# Глава 3. Геометрические преобразования

Пусть дана прямоугольная система координат $Oxy$ на плоскости или $Oxyz$ в пространстве. В теории геометрических преобразований рассматриваются две основные задачи, которые мы назовём задачами А и Б. Сформулируем эти задачи для случая плоскости, для пространства они формулируются аналогично.

**Задача А.** Пусть система координат изменилась (например, претерпела сдвиг или поворот на некоторый угол) и $O'x'y'$ – новая система координат. Каждая точка $M$ имеет определённые координаты $(x, y)$ в старой (исходной) системе координат и какие-то координаты $(x', y')$ в новой системе координат $O'x'y'$. Требуется найти связь между новыми и старыми координатами точки.

**Задача Б.** Пусть система координат $Oxy$ неизменна, а сама плоскость преобразуется, т.е. точка $M = (x, y)$ переходит в точку $M' = (x', y')$. Требуется установить связь между координатами $x', y'$ и $x, y$.

В каждом случае надо чётко представлять себе, о какой задаче идёт речь. В задаче А надо найти связь между координатами $x, y$ и $x', y'$ *одной и той же точки* в разных системах координат, а в задаче Б – связь между координатами $x, y$ произвольной точки и координатами $x', y'$ *её образа* при данном преобразовании. В обеих задачах целью является получение *формул*, выражающих $x', y'$ через $x, y,$ а также *обратных формул* – $x, y$ через $x', y'$. Позже средствами линейной алгебры эти задачи будут разбираться в более общей ситуации – для $n$-мерного пространства.

***Параллельный перенос*** системы координат $Oxyz$ – преобразование, при котором начало координат переходит в точку $(a, b, c),$ а направления координатных осей сохраняются. Связь между старыми и новыми координатами произвольной точки (решение задачи А) даётся формулами

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогичные формулы справедливы для плоскости (см. рис. 1):

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \tag{2}$$

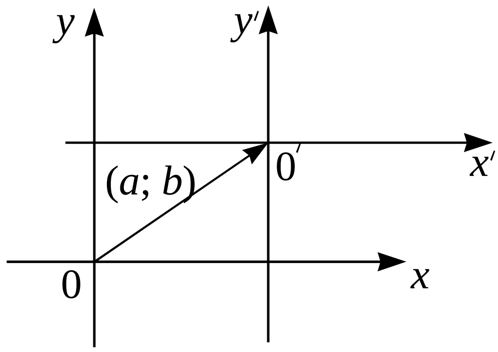


*Рис.1.*

***Поворот*** *осей координат* вокруг начала координат на угол $\varphi$ (решение задачи А) даётся формулами:

$$\begin{cases} x' = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

(см. рис. 2).

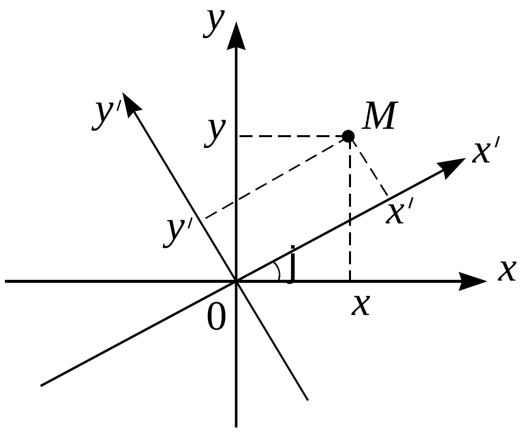


*Рис.2.*

Обратные формулы получаются заменой $\varphi$ на $-\varphi$:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Приведём теперь формулы для задачи Б.

***Параллельный перенос*** *пространства* на вектор $\vec{p} = (a, b, c)$ задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases} \qquad (4)$$

Параллельный перенос *плоскости* (см. рис. 3) – формулами

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (5)$$

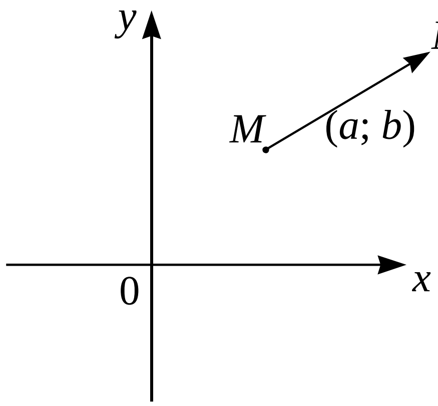


*Рис.3.*

***Поворот*** плоскости на угол $\varphi$ вокруг начала координат – преобразование плоскости, при котором каждая точка $M$ переходит в такую точку $M'$, что угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ равен $\varphi$ (см. рис. 4).

Формулы поворота:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \qquad (6)$$

**Примечание:** здесь речь идёт о *направленном угле*, т.е. об угле от $\overrightarrow{OM}$ к $\overrightarrow{OM'}$.

Поворот плоскости на угол $\varphi$ вокруг точки $(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi + x_0, \\ y' = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi + y_0. \end{cases} \qquad (7)$$

***Симметрии*** плоскости (или пространства) – это такие преобразования плоскости (пространства), при которых каждая точка $M$ переходит в точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно точки, прямой или плоскости. Разумеется, это является задачей Б. Переход от системы координат к симметричной системе (задача А) встречается весьма редко и здесь рассматриваться не будет.

Формулы симметрии плоскости: а) симметрия относительно начала координат, б) относительно оси $Ox$, в) относительно точки $(a,b)$, г) относительно прямой $x = a$:

$$\text{а)} \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x' = 2a - x, \\ y' = 2b - y; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} x' = 2a - x, \\ y' = y; \end{cases}$$

формулы симметрии пространства: а) относительно начала координат, б) относительно оси $Ox$, в) относительно плоскости $Oxy$, г) относительно плоскости $y = h$:

$$\text{а)} \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ z' = -z; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = -z, \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} x' = x, \\ y' = 2h - y, \\ z' = z. \end{cases}$$

Для симметрий относительно других осей координат (координатных плоскостей) и параллельных им прямых (соотв., плоскостей) формулы пишутся аналогичным образом. Приведём ещё формулу поворота пространства на угол $\varphi$ вокруг оси $Oz$:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' = \qquad\quad z. \end{cases}$$

***Симметрия относительно прямой*** $l$ (или ***осевая симметрия***) – преобразование плоскости, при котором каждая точка $M$ переходит в точку $M'$, расположенную симметрично $M$ относительно $l$, т.е. $M$ и $M'$ лежат по разные стороны от $l$ на одинаковом расстоянии от $l$ на одном перпендикуляре к $l$.

***Центральная симметрия*** (***симметрия относительно точки*** $P$): если $M \to M'$, то $\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PM'}$. Симметрия относительно точки $P$ – это поворот плоскости на угол $180°$ вокруг точки $P$.

Решим две задачи на преобразование координат.

**Задача 1.** Кривая задана уравнением $F(x,y)=0$. Написать уравнение этой кривой в системе координат: (а) параллельно перенесённой на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз; (б) повёрнутой относительно начала координат на угол $\varphi$.

*Решение*. (а) Используя формулы (2), получим: $x' = x-2$, $y' = y+3$. Напишем обратные формулы: $x = x'+2$, $y = y'-3$. Подставим в уравнение кривой: $F(x'+2, y'-3)=0$. Это и будет уравнением кривой в новой системе координат.

**Задача 2.** Написать уравнение параболы $y = x^2$ в системе координат, повёрнутой на $45°$ вокруг начала координат.

*Решение*. Взяв в формулах (3′) $\varphi = 45°$, получим: $x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. Подставим в уравнение $y = x^2$: $\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2$. Отсюда получаем, что уравнение параболы $y = x^2$ в новой системе координат таково:

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 - \sqrt{2}\,x' - \sqrt{2}\,y' = 0.$$

Теперь решим несколько задач на преобразование плоскости или пространства.

**Задача 3.** Кривую $y = \sqrt{x+2}$ сдвинули на 4 единицы вправо, а затем на 4 единицы вверх. Написать уравнение новой кривой.

*Решение.* По формулам (5) получаем: $x' = x+3$, $y' = y+4$. Отсюда получаем: $y'-4 = \sqrt{x'-3+2}$, или $y' = \sqrt{x'-1}+4$. Таким образом, новая кривая имеет уравнение $y = \sqrt{x-1}+4$.

**Задача 4.** Найти образ точки $(1; 2)$ при повороте плоскости на угол $30°$ вокруг начала координат.

*Решение.* Пусть $M'$ – образ точки $M = (1; 2)$. Запишем формулы поворота (6) для угла $\varphi = 30°$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y, \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

Подставим в эти формулы $x = 1,\ y = 2.$ Получим: $x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1,\ \ y' = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3}.$

Следовательно, $M' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1; \sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\right).$

**Задача 5.** Дана прямая $l$: $Ax + By + C = 0.$ Составить уравнение прямой, симметричной прямой $l$: а) относительно начала координат; б) относительно оси $Ox$; в) относительно прямой $y = y_0$; г) относительно прямой $y = x.$

*Решение.* Симметрия относительно начала координат задаётся формулами $x' = -x,\ y' = -y$ (формулы (8а)). Подставим в уравнение прямой $-x'$ вместо $x$ и $-y'$ вместо $y$. Получим: $-Ax' - By' + C = 0.$ Отсюда следует, что $Ax' + By' - C = 0.$ Значит, уравнение симметричной прямой таково: $Ax + By - C = 0.$ б) Применяя формулы (8б), получим: $Ax - By + C = 0.$ в) Симметрия относительно прямой $y = y_0$ задаётся формулами $x' = x,\ y' = 2y_0 - y.$ Поэтому следует подставить в уравнение прямой $x'$ вместо $x$ и $2y_0 - y'$ вместо $y$. Мы получим: $Ax' + B(2y_0 - y') + C = 0.$ Окончательно получаем: $Ax - By + 2By_0 + C = 0.$ г) Симметрия относительно прямой $y = x$ определяется формулами $x' = y,\ y' = x.$ Отсюда нетрудно получить уравнение симметричной прямой: $Bx + Ay + C = 0.$

**Задача 6.** Найти образ прямой $3x + 2y - 4 = 0$: а) при повороте плоскости на угол $60°$ вокруг точки $(1; -2)$; б) при симметрии плоскости относительно точки $(-1; 4)$; в) при симметрии плоскости относительно прямой $x = 2.$

*Решение.* а) Применяя формулы, обратные формулам (7), получим: $x = (x'-1)\cdot\dfrac{1}{2} + (y'+2)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1,\ \ y = (x'-1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (y'+2)\cdot\dfrac{1}{2} - 2.$

Подставим в уравнение прямой:

$$3\left((x'-1)\cdot\frac{1}{2} + (y'+2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + 2\left((x'-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - (y'+2)\cdot\frac{1}{2} - 2\right) - 4 = 0.$$

Приводя подобные члены и убирая штрихи, получим окончательно:

$$\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)x'+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)y'+2\sqrt{3}-\frac{17}{2}=0.$$

б) Используя формулы (8в), получим: $x'=-2-x,\ y'=8-y$. Подставим в уравнение прямой: $3(-2-x')+2(8-y')-4=0$, т.е. $3x'+2y'-6=0$. Убирая штрихи, получим окончательно: $3x+2y-6=0$. в) Заменим $x$ на $4-x'$, $y$ на $y'$, получим: $3(4-x')+2y'-4=0$. После приведения подобных членов и удаления штрихов получим: $3x-2y-8=0$.

**Задача 7.** Написать формулы симметрии плоскости относительно прямой $y=2x$.

*Решение*. Пусть $M=(x,y)$ – произвольная точка плоскости, $M'=(x',y')$ – её образ при симметрии относительно прямой $y=2x$. Тогда $\overrightarrow{MM'}=(x'-x,\,y'-y)$. Очевидно, $\vec{q}=(1,2)$ – направляющий вектор этой прямой. Точку $(x',y')$ можно найти из следующих условий: 1) точка с координатами $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ (середина отрезка $MM'$) принадлежит прямой $y=2x$; 2) $\overrightarrow{MM'}\perp\vec{q}$. Запишем эти условия в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{y+y'}{2}=2\cdot\dfrac{x+x'}{2},\\ (x'-x)\cdot 1+(y'-y)\cdot 2=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y,\ \ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$. Это и есть формулы симметрии.

**Задача 8.** Дан центр квадрата: $F=(3;-1)$ и уравнение одной его стороны: $2x-5y+4=0$. Составить уравнения других сторон квадрата.

*Решение.* Две стороны (смежные) получаются поворотом плоскости вокруг точки $F$ на $90°$ и $-90°$, а третья сторона (противоположная) – поворотом на $180°$, или, что то же самое, – симметрией относительно точки $F$. Найдём сначала уравнения смежных сторон. Запишем формулы поворота:

$$\begin{cases}x'-3=\ \ (x-3)\cos 90°\pm(y+1)\sin 90°,\\ y'+1=\mp(x-3)\sin 90°+(y+1)\cos 90°.\end{cases}$$

Отсюда получаем: $x'=3\pm(y+1),\ \ y'=-1\mp(x-3)$, т.е.

$$\begin{cases}x'=\ \ y+4,\\ y'=-x+2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x'=-y+2,\\ y'=\ \ x-4.\end{cases}$$

Подставим оба варианта в уравнение прямой: а) $2(2-y')-5(x'-4)+4=0$, б) $2(y'+4)-5(2-x')+4=0$. Упростив и удалив штрихи, получим: а) $5x+2y-28=0$, б) $5x+2y+2=0$.

Найдём теперь уравнение противоположной стороны. Запишем формулы симметрии плоскости относительно точки $F$: $x'=6-x$, $y'=-2-y$. Подставим эти формулы в уравнение прямой: $2(6-x)-5(-2-y)+4=0$. Упростив и удалив штрихи, получим: $2x-5y-26=0$.

**Задача 9.** Найти образ точки $(1;2;3)$ при повороте пространства на угол $45°$ вокруг оси ординат.

*Решение.* Формулы поворота пространства вокруг оси $Oy$ на плоскости $Oxz$ совпадают с формулами поворота этой плоскости вокруг начала координат, т.е. мы имеем:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - z\sin\varphi, \\ z' = x\sin\varphi + z\cos\varphi. \end{cases}$$

Добавив уравнение $y'=y$ и подставив $\varphi=45°$, получим:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-z}{\sqrt{2}}, \\ y' = y, \\ z' = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Взяв $x=1$, $y=2$, $z=3$, вычислим $x', y', z'$: $x'=-\sqrt{2}$, $y'=2$, $z'=2\sqrt{2}$. Следовательно, точка $M'=\left(-\sqrt{2};2;2\sqrt{2}\right)$ – образ точки $M=(1;2;3)$ при повороте.

**Задача 10.** Поверхность задана уравнением $xyz=1$. Составить уравнение поверхности, симметричной данной относительно плоскости $z=3$.

*Решение*. Симметрия относительно плоскости $z=3$ задаётся формулами $x'=x$, $y'=y$, $z'=6-z$. Подставим в уравнение поверхности: $x'y'(6-z')=1$. Убрав штрихи, получим искомое уравнение: $6xy-xyz=1$.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Точка $M$ имеет координаты $(2;3)$ в одной системе координат и $(-3;5)$ в другой, получающейся из первоначальной параллельным переносом. Написать формулы, выражающие новые координаты произвольной точки через старые. Ответ: $x'=x-5$, $y'=y+2$.
2. Система координат повернулась на угол $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$ вокруг начала координат. Написать формулы поворота и уравнение прямой

$y=2x+1$ в новой системе координат. Ответ: $x'=0{,}8x+0{,}6y$, $y'=-0{,}6y+0{,}8y$; $x'-2y'+1=0$.

3. Плоскость повернулась на $45°$ вокруг точки $(1;-5)$. Написать формулы поворота. Ответ: $x'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}+1$, $y'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-5$.
4. Написать формулы параллельного переноса пространства, при котором точка $(1;3;-2)$ переходит в точку $(2;1;5)$. Ответ: $x'=x+1$, $y'=y-2$, $z'=z+7$.
5. Написать уравнение кривой, полученной из кривой $y=\sqrt{2x+1}$: а) параллельным переносом на 2 вправо и на 3 вниз; б) симметрией относительно точки $(3;1)$; в) симметрией относительно прямой $x=3$; г) симметрией относительно прямой $y=2$. Ответ: а) $y=\sqrt{2x-3}-3$; б) $y=2-\sqrt{13-2x}$; в) $y=\sqrt{13-2x}$; г) $y=4-\sqrt{2x+1}$.
6. Поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Написать уравнение поверхности, полученной из данной: а) симметрией относительно оси $Ox$; б)симметрией относительно плоскости $Oxz$; в) симметрией относительно точки $(a;b;c)$. Ответ: а) $F(x,-y,-z)=0$; б) $F(x,-y,z)=0$; в) $F(2a-x,2b-y,2c-z)=0$.
7. Преобразование плоскости задано формулами $x'=3-y$, $y'=x+2$. Доказать, что это поворот; найти центр и угол поворота. Ответ: центр: $(0{,}5;2{,}5)$, угол: $90°$.
8. Дан центр правильного треугольника: $F=(-1;3)$ и уравнение одной его стороны: $3x-2y+1=0$. Составить уравнения двух других сторон. Ответ: $\left(3\pm2\sqrt{3}\right)x+\left(-2\pm3\sqrt{3}\right)y\mp7\sqrt{3}+25=0$.
9. Написать формулы симметрии плоскости относительно прямой $8x-12y=13$. Ответ: $x'=\dfrac{5}{13}x+\dfrac{12}{13}y+1$, $y'=\dfrac{12}{13}x-\dfrac{5}{13}y-\dfrac{3}{2}$.
10. Какое преобразование плоскости получится, если сначала сделать поворот на $90°$ вокруг начала координат, а затем на $-90°$ вокруг точки $(1;2)$? Ответ: параллельный перенос на вектор $(-1;3)$.