ГЛАВА 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

§ 1. Определение обратной матрицы

Определение 1. ***Обратная матрица*** для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{n}$–го порядка – это такая квадратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ $\boldsymbol{n}$–го порядка для которой выполняется равенство $\boldsymbol{AA^{-1} = A^{-1}A = E}$, где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица $\boldsymbol{n}$–го порядка.

Из определения обратной матрицы в соответствии с теоремой о произведении определителей можно записать:

$$\left|AA^{-1}\right| = \left|A^{-1}A\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |E| = 1, \qquad (1)$$

откуда следует, что матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A^{-1}}$ невырожденные, т.к. их определители не могут быть равными нулю (произведение не равно нулю).

Используя свойства определителей $\boldsymbol{n}$–го порядка, получена запись матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ через определитель $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$ и присоединенную матрицу $\boldsymbol{A^*}$ для матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot A^* = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{d}$ – определитель матрицы $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A_{ij}}$ – алгебраическое дополнение к элементу $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

§ 2. Вычисление обратной матрицы

2.1. Вычисление A^{-1} с использованием присоединенной матрицы.

Вычисление обратной матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ с использованием выражения (2) применяется наиболее часто. Последовательность действий в этом случае такая:

1. Вычисляем определитель $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$. Если определитель равен нулю, то обратной матрицы для матрицы $\boldsymbol{A}$ не существует.
2. Вычисляем все алгебраические дополнения $\boldsymbol{A_{ij}}$ – к элементам $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ и заполняем ими матрицу $\boldsymbol{A^*}$ (дополнения к столбцам записываем в строках!).
3. Делим все элементы матрицы $\boldsymbol{A^*}$ на $\boldsymbol{d}$.

☺ Пример 50. Найдем обратную матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$ для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение: Вычисления проводим в соответствии с принятым алгоритмом:

1. Вычисляем определитель $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$. 1-й шаг: 2C+1Cx2; 3C-1Cx2; 2-й шаг: 1R-2Rx2; 3R-2R; 3-й шаг: разложение определителя по 2-му столбцу; 4-й шаг: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=} (1)\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=} -1$$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$ существует.

2. Вычисляем все алгебраические дополнения $\boldsymbol{A_{ij}}$ – к элементам $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}=8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -5 & -1\end{vmatrix}=-29,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-18,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=11,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1.$$

3. Используя выражение (2), записываем матрицу A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\cdot A^{*}=(-1)\cdot A^{*}=\cdot\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix},$$

<u>*Оценка применения способа*</u> вычисления по трудоемкости и надежности получения результата: а) вычисление одного определителя n-го порядка (при вычислении определителя d) и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка (при вычислении алгебраических дополнений); б) ошибка вычисления A_{ij} не сказывается на вычислениях других элементов матрицы A^*.

Ответ: $A^{-1}=\cdot\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Пример 51</u>. Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 1\end{pmatrix}$ - квадратной матрицы n-го порядка.

Решение: Для нахождения матрицы A^{-1} применим «<u>моделирование</u>» вычислительного процесса на матрице 6-го порядка.

1. Вычисляем определитель $d=|A|$ матрицы A. Так как определитель относится к определителям треугольного вида, то его величина равна произведению элементов, расположенных на главной диагонали: $d=|A|=1\cdot 1\cdot 1\ldots\cdot 1=1$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы A <u>существует</u>, и можно приступать к вычислениям матрицы A^{-1}.

2. Пусть $i=j$ – выделяются элементы главной диагонали. Выделим минор M_{ii} для элемента a_{ii} и запишем соответствующее алгебраическое дополнение A_{ii}:

$$M_{ii}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a_{ii} & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\rightarrow A_{ii}=(-1)^{i+i}\cdot M_{ii}=1$$

Видим, что выделенный минор M_{ii} (зачеркиваемые i- строка и j – столбец (принято $j = i$, отмечены серым фоном) вновь имеет «треугольный вид» и равен 1.

3. Пусть $i = j + 1$ – выделяются элементы под главной диагональю (обозначим как диагональ «-1»). Выделим минор M_{ij} для элемента a_{ij} и запишем соответствующее алгебраическое дополнение A_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_{ij} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = -1$$

И в этом случае выделенный минор M_{ij} (зачеркиваемые i – строка и j – столбец ($j = i - 1$) отмечены серым фоном) вновь имеет «треугольный вид» и равен 1.

4. Пусть $i \geq j + 2$ – выделяются элементы под диагональю «-1» (треугольник, заполненный нулями). Выделим минор M_{ij} для элемента a_{ij} и запишем соответствующее алгебраическое дополнение A_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_{ij} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = 0$$

Видим, что выделенный минор M_{ij} (зачеркиваемые i – строка и j – столбец ($j \leq i - 2$) отмечены серым фоном) имеет две равные строки и на его главную диагональ попадает 0. Следовательно, минор M_{ij} равен нулю, а значит равно нулю и алгебраическое дополнение A_{ij}.

5. Пусть $j > i$ – выделяются элементы над главной диагональю (треугольник, заполненный единицами). Выделим минор M_{ij} для элемента a_{ij} и запишем соответствующее алгебраическое дополнение A_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_{ij} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = 0$$

Видим, что выделенный минор M_{ij} (зачеркиваемые i – строка и j – столбец ($j > i$) отмечены серым фоном) имеет две равные строки и на его главную диагональ попадает 0. Следовательно, минор M_{ij} равен нулю, а значит равно нулю и алгебраическое дополнение A_{ij}.

Учитывая полученные в п. 1-5 результаты (в соответствии с правилами записи присоединенной матрицы A^* и обратной матрицы A^{-1}), записываем ответ.

<u>*Оценка применения моделирования*</u> алгоритма вычисления обратной матрицы $\boldsymbol{n}$-го порядка на примере матрицы 6-го порядка: выбранный порядок вполне отражает логику и аналитику процесса для общего случая матрицы $\boldsymbol{n}$-го порядка.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☻ ***Решите примеры***:

<u>Пример 51</u>. Вычислите обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 52</u>. Вычислите обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 53</u>. Вычислите обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>***Вопросы для самопроверки***</u>:

1. Возможно ли равенство $|AB| = -1$, если матрица $\boldsymbol{B}$ обратна матрице $\boldsymbol{A}$?

2. Можно ли найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

3. Как изменится матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$, если матрица $\boldsymbol{A}$ будет транспонирована?

2.2. Вычисление A^{-1} с использованием матрицы Γ_A.= (A|E)

Вычисление обратной матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ с использованием матрицы $\boldsymbol{\Gamma_A}$ = (**A**|**E**) производится применением элементарных преобразований матрицы $\boldsymbol{\Gamma_A}$ к виду (**E**|**C**). Причем, в случае, если $\boldsymbol{A}$ невырожденная, имеем **C** = $\boldsymbol{A^{-1}}$. Элементарными преобразованиями матрицы $\boldsymbol{A}$ считают <u>элементарные преобразования ее строк</u>:

- перестановка строк;
- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам строки, соответствующих элементов другой строки, предварительно умноженных на некоторое число.

Последовательность действий в этом случае такая:

1) Вычисляем определитель $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$. Если определитель равен нулю, то обратной матрицы для матрицы $\boldsymbol{A}$ не существует;
2) Строим матрицу $\boldsymbol{\Gamma_A}$ = (**A**|**E**); и при помощи элементарных преобразований строк получаем матрицу $(\mathbf{E}|\boldsymbol{A^{-1}})$.

<u>Замечание</u>: предварительное вычисление определителя $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$ не обязательно: невырожденность матрицы обнаруживается в ходе самих преобразований (см. Пример 55).

Проследим особенности применения указанного метода вычисления матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ на нескольких примерах.

☺ <u>Пример 54</u>. Найдем обратную матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$ для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ с использованием матрицы $\boldsymbol{\Gamma_A}$ = (**A**|**E**)..

Решение: Вычисления проводим в соответствии с принятым алгоритмом:

1. Вычисляем определитель $d = |A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$. <u>1-й шаг</u>: 1C+(2C+4C); 3C-2C; 4C-2Cx2; <u>2-й шаг:</u> разложение определителя по 4-му столбцу; <u>3-й шаг</u>: 3C-2C; разложение определителя по 3-му столбцу; вычисление определителя 2-го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{1 шаг}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 12 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 5 & -2 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & -9 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix} \overset{\text{2 шаг}}{=} (-1)^{2+4} \overset{\text{3 шаг}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ -3 & -7 & \mathbf{0} \end{vmatrix}} = \mathbf{-1}$$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$ существует.

2. Составляем матрицу $\boldsymbol{\Gamma_A}$ = (**A**|**E**) и выполняем ее преобразования: <u>1-й шаг</u>: 3R-1R; 1R-4R; <u>2-й шаг</u>: 4R-2R; 3R-1Rx2; <u>3-й шаг</u>: 4R-3Rx2; 3R-4Rx3; 3R меняем местами с 2R; <u>4-й шаг</u>: 2R-3Rx2; 4R+3Rx4; <u>5-й шаг</u>: 3R+4Rx3; <u>6-й шаг</u>: 4R+3Rx3; <u>7-й шаг</u>: 3R-4R; 1R+3Rx7 +4Rx5:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{1 шаг}} \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{2 шаг}}$$

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 14 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{3 шаг}} \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 20 & 14 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -43 & -30 & 7 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{4 шаг}}$$

$$\to \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & -3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & 4 & 9 & -15 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{5 шаг}} \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -18 & 13 & 30 & -48 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & 4 & 9 & -15 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{6 шаг}}$$

$$\to \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -18 & 13 & 30 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{7 шаг}} \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 12 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 41 & -30 & -69 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{array} \right\|$$

Элементарные преобразования матрицы $\boldsymbol{Г_A}$ = (**A**|**E**) завершены, и в полученной матрице (**E**|$\boldsymbol{A^{-1}}$) прочитывается обратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Оценка применения способа вычисления по трудоемкости и надежности получения результата: а) объем вычислений соответствует вычислению одного определителя $\boldsymbol{n}$-го порядка (при вычислении определителя $\boldsymbol{d}$) и $\boldsymbol{2n}$ определителей ($\boldsymbol{n-1}$)-го порядка (при проведении элементарных преобразований матрицы $\boldsymbol{Г_A}$ = (**A**|**E**) – это существенно меньше, чем при использовании матрицы $\boldsymbol{A^*}$: там при нахождении обратной матрицы вычисляется $\boldsymbol{n^2}$ определителей ($\boldsymbol{n-1}$)-го порядка); б) любая промежуточная ошибка проведения элементарных преобразований матрицы $\boldsymbol{Г_A}$ делает бесполезными все остальные вычисления.

Ответ: $A^{-1} = \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}.$

Пример 55. Вычислим обратную матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$ для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ с использованием матрицы $\boldsymbol{Г_A}$ = (**A**|**E**).

Решение: Вычисления проводим в соответствии с алгоритмом:

1. Строим матрицу $\boldsymbol{Г_A}$ = (**A**|**E**);
2. При помощи элементарных преобразований строк получаем матрицу (**E**|$\boldsymbol{A^{-1}}$).

1-й шаг: 2R-1R; 3R-1R; 3R-2R; 2-й шаг: 3R-2R: обнаруживаем невырожденность матрицы т.к. матрица привелась к «треугольному виду» и ее определитель не равен 0:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{1 шаг}} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{2 шаг}}$$

3-й шаг: продолжаем элементарные преобразования, чтобы до вертикальной черты появилась единичная матрица **E**| третьего порядка: 1R-3R; 2R-3R:

$$\to \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{3 шаг}} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\text{4 шаг}}$$

4-й шаг: 1R-2R: на месте **E**| получена диагональная матрица третьего порядка; : 1R-3R; 2R-3R; 5-й шаг: делим 1-ю строку на 2; 2-ю строку на 3; 3-ю строку на 4:

$$\rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right\| \xrightarrow{\text{5 шаг}} \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\|$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

☻ ***Решите примеры***:

<u>Пример 56</u>. Вычислите обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ с использованием матрицы $\Gamma_A = (\mathbf{A}|\mathbf{E})$.

Ответ: $A^{-1} = \cdot \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

<u>Пример 57</u>. Вычислите обратную матрицу A^{-1} для матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ с использованием матрицы $\Gamma_A = (\mathbf{A}|\mathbf{E})$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

<u>Вопросы для самопроверки</u>:

1. Всегда ли возможно применение матрицы $\Gamma_A = (\mathbf{A}|\mathbf{E})$ для вычисления обратной матрицы A^{-1} ?
2. Как проверить правильность вычисления матрицы A^{-1}?
3. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице $\Gamma_A = (\mathbf{A}|\mathbf{E})$ матрица A будет транспонирована?
4. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:
   a) переставить <u>i</u>-ю и j-ю строки?
   b) <u>i</u>-ю строку умножить на число c, не равное нулю?

c) к i-й строке прибавить j-ю умноженную на число $\boldsymbol{c}$, или совершить аналогичное преобразование столбцов?

§ 3. Матричное уравнение

Уравнение вида: $\boldsymbol{AX=B}$, (3)

где $\boldsymbol{A}$ – прямоугольная матрица $\boldsymbol{n}$-го порядка, а $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$ – матрицы порядка ($\boldsymbol{n}$ x $\boldsymbol{k}$).

и уравнение вида: $\boldsymbol{XA=B}$, (4)

где $\boldsymbol{A}$ – прямоугольная матрица $\boldsymbol{n}$-го порядка, а $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$ – матрицы порядка ($\boldsymbol{k}$ x $\boldsymbol{n}$), называют матричными уравнениями.

Решения уравнений (3) и (4), соответственно, записывают в виде:

$$\boldsymbol{X=A^{-1}B},$$
$$\boldsymbol{X=BA^{-1}},$$

где матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ – обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$.

<u>*Замечание*</u>: матрица $\boldsymbol{A}$ выбрана квадратной с целью применения обратной матрицы для решения уравнения.

Нахождение решения $\boldsymbol{X}$ проводится в соответствии с алгоритмом:

1. Вычисляем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$;
2. Находим произведения матриц $\boldsymbol{A^{-1}B}$ и $\boldsymbol{BA^{-1}}$, в зависимости от решаемой задачи.

☺ <u>Пример 58</u>. Решим матричное уравнение: $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = B$.

Решение: Вычисления проводим в соответствии с принятым алгоритмом:

1. Вычисляем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:

   а) Вычисляем определитель $d = |A|$. <u>1-й шаг</u>: 3R-2R; 2R-1R; <u>2-й шаг:</u> 2C+3C; <u>4-й шаг</u>: разложение определителя по 3-му столбцу; <u>4-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \overset{1\ шаг}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} \overset{2\ шаг}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{3\ шаг}{=} (6)\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{4\ шаг}{=} 60$$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$ существует.

   б) Вычисляем все алгебраические дополнения $\boldsymbol{A_{ij}}$ – к элементам $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A_{11}} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad \boldsymbol{A_{12}} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -18, \quad \boldsymbol{A_{13}} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\boldsymbol{A_{21}} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \boldsymbol{A_{22}} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11, \quad \boldsymbol{A_{23}} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\boldsymbol{A_{31}} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad \boldsymbol{A_{32}} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad \boldsymbol{A_{33}} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

   в) Используя выражение (2), записываем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot A^{*} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

2. Вычисляем произведение матриц: $\boldsymbol{A^{-1}B}$, т.е. находим $\boldsymbol{X}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x_1} = 3$, $\boldsymbol{x_2} = 1$, $\boldsymbol{x_3} = 1$.

Пример 59. Решим матричное уравнение: $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = B$.

Решение: Вычисления проводим в соответствии с принятым алгоритмом:

3. Вычисляем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:

а) Вычисляем определитель $d = |A|$. 1-й шаг: выносим общий множитель 3-го столбца число 2 за скобку определителя; 2-й шаг: 2R+1R; 3R-1R; 3-й шаг: разложение определителя по 2-му столбцу; 4-й шаг: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{1 шаг}}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{2 шаг}}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{3 шаг}}{=} 2(1)\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{4 шаг}}{=} 6$$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$ существует.

б) Вычисляем все алгебраические дополнения $\boldsymbol{A_{ij}}$ – к элементам $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A_{11}} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$, $\boldsymbol{A_{12}} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\boldsymbol{A_{13}} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$,

$\boldsymbol{A_{21}} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\boldsymbol{A_{22}} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4$, $\boldsymbol{A_{23}} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$\boldsymbol{A_{31}} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $\boldsymbol{A_{32}} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $\boldsymbol{A_{33}} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

в) Используя выражение (2), записываем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot A^{*} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

4. Вычисляем произведение матриц: $\boldsymbol{A^{-1}B}$, т.е. находим $\boldsymbol{X}$:

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6 & -2 & 6\\ 0 & -4 & 2\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 8\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 2 & \frac{16}{3}\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 2 & \frac{16}{3}\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$

<u>Пример 60</u>. Решим уравнение : $AX=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}=B.$

Решение: Вычисления проводим в соответствии с принятым алгоритмом:

5. Вычисляем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:
   а) Вычисляем определитель $d=|A|$. <u>1-й шаг</u>: 1С+2Сх2; 3R-1R; <u>2-й шаг</u>: разложение определителя по 2-му столбцу; <u>4-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}\overset{1\text{ шаг}}{=}\begin{vmatrix}5 & 2 & -3\\ 7 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}\overset{2\text{ шаг}}{=}(-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 7 & -4\end{vmatrix}\overset{4\text{ шаг}}{=}1$$

Т.к. определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$ существует.

   б) Вычисляем все алгебраические дополнения $\boldsymbol{A_{ij}}$ – к элементам $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A_{11}}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-4$, $\boldsymbol{A_{12}}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-8$, $\boldsymbol{A_{13}}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7$,

$\boldsymbol{A_{21}}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3$, $\boldsymbol{A_{22}}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6$, $\boldsymbol{A_{23}}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5$,

$\boldsymbol{A_{31}}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2$, $\boldsymbol{A_{32}}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-5$, $\boldsymbol{A_{33}}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4$.

   в) Используя выражение (2), записываем матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\cdot A^{*}=1\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & -6 & 5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix},$$

6. Вычисляем произведение матриц: $\boldsymbol{A^{-1}B}$, т.е. находим $\boldsymbol{X}$:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

☻ ***Решите примеры***:

<u>Пример 61</u>. Решим матричное уравнение: $AX=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}=B$.

Ответ: $\boldsymbol{x_1}=1$, $\boldsymbol{x_2}=3$, $\boldsymbol{x_3}=5$.

<u>Пример 62</u>. Решим матричное уравнение: $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=B$.

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 3 \\ -3 & 17 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 63</u>. Решим уравнение : $XA=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}=B$.

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

<u>Вопросы для самопроверки</u>:

1. Всегда ли возможна запись матричного уравнения $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$?
2. Какой вид имеет запись решения матричного уравнения $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$?
3. Какой порядок действий, выполняемых при решении матричного уравнения $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$?
4. Возможно ли решение матричного уравнения $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ в случае, когда матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ вырожденные?