Часть I. Аналитическая геометрия

ГЛАВА 1. ВЕКТОРЫ

§1. Сложение векторов и умножение на число

Напомним, что сумма двух векторов может быть найдена: а) ***по правилу треугольника***; б) ***по правилу параллелограмма*** (см. рис. 1).

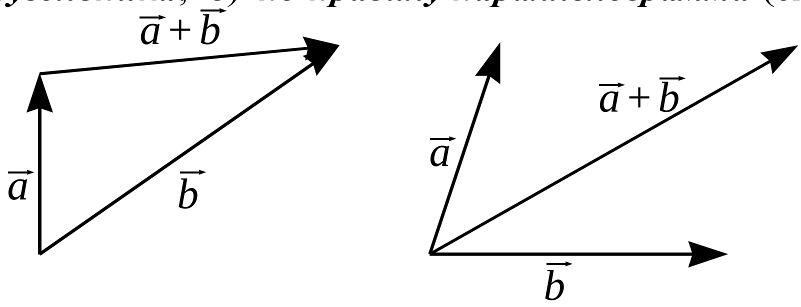

Рис.1.

Если векторы $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны (записывается это так: $\vec a \parallel \vec b$), то “работает” только первое правило. Кроме того, для любых точек M, N, P плоскости или пространства имеет место ***правило трёх точек***: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ (см. рис. 2).

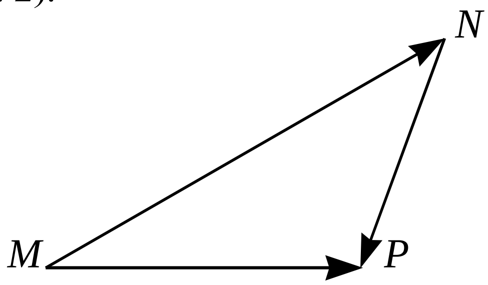

Рис.2.

Понятно, что равенства такого вида можно писать, даже не делая чертежа: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KT}+\overrightarrow{TF}=\overrightarrow{KF}$ и т.д. Если нам надо разложить какой-либо вектор (например, $\overrightarrow{EF}$) в сумму, то можно попробовать разные варианты: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SF}$ и т.д.

Решим в качестве иллюстрации несколько задач.

Задача 1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M – середина стороны CD. Выразить вектор $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\vec a=\overrightarrow{AB}$, $\vec b=\overrightarrow{AF}$.

Решение (см.рис.3). Известно, что правильный шестиугольник разбивается диагоналями на 6 правильных треугольников.

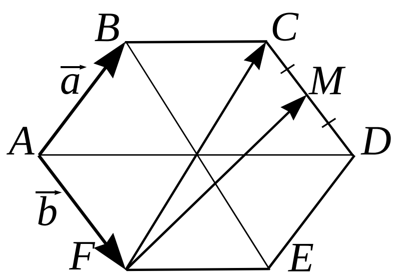

Рис.3.

Поэтому $\overrightarrow{FC} = 2\vec{a}$. Используя правило трёх точек, получим: $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CM} = 2\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Задача 2. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ точка M – центр грани $A'B'C'D'$. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$.

Решение (см. рис. 4).

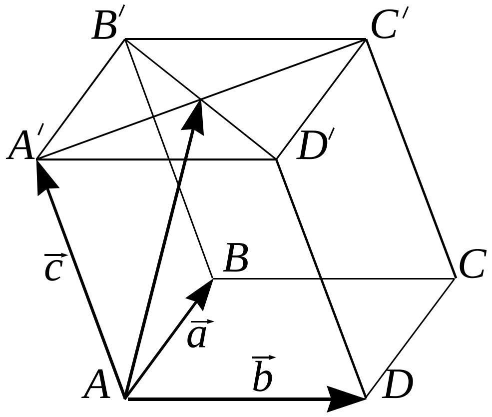

Рис.4

Имеем: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \vec{c} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = \vec{c} + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}\right) = \vec{c} + \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

В некоторых случаях для того, чтобы выразить какой-либо вектор через другие, приходится решать отдельно задачу из элементарной геометрии или систему уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 3. В окружности с центром O проведены радиусы OA и OB. Радиус OC делит угол AOB пополам. Зная, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\angle AOB = \alpha$, найти вектор $\overrightarrow{OC}$.

Решение (см. рис. 5).

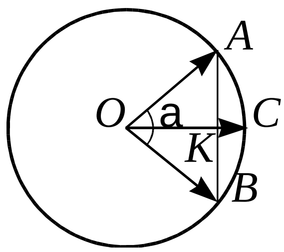

Рис.5.

Пусть K – середина отрезка AB. Тогда $OK = R\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Так как векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ имеют одинаковую длину, а вектор $\overrightarrow{OC}$ образует с ними одинаковые углы, то $\overrightarrow{OC} = \lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, Следовательно, $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OK}} = \dfrac{\lambda}{1/2}$. Отсюда получаем: $\dfrac{R}{R\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\lambda}{1/2}$. Таким образом, $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

Решение (см. рис 6).

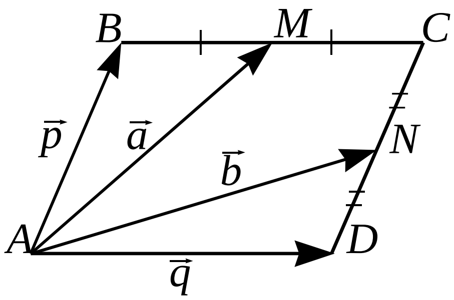

Рис.6.

Введём векторы $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$: $\vec{a} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{p} + \dfrac{1}{2}\vec{q}$ и аналогично $\vec{b} = \vec{q} + \dfrac{1}{2}\vec{p}$. На эти равенства можно смотреть как на систему уравнений

$$\begin{cases} \vec{p} + \dfrac{1}{2}\vec{q} = \vec{a}, \\ \vec{q} + \dfrac{1}{2}\vec{p} = \vec{b}. \end{cases}$$

Решим эту систему. Имеем: $\vec{q} = \vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{p}$, откуда получаем: $\vec{p} + \dfrac{1}{2}\left(\vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{p}\right) = \vec{a}$, т.е. $\dfrac{3}{4}\vec{p} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$. Отсюда $\vec{p} = \dfrac{4}{3}\left(\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}\right) = \dfrac{4}{3}\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$. Таким образом, $\overrightarrow{AB} = \dfrac{4}{3}\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$.

Задача 5. В треугольнике OAB OL – биссектриса угла AOB. Выразить вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и длины этих векторов.

Решение (см. рис. 7). По свойству биссектрисы имеем:

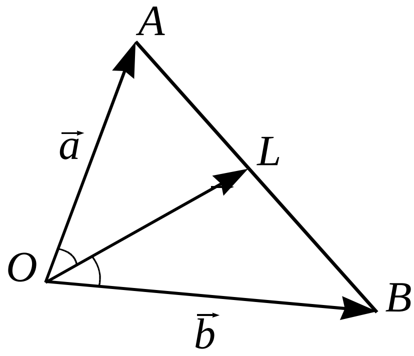

Рис.7.

$\dfrac{AL}{LB}=\dfrac{|\vec a|}{|\vec b|}$. Следовательно, $\overrightarrow{AL}=\dfrac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}\overrightarrow{AB}$. Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AL}=\vec a+\frac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=\vec a+\frac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}\left(-\vec a+\vec b\right)=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}.$$

Задача 6. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Вычислить сумму $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Решение (см. рис. 8).

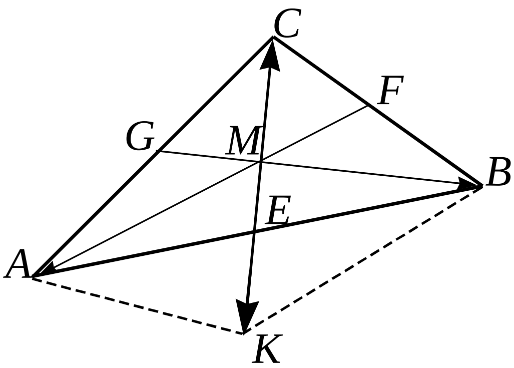

Рис.8.

Пусть E,F,G – середины сторон AB, BC, AC соответственно. Продлим отрезок ME за точку E на величину, равную ME. Мы получим отрезок $EK=ME$. Так как диагонали четырёхугольника $AMBK$ точкой пересечения E делятся пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом. Следовательно, по правилу параллелограмма $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}$. Далее, по свойству медиан $CM:EK=2:1$, поэтому $MC=MK$, а значит, $\overrightarrow{MK}=-\overrightarrow{MC}$. Теперь можно вычислить требуемую сумму: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MC}=\vec 0$.

Покажем, как с помощью векторов можно доказывать утверждения. Напомним, что пространственным четырёхугольником называется четырёхугольник, вершины которого могут не лежать в одной плоскости.

Задача 7. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырёхугольника, а также отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Решение (см. рис. 9).

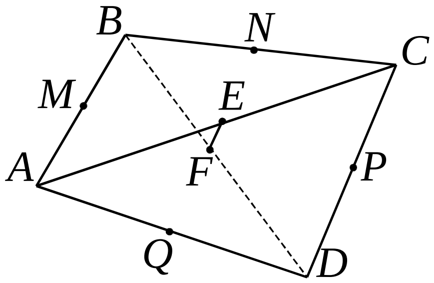

Рис.9.

Пусть M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Обозначим через E и F середины диагоналей AC и BD соответственно. Требуется доказать, что середины отрезков MP, NQ и EF совпадают. Пусть S – середина отрезка MP, а O – произвольная точка пространства. Тогда получаем:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

Рассуждая аналогично, получим, что если T – середина отрезка NQ, то $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Таким образом, $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OT}$, откуда следует, что точки S и T совпадают. Обозначим через U середину отрезка EF. Имеем:

$$\overrightarrow{OU}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

Теперь ясно, что $S=T=U$.

§ 2. Коллинеарность и компланарность векторов. Разложение по базису

Напомним, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** (обозначается: $\vec{a}\parallel\vec{b}$), если они параллельны одной прямой; при этом нулевой вектор $\vec{0}$ считается коллинеарным любому вектору.

Данное геометрическое определение коллинеарности эквивалентно алгебраическому: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\left(\exists\lambda:\vec{a}=\lambda\vec{b}\text{ или }\exists\mu:\vec{b}=\mu\vec{a}\right)$. Конечно, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, то $\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\frac{1}{\lambda}\vec{a}$, поэтому для коллинеарности достаточно требовать выполнение только одного из этих равенств, например, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Два неколлинеарных вектора $\vec{a},\vec{b}$ плоскости составляют ***базис векторов плоскости***. Это означает, что каждый вектор однозначно разлагается по векторам $\vec{a},\vec{b}$:

Теорема 1. Если $\vec{a},\vec{b}$ – неколлинеарные векторы плоскости, то каждый вектор $\vec{v}$ этой плоскости представим, и притом единственным образом, в виде

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}, \tag{1}$$

где $x, y\in\mathbb{R}$.

Равенство (1) называется ***разложением по базису***.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 8. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M – середина стороны CD. Разложить вектор $\overrightarrow{FM}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AE}$.

Решение (см. рис. 10). Гораздо проще раскладывать вектор по другому базису: $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AF}$. Установим связь между базисами $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{p},\vec{q}$. Обозначим через O центр шестиугольника. Тогда $\overrightarrow{AO}=\vec{p}+\vec{q}$. Отсюда получаем: $\vec{a}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{p}+(\vec{p}+\vec{q})=2\vec{p}+\vec{q}$ и аналогично $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$.

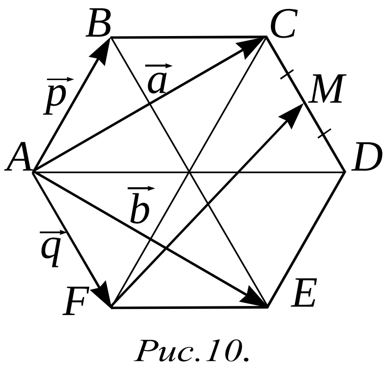

Рис.10.

Решив систему уравнений $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, получим: $\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{q}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CM}=2\vec{p}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}=\frac{7}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.$$

Задача 9. На сторонах OA, OB треугольника OAB соответственно взяты точки M и N такие, что $OM:MA=2:1$, $ON:NB=1:3$. Пусть P – точка пересечения отрезков AN и BM. Разложить вектор $\overrightarrow{OP}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

Решение (см. рис. 11). Разложим вектор $\overrightarrow{OP}$ двумя способами. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\lambda\overrightarrow{AN}=\vec{a}+\lambda\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}\right)=\vec{a}+\lambda\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=(1-\lambda)\vec{a}+\frac{3}{4}\lambda\vec{b}$ и

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\vec{b}+\mu\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\mu\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)=\vec{b}+\mu\left(-\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}\right)=\frac{2}{3}\mu\vec{a}+(1-\mu)\vec{b}.$$

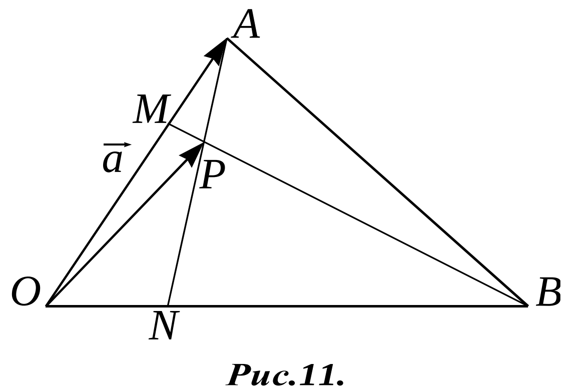

Рис.11.

Ввиду единственности разложения по базису получаем систему:

$$\begin{cases} 1-\lambda=\dfrac{2}{3}\mu, \\ \dfrac{3}{4}\lambda=1-\mu. \end{cases}$$

Ее решение: $\lambda=\dfrac{1}{2}, \quad \mu=\dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}$.

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ пространства называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости (если их начала совместить, то они будут просто лежать в одной плоскости). Это геометрическое определение эквивалентно следующему алгебраическому: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если либо $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, либо $\vec{b}=\gamma\vec{a}+\delta\vec{c}$, либо $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ при некоторых $\alpha,\beta,\ldots\in\mathbb{R}$. Эти равенства ни в коем случае нельзя считать взаимоисключающими, т.е. они могут выполняться и одновременно. Некомпланарные векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис векторов трехмерного пространства, т.к. справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарные векторы пространства, то любой вектор $\vec{v}$ пространства может быть единственным образом представлен в виде

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\,\vec{b}+z\,\vec{c},$$

где $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Задача 10. Дан параллелепипед $ABCD$. Точки M,N,P – центры граней $A'B'C'D'$, $CC'D'D$, $BB'C'C$ соответственно. Разложить вектор $\overrightarrow{AC'}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AP}$.

Решение (см. рис. 12). Введём векторы $\vec{p}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AD}$. Тогда $\vec{a}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M}=\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{q}+\dfrac{1}{2}\vec{r}$.

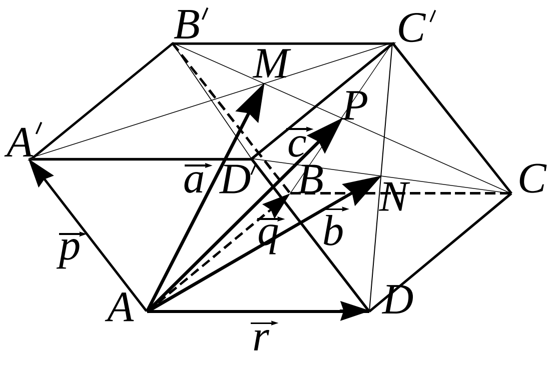

Рис.12.

Аналогично находим векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{q}+\vec{r}$, $\quad \vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{p}+\vec{q}+\dfrac{1}{2}\vec{r}$.

Заметим, что $\overrightarrow{AC'}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$. Получим:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+\left(\vec{r}+\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)=2\left(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\right)=2\overrightarrow{AC'}.$$

Отсюда $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$

§ 3. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется следующим образом: $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).$ Оно эквивалентно алгебраическому определению: $\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$ если векторы $\vec{a},\vec{b}$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат: $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right),$ $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right).$ Пользуясь определением, можно доказать для любых векторов $\vec{a},\vec{b}$ справедливость равенств

$$\vec{b}\vec{a}=\vec{a}\vec{b},$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c},$$

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)\qquad\left(\lambda\in\mathbb{R}\right).$$

Таким образом, скалярное произведение векторов обладает многими свойствами, которыми обладает произведение действительных чисел. Однако, автоматическое (бездумное) перенесение на векторы свойств действительных чисел, которыми векторы не обладают, является ошибочным. В частности, для векторов несправедлив закон ассоциативности, т.е. $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}\neq\vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)$ в общем случае. Кроме того, нельзя «сокращать на вектор», т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c},\ \vec{a}\neq\vec{0}\ \not\Rightarrow\ \vec{b}=\vec{c}.$$

Приведем примеры. 1) если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$векторы, изображенные на рисунке 13, то $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}=0,$ но $\vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)\neq0;$ 2) для векторов на рисунке 14 $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}=0,$ но $\vec{b}\neq\vec{c}.$

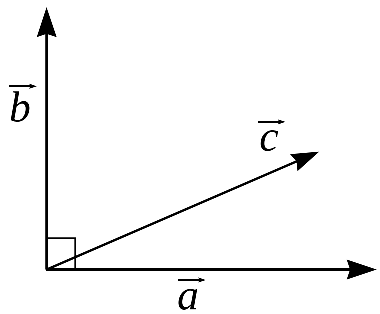

Рис.13.

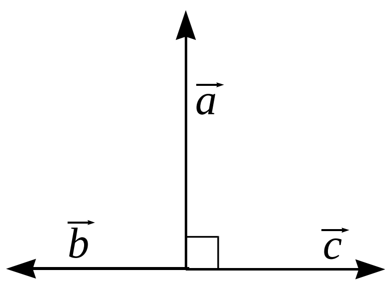

Рис.14.

Условие перпендикулярности двух векторов выглядит так:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Таким образом, скалярное произведение может быть использовано для проверки или для доказательства перпендикулярности векторов.

Задача 11. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Решение (см. рис. 15). Пусть AM и BN – высоты, пересекающиеся в точке K. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $CK \perp AB$. Переформулируем нашу задачу на языке скалярного произведения:

дано: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0;$

доказать: $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

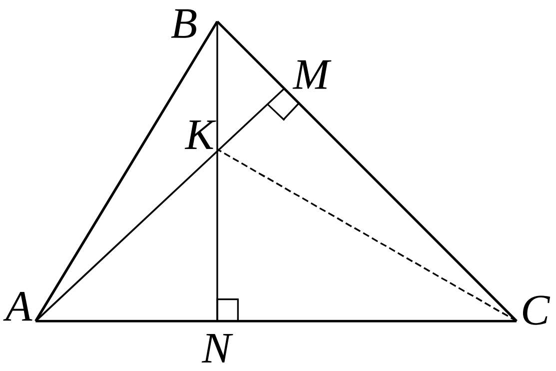

Рис.15.

Доказательство:

$$\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}\right) \cdot \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK}\right) \cdot \overrightarrow{CB} =$$

$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + 0 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Обозначим через $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. С помощью скалярного произведения векторов можно вычислить $|\vec{a}|$, $pr_{\vec{b}}\vec{a}$, $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Приведём соответствующие формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad \text{pr}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}, \quad \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}. \qquad (*)$$

Задача 12. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – такие векторы, что $\left|\vec{a}\right| = 3,$ $\left|\vec{b}\right| = 5.$ Выяснить, при каких λ векторы $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ перпендикулярны друг другу.

Решение. Имеем: $0 = \left(\vec{a} + \lambda\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \lambda\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \lambda^2\vec{b}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - \lambda^2\left|\vec{b}\right|^2.$ Таким образом, $9 - 25\lambda^2 = 0.$ Отсюда $\lambda = \pm\frac{3}{5}.$

В следующей задаче много “подводных” камней, т.е. возможностей совершить ошибку.

Задача 13. В треугольнике ABC проведена высота BH. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB},$ $\vec{b} = \overrightarrow{AC}.$

Решение (см. рис. 16).

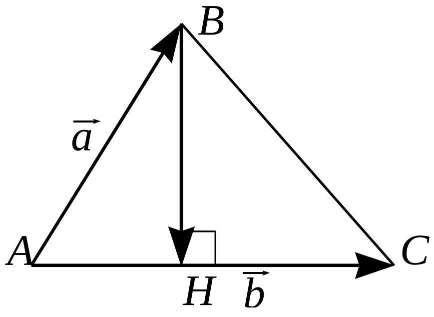

Рис.16.

Имеем: $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\vec{a} + \lambda\vec{b}.$ Подберём λ так, чтобы выполнялось условие $BH \perp AC.$ Это равносильно равенству $\left(-\vec{a} + \lambda\vec{b}\right)\vec{b} = 0.$ Из этого уравнения надо найти $\lambda.$ Некоторые учащиеся рассуждают так: “раз $\vec{b} \neq 0,$ то $-\vec{a} + \lambda\vec{b} = 0$”. Это ошибка, так как из равенства $\vec{p}\,\vec{q} = 0$ не следует, что либо $\vec{p} = 0,$ либо $\vec{q} = 0.$ Далее, раскроем скобки в полученном уравнении: $-\vec{a}\,\vec{b} + \lambda\vec{b}^2 = 0.$ Отсюда $\lambda = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{b}^2}.$ Второй ошибкой является сокращение на $\vec{b}$ и получение неверного равенства $\lambda = \dfrac{\vec{a}}{\vec{b}}.$ Это равенство не имеет смысла, так как $\vec{a} \nparallel \vec{b}.$ Подставим равенство $\lambda = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{b}^2}$ в выражение для $\overrightarrow{BH}.$ Получим:

$$\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b}.$$

Третьей возможной ошибкой является следующее “преобразование” полученной формулы: $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = -\vec{a} + \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}^2}{\vec{b}^2} = -\vec{a} + \vec{a} = 0,$ что, разумеется, неверно. Причина ошибки в том, что, как оказывается, $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{b} \neq \vec{a}\left(\vec{b}^2\right).$

Отметим, что если у векторов $\vec{a}, \vec{b}$ заданы длины и угол между ними, то фактически имеется полная информация об этих векторах. Поэтому мы можем (используя формулы (*)) вычислить длины любых векторов, выраженных через $\vec{a}$ и $\vec{b},$ а также проекции и углы. Проиллюстрируем это утверждение примером.

Задача 14. Пусть $|\vec{a}| = 3,$ $|\vec{b}| = 2,$ $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°.$ Вычислить: 1) $\vec{a}\,\vec{b};$ 2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right);$ 3) $\left|3\vec{a} - \vec{b}\right|;$ 4) $\mathrm{pr}_{\vec{a}-\vec{b}}\vec{a};$ 5) $\cos\angle\left(\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\right).$

Решение. 1) $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3.$

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{b} - \vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 - 3 - |\vec{b}|^2 = 2 \cdot 9 - 3 - 4 = 11.$

3) $\left|3\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 6\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{81 + 18 + 4} = \sqrt{103}.$

4) $\mathrm{pr}_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|} = \dfrac{\vec{a}^2+\vec{a}\,\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}^2}} = \dfrac{9-3}{\sqrt{9-6+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{7}}.$

5) $\cos\angle\left(\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{b}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|} = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}+2\vec{b}^2}{2\cdot\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\,\vec{b}+4\vec{b}^2}} = \dfrac{-3+8}{2\sqrt{9-12+16}} = \dfrac{5}{2\sqrt{13}}.$

Следующие две задачи наглядно показывают возможности скалярного произведения для решения задач элементарной геометрии. Например, для нахождения длин отрезков и для вычисления углов между скрещивающимися прямыми.

Задача 15. Все рёбра правильной треугольной призмы равны между собой. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней призмы.

Решение (см. рис. 17).

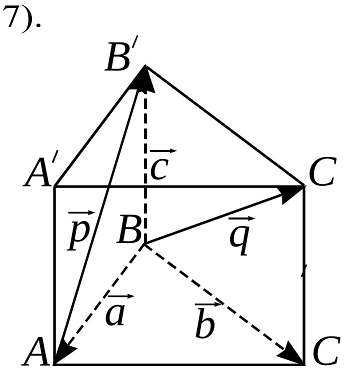

Рис.17.

Понятно, что мы можем считать, что все рёбра призмы равны 1. Введём векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA},\ \ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \ \vec{c}=\overrightarrow{BB'}$. Так как $\angle ABC = 60^\circ$, то $\vec{a}\,\vec{b}=\dfrac{1}{2}$. Кроме того, $\vec{a}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}=0$. Требуется найти угол между векторами $\vec{p}=\overrightarrow{AB'}$ и $\vec{q}=\overrightarrow{BC'}$. Имеем: $\vec{p}=\vec{c}-\vec{a},\ \ \vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$. Если φ – искомый угол, то

$$\cos\varphi=\cos\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}|^2}=\frac{\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)}{\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2}=\frac{\vec{c}\vec{b}-\vec{a}\vec{b}+\vec{c}^2-\vec{a}\vec{c}}{\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{c}+\vec{a}^2}=\frac{0-\frac{1}{2}+1-0}{1-0+1}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{4}$.

Задача 16. Все грани параллелепипеда – ромбы со стороной a и углом 60°. Найти наибольшую диагональ параллелепипеда.

Решение (см. рис. 18).

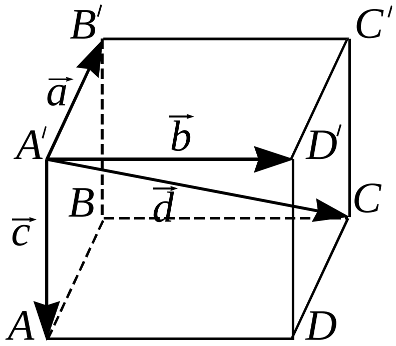

Рис.18.

Будем считать *временно*, что все рёбра параллелепипеда равны 1. В конце задачи мы полученный результат умножим на a. С каждой вершиной параллелепипеда связывается трёхгранный угол, рёбра которого являются рёбрами параллелепипеда. Плоские углы этих трёхгранных углов по условию могут быть равны лишь $60°$ и $120°$. Так как комбинации $60°$, $60°$, $120°$ и $120°$, $120°$, $120°$ невозможны, то остаются комбинации $60°$, $60°$, $60°$ и $60°$, $120°$, $120°$. Не может оказаться, что все трёхгранные углы вида $60°$, $120°$, $120°$ (так как плоских углов $60°$ и $120°$ одинаковое количество), поэтому есть угол, у которого все плоские углы равны $60°$. Пусть это будет угол с вершиной A'. Введём векторы $\vec{a}=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{A'D'}$, $\vec{c}=\overrightarrow{A'A}$. Очевидно, $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}=\frac{1}{2}$.

Ниже мы убедимся в том, что наибольшей диагональю будет AC'. Доказывать это утверждение мы не будем, а просто вычислим все четыре диагонали параллелепипеда. Если их рассматривать как векторы, то это будут $\vec{d}=\overrightarrow{A'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{d}_1=\overrightarrow{B'D}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{d}_2=\overrightarrow{BD'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{d}_3=\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. Вычисляем длины этих векторов:

$$AC'=\left|\vec{d}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\,\vec{b}+2\vec{a}\,\vec{c}+2\vec{b}\,\vec{c}}=\sqrt{1+1+1+1+1+1}=\sqrt{6},$$

$$B'D=\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\,\vec{b}-2\vec{a}\,\vec{c}+2\vec{b}\,\vec{c}}=\sqrt{2}$$

и аналогично $\left|\vec{d}_2\right|=\left|\vec{d}_3\right|=\sqrt{2}$. Таким образом, диагональ AC' действительно самая длинная. Она равна $a\sqrt{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M – середина стороны CD. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AE}$.
2. Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить вектор $\overrightarrow{FD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.
3. В треугольнике OAB $OA=1$, $OB=3$, $\angle AOB=90°$. Из точки O опущена высота OH. Разложить вектор $\overrightarrow{OH}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.
4. В треугольнике ABC проведены медианы AM, BN и CP, пересекающиеся в точке O. Разложить вектор $\overrightarrow{OB}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OM}$.
5. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны BC. Разложить вектор $\overrightarrow{OC}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OD}$.
6. Доказать, что в любой трапеции следующие 4 точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон.
7. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а P – произвольная точка. Доказать, что $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$.

8. Пусть ABC и $A'B'C'$ – треугольники, M и M' – точки пересечения медиан этих треугольников соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$ через векторы $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$.

9. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Разложить вектор $\overrightarrow{AA'}$ по базису $\vec{a} = \overrightarrow{AB'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD'}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Ответы: 1. $\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. 2. $\vec{b} - 2\vec{a}$. 3. $0,9\vec{a} + 0,1\vec{b}$. 4. $2\vec{a} + 2\vec{b}$. 5. $2\vec{a} + \vec{b}$. 8. $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right)$. 9. $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)$.

§ 4. Операции над векторами в координатах

Пусть дана система координат Oxy на плоскости или $Oxyz$ в пространстве. Тогда всякую точку можно записать в виде $A=(x;y)$ (или $A=(x;y;z)$), каждый вектор записывается аналогичным образом: $\vec{a}=(a_1;a_2)$ (или $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$). Следует иметь в виду, что запись $\vec{a}=(a_1;a_2)$ эквивалентна записи $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ и аналогично $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$. Здесь $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы (*орты*), направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Операции над векторами пространства в координатной форме осуществляются следующим образом: если $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3), \quad (1)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3). \quad (2)$$

Формула для скалярного произведения выглядит так:

$$\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \quad (3)$$

Если $M=(x_M;y_M;z_M)$ и $N=(x_N;y_N;z_N)$ – точки пространства, то вектор $\overrightarrow{MN}$ может быть вычислен по формуле

$$\overrightarrow{MN}=(x_N-x_M;y_N-y_M;z_N-z_M). \quad (4)$$

Если O – начало координат, $A=(x_A;y_A;z_A)$ – произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A;z_A). \quad (5)$$

Этот вектор называется ***радиусом-вектором*** точки A. Таким образом, радиус-вектор точки имеет те же координаты, что и сама точка.

Длина вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \quad (6)$$

а ***расстояние между точками*** $A=(x_A;y_A;z_A)$ и $B=(x_B;y_B;z_B)$ (т.е. длина вектора $\overrightarrow{AB}$) – по формуле

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \quad (7)$$

Формулы, аналогичные формулам (1)-(7), верны также для векторов плоскости.

Замечание. Формулы (1), (2), (4), (5) верны не только в прямоугольной, но также в произвольной *косоугольной* (или *аффинной*) системе координат, т.е. такой системы координат, в которой базисные векторы необязательно имеют единичную длину и углы между ними необязательно прямые. Формулы (3), (6), (7) справедливы лишь в прямоугольной системе координат.

Разберём несколько задач на данную тему.

Задача 1. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A=(-1;2;3)$, $B=(1;1;4)$, $C=(0;-2;5)$. Найти четвёртую вершину D.

Решение (см. рис. 1).

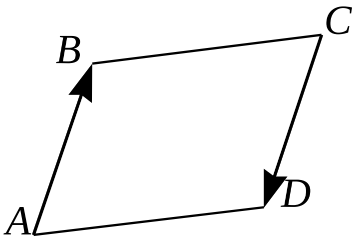

Рис.1.

Найдём вектор $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(1+1;1-2;4-3)=(2;-1;1)$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Далее поступим следующим образом. Для того, чтобы найти координаты точки D, достаточно найти координаты её радиуса-вектора $\overrightarrow{OD}$, где O – начало координат. Так как $\overrightarrow{OC}=(0;-2;5)$, то $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=(0;-2;5)-(2;-1;1)=(-2;-1;4)$. Таким образом, $D=(-2;-1;4)$.

Задача 2. Отрезок AB разделён точкой K в отношении $\lambda:\mu$ (см. рис. 2). Найти координаты точки K, считая известными координаты точек A и B.

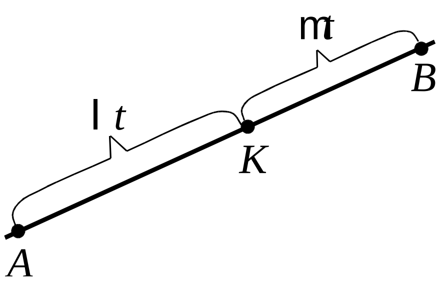

Рис.2.

Решение. По условию $AK:KB=\lambda:\mu$. Пусть $A=(x_A;y_A;z_A)$, $B=(x_B;y_B;z_B)$. Обозначим через O начало координат. Тогда

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=(x_A;y_A;z_A)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}=$$

$$=(x_A;y_A;z_A)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=\left(\frac{\mu x_A+\lambda x_B}{\lambda+\mu};\frac{\mu y_A+\lambda y_B}{\lambda+\mu};\frac{\mu z_A+\lambda z_B}{\lambda+\mu}\right).$$

Таким образом,

$$K=\left(\frac{\mu x_A+\lambda x_B}{\lambda+\mu};\frac{\mu y_A+\lambda y_B}{\lambda+\mu};\frac{\mu z_A+\lambda z_B}{\lambda+\mu}\right). \qquad (8)$$

Замечания. 1. Аналогичная формула

$$K=\left(\frac{\mu x_A+\lambda x_B}{\lambda+\mu};\frac{\mu y_A+\lambda y_B}{\lambda+\mu}\right) \qquad (8')$$

справедлива для точек плоскости.

2. При $\lambda=\mu$ мы получаем координаты середины отрезка AB:

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_K=\frac{y_A+y_B}{2},\quad z_K=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Задача 3. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Зная, что $A=(-1;2)$, $C=(3;1)$, $M=(0;4)$, найти координаты вершины B.

Решение (см. рис. 3).

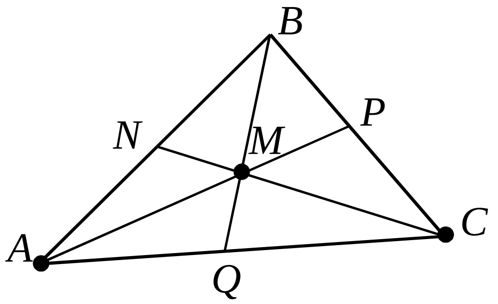

Рис.3.

Вычислим векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и их длины: $\overrightarrow{AB}=(21;3)$, $\overrightarrow{AC}=(5;-5)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{21^2+3^2}=15\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$. Мы видим, что $AB=3AC$. Следовательно, точка L делит отрезок BC в отношении $3:1$. По формуле $(8')$ мы теперь получаем: $L=\left(\dfrac{x_B+3x_C}{1+3};\dfrac{y_B+3y_C}{1+3}\right)=(-1;-2)$.

Задача 5. На оси абсцисс найти точку, равноудалённую от точек $A=(5;7)$ и $B=(-1;3)$.

Решение. Пусть M – искомая точка. Тогда $M=(x;0)$ при некотором $x\in\mathbb{R}$. По условию $MA=MB$. По формуле (7) получаем: $\sqrt{(x-5)^2+7^2}=\sqrt{(x+1)^2+3^2}$. Отсюда $x^2-10x+74=x^2+2x+10$, а значит, $x=\dfrac{16}{3}$. Таким образом, $M=\left(\dfrac{16}{3};0\right)$.

Решим теперь задачи с использованием скалярного произведения векторов.

Задача 6. Найти все векторы, перпендикулярные вектору $\vec{a}=(2;3)$. Изобразить эти векторы на чертеже.

Решение (см. рис. 5).

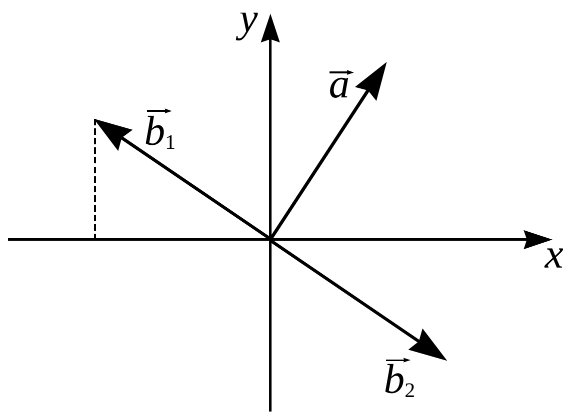

Рис.5.

Пусть $\vec{b} \perp \vec{a}$. Запишем вектор $\vec{b}$ в координатном виде: $\vec{b} = (x;\, y)$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е. $2x + 3y = 0$. Получаем: $y = -\dfrac{2}{3}x$, $\vec{b} = \left(x;\, -\dfrac{2}{3}x\right) = \dfrac{1}{3}x \cdot (3;\, -2)$.

Очевидно, $\lambda = \dfrac{1}{3}x$ – любое действительное число. Значит, общий вид всех векторов $\vec{b} \perp \vec{a}$ таков: $\vec{b} = \lambda(3;\, -2)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. это в точности те векторы, которые коллинеарны вектору $(3;\, -2)$. Ровно два из них не только перпендикулярны вектору $\vec{a}$, но и имеют с ним одну и ту же длину. Это $\vec{b}_1 = (3;\, -2)$ и $\vec{b}_2 = (-3;\, 2)$.

Замечание. В общем случае мы имеем: если $\vec{a} = (\alpha;\, \beta)$, то:

$$\vec{b} \perp \vec{a} \;\Leftrightarrow\; \vec{b} = \lambda(-\beta;\, \alpha) \;\; (\lambda \in \mathbb{R}), \tag{9}$$

$$\begin{cases} \vec{b} \perp \vec{a}, \\ \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \end{cases} \Leftrightarrow\; \vec{b} = (-\beta;\, \alpha) \text{ или } \vec{b} = (\beta;\, -\alpha). \tag{10}$$

Задача 7. Даны две смежные вершины квадрата: $(-3;\, 5)$ и $(4;\, 1)$. Найти две другие вершины.

Решение. Обозначим квадрат через $ABCD$. Мы можем считать, что $A = (-3;\, 5)$, $B = (4;\, 1)$. Пусть O – начало координат. Имеем: $\overrightarrow{AB} = (7;\, -4)$. Вектор $\overrightarrow{AD}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AB}$ и имеет с ним одинаковую длину. Поэтому ввиду утверждения (10) получаем: $\overrightarrow{AD} = (4;\, 7)$ или $\overrightarrow{AD} = (-4;\, -7)$ (см. рис. 6). Разберём оба этих случая.

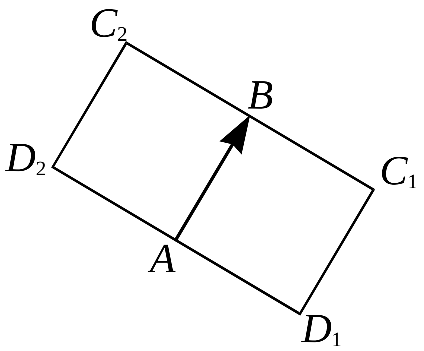

Рис.6.

1-й случай: $\overrightarrow{AD_1} = (4;\, 7)$. Тогда $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1} = (-3;\, 5) + (4;\, 7) = (1;\, 12)$, т.е. $D_1 = (1;\, 12)$. Далее, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD_1} = (4;\, 1) + (4;\, 7) = (8;\, 8)$, т.е. $C_1 = (8;\, 8)$. Мы получили квадрат ABC_1D_1.

2-й случай: $\overrightarrow{AD_2} = (-4;\, -7)$. Тогда $\overrightarrow{OD_2} = (-3;\, 5) + (-4;\, -7) = (-7;\, -2)$, $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_2} = (4;\, 1) + (-4;\, -7) = (0;\, -6)$. Таким образом, мы нашли координаты вершин квадрата ABC_2D_2: $C_2 = (0;\, -6)$, $D_2 = (-7;\, -2)$.

Задача 8. Найти угол A треугольника ABC, если $A = (-1;\, 1;\, 3)$, $B = (1;\, 2;\, -1)$, $C = (0;\, 3;\, 5)$.

Решение. Угол A – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Вычислим эти векторы: $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 2; 2)$. Отсюда

$$\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 2}{\sqrt{4+1+16}\,\sqrt{1+4+4}} = -\frac{4}{3\sqrt{21}}.$$

Следовательно, $A = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{21}}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину вектора $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, если $\vec{a} = (-1; 4)$, $\vec{b} = (2; 1)$, $\vec{c} = (3; 2)$. Ответ: $4\sqrt{5}$.
2. Определить, при каких λ векторы $\vec{a} = (-1; 3; 2)$ и $\vec{b} = (3; -2; 3)$ перпендикулярны. Ответ: $\lambda = \frac{1}{2}$.
3. Определить, при каких λ векторы $\vec{a} = (-1; 3; 2)$ и $\vec{b} = (3; -2; 3)$ перпендикулярны. Ответ: $\lambda = \frac{1}{2}$.
4. В треугольнике ABC M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Найти координаты точки C, если $A = (-1; 4)$, $M = (3; 2)$, $N = (0; 5)$. Ответ: $(-7; 10)$.
5. В параллелограмме $ABCD$ F – центр, M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Найти координаты вершины A, если $F = (3; 1)$, $M = (-2; 5)$, $N = (1; -4)$. Ответ: $(10; 2)$.
6. Найти координаты вершин треугольника, если даны середины его сторон: $(-2; 4)$, $(3; 1)$, $(1; 5)$. Ответ: $(0; 0)$, $(-4; 8)$, $(6; 2)$.
7. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, в котором $A = (-1; 4; 0)$, $B = (3; 2; -5)$, $C = (4; -3; -4)$. Ответ: $(2; 1; -3)$.
8. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = 5 : 2$. Найти координаты точки B, если $A = (6; 3; -4)$, $M = (1; 3; 6)$. Ответ: $(-1; 3; 10)$.
9. Даны две противоположные вершины квадрата: $(4; 5)$ и $(-2; 9)$. Найти две другие вершины. Ответ: $(3; 10)$ и $(-1; 4)$.