ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители второго порядка

<u>*Определителем второго порядка*</u> называется число, соответствующее квадратной матрице второго порядка, равное $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Для обозначения определителя обычно используют прямые скобки (или символ ***det***):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad det\,A = |A| = d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

Элементы, составляющие матрицу данного определителя, называют элементами этого определителя.

Для запоминания формулы (1) можно использовать геометрическую схему составления членов определителя и выбора их знаков.

1) положительный член определителя соответствует схеме *C1*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{a_{11}} & \\ & \boldsymbol{a_{22}} \end{array}}$$

2) отрицательный член определителя соответствует схеме *C2*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \end{array}}$$

Из условия равенства нулю определителя следует цепочка выражений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \;\rightarrow\; \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad \text{или} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}, \qquad (2)$$

что определяет пропорциональность строк или столбцов определителя (1), а значит, и соответствующих строк и столбцов связанной с определителем матрицы.

Возникновение математической конструкции «<u>*определитель*</u>» связывают с задачей исследования и отыскания решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (3)$$

где *коэффициенты* a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} *при неизвестных* x_1, x_2 и <u>*свободные члены*</u> b_1, b_2 системы уравнений считаются заданными.

Системе уравнений (3) соответствуют: <u>*матрица системы*</u> (составлена из коэффициентов при неизвестных) и <u>*расширенная матрица*</u> (составлена из всех ее коэффициентов, включая свободные члены):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Уравняем коэффициенты при неизвестной x_2 в 1-м и 2-м уравнениях системы (3), умножив 1-е на a_{22}, и 2-е на a_{12}. Вычитая из полученного таким образом 1-го уравнения преобразованное 2-е, получим:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (5)$$

Аналогично, уравнивая коэффициенты при неизвестной x_1 в 1-м и 2-м уравнениях системы (3), получим:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)\cdot x_2 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}. \qquad (6)$$

Если ввести обозначения:

$$|A| = d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

то уравнения (5) и (6) можно записать в виде:

$$d \cdot x_1 = d_1, \qquad d \cdot x_2 = d_2 \qquad (8)$$

Если $d \neq 0$, то решение системы (3) может быть записано при помощи <u>*формул Крамера*</u>:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \qquad x_2 = \frac{d_2}{d} \qquad (9)$$

Формулы (9) определяют единственное решение. Если считать каждое уравнение системы (3) уравнением прямой, то рассматриваемый случай соответствует двум пересекающимся прямым, причем точка пересечения прямых определяется решением (x_1, ,x_2).

Если $d = 0$, то применение *формул Крамера* невозможно. В этом случае строки матрицы ***A*** пропорциональны (см. (2)):

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

1). Если при этом ни один из определителей d_1 и d_2 не равен нулю, то геометрическим аналогом системы уравнений (3) является пара параллельных прямых. В этом случае ни одно из равенств (9) невозможно, т.е. решения нет (прямые не имеют общих точек), или говорят – <u>*система несовместна*</u>.

2). Но, если хотя бы один из определителей d_1 , d_2 равен нулю (на самом деле они *равны нулю одновременно*!), то, учитывая (2), получим пропорциональность строк матрицы $\overline{A}$:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \qquad (10)$$

Это значит, что 2-е уравнение системы является следствием 1-го, т.е. фактически имеем одно уравнение с двумя неизвестными, и одной из переменных можно присваивать произвольные значения: решений бесчисленное множество – <u>*система неопределенна*</u>. В этом случае геометрическим аналогом системы уравнений (3) является пара <u>*совпавших*</u> прямых.

Если свободные члены системы b_1 , b_2 равны одновременно нулю, то система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 = 0, \end{cases} \qquad (11)$$

и имеет специальное название – <u>*однородная*</u> система (геометрически каждое уравнение отражает прямую, проходящую через начало координат).

Система (11) всегда имеет решение (0, 0). Если $d \neq 0$ (очевидно при этом d_1 и d_2 равны нулю), то это решение единственно (точка (0, 0) является точкой пересечения прямых). Для того, чтобы система (11) имела еще и ненулевые решения (их оказывается бесчисленное множество), необходимо $d = 0$ (в этом случае прямые совпадают).

☺ *Пример 13*. Вычислим определитель: $d = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ \dfrac{-1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$.

Решение: Используя определение определителя 2-го порядка, из каждого элемента определителя вынесем за знак определителя общие множители, и затем применим формулу (1):

$$d = \frac{1}{(1+x)^2}\begin{vmatrix} x & 2x+1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+x)^2}\left(x^2+2x+1\right) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 14. Вычислим определитель: $d = \begin{vmatrix} 2 & log_b a \\ log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: Используя формулу (1) вычисления определителя 2-го порядка, запишем:

$$d = 2\cdot 1 - log_a b \cdot log_b a = 2 - 1 = 1.$$

Ответ: 1.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 15. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Пример 16. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha \end{vmatrix}$.

Пример 17. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$.

Пример 18. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ sin\beta & cos\beta \end{vmatrix}$.

Пример 19. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Может ли определитель 2-го порядка не быть числом?
2. Изменится ли определитель 2-го порядка, если в нем строки заменить столбцами и наоборот (проверьте!)?
3. Изменится ли определитель 2-го порядка, если в нем строки (или столбцы) поменять местами (проверьте!)?
4. Изменится ли определитель 2-го порядка, если в нем из одной строки вычесть другую строку (проверьте!)?
5. Изменится ли определитель 2-го порядка, если в нем из одного столбца вычесть другой столбец (проверьте!)?
6. Изменится ли определитель 2-го порядка, если в нем строку умножить на число 2 (проверьте!)?

§ 2. Определители третьего порядка

Пусть имеем квадратную матрицу третьего порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

элементами a_{ij} , которой могут быть элементы любого числового поля.

<u>*Определителем третьего порядка*</u> называется число:

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\ , \tag{13}$$

составленное из элементов матрицы **A**. Слагаемые суммы (13) называют <u>*членами определителя*</u> 3-го порядка. Обозначения определителя 3-го порядка аналогичны введенным для определителя 2-го порядка:

$$det\,A = |A| = d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Для запоминания формулы (13) нередко используют геометрическую схему составления членов определителя и выбора их знаков.

1) положительные члены определителя составляют по схеме *C1*:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{array}}$$

2) отрицательные члены определителя составляют по схеме *C2*:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{array}}$$

Для рассмотрения общего случая определителей n-го порядка установим основные свойства определителей 3-го порядка (все они справедливы и для определителей 2-го порядка).

<u>*Свойство 1*</u>. *Величина определителя не изменится, если строки и столбцы этого определителя поменять ролями (для матрицы это преобразование называется <u>транспонированием матрицы</u>)*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Доказательство этого свойства легко <u>*наблюдается*</u> на схемах *C1* и *C2*: члены определителя составляются из элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца (причем ни один элемент не пропущен), как до транспонирования, так и после него. Сохранение знаков членов также очевидно.

Свойство 1 устанавливает *полную равноправность строк и столбцов*. Это значит, что в дальнейшем все свойства можно формулировать и для строк, и столбцов, но доказывать только для строк (или только для столбцов).

Свойство 2. Перестановка двух строк (или столбцов) определителя равносильна умножению его на число –1.

Доказательство достаточно легко *пронаблюдать* по схемам *C1* и *C2*. Допустим поменяли местами строки 2-ю и 3-ю. Это приводит к перемещению всех трех «клеток» из схемы *C1* формирования положительных членов определителя в схему *C2* для формирования отрицательных членов, и наоборот.

Свойство 3. Если определитель имеет две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), то он равен нулю.

Действительно, при перестановке двух одинаковых строк определитель не меняется, а по свойству 2 должен поменять знак на противоположный. Это значит, что $d = -d$, или $d = 0$.

Свойство 4. Умножение всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число.

Это значит, что общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно выносить за знак этого определителя:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Это следует из выражения (13), а также из схем *C1* и *C2* формирования каждого члена определителя: каждый член определителя содержит только один элемент (причем обязательно содержит) из каждого столбца определителя.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Это свойство вытекает из свойства 4 при $\lambda = 0$.

Свойство 6. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Это следует из последовательного применения свойства 4 (вынесение коэффициента пропорциональности за знак определителя) и свойства 3 (в определителе оказалось две равные строки).

Свойство 7. Если каждый элемент n-й строки (или n-го столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Это следует из выражения (13) и правила формирования каждого члена определителя: каждый член определителя содержит только один элемент (причем обязательно содержит) из каждого столбца определителя, а также из распределительного свойства операций умножения и сложения для элементов числового поля.

<u>*Свойство 8*</u>*. Если к элементам некоторой строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.*

Это следует из последовательного применения свойства 7 (разбить определитель на сумму двух определителей) и свойства 6 (второй определитель равен нулю, т.к. имеет две пропорциональные строки (два пропорциональных столбца)).

Для рассмотрения «Свойства 9» требуется предварительно определить понятия «Минор данного элемента» и «Алгебраическое дополнение данного элемента».определителя 3-го порядка.

Преобразуем запись (13) определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} - a_{21} \cdot (-1)^{2+1} M_{21} - a_{31} \cdot (-1)^{3+1} M_{31} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = |A| = det(A) = d \qquad (18)$$

В соответствии с (17) определим:

1) **M_{ij}** – минор элемента a_{ij}: получается из данного определителя вычеркиванием строки i и столбца j, на пересечении которых стоит элемент a_{ij};

2) **A_{ij}** – равняется минору элемента a_{ij}, взятому со знаком (+), если сумма $i+j$ есть число четное, и со знаком (-) – в противном случае.

Запись (18) значит, что *определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (какой-либо строки) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого столбца (строки)*:

$$d = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \qquad (19)$$

$$d = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \qquad (20)$$

Воспользуемся записью (18) и заменим 1-й столбец произвольными числами h_1, h_2, h_3:

$$\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = h_1 \cdot A_{11} + h_2 \cdot A_{21} + h_3 \cdot A_{31} \ . \qquad (21)$$

Если вместо чисел h_1, h_2, h_3 взять элементы 2-го или 3-го столбцов определителя, получим (см. свойство 3):

$$a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} + a_{32} \cdot A_{31} = 0 \qquad (22)$$

$$a_{13} \cdot A_{11} + a_{23} \cdot A_{21} + a_{33} \cdot A_{31} = 0 \qquad (23)$$

Учитывая полученные результаты, определим еще одно важнейшее свойство определителя:

<u>*Свойство 9*</u>: *определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (какой-либо строки) на соответствующие алгебраические дополнения*

элементов этого столбца (строки); *определитель равен нулю, если взята сумма произведений элементов одного столбца (строки), а алгебраические дополнения составлены для элементов другого столбца (строки).*

Рассмотрим некоторые приложения определителя 3-го порядка.

Пусть имеем систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (24)$$

где *коэффициенты* a_{ij}, $i = 1,2,3; j = 1,2,3$ *при неизвестных* x_i, $i = 1,2,3$ и <u>*свободные члены*</u> b_i, $i = 1,2,3$ системы уравнений считаются заданными.

Системе уравнений (24) соответствуют: <u>*матрица системы*</u> ***A*** (составлена из коэффициентов при неизвестных) и <u>*расширенная матрица*</u> $\overline{A}$ (составлена из всех ее коэффи-циентов, включая свободные члены):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Умножим 1-е уравнение системы (24) на алгебраическое дополнение A_{11}, 2-е на A_{21} , 3-е на A_{31} и сложим полученные уравнения:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})\cdot x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})\cdot x_2 + $$
$$+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})\cdot x_3 = (b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}),$$

или (см. свойство 9):

$$d \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = d_1 \;\rightarrow\; d \cdot x_1 = d_1 \qquad (26)$$

аналогично получим:

$$d \cdot x_2 = d_2, \qquad d \cdot x_3 = d_3,$$

причем, в выражениях (26):

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

<u>***А***</u>. Если $d \neq 0$, то для записи решения системы (3) можно использовать <u>*формулы Крамера*</u>:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \qquad x_2 = \frac{d_2}{d}, \qquad x_3 = \frac{d_3}{d} \qquad (27)$$

Формулы (27) определяют единственное решение. Если считать каждое уравнение системы (24) уравнением плоскости, то геометрический аналог рассматриваемой системы уравнений - совокупность трех пересекающихся в одной точке плоскостей α_1, α_2, α_3, причем точка пересечения плоскостей определяется решением (x_1, x_2, x_3). Линии пересечения пар плоскостей проходят через одну точку: X= (x_1, x_2, x_3).

Пусть уравнение плоскости имеет вид:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \qquad (28)$$

Известно, что вектор нормали к плоскости (28) определяется записью:

$$\vec{n} = (A, B, C) \qquad (29)$$

Тогда плоскостям α_1, α_2, α_3 соответствуют векторы нормалей:

$$\vec{n}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \qquad \vec{n}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \qquad \vec{n}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \qquad (30)$$

Б. Если $d = 0$, то применение *формул Крамера* невозможно, и дальнейшее исследование системы уравнений (24) требует рассмотрения ряда случаев.

Случай 1. Две (только две) строки *матрицы системы* **А** пропорциональны (потому имеем $d = 0$). Пусть это будут строки 1 и 2, и пусть коэффициент пропорциональности равен λ. Это значит, что плоскости α_1, α_2 параллельны, т.е. векторы нормалей этих плоскостей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ параллельны, т.е. коллинеарны: $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$. В этом случае третья плоскость α_3 пересекает плоскости α_1, α_2 по прямым l_1, l_2, которые не пересекаются. Это значит, что система (24) решений не имеет. Это же следует из равенств (26): ни одно их них не может быть выполнено ни при каких значениях (x_1, x_2, x_3), т.к. ни один из определителей d_1, d_2, d_3 не равен нулю. Это значит, что *система несовместна*.

Случай 2. Все три строки *матрицы системы* **А** пропорциональны (потому имеем $d = 0$). Это значит, что плоскости α_1, α_2 и α_3 параллельны, т.е. векторы нормалей этих плоскостей $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3$ параллельны. В этом случае плоскости не пересекаются, т.е. не имеют общих точек. Это значит, что система (24) решений не имеет. Это же следует из равенств (26): ни одно их них не может быть выполнено ни при каких значениях (x_1, x_2, x_3), т.к. ни один из определителей d_1, d_2, d_3 не равен нулю. Это значит, что *система несовместна*.

Замечание: в случаях 1 и 2 возможна ситуация, когда одновременно с равенством $d = 0$ выполняются равенства d_1=0, d_2=0 и d_3=0, причем последние равны нулю из-за равенства всех трех столбцов матрицы **А** . В таком случае параллельности соответствующих плоскостей остаются и точек, общих сразу для трех плоскостей, нет. Система уравнений (23) и в этом случае *несовместна*, хотя все равенства (26) выполняются для любых наборов чисел (x_1, x_2, x_3).

Случай 3. Две (только две) строки *расширенной матрицы* $\overline{A}$ пропорциональны (потому имеем $d = 0$). Пусть пропорциональны 2-я и 3-я строки. Это значит, что плоскости α_2, α_3 совпадают, а плоскость α_1 пересекает плоскости α_2, α_3 по прямой $l_{1\text{-}2}$, *все точки которой являются общими для всех трех плоскостей*. Решений (из геометрических соображений) должно быть бесчисленное множество.

На самом деле мы совпавшие плоскости не будем различать, т.к в рассматриваемом случае 3-е уравнение можно считать следствием 2-го и отбросить его. Далее необходимо рассматривать решение системы двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \end{cases} \qquad (31)$$

Т.к. строки системы уравнений (31) не пропорциональны (принято в рассматриваемом случае), то хотя бы один определитель системы (31):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

не равен нулю. Примем, что не равен нулю определитель:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (32)$$

и запишем систему уравнений (31) в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3, \end{cases} \qquad (33)$$

Далее, используя формулы Крамера (9) для случая $d \neq 0$, присваивая произвольные значения переменной x_3, будем вычислять соответствующие значения x_1, x_2. Получаемые таким образом тройки чисел (x_1, x_2, x_3), будут принадлежать упоминаемой ранее линии $l_{1\text{-}2}$ пересечения плоскостей α_1, α_2. Следовательно исходная система (24) имеет *бесчисленное множество решений* и потому *неопределенна*.

Случай 4. Все три строки *расширенной матрицы* $\overline{A}$ пропорциональны (потому имеем $d = 0$). Это значит, что плоскости α_1, α_2 и α_3 совпадают и *все точки одной из плоскостей принадлежат двум другим плоскостям.*

На самом деле мы совпавшие плоскости не будем различать, т.к в рассматриваемом случае 2-е и 3-е уравнения можно считать следствием 1-го и отбросить их. Далее необходимо рассматривать решение одного уравнения с тремя неизвестными:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (34)$$

Далее, присваивая произвольные значения переменным x_2, x_3, будем вычислять соответствующее значение x_1. Получаемые таким образом тройки чисел (x_1, x_2, x_3), будут принадлежать каждой из плоскостей α_1, α_2, α_3. Следовательно исходная система (24) имеет *бесчисленное множество решений* и потому *неопределенна*.

Представляет интерес рассмотреть частный случай системы уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases} \qquad (35)$$

когда все *свободные члены* b_i, $i = 1,2,3$ системы уравнений (24) равны нулю – *однородная* система уравнений.

В этом случае каждое уравнение системы уравнений (35) соответствует плоскости, содержащей начало координат **O** (0, 0, 0). Это значит, что система уравнений (35) всегда имеет решение, т.к. плоскости α_1, α_2, α_3 имеют общую точку **O**.

Если $d \neq 0$, то решение (0, 0, 0) – единственно. Геометрически это отвечает случаю, когда среди плоскостей α_1, α_2, α_3 нет параллельных (представление об этом случае дают координатные плоскости системы координат OXYZ, где линии пересечения пар плоскостей – это оси координат OX, OY, OZ).

Если $d = 0$, то две или все три плоскости α_1, α_2, α_3 совпадают. Тогда решение системы уравнений (33) – это либо множество точек линии пересечения (прямой) двух несовпавших плоскостей, либо все множество точек, принадлежащих одной плоскости (всем совпавшим плоскостям α_1, α_2, α_3).

Рассмотрим отдельно случай, когда совпадают плоскости α_2 и α_3, т.е. 3-е уравнение можно считать следствием 2-го и отбросить его. Оставшиеся уравнения запишем в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 = -a_{13}x_3\,, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 = -a_{23}x_3\,, \end{cases} \tag{36}$$

причем в этой записи считаем, что не равен нулю определитель:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{37}$$

Далее, используя формулы Крамера (9) для случая $d \neq 0$, присваивая произвольные значения переменной x_3, будем вычислять соответствующие значения x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}\,, \qquad\qquad x_2 = \frac{d_2}{d}\,, \tag{38}$$

или:

$$x_1 = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{d} = x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{d}\,, \qquad x_2 = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{d}\,, \tag{39}$$

Учитывая, что неизвестные x_1, x_2, x_3 участвуют в уравнениях равноправно, получим для их вычисления симметричные выражения. Для этого рассмотрим вспомагательный определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

и его алгебраические дополнения:

$$p = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad q = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{40}$$

Используя (40), получим симметричные выражения для неизвестные x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = p \cdot t\,, \qquad x_2 = q \cdot t\,, \qquad x_3 = d \cdot t\,, \tag{41}$$

где t может принимать произвольные значения. Если параметр t определить как время, и принять, что при значении $t = 0$ некоторая точка находилась в начале координат **O** (0, 0, 0), то, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}=(p,\ q,\ d)$, в момент времени t движущаяся точка будет находиться в точке $X(x_1, x_2, x_3)$.

☺ *Пример 21*. Вычислим определитель: $d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение: Используя определение определителя 3-го порядка и учитывая его свойства, вычислим определитель несколькими способами:

Способ 1. В соответствии с определением определителя 3-го порядка:

$$d = 3 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -3\,.$$

Способ 2. Воспользуемся Свойством 9, и вычислим данный определитель 3-го порядка разложением по 1-й строке:

$$d = 3\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\4 & 2\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{vmatrix} = 3\cdot(10-12) - 2\cdot(4-9) + 1\cdot(8-15) = -3\,.$$

Способ 3. Воспользуемся Св. 9, и вычислим данный определитель разложением по 2-й строке, но предварительно (см. Св.8) упростим его:

$$d = \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 2 & 3\\3 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\3 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\5 & 2 & 2\end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 1\\5 & 2\end{vmatrix} = -1\cdot(4\cdot 2 - 5\cdot 1) = -3\,.$$

Действия: 1) из 2-го столбца вычли 3-й; 2) из 2-й строки вычли 3-ю; 3) к 1-му столбцу прибавили 3-й: в результате во второй строке все нули, кроме одной 1; 4) по Св.9 записали разложение по 2-й строке; 5) вычислили один определитель 2-го порядка.

<u>*Вывод*</u>: вычисление определителя 3-го порядка Способом 3 значительно упрощает вычислительные трудности при счете вручную.

Ответ: 1.

<u>*Пример 22*</u>. Заданы три плоскости: $3x + 2y + z = 2$; $2x + 5y + 3z = 1$, $3x + 2y + z = 0$. Определим, имеют ли они одну общую точку или несколько.

Решение: Для решения задачи:

1) составим определитель: $d = \begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 5 & 3\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$ из коэффициентов при неизвестных **x, y, z**;

2) вычислим определитель одним из способов, приведенных в примере 22: результат вычислений определителя $d = -3 \neq 0$.

Вывод: заданные плоскости имеют только одну общую точку.

Ответ: Плоскости пересекаются в одной точке.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 23*</u>. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\-1 & -1 & 0\end{vmatrix}$.

<u>*Пример 24*</u>. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix}a & a & a\\-a & a & x\\-a & -a & x\end{vmatrix}$.

<u>*Пример 25*</u>. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 6\end{vmatrix}$.

<u>*Пример 26*</u>. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\\omega^2 & 1 & \omega\\\omega & \omega^2 & 1\end{vmatrix}$, где $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

***<u>Вопросы для самопроверки</u>*:**

1. Может ли определитель 3-го порядка не быть числом?
2. Изменится ли определитель 3-го порядка, если в нем строки заменить столбцами и наоборот (проверьте!)?
3. Изменится ли определитель 3-го порядка, если в нем строки (или столбцы) поменять местами (проверьте!)?
4. Изменится ли определитель 3-го порядка, если в нем из одной строки вычесть другую строку (проверьте!)?
5. Изменится ли определитель 3-го порядка, если в нем из одного столбца вычесть другой столбец (проверьте!)?
6. Изменится ли определитель 3-го порядка, если в нем строку умножить на число 2 (проверьте!)?
7. Существует ли определитель для матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$?

§ 3. Теорема умножения определителей

<u>*Теорема 1*</u>: *Определитель произведения нескольких матриц n-го порядка равен произведению определителей этих матриц.*

Замечание: теорема остается верной для любого из возможных правил умножения матрицы на матрицу: 1) «строка х строка», 2) «строка х столбец», 3) «столбец х строка», 4) «столбец х столбец».

Говорят, что квадратная <u>*матрица невырожденная*</u>, если ее определитель не равен нулю.

<u>*Следствие*</u>: *Произведение нескольких невырожденных квадратных матриц - невырожденная матрица.*

☺ <u>*Пример 27*</u>. Имеются матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}$. Составлено произведение этих матриц ***A·B = C***. по каждому из возможных правил (см. замечание к теореме). Покажем выполнение теоремы умножения определителей при любом принимаемом правиле умножения матриц (без изменения их порядка!).

Решение: Вычисления проведем по следующей схеме:

1) Вычислим определитель матрицы ***A***: <u>1-й шаг</u>: 2с-1с; 3с-1с; <u>2-й шаг:</u> 1R-2Rx2; <u>3-й шаг</u>: разложение определителя по 3-му столбцу; <u>4-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix}7 & 3 & 0\\ 3 & 1 & \mathbf{-1}\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=}(-1)\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix}7 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=} -5$$

2) Вычислим определитель матрицы ***B***: <u>1-й шаг</u>: 3R-2R; <u>2-й шаг:</u> 3с-2с; <u>3-й шаг</u>: разложение определителя по 3-й строке; <u>4-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -4 & 7\\ 0 & \mathbf{-1} & 0\end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=}(-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=} 10$$

3) Используя результаты п.1,2), можем записать произведение определителей:

$$|A|\cdot|B|=-50$$

4) Используя правило произведения матриц «строка х строка», запишем матрицу:

$$A \cdot B = C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & 5 & -13 \end{pmatrix}.$$

5) Вычислим определитель матрицы ***C₁***: <u>1-й шаг</u>: 3R-2R; 2R-1Rx4; <u>2-й шаг:</u> 1R+3R; <u>3-й шаг</u>: разложение определителя по 1-му столбцу; <u>4-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & 5 & -13 \end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -15 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -15 & -1 \\ \mathbf{1} & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=(1)\cdot(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -15 & -1 \end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=} -50$$

6) Используя правило произведения матриц «строка х столбец», запишем матрицу:

$$A \cdot B = C_2 = \begin{pmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{pmatrix}.$$

7) Вычислим определитель матрицы ***C₂***: <u>1-й шаг</u>: 2C+3Cx2; 3C-1Cx2; <u>2-й шаг:</u> 2R-3R; 3R-1Rx2; <u>3-й шаг:</u> 3R-2Rx2; 3R-1Rx2; <u>4-й шаг</u>: разложение определителя по 2-му столбцу; <u>5-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 12 & 3 & -5 \\ 17 & 2 & -7 \end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -5 & \mathbf{1} & 2 \\ 13 & 0 & -9 \end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=(1)\cdot(-1)^{3+1}} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 13 & -9 \end{vmatrix} \overset{5\text{ шаг}}{=} -50$$

8) Используя правило произведения матриц «столбец х строка», запишем матрицу:

$$A \cdot B = C_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) Вычислим определитель матрицы ***C₃***: <u>1-й шаг</u>: 1R-2R; 2R-1Rx4; <u>2-й шаг</u>: разложение определителя по 1-й строке; <u>3-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{2} \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=(2)\cdot(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=} -50$$

10) Используя правило произведения матриц «столбец х столбец», запишем матрицу:

$$A \cdot B = C_4 = \begin{pmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{pmatrix}.$$

11) Вычислим определитель матрицы ***C₄***: <u>1-й шаг</u>: 2C+3Cx2; <u>2-й шаг:</u> 3C-1Cx2; <u>3-й шаг:</u> 1C-2Cx9; <u>4-й шаг</u>: разложение определителя по 2-му столбцу; <u>5-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{vmatrix} \overset{1\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 9 & 1 & 18 \\ 13 & 1 & 24 \\ 12 & -3 & 17 \end{vmatrix} \overset{2\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 13 & 1 & -2 \\ 12 & -3 & -7 \end{vmatrix} \overset{3\text{ шаг}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 39 & -3 & -7 \end{vmatrix} \overset{4\text{ шаг}}{=(1)\cdot(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 39 & -7 \end{vmatrix} \overset{5\text{ шаг}}{=} -50$$

12) Доказано для любого из правил умножения матриц верно:

$$(A)\cdot(B)=C \quad \longrightarrow \quad |A|\cdot|B|=|C|$$

Ответ: Теорема умножения определителей выполняется при любом принимаемом правиле умножения матриц (без изменения их порядка!).

<u>*Пример 28*</u>. Имеются матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{pmatrix}$. Составлены произведения этих матриц $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$. Сравним определители матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$.

Решение: Вычисления проведем по следующей схеме:

1) Используя правило произведения матриц «строка х столбец», запишем:

$$B\cdot A=D=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3&4\\1&1&7\\-6&-8&1\end{pmatrix},$$

где

$\boldsymbol{d}_{11}$ = 2·1 +(-3)·3 +1·4 = -3, $\boldsymbol{d}_{12}$ = 2·2 +(-3)·4 +1·5 = -3,
$\boldsymbol{d}_{13}$ = 2·3 +(-3)·2 +1·4 = 4,
$\boldsymbol{d}_{21}$ = 1·1 +(-4)·3 +3·4 = 1, $\boldsymbol{d}_{22}$ = 1·2 +(-4)·4 +3·5 = 1,
$\boldsymbol{d}_{23}$ = 1·3 +(-4)·2 +3·4 = 7,
$\boldsymbol{d}_{31}$ = 1·1 +(-5)·3 +2·4 = -6, $\boldsymbol{d}_{32}$ = 1·2 +(-5)·4 +2·5 = -8,
$\boldsymbol{d}_{33}$ = 1·3 +(-5)·2 +2·4 = 1,

2) Вычислим определитель матрицы $\boldsymbol{D}$: <u>1-й шаг</u>: 1R+2Rх3; <u>2-й шаг: 2-й шаг</u>: разложение определителя по 1-й строке; <u>3-й шаг</u>: вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix}-3&-3&4\\1&1&7\\-6&-8&1\end{vmatrix}\overset{1\ шаг}{=}\begin{vmatrix}0&0&\mathbf{25}\\1&1&7\\-6&-8&1\end{vmatrix}\overset{2\ шаг}{=}(25)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\-6&-8\end{vmatrix}\overset{3\ шаг}{=}-50$$

Ответ: Теорема умножения определителей выполняется при любом принимаемом правиле умножения матриц и при любом их порядке!.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 29*</u>. Имеются матрицы $A=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$. Составьте произведение этих матриц $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. по каждому из возможных правил (см. замечание к теореме). Покажите выполнение теоремы умножения определителей при любом принимаемом правиле умножения матриц (без изменения их порядка!).

<u>*Пример 30*</u>. Имеются матрицы $A=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$. Составьте произведения этих матриц $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$. Сравните определители матриц $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$.

Вопросы для самопроверки:

1. При каких условиях квадратная матрица $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ имеет определитель, равный нулю?
2. Для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ составлены произведения $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$. При каких условиях возможно равенство: $|C| = -|D|$?
3. Для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ составлены произведения $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$. Может ли матрица $\boldsymbol{C}$ быть невырожденной, а матрица $\boldsymbol{D}$ вырожденной?

§ 4. Перестановки и подстановки

Вычисление определителей 4-го и более высоких порядков не может быть представлено достаточно простой «геометрической схемой», как это сделано для определителей 2-го и 3-го порядков.

Для определения и изучения определителей $\boldsymbol{n}$-го порядка используются понятия, относящиеся к конечным множествам некоторых элементов.

4.1. Перестановки.

Рассмотрим множество $\boldsymbol{M}$ целых чисел: 1, 2, … , n. Элементы множества $\boldsymbol{M}$ можно расположить разными способами.

<u>Определение</u>: *всякое расположение чисел* 1, 2, … , n *в некотором порядке называется <u>перестановкой</u> из* n *чисел. Общий вид записи перестановки из* n *элементов:*

$$i_1\,,\ i_2\,,\ \dots\,,\ i_n\,, \qquad (42)$$

где каждое i_s *есть одно из чисел* 1, 2, … , n, *причем ни одно из этих чисел не встречается дважды и не пропущено*.

В качестве i_1 можно выбрать любое из чисел 1, 2, … , n. Это дает n различных возможностей. Если i_1 уже выбрано, то в качестве i_2 можно выбрать лишь одно из оставшихся (n-1) чисел, т.е. различных способов выбрать числа (символы) i_1 и i_2 равно произведению $n\cdot(n\text{-}1)$ и т.д. Число перестановок из n символов равно произведению:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Если в некоторой перестановке поменяем местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные оставим на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование перестановки называется <u>*транспозицией*</u>.

<u>Теорема 1</u>. *Все перестановки из* n *символов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая перестановка получается из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.*

► При n=2 утверждение справедливо: 1, 2 → 2, 1;
2, 1 → 1, 2.

Рассмотрим все перестановки из n элементов, у которых на первом месте стоит символ i_1. Таких перестановок $(n-1)!$ и их можно упорядочить в соответствии с требованиями теоремы для (n-1) символов. Пусть последняя из таких перестановок (с учетом того, что символ i_1 был все время неперемещаем) имеет вид:

$$i_1\,,\ i_2\,,\ \dots\,,\ i_n \qquad (43)$$

В перестановке (43), содержащей n символов, совершим транспозицию символа i_1 с любым другим (например, с символом i_2) и вновь упорядочим все перестановки из (n-1) символов при фиксированном на первом месте i_2 и т.д. Так можно перебрать все перестановки из n символов. ◄

<u>Следствие</u>: *от любой перестановки из* n *символов можно перейти к любой другой перестановке из тех же символов при помощи нескольких транспозиций.*

Если в перестановке символ i_1 стоит раньше, чем символ i_2, но $i_1 \rangle i_2$, то говорят, символы i_1 и i_2 составляют *__инверсию__* (нарушение порядка), иначе указанные символы составляют *__порядок__*. Перестановка называется *__четной__*, если ее символы составляют четное число инверсий, и *__нечетной__* – в противном случае.

__Замечание__: 1) *всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

2) сумма порядков и инверсий постоянна и равна $C_n^2 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$

☺ *__Пример 31__*. Определим четность перестановки 1, 2, … , n.

Решение: Заданная перестановка четная, т.к. в ней нет инверсий (нарушений порядка).

Ответ: Четная.

__Пример 32__. Определите четность перестановки 4 5 1 3 6 2.

Решение: Для подсчета числа инверсий воспользуемся таблицей 1, в которой указаны инверсии выделяемых элементов со всеми последующими (учет нарушений порядка).

4	5	1	3	6	2	
╙		☼	☼		☼	=3
	╙	☼	☼		☼	=3
		╙				=0
			╙		☼	=1
				╙	☼	=1

Число инверсий : | =8

Ответ: Четная.

☻ ***Решите примеры***:

__Пример 33__. Укажите число инверсий в перестановке: 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

__Пример 34__. В какой перестановке чисел 1, 2, 3, …, 99 число инверсий наибольшее и чему оно равно?

__Пример 35__. Сколько инверсий образует число 99, стоящее на 50 месте в перестановке 1, 2, …, 99.

__Вопросы для самопроверки__:

1. Перестановка – это матрица?
2. Что такое «транспозиция» двух элементов перестановки?
3. Что такое «инверсия» для двух выделенных элементов перестановки?
4. Что такое «порядок» для двух выделенных элементов перестановки?
5. Чему равна сумма числа инверсий и числа порядков в любой перестановке чисел 1, 2, … , 99.

4.2. Подстановки.

__Определение__: Запишем одну перестановку под другой: $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_3} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$. Эту запись называют *подстановкой*, понимая под этим *отображение* (соответствие) множества символов, состоящего из первых n чисел: 1, 2, …, n, на *себя*: $i_1 \to \alpha_{i_1}$; $i_2 \to \alpha_{i_2}$, $i_3 \to \alpha_{i_3}$, …, $i_n \to \alpha_{i_n}$

Если учесть, что подстановка как отображение множества чисел 1, 2, … , n не меняется при транспозиции столбцов, выберем для нее простейшее выражение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (44)$$

где α_i – число, в которое переходит число i.

В выражении (44) подстановки порядка n различаются только перестановками в нижней строке записи, т.е. подстановку *однозначно определяет перестановка*, записанная в ее нижней строке. Это значит, что всего подстановок порядка n столько же, сколько и перестановок, т.е. $n!$.

Определим понятие четности для подстановок:

А. Исходя из общего определения подстановки:

- подстановка *четная*, если четности верхней и нижней перестановок совпадают;
- подстановка *нечетная*, если четности верхней и нижней перестановок противоположны.

Б. Учитывая частную запись подстановки (44):

- подстановка *четная*, если ее определяет четная перестановок;
- подстановка *нечетная*, если ее определяет нечетная перестановка.

Кроме подсчета числа инверсий в перестановках для определения четности подстановок применяют также разложение их в *циклы*. Воспользуемся этим приемом (не обосновывая его, примем на веру), рассмотрев конкретный пример.

☺ *Пример 36*.Определим четность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение: Для определения четности подстановки разложим ее в произведение циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (163)\cdot(25)\cdot(4)\cdot(7)\cdot(8)\cdot(9),$$

где скобки после знака “=” отражают циклы: (1→6→3→1), (2→5→2), (4→4), (7→7), (8→8), (9→9) отображения символов 1,2,…,9 по определению подстановки (в циклах учтены также символы «*остающиеся на месте*»). Имея разложение подстановки в циклы, определим число *декремент*: d = n – s, где n – порядок подстановки, s – число циклов в разложении подстановки. В рассматриваемом примере: d = 9 – 6 = 3 – *нечетное* число → подстановка *нечетная*.

Ответ: Четная.

Пример 37.Для определения четности подстановки разложим ее в произведение циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (15)\cdot(2864)\cdot(397),$$

где скобки после знака “=” отражают циклы: (1→5→1), (2→8→6→4→2),(3→9→7→3) отображения символов 1,2,…,9 по определению подстановки. Вычислим декремент для рассматриваемой подстановки: d = 9 – 3 = 6 – *четное* число → подстановка *четная*.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 38*</u>. Укажите число инверсий в перестановке: 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

<u>*Пример 39*</u>. В какой перестановке чисел 1, 2, 3, …, 99 число инверсий наибольшее и чему оно равно?

<u>*Пример 40*</u>. Сколько инверсий образует число 99, стоящее на 50 месте в перестановке 1, 2, …, 99.

<u>***Вопросы для самопроверки***</u>:

6. Подстановка – это матрица?
7. Что такое «транспозиция» столбцов подстановки?
8. Что такое «инверсия» в подстановке?
9. Что такое «порядок» в подстановке?
10. Чему равна сумма числа инверсий и числа порядков в любой подстановке чисел 1, 2, … , 99.

§ 5. Определители n-го порядка

Пусть имеем квадратную матрицу n-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (45)$$

элементами a_{ij} , которой могут быть элементы любого числового поля. Рассмотрим всевозможные произведения по n элементов, расположенных в <u>*разных*</u> строках и <u>*разных*</u> столбцах:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \qquad (46)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2, … , n. Число таких произведений равно числу перестановок, т.е. $n!$.

Составим подстановку из n символов : $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_3} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$. (47)

Можно заметить, что в определителях 2-го и 3-го порядков со знаком <u>“плюс”</u> входят те члены определителей, индексы которых составляют <u>*четную*</u> подстановку, а со знаком <u>“минус”</u> – члены с нечетной подстановкой индексов. Это <u>*свойство сохраняют в определении определителей n-го порядка*</u>.

<u>*Определение*</u>: определителем n-го порядка, соответствующим матрице (45), называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом:

- каждый член определителя (отдельное слагаемое в указанной сумме) есть произведение n элементов определителя, взятых <u>по одному</u> из <u>каждого</u> столбца и <u>каждой</u> строки матрицы;
- член определителя берется со знаком <u>“плюс”</u>, если индексы составляют <u>четную</u> подстановку, и со знаком <u>“минус”</u>, если <u>нечетную</u>:

Обозначение определителя: $det\, A = |A| = d$ (48)

Применение определения определителя n-го порядка для практических вычислений было бы затруднительно. Исследуем его свойства, непосредственно вытекающие из определения.

Учитывая свойство1 определителей 3-го порядка, устанавливающее равноправие строк и столбцов определителя, транспонируем матрицу А и запишем:

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad |A'| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{49}$$

Пусть в определителе $|A|$ выделен некоторый член:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{50}$$

для определения знака которого используется подстановка n-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{51}$$

в ней верхняя перестановка отражает номера строк определителя, в которых размещены элементы матрицы, входящие в выражение (50); а нижняя – номера столбцов.

После транспонирования матрицы А те же элементы будут участвовать в выражении члена определителя матрицы A':

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}, \tag{52}$$

причем для определения знака, который будет иметь этот член в определителе должна использоваться подстановка:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \tag{53}$$

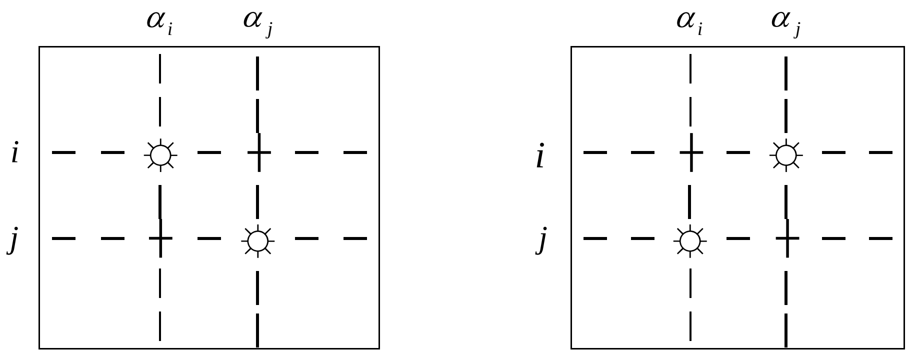
Очевидно, четности подстановок (51) и (53) совпадают (см. определение четности подстановки).

Нами доказано одно из важнейших свойств определителя n-го порядка (теперь уже для всех $n = 2, 3, \dots$):

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы: $|A'| = |A|$.

Свойство 2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю (следует из того, что какой-то из нулей этой строки обязательно войдет в выражение каждого из членов определителя).

Свойство 3. Если в определителе переставлены две строки (столбца), то все члены полученного определителя те же, что и в исходном, но с обратным знаком, т.е. перестановка двух строк определителя меняет его знак (следует из представленной ниже схемы преобразования определителя и соответствующих подстановок: их четности поменялись!):



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Свойство 4 Определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю (при перестановке этих строк из свойства 3 следует, что d = -d, т.е. d = 0).

Свойство 5 Если все элементы ***i***-й строки определителя умножить на произвольное число ***k***, то определитель умножается на число ***k*** (следует из выражения (48) записи общего члена определителя: каждый член определителя содержит ровно один элемент из ***i***-й строки, поэтому всякий из них приобретает множитель ***k***, т.е. сам определитель умножается на ***k***.

Свойство 6 Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю (следует из свойств 5 и 4).

Свойство 7 Если все элементы ***i***-й строки определителя имеют вид: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, где ***j*** = 1, 2, … , ***n***, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме ***i***-й, такие же, как в заданном определителе, а ***i***-я строка в одном из определителей состоит из элементов b_{ij}, а в другом – из элементов c_{ij}.

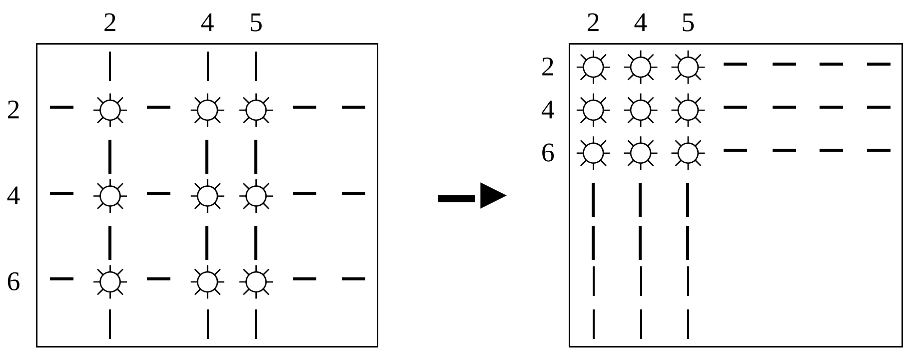
Свойство 8 Если одна из строк определителя есть линейная комбинация других его строк, то определитель равен нулю (следует из последовательного применения свойств 7, 6, 5, 4).

Свойство 9 Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой, умноженной на одно и то же число (следует из свойств 7 и 6). *Обобщение*: определитель не меняется, если к одной из его строк прибавляется линейная комбинация других его строк.

Вычислять определитель, исходя из его определения, т.е. выписывая ***n!*** его членов и определяя их знаки, было бы затруднительно. Разработаны способы, позволяющие вычислять определитель ***n***-го порядка через определители более низкого порядка.

4.1. Минор k-го порядка *M*.

Пусть имеем определитель ***n***-го порядка. Для целого числа $k: 1 \le k \le n-1$ выбираем в определителе ***k*** строк и ***k*** столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу порядка ***k***. Определитель этой матрицы называется минором ***k***-го порядка определителя d. Наоборот, можно С и (***n-k***) столбцов – останется минор ***k***-го порядка. Ниже приведена схема выделения минора ***k***-го порядка вычеркиванием ***k*** строк и ***k*** столбцов:



Определитель (минор), получаемый вычеркиванием ***k*** строк и ***k*** столбцов, обозначим ***M***, а одновременно с ним выделяемый минор (***n-k***) порядка обозначим – M', его называют “*дополнительный минор* для минора ***M*** порядка ***k***. В частном случае можно вычеркнуть минор 1-го порядка: элемент $\left|a_{ij}\right| = M$, тогда минор M' будет иметь (***n***-***k***) порядок.

4.2. Алгебраическое дополнение минора k-го порядка *M*.

Пусть вычеркнуты строки $i_1, i_2, ..., i_k$ и $j_1, j_2, ..., j_k$ столбцы, т.е. выделен минор ***M*** ***k***-го порядка. *Алгебраическим дополнением* минора ***M*** называется:

$$A_M = (-1)^{S_M} \cdot M', \tag{54}$$

где M' - дополнительный минор для минора ***M***, а S_M - сумма, определяемая выражением:

$$S_M = i_1 + i_2 + ... + i_k + j_1 + j_2 + ... + j_k, \tag{55}$$

4.3. Вычисление определителей n-го порядка.

Пусть имеем определитель ***n***-го порядка. Его вычисление вполне определяется приводимыми ниже теоремами.

Теорема 1: ***Произведение*** любого минора ***M*** ***k***-го порядка на его алгебраическое дополнение ***A*** в определителе ***d*** есть сумма некоторых членов определителя с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя.

Теорема 2 (***Лапласа***) Пусть в определителе ***d*** порядка ***n*** произвольно выбраны ***k*** строк (или столбцов) $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров ***k***-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения ***равна*** определителю ***d***.

Частным случаем теоремы Лапласа является разложение определителя ***d***:
по ***i***-й строке:

$$d = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in} \tag{56}$$

по ***j***-му столбцу:

$$d = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj} \tag{57}$$

Учитывая свойство 4 определителей запишем также:

$$a_{k1} \cdot A_{i1} + a_{k2} \cdot A_{i2} + ... + a_{kn} \cdot A_{in} = 0, k \ne i \tag{58}$$

$$a_{1m} \cdot A_{1j} + a_{2m} \cdot A_{2j} + ... + a_{nm} \cdot A_{nj} = 0, m \ne j \tag{59}$$

☺ *Пример 41*. Определим знак члена определителя, определяемого записью:

$$a_{15}a_{28}a_{39}a_{42}a_{51}a_{64}a_{73}a_{86}a_{97},$$

Решение: Составим подстановку так, что первый индекс помещается в первую строку подстановки, а второй – во вторую ее строку, и разложим подстановку в произведение циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (15) \cdot (2864) \cdot (397).$$

Определим *декремент*: для записанной подстановки: d = n = 9 – 3 = 6, где 9 – порядок подстановки, 3 – число циклов в разложении подстановки → подстановка *четная*. Следовательно, заданный член определителя учитывается в записи суммы членов определителя со знаком «+».

Ответ: Положительный.

Пример 42. Определим знак члена определителя, определяемого записью:.

$$a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}a_{86}a_{97}, \qquad (*)$$

Решение: Составим подстановку так, что первый индекс помещается в первую строку подстановки, а второй – во вторую ее строку, и разложим подстановку в произведение циклов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Так как в верхней строке дважды используется элемент «2» и ни разу «1», то запись (*) не является членом определителя

Ответ: Исходная запись не является членом определителя.

<u>*Пример 43*</u>. Докажем тождество $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

используя свойства определителя.

Решение: Обозначим левую часть тождества d_L и произведем цепочку последовательных преобразований: <u>1-й шаг</u>: $2_C + 1_C$; <u>2-й шаг</u>: а) меняем местами 1-й и 2-й столбцы; б) выносим за скобку определителя общий множитель столбца (см. множитель “-2”); <u>3-й шаг</u>: $2_C - 1_C$; <u>4-й шаг</u>: выносим за скобку общий множитель $\boldsymbol{x}$: тождество доказано.

$$d_L \overset{\text{1 шаг}}{=} \begin{vmatrix} a_1+b_1x & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{2 шаг}}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2 & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3 & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{3 шаг}}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1x & c_1 \\ a_2 & b_2x & c_2 \\ a_3 & b_3x & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{4 шаг}}{=} -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ответ: см. схему преобразований доказательства.

<u>*Пример 43*</u>. Вычислим определитель 4-го порядка $d = \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$,

используя свойства определителя $\boldsymbol{n}$ – го для упрощения вычислений.

Решение: Вычислим определитель, применяя цепочку преобразований: <u>1-й шаг</u>: $4_C-1_C\times 2$; 1_R-2_R; <u>2-й шаг:</u> $4_R-3_R\times 4$; <u>3-й шаг</u>: разложение определителя по 4-му столбцу; <u>4-й шаг</u>: 3_C-1_C; 5<u>-й шаг</u>: $3_R+2_R; 2_R+1_R$; 6<u>-й шаг</u>: $3_R-1_R; 2_R+1_R$; <u>7-й шаг</u>: разложение определителя по 3-му столбцу и вычисление определителя 2-го порядка:

$$d_L \overset{\text{1 шаг}}{=} \begin{vmatrix} 7 & -20 & 19 & 1 \\ 20 & 64 & 21 & 0 \\ 13 & -20 & -13 & -2 \\ 46 & 45 & -55 & -8 \end{vmatrix} \overset{\text{2 шаг}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-20} & \mathbf{19} & \mathbf{1} \\ 20 & 64 & 21 & \mathbf{0} \\ 27 & -60 & 25 & \mathbf{0} \\ -6 & 125 & -3 & \mathbf{0} \end{vmatrix} \overset{\text{3 шаг}}{=} 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 20 & 64 & 21 \\ 27 & -60 & 25 \\ -6 & 125 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{4 шаг}}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 20 & 64 & 1 \\ 27 & -60 & -2 \\ -6 & 125 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{5 шаг}}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 20 & 64 & 1 \\ 47 & 4 & -1 \\ 21 & 65 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{6 шаг}}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 20 & 64 & 1 \\ 67 & 68 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{7 шаг}}{=} 1\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 67 & 68 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ответ: 1.

<u>Пример 44</u>. Вычислим определитель 5-го порядка $d = \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$,

используя разложения «по строке» или «по столбцу»:

Решение: Учитывая правила разложения определителя по строке и по столбцу, запишем цепочку последовательных преобразований::

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline x & a & b & 0 & \mathbf{c} \\ 0 & y & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & e & z & 0 & \mathbf{f} \\ g & h & k & u & \mathbf{l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v} \\ \hline \end{array} = v(-1)^{5+5} \begin{array}{|cccc|}\hline x & a & b & \mathbf{0} \\ 0 & y & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & e & z & \mathbf{0} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{k} & \mathbf{u} \\ \hline \end{array} = vu(-1)^{4+4} \begin{array}{|ccc|}\hline \mathbf{x} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & y & 0 \\ \mathbf{0} & e & z \\ \hline \end{array} = \mathbf{xyzuv}$$

Ответ: $\mathbf{x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v}$.

<u>Пример 45</u>. Вычислим определитель 6-го порядка $d = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

используя разложения «по $\boldsymbol{k}$ строкам» или «по $\boldsymbol{k}$ столбцам» (см. теорему Лапласа).

Решение: В рассматриваемом примере первый шаг вычислений подсказан тем, что в 5-м и 6-м столбцах только один определитель 2-го порядка не равен нулю. Значит выгодно разложение по этим двум столбцам. Учитывая правила разложения определителя «по $\boldsymbol{k}$ столбцам», запишем цепочку последовательных преобразований::

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 7 & 6 & 5 & 4 & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 9 & 7 & 8 & 9 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|}\hline 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ \hline \end{array} \cdot(-1)^{1+2+5+6} \begin{array}{|cccc|}\hline \mathbf{7} & \mathbf{4} & 9 & 7 \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|}\hline \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \hline \end{array} \cdot(-1)^{1+2+5+6}. \begin{array}{|cc|}\hline \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \hline \end{array} = 4$$

Ответ 4.

☻ ***Решите примеры***:

<u>Пример 46</u>. Вычислите определитель: $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответ -8.

<u>*Пример 47*</u>. Вычислите определитель: $d=\begin{vmatrix}-3 & 9 & 3 & 6\\ -5 & 8 & 2 & 7\\ 4 & -5 & -3 & -2\\ 7 & -8 & -4 & -5\end{vmatrix}.$

Ответ 18.

<u>*Пример 48*</u>. Вычислите определитель: $d=\begin{vmatrix}35 & 59 & 71 & 52\\ 42 & 70 & 77 & 54\\ 43 & 68 & 72 & 52\\ 29 & 49 & 65 & 50\end{vmatrix}.$

Ответ 10.

<u>*Пример 49*</u>. Вычислите определитель: $d=\begin{vmatrix}0 & -a & -b & -d\\ 0 & 0 & -c & -e\\ d & c & 0 & 0\\ d & e & 0 & 0\end{vmatrix}.$

Ответ $(\mathrm{be}-\mathrm{cd})^2$.

<u>Вопросы для самопроверки</u>:

1. Может ли определитель ***n***-го порядка не быть числом?
2. Изменится ли определитель ***n***-го порядка, если в нем строки заменить столбцами и наоборот?
3. Изменится ли определитель ***n***-го порядка, если в нем строки (или столбцы) поменять местами?
4. Изменится ли определитель ***n***-го порядка, если в нем из одной строки вычесть другую строку?
5. Изменится ли определитель ***n***-го порядка, если в нем из одного столбца вычесть другой столбец?
6. Изменится ли определитель ***n***-го порядка, если в нем строку умножить на число 2?
7. Применение теоремы Лапласа предполагает уменьшение трудоемкости вычисления определителей высокого порядка?
8. Может ли произведение нескольких невырожденных квадратных матриц ***n***-го порядка дать в результате вырожденную матрицу?