,\\ x_2=-z_1-z_2,\\ x_3=9z_1-z_2-3z_3.\end{cases}$

§ 3. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса

Так как квадратичная форма $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j$ – это функция от вектора, то ее вид зависит от базиса линейного пространства, и при изменении базиса матрица квадратичной формы также изменяется. Закон изменения матрицы дает следующая теорема.

Теорема 2. *Квадратичная форма от n неизвестных с матрицей A после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных с матрицей*

$$A'=Q^TAQ. \tag{6}$$

Следствие. *Ранг квадратичной формы не изменяется при выполнении невырожденного линейного преобразования неизвестных.*

Задача 4. Квадратичная форма $f(x_1,x_2)=2x_1^2-x_1x_2+3x_2^2$ задана в базисе e_1,e_2. Написать эту квадратичную форму в базисе $e_1'=e_1+2e_2$, $e_2'=3e_1-e_2$.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы f в базисе e_1,e_2:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1/2\\ -1/2 & 3\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от базиса e_1,e_2 к базису e_1',e_2' равна

$$S=T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

По формуле (6) находим матрицу A' нашей квадратичной формы в новом базисе:

$$A'=S^{\mathrm{T}}AS=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1/2\\ -1/2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -2,5\\ -2,5 & 27\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: $f(x_1',x_2')=12x_1'^2-5x_1'x_2'+27x_2'^2$.

Каноническим видом *квадратичной формы f называют такой её вид (в некотором базисе), который представляет собой сумму квадратов неизвестных с некоторыми коэффициентами:*

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ny_n^2. \tag{7}$$

Замечание. Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равно рангу формы.

Пусть A – матрица квадратичной формы (1), $A=\|a_{ij}\|$, $i, j=1,2,...,n$, $\operatorname{rk} A=r$, B – матрица квадратичной формы в новом базисе, где f имеет вид (7). Тогда матрица B этой формы в новом базисе такова:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно следствию из теоремы 2 $\operatorname{rk} B=\operatorname{rk} A=r$. Утверждение, что $\operatorname{rk} B=r$, означает, что в матрице B на диагонали ровно r элементов отличны от нуля, тогда в каноническом виде (7) ровно r слагаемых имеют коэффициенты, отличные от нуля.

Теорема 3. (Основная теорема о квадратичных формах). *Всякая квадратичная форма с действительными коэффициентами может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием переменных к каноническому виду.*

Задача 5. Квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_n)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$ привести к каноническому виду посредством невырожденного линейного преобразования.

Решение. Соберём все слагаемые, содержащие неизвестное x_1, и дополним их до полного квадрата

$$f(x_1,...,x_n)=4\left(x_1^2-x_1x_2+x_1x_3\right)+x_2^2+x_3^2-3x_2x_3=$$

$$=4\left(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3+x_2^2+x_3^2-3x_2x_3=$$

$$=4\left(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2-x_2x_3.$$

(Так как $\left(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2=x_1^2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_3^2}{4}-x_1x_2+x_1x_3-\frac{x_2x_3}{2}$.) Положим

$$\begin{cases} y_1=x_1-\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{x_3}{2}, \\ y_2=\quad x_2, \\ y_3=\quad\quad x_3 \end{cases} \tag{8}$$

и от неизвестных y_1,y_2,y_3 форма f примет вид $f(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2-y_2y_3$. Далее полагаем

$$\begin{cases} y_1=z_1, \\ y_2=\quad z_2-z_3, \\ y_3=\quad z_2+z_3, \end{cases}$$

и от неизвестных z_1,z_2,z_3 форма f примет уже канонический вид

$$f(z_1,z_2,z_3)=4z_1^2-z_2^2+z_2^2. \tag{9}$$

Разрешим равенства (8) относительно x_1,x_2,x_3:

$$\begin{cases} x_1=y_1+\dfrac{y_2}{2}-\dfrac{y_3}{2}, \\ x_2=\quad y_2, \\ x_3=\quad\quad y_3. \end{cases}$$

Последовательное выполнение линейных преобразований $X=Q_1Y$ и $Y=Q_2Z$, где

$$Q_1=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ Q_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

имеет матрицей

$$R=Q_1Q_2=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}..$$

Линейное преобразование неизвестных $X=RZ$ приводит квадратичную форму f к каноническому виду (9). Переменные x_1, x_2, x_3 связаны с новыми переменными z_1, z_2, z_3 соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - \quad 2z_3, \\ x_2 = \qquad z_2 - z_3, \\ x_3 = \qquad z_2 + z_3. \end{cases}$$

§ 4. Положительно определённые квадратичные формы

Нормальным видом *квадратичной формы называется сумма квадратов неизвестных с коэффициентами «* $+1$ *» или «* -1 *».*

Теорема 4. *Всякую квадратичную форму можно привести некоторым невырожденным линейным преобразованием неизвестных к нормальному виду. При этом число коэффициентов, равных* 1, *а также число коэффициентов, равных* -1, *при любом приведении к нормальному виду одинаково.*

Квадратичная форма $f(x_1,...,x_n)$ называется ***положительно определённой***, если $f(x_1,...,x_n)>0$ при всех $x_1,\dots,x_n$, за исключением $x_1=\ldots=x_n=0$. Квадратичная форма $f(x_1,...,x_n)$ называется ***отрицательно определённой***, если $f(x_1,...,x_n)<0$ при всех $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$.

Теорема 5. *Квадратичная форма* $f(x_1,...,x_n)$ *является положительно определённой тогда и только тогда, когда* f *приводится к нормальному виду, содержащему* n *квадратов неизвестных с коэффициентами* **«+1»:** $f(y_1,...,y_n)=y_1^2+...+y_n^2$. *Квадратичная форма* $f(x_1,...,x_n)$ *является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда* f *приводится к виду* $f(y_1,...,y_n)=-y_1^2-...-y_n^2$.

Пусть $f=X^TAX$ – квадратичная форма с матрицей $A=\|a_{ij}\|$, $i,j=1,...,n$. Миноры $\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{vmatrix}$ называются ***угловыми минорами*** квадратичной формы f.

Теорема 6. (Критерий Сильвестра) *Квадратичная форма* $f(x_1,...,x_n)$ *является положительно определённой тогда и только тогда, когда все её угловые миноры строго положительны:* $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n>0$. *Квадратичная форма* $f(x_1,...,x_n)$ *является* *отрицательно определённой тогда и только тогда, когда её угловые миноры удовлетворяют неравенствам:* $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0$ *и т.д.*

Задача 6. Определить, является ли положительно определённой квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры формы: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0.$, Минор Δ_3 можно не вычислять, так как уже видно, что условия критерия Сильвестра не выполняются, и квадратичная форма не является положительно определенной.

Задача 7. Определить, при каких значениях параметра λ квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_n) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + 5x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ является положительно определённой.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 \\ -1{,}5 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Применим критерий Сильвестра. Мы должны иметь $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$. Имеем: $\Delta_1 = 1 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & \lambda \end{vmatrix} > 0$, т.е. $\lambda > 2{,}25$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 \\ -1{,}5 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} > 0$, т.е. $\lambda > 6{,}25$. Окончательно получаем: $\lambda > 6{,}25$.

§ 5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Будем называть линейное преобразование переменных $Y = CX$ ***ортогональным***, если матрица C *ортогональная*, т.е. $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$. Ортогональное преобразование можно интерпретировать как преобразование координат, осуществляющееся при переходе от одного ортонормированного базиса линейного пространства к другому его ортонормированному базису. Геометрически такое преобразование является движением системы координат пространства $\mathbb{R}^n$, при котором начало координат является неподвижной точкой. На плоскости $\mathbb{R}^2$ это поворот системы координат вокруг начала координат на какой-либо угол, симметрия относительно прямой, проходящей через начало координат, и комбинации поворотов и симметрий: в пространстве $\mathbb{R}^3$ – повороты вокруг прямых, симметрии относительно плоскостей и их комбинации и т.д. Имеет место

Теорема 7. Всякую квадратичную форму от n переменных можно ортогональным преобразованием координат $X \to X'$ привести к каноническому виду

$$f(x_1', \ldots, x_n') = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2, \tag{10}$$

причём если $A = \|a_{ij}\|$ – матрица квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, то $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные векторы матрицы A, а связь старых и новых переменных определяется формулами $X' = S^{-1}X$, $X = SX'$, где S – матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Для того, чтобы привести данную квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием, поступают следующим образом. Матрица A квадратичной формы (она обязательно симметрическая) интерпретируется как матрица симметрического линейного оператора в ортонормированном базисе. Его матрица будет иметь диагональный вид (а значит, квадратичная форма приведётся к каноническому виду) в ортонормированном базисе из собственных векторов этого оператора. Сформулируем алгоритм приведения квадратичной формы.

1. Находим собственные значения линейного оператора, решая характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$.
2. Для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая систему линейных уравнений $(A-\lambda E)x=0$. (У этой системы мы должны найти фундаментальную систему решений).
3. Если собственное значение λ имеет кратность, большую 1 (в характеристическом уравнении), то векторы из ф.с.р. могут оказаться не ортогональными друг другу – в этом случае к ним надо применить процесс ортогонализации.
4. Нормируем найденные собственные векторы, т.е. каждый вектор делим на его длину.
5. Записываем канонический вид квадратичной формы и преобразование координат, приводящее её к этому виду.

Задача 8. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием координат: $f(x_1, x_2, x_n) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Решение. Составим матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем: $(\lambda-4)^2(\lambda-1)=0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2}=4$, $\lambda_3=1$.

Для $\lambda=4$ система уравнений, из которой находятся собственные векторы, выглядит так:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Её фундаментальная система решений: $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$. Эти векторы не ортогональны друг другу, поэтому применим к ним процесс ортогонализации. Положим $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + \mu v_1$ и подберём μ так, чтобы было выполнено условие $v_2 \perp v_1$. Имеем: $v_2 \cdot v_1 = 0$, т.е. $(u_2 + \mu v_1)v_1 = 0$, $\mu = -\dfrac{u_2 v_1}{v_1^2} = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $v_2 = u_2 - \dfrac{1}{2}v_1 = \dfrac{1}{2}(-1, 2, -1)$.

Запишем теперь систему уравнений для $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Её ф.с.р. состоит из одного вектора: $u_3 = (1,1,1)$. Этот вектор ортогонален векторам v_1 и v_2.

Пронормируем векторы v_1, v_2, u_3, разделив каждый вектор на его длину. Получим ортонормированный базис из собственных векторов: $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Матрица перехода от исходного базиса $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ к новому базису e_1', e_2', e_3' равна:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

По формуле (10) в новых координатах квадратичная форма будет иметь вид $f = 4x_1'^2 + 4x_2'^2 + x_3'^2$. Старые координаты выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Обратные формулы:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 \qquad + x_3), \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 + 2x_2 - x_3), \\ x_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ x_1 + \ x_2 + \ x_3). \end{cases}$$

§ 6. Применение теории квадратичных форм к кривым и поверхностям второго порядка

Пусть на плоскости задана декартова система координат (декартов базис **i**, **j** и точка O – начало координат). Рассмотрим общее уравнение второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0\,. \qquad (11)$$

Обозначим через $f(x, y)$ сумму старших слагаемых:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и рассмотрим квадратичную форму $f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$. Её матрица $Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ симметрическая.

Задача 9. Привести квадратичную форму $f(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ к каноническому виду методом собственных векторов.

Матрица Q квадратичной формы имеет вид $Q=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Найдём её собственные векторы. Характеристическое уравнение: $|Q-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$, $\lambda^2-7\lambda+6=0$, его корни: $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$.

Имеем для $\lambda=6$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{-x_1+2x_2=0$, и $u_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}$. Для $\lambda=1$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{2x_1+x_2=0$ и $u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2\end{pmatrix}$.

В базисе u_1,u_2 матрица оператора диагональная: $B=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Нормируем векторы u_1,u_2: $u_1'=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}$, $u_2'=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\end{pmatrix}$. Матрица перехода от базиса u_1,u_2 к базису u_1',u_2': $S=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Вернёмся к квадратичной форме. Положим $X=SX'$, то есть

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{\sqrt5}x_1'-\dfrac{1}{\sqrt5}x_2', \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt5}x_1'+\dfrac{2}{\sqrt5}x_2'. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда $f(y_1,y_2)=6y_1^2+y_2^2$.

Замечание. Формулы (12) – формулы поворота осей координат на угол φ против хода часовой стрелки. Угол φ определяется соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt5}\quad(\operatorname{tg}\varphi=\frac12,\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac12).$$

В общем случае преобразование поворота осей координат

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi, \end{cases} \tag{13}$$

приведёт линию (11) к виду

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2b_1x'+2b_2y'+b=0. \tag{14}$$

Эта процедура называется приведением линии второго порядка *к главным осям* (из дальнейшего изложения будет ясно, что, если (11) – эллипс или гипербола, то новые оси OX' и OY' параллельны главным осям кривой).

Коэффициенты λ_1 и λ_2 в уравнении (14) – характеристические числа матрицы $Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ и могут быть найдены как корни уравнения $|Q-\lambda E|=0$, или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Обозначим $\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$, $\varphi(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\delta$.

Имеем: $\lambda_1\lambda_2=\delta$ (действительно, из (15) находим $a_{11}a_{22}-\lambda a_{22}-\lambda a_{11}+\lambda^2-a_{12}^2=0$, или $\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, и по теореме Виета $\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\delta$).

Случай 1. $\delta=\lambda_1\lambda_2>0$ (кривая *эллиптического* типа).

Преобразуем (14) следующим образом:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+b=0;$$

обозначив $b-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}=c,$ придём к равенству

$$\lambda_1\left(x'+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2+c=0.$$

Положим

$$\begin{cases} x'+\dfrac{b_1}{\lambda_1}=x'', \\ y'+\dfrac{b_2}{\lambda_2}=y'', \end{cases} \tag{16}$$

и в новой системе координат $O''X''Y''$ получим:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+c=0. \tag{17}$$

Формулы (16) – формулы параллельного переноса начала координат в точку $O''\left(-\frac{b_1}{\lambda_1},-\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$.

Случай 1. а) Знак c противоположен знаку λ_1 (и, следовательно, знаку λ_2). Тогда (17) определяет эллипс:

$$\frac{\lambda_1 x''^2}{c}+\frac{\lambda_2 y''^2}{c}=1.$$

Случай 1. б) $c=0$, - уравнение (17) определяет одну точку: $x''=y''=0$.

Случай 1. в) Знаки c и λ_1 совпадают, – нет точек (мнимый эллипс).

Случай 2. $\delta=\lambda_1\lambda_2<0$ (кривая *гиперболического* типа).

В этом случае знаки λ_1 и λ_2 противоположены.

Случай 2. а) $c\neq 0$ - уравнение (14.33) определяет гиперболу:

$$\frac{\lambda_1 x''^2}{-c}+\frac{\lambda_2 y''^2}{-c}=1.$$

Случай 2. б) $c=0$ - уравнение (17) принимает вид:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=0.$$

Пусть $\lambda_1>0$, тогда $\lambda_2<0,$ и уравнение (17) можно переписать в следующем виде

$$\left(\sqrt{\lambda_1}x''-\sqrt{-\lambda_2}y''\right)\left(\sqrt{\lambda_1}x''+\sqrt{-\lambda_2}y''\right)=0. \tag{18}$$

Уравнение (18) определя5ет пару пересекающихся прямых: $y''=\pm\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}x''$.

Случай 3. $\delta=\lambda_1\lambda_2=0$ (кривая *параболического* типа).

Пусть для определённости $\lambda_2\neq 0$ (тогда $\lambda_1=0$). Уравнение (11) преобразованием (13) приводится к виду

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0. \tag{19}$$

Пусть $b_1 \neq 0$, тогда (19) можно переписать следующим образом

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_1 \left(x' + \frac{b_2}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1} \right) = 0.$$

Получим: $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{b}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, \\ y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}, \end{cases}$

$$\lambda_2 \left(y'' \right)^2 + 2b_1 x'' = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) определяет параболу.

Если же $b_1 = 0$, то уравнение (14.35) перепишем в виде

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Обозначив $b - \dfrac{b_2^2}{\lambda_2} = c$ и полагая $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}, \end{cases}$ приходим к уравнению

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0. \tag{21}$$

Случай 3. а) $c\lambda < 0$, - уравнение (21) определяет пару параллельных прямых: $y'' = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{\lambda_2}}$.

Случай 3. б) $c = 0$, - уравнение (21) определяет пару совпадающих прямых: $y'' = 0$.

Случай 3. в) $c\lambda_2 = 0$, - нет точек (пара мнимых прямых).

Сведём полученные результаты в таблицу.

$\delta > 0$ кривая эллиптического типа		λ_1 и c разных знаков	эллипс
		λ_1 и c одного знака	мнимый эллипс
		$c = 0$	точка
$\delta < 0$ кривая гиперболического типа		$c \neq 0$	гипербола
		$c = 0$	пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$ кривая параболического типа	$b_1 = 0$	λ_2 и c одного знака	пара мнимых параллельных прямых
		λ_2 и c разных знаков	пара параллельных прямых
		$c = 0$	пара совпадающих прямых
	$b_1 \neq 0$		парабола

Задача 10. Определить вид и расположение кривой второго порядка

$$f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 1 = 0. \tag{22}$$

Решение. Слагаемые второго порядка в (22) составляют квадратичную форму

$$\tilde{f}(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2,$$

которую преобразование неизвестных по формулам

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \qquad (23)$$

приводит к сумме квадратов $f(x', y') = 6x'^2 + y'^2$ (см. задачу 9).

Тогда уравнение кривой (22) преобразованием (23) приведётся к виду

$$6x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 8\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 1 = 0.$$

Здесь $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ и, следовательно, $\delta = 6 > 0$, – кривая эллиптического типа.

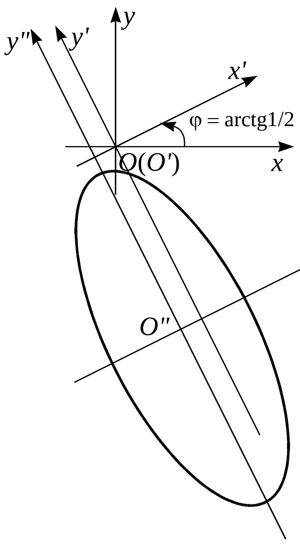
Как при рассмотрении выше случая 1, соберём слагаемые, содержащие неизвестное x' и дополним их до полного квадрата, аналогично поступим со слагаемыми, содержащими y':

$$6\left(x'^2 + 2x' + 1\right) - 6 + \left(y'^2 + 14y' + 49\right) - 49 + 1 = 0, \text{ или}$$

$$6\left(x' + 1\right)^2 + \left(y' + 7\right)^2 = 54.$$

Полагаем $\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 7 \end{cases}$ и получим $\dfrac{x''^2}{9} + \dfrac{y''^2}{54} = 1$.

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3, b = 3\sqrt{6}$ и центром в точке $O''(-1,-7)$ (см. рисунок).



Ðèñ. 14.1

Задача 11. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением $xy + xz + yz = 1$.

Решение. Левая часть уравнения – квадратичная форма. Её матрица: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ принимает вид

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(\lambda - 1)(2\lambda + 1)^2.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1/2$. Следовательно, каноническое уравнение поверхности таково: $x'^2 - \dfrac{1}{2}y'^2 - \dfrac{1}{2}z'^2 = 1$. Оно определяет *двуполостный гиперболоид*.