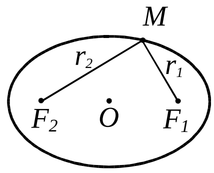
Глава 5. Кривые и поверхности второго порядка

§1. Эллипс, гипербола и парабола



Эллипс

Эллипсом называется множество точек M (на плоскости), сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 этой плоскости равно заданному положительному числу $2a$: $MF_1 + MF_2 = 2a$.

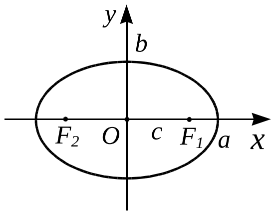
Примечание: предполагается, что $2a > F_1F_2$.

Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса.

Центр эллипса – середина отрезка, соединяющего фокусы. Центр эллипса является его центром симметрии.

Площадь эллипса: $S = \pi ab.$

Уравнение эллипса в канонической системы координат



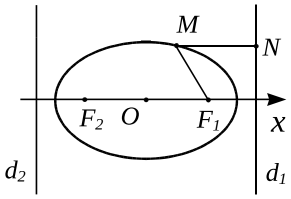
Если начало координат поместить в центр эллипса, а ось абсцисс выбрать так, чтобы она содержала фокусы, то уравнение эллипса примет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – координаты точки пересечения эллипса с осями координат. Числа a и b – ***полуоси*** эллипса (большая и малая).

Если $F_1F_2 = 2c$, то $a^2 - b^2 = c^2$.

Окружность – частный случай эллипса. Она получается при $a = b$.

Эксцентриситет эллипса: $e = c/a$.

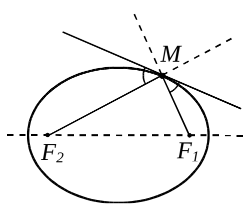
Это число удовлетворяет неравенству $0 \le e < 1$ и показывает "степень вытянутости" эллипса. Для окружности $e = 0$.



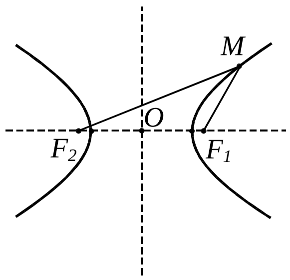
Эллипс, не являющийся окружностью, имеет две ***директрисы*** – прямые, перпендикулярные прямой F_1F_2 и расположенные на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра.

Эллипс является геометрическим местом точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно эксцентриситету: $\dfrac{MF_i}{\rho(M, d_i)} = e, i = 1, 2$

Оптическое свойство эллипса: Если прямая l касается эллипса в точке M, то фокальные радиусы MF_1 и MF_2 образуют равные углы с касательной l. Другими словами: лучи света, выпущенные из одного фокуса, отразившись от эллипса, пройдут через другой фокус.



Гипербола



Гиперболой называется множество точек M, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равна заданному числу $2a$:

$$|MF_2 - MF_1| = 2a.$$

Примечание: предполагается, что $F_1F_2 > 2a$.

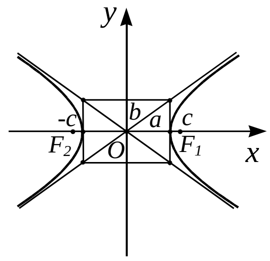
Точки F_1, F_2 – ***фокусы*** гиперболы.

Центр гиперболы – середина отрезка F_1F_2.

Центр гиперболы является ее центром симметрии.

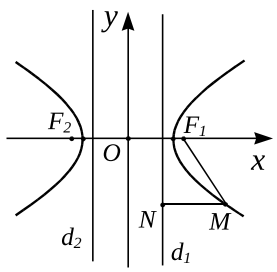
Уравнение гиперболы в канонической системе координат

Если начало координат поместить в центр гиперболы, а за ось абсцисс принять прямую F_1F_2, то уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – координаты точки пересечения гиперболы с осями координат.



Если $c = OF_1 = OF_2$ – расстояние от начала координат до фокуса, то $c^2 = a^2 + b^2$.

Оси Ox, Oy – ***оси гиперболы*** (***действительная*** и ***мнимая***). Числа a и b – действительная и мнимая ***полуоси***.



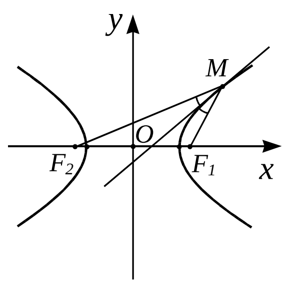
Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ – ***асимптоты*** гиперболы. Гипербола состоит из двух ***ветвей*** (одна в полуплоскости $x > 0$, другая – $x < 0$).

Эксцентриситет гиперболы: $e = \frac{c}{a}$. Для гиперболы $e > 1$.

Директрисы – прямые, перпендикулярные действительной оси и расположенные на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра.

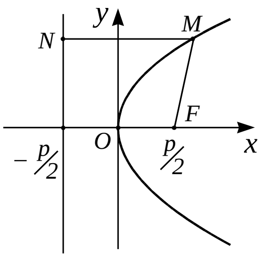
Гипербола является геометрическим местом точек M, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно эксцентриситету:

$$\frac{MF_i}{\rho(M, d_i)} = e, i = 1, 2.$$



Оптическое свойство гиперболы:
Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами, проведенными в точку касания, т.е.

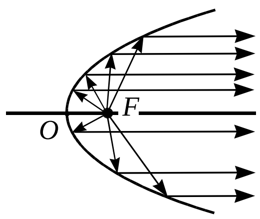
биссектрисой угла F_1MF_2.
Другими словами: лучи света, выпущенные из фокуса F_1, отразившись от гиперболы, будут образовывать расходящийся пучок лучей, причем лучи, противоположные отраженным, проходят через фокус F_2.



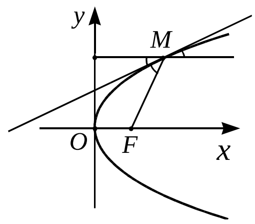
Парабола

Параболой называется геометрическое место точек M, расстояние от которых до данной точки (***фокуса***) равно расстоянию до данной прямой (***директрисы***): $MF=\rho(M,d)$, где F – фокус, а d – директриса.

Эксцентриситет параболы считается равным единице: $e=1$.
Ось параболы – прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Ось параболы является ее осью симметрии. ***Вершина*** параболы – точка параболы, лежащая на оси.
Уравнение параболы в канонической системе координат. Если начало координат поместить в вершину параболы, а ось абсцисс направить по оси параболы от вершины к фокусу, то уравнение параболы примет вид $y^2=2px$.



Уравнение директрисы: $x=-\dfrac{p}{2}$. Координаты фокуса: $F=\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.



Оптическое свойство параболы: Касательная к параболе образует равные углы с осью параболы и фокальным радиусом, проведенным в точку касания.
Другими словами: лучи света, выпущенные из фокуса параболы, отразившись от нее, будут образовывать пучок прямых, параллельных оси.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнения кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$

причем предполагается, что среди чисел a_{11},a_{12},a_{22} есть хотя бы одно ненулевое.
Существует система координат (называемая ***канонической***), в которой уравнение кривой второго порядка имеет вид, приведенный в таблице (***канонический вид***).

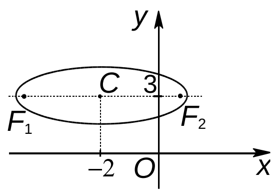
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллипс
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола
$y^2=2px$	парабола
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллипс (эта “кривая” не имеет действительных точек)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	на действительной плоскости “кривая” имеет лишь одну точку
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	две пересекающиеся прямые
$x^2=A,\ A>0$	две параллельные прямые
$x^2=0$	две совпадающие прямые
$x^2=A,\ A<0$	две мнимые параллельные прямые (“кривая” не имеет ни одной действительной точки)

Задача 1. Изобразить кривую, найти ее характеристики:

$$x^2+9y^2+4x-54y+76=0.$$

Решение. Надо привести это уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты по x и по y:

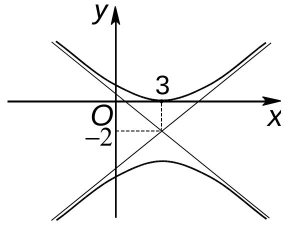
$(x^2+4x+4-4)+9(y^2-6y+9-9)+76=0;\ (x+2)^2+9(y-3)^2=9;$



$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{1}=1.$ Следовательно, данная кривая является эллипсом. Его центр: $C=(-2;3)$. Полуоси: $a=3,\ b=1.$ Для нахождения координат фокусов находим параметр c (половину расстояния между фокусами): $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}.$ Отсюда получаем фокусы: $F_1=(-2-2\sqrt{2};3),$ $F_2=(-2+2\sqrt{2};3)$ Эксцентриситет: $e=c/a=2\sqrt{2}/3.$

Задача 2. Составить уравнение гиперболы с асимптотами $y=\pm0{,}8(x-3)-2$, касающейся оси Ox.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы с центром $(x_0;\ y_0)$ имеют

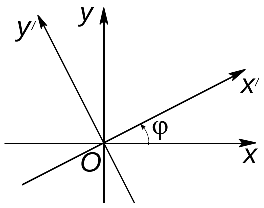


вид $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0).$ Следовательно, центр гиперболы имеет координаты

$(3;-2)$ и $b/a=0{,}8.$ Нарисуем гиперболу, учитывая, что она касается оси абсцисс.
Из рисунка видно, что $b=2.$ Так как $b/a=0{,}8,$ то $a=2{,}5.$ Так как действительная ось гиперболы параллельна оси $Oy,$ то в правой части уравнения будет -1 вместо $1.$ Отсюда получаем уравнение:
$$\frac{(x-3)^2}{2{,}5^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=-1.$$

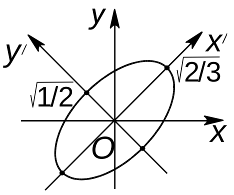
Задача 3. Найти площадь области, ограниченной кривой $2x^2+xy+2y^2=1.$

Решение. В случае, когда коэффициенты при x^2 и y^2 равны друг другу, то поворотом системы координат на угол в $45°$ можно избавиться от произведения xy в уравнении кривой. Напишем формулы поворота на угол φ:



$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\cos\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

(здесь x, y – координаты точки в исходной системе координат, а x', y' – координаты той же точки в системе координат, повернутой на угол φ.
При $\varphi=45°$ получаем прямые и обратные формулы:



$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ y' = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Подставим обратные формулы в уравнение кривой:
$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=1;$$
$$\frac{x'^2-2x'y'+y'^2}{2}+\frac{x'^2-y'^2}{2}+\frac{x'^2+2x'y'+y'^2}{2}=1; \quad \frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=1;$$
$\dfrac{x'^2}{(\sqrt{2/3})^2}+\dfrac{y'^2}{(\sqrt{1/2})^2}=1.$ Следовательно, $a=\sqrt{2/3},$ $b=\sqrt{1/2}$. Отсюда $S=\pi ab=\pi/\sqrt{3}.$
). Рисуем оси эллипса, находим отрезки a и b (его полуоси). Далее строим отрезок $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (рис. 5.34) и фокусы F_1, F_2 эллипса.

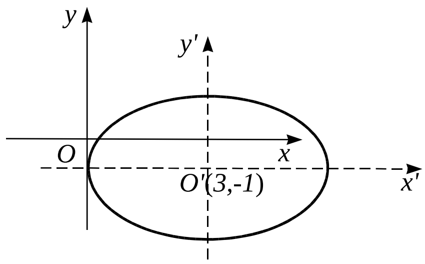
Задача 4. Установить, что уравнение
$$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$$
определяет эллипс, найти его центр и полуоси.

Решение. Преобразуем это уравнение:
$$5\left(x^2-6x+9\right)-45+9\left(y^2+2y+1\right)-9+9=0\text{, или}$$

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45, \text{ или}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

Положим $\begin{cases} x-3=x' \\ y+1=y' \end{cases}$ и уравнение примет вид $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{5}=1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=\sqrt{5}$.



Ðèñ. 5.15

Задача 5. Установить, что уравнение $y=\frac{1}{x}$ определяет гиперболу, найти ее центр и полуоси.

Подберём угол φ, после поворота на который уравнение кривой не будет содержать произведения переменных x' и y'. Подставим формулы поворота в заданное уравнение $y=\frac{1}{x}$, которое лучше переписать в виде $xy=1$:

$$(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)=1,$$

$$x'^2\cos\varphi\sin\varphi-x'y'\sin^2\varphi+x'y'\cos^2\varphi-y'^2\sin\varphi\cos\varphi=1,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)\sin 2\varphi+x'y'\cos 2\varphi=1.$$

Найдём такой угол φ, чтобы в последнем уравнении не содержалось слагаемое $x'y'$. Достаточно положить, $\cos 2\varphi=0$, то есть $2\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

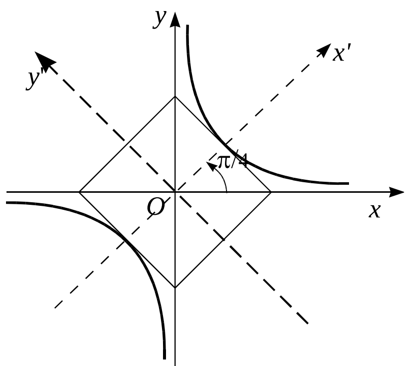
Тогда преобразование примет вид

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

- поворот против часовой стрелки вокруг точки O, а уравнение кривой (5.28) в новой системе координат:

$$\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2=1$$

- это уравнение гиперболы с полуосями $a=b=\sqrt{2}$ и центром в точке $O(0,0)$ (рис. 5.16).



Ðèñ. 5.16

§ 3. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат

Полярная система координат. Выберем на плоскости точку O (*полюс*) и луч OA с вершиной O (*полярную ось*) (рис. 5.36). Тогда каждая точка M плоскости будет характеризоваться двумя числами: $\rho=OM$ (*полярный радиус*) – расстояние от точки M до полюса и $\varphi=\angle AOM$ (*полярный угол*).

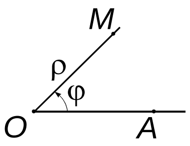


Рис. 5.36

При этом $\rho \ge 0$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Числа ρ, φ называются *полярными координатами* точки M. Используется запись $M = (\rho, \varphi)$. Единственная точка, для которой координата φ не определена, – это полюс. Можно считать значение φ в полюсе равным любому заданному углу.

Замечание. Иногда считают, что $-\pi < \varphi \le \pi$ или $-\infty < \varphi < +\infty$ (в этом случае координата φ определена неоднозначно). Кроме того, в редких случаях разрешается даже неравенство $\rho < 0$ (в этом случае точка M откладывается не на полярном луче, а на луче, противоположном ему).

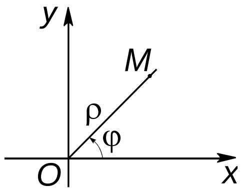


Рис. 5.37

Пусть на плоскости взята декартова система координат Oxy (рис. 5.37). Примем начало координат за полюс, а ось Ox за полярную ось. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами точки будет осуществляться по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Обратные формулы:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \text{при } y \ge 0 \text{ и } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \text{при } y < 0.$$

При $x, y > 0$ можно также написать $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Примеры полярных уравнений:

1. $\rho = a$ $(a > 0)$ – уравнение окружности радиуса a с центром в полюсе.

2. $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ $(a = \text{const})$ – уравнение прямой $x = a$.

3. $\rho = \dfrac{A}{1 - e\cos\varphi}$ – уравнение кривой второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы); здесь e – эксцентриситет, полюс расположен в одном из фокусов, полярная ось совпадает с одной из главных осей кривой второго порядка (рис. 5.38).

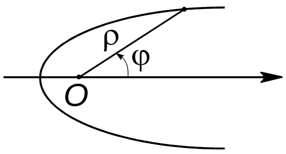


Рис. 5.38

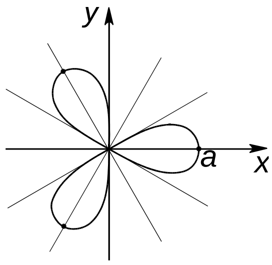


Рис. 5.39

4. $\rho = a\cos 3\varphi$ – *трехлепестковая роза* (рис. 5.39).

Сферическая система координат. Эта система координат вводится для точек пространства.

Опустим перпендикуляр MM' из точки M на плоскость Oxy (рис. 5.40). Сферическими координатами точки M являются: $\rho = OM$ – полярный радиус, $\theta = \angle M'OM$ – угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ к плоскости Oxy, φ (*азимут*) – угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM'}$.

При этом считается, что $\rho \ge 0$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Возможны другие соглашения о диапазоне изменения координат ρ, φ, θ.

Связь между декартовыми и сферическими координатами:

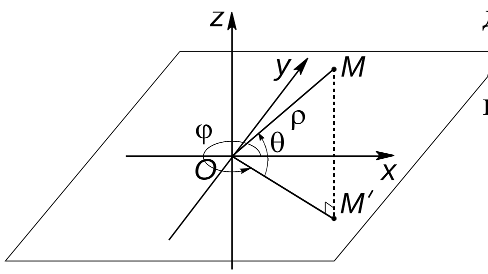


Рис. 5.40

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Примеры уравнений в сферической системе координат:

1. $\rho = a$ – уравнение сферы с центром в начале координат.

2. $\theta = \theta_0$ – уравнение конуса. 3. $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$ – уравнение цилиндра.

4. $\theta = \theta_0$ – уравнение конуса.

Цилиндрическая система координат занимает промежуточное положение между декартовой и сферической системами. Цилиндрическими координатами точки M пространства являются полярные координаты ρ, φ проекции точки M на плоскость Oxy и аппликата z точки M (рис. 5.41). Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки:

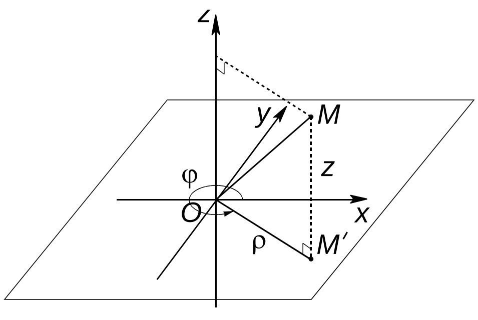


Рис. 5.41

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Примеры уравнений поверхностей в цилиндрической системе координат:

1. $z = k\rho$ $(k = \text{const})$ – уравнение конуса.
2. $\rho = a$ – уравнение цилиндра.
3. Пусть на плоскости Oxz дан круг радиуса a с центром на оси Ox, причем центр круга находится на расстоянии $b > a$ от начала координат (см. рис. 5.42). Тело, полученная вращением круга вокруг оси Oz, носит название *тор* (см. рис. 5.43).

Так как уравнение окружности на плоскости Oxz имеет вид

$$(x-b)^2 + z^2 = a^2,$$

§ 4. Поверхности

Поверхности задаются обычно уравнением вида $F(x,y,z)=0$ или, если удастся выразить z через x и y, – уравнением вида $z = f(x,y)$. Например, сфера (поверхность шара) задается уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, где (x_0,y_0,z_0) – центр шара, R – его радиус. Выражая z через x и y, получим две поверхности: *верхнюю полусферу* $z = z_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ и *нижнюю полусферу* $z = z_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$.

Коническая поверхность

Пусть даны плоскость α, кривая C, лежащая на ней, и точка S, не принадлежащая плоскости. ***Конической поверхностью*** называется поверхность, состоящая из прямых линий SA, проведенных через точку S и каждую точку A кривой C (см. рис. 5.42). Прямые SA называются ***образующими***, точка S – ***вершиной***, а линия C – ***направляющей*** конической поверхности.

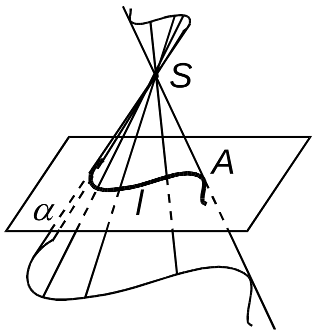


Рис.5.42

Составим уравнение конической поверхности. Чтобы уравнение было проще, выберем систему координат так, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью α, а ось Oz проходит через вершину S. Пусть кривая C задается уравнением $f(x,y)=0$, а вершина S имеет координаты $(0,0,c)$. Если $M=(x,y,z)$ – точка конической поверхности и прямая SM пересекает плоскость α в точке $M_1=(x_1,y_1,0)$, то числа x_1, y_1 удовлетворяют уравнению

$f(x_1, y_1) = 0$. Кроме того, $\overrightarrow{SM} \parallel \overrightarrow{SM_1}$. Так как $\overrightarrow{SM} = (x, y, z-c)$, $\overrightarrow{SM_1} = (x_1, y_1, -c)$, то $(x, y, z-c) = t(x_1, y_1, -c)$ при некотором $t \in \mathbb{R}$. Отсюда $z - c = -tc$, а значит, $t = \dfrac{c-z}{c}$, $x_1 = \dfrac{x}{t} = \dfrac{cx}{c-z}$, $y_1 = \dfrac{y}{t} = \dfrac{cy}{c-z}$. Подставляя в уравнение кривой C, получим: $f\left(\dfrac{xc}{c-z}, \dfrac{yc}{c-z}\right) = 0$. Это и есть искомое уравнение поверхности. Ему удовлетворяют все точки конической поверхности, за исключением вершины S, и только они.

Цилиндрическая поверхность

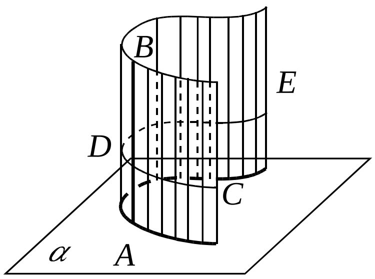


Рис.5.43.

Пусть даны плоскость α, кривая C, лежащая на этой плоскости, и прямая l, не параллельная этой плоскости. ***Цилиндрической поверхностью*** называется поверхность, состоящая из прямых линий AB, параллельных прямой l и пересекающих кривую C (см.рис.5.43). Прямые AB называются ***образующими***, а линия C – ***направляющей*** цилиндрической поверхности. Составим уравнение цилиндрической поверхности. Для простоты предположим, что образующие перпендикулярны плоскости α. Выберем систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпадала с плоскостью α. Тогда образующие будут параллельны оси Oz. Если $f(x, y) = 0$ – уравнение кривой C, то такое же уравнение будет определять цилиндрическую поверхность. Отсутствие координаты z означает, что координата z может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Поверхность вращения

Пусть даны плоскость α, кривая C на ней и прямая l, также лежащая в этой плоскости. ***Поверхностью вращения*** называется поверхность, полученная вращением кривой C вокруг прямой l. Выберем систему координат так, чтобы прямая l совпадала с осью Oz, а кривая C находилась в плоскости Oxz. Тогда, если $f(x, z) = 0$ – уравнение кривой C, то уравнение поверхности вращения будет иметь вид $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$.

§ 5. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

причем предполагается, что среди чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ есть хотя бы одно ненулевое.

Теорема. Существует система координат, в которой уравнение поверхности второго порядка имеет ***канонический вид***.

Приведём изображения поверхностей второго порядка.

1. Эллипсоид трехосный (рис.5.17)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

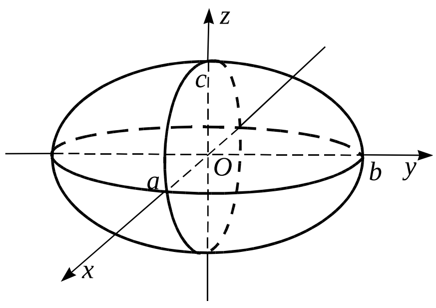
2. Гиперболоид

а) однополостный (рис.5.18)

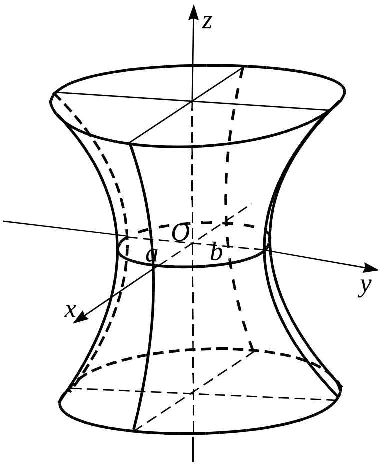
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

б) двуполостный (рис.5.19)

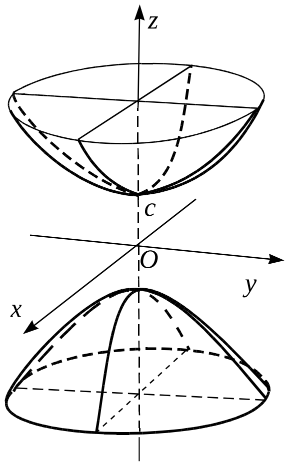
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$



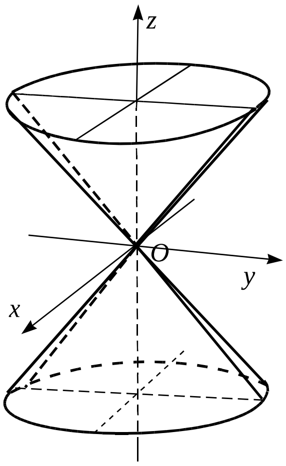
Ðèñ. 5.17



Ðèñ. 5.18



Ðèñ. 5.19



Ðèñ. 5.20

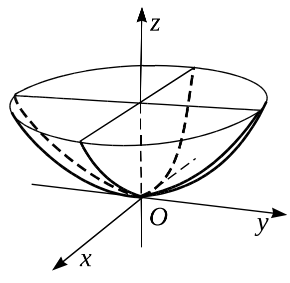
3. Конус второго порядка (рис. 5.20)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

4. Параболоид

а) эллиптический (рис. 5.21)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Ðèñ. 5.21

б) гиперболический (рис. 5.22)

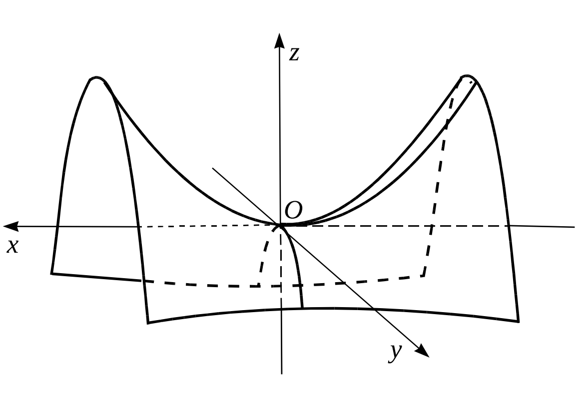
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

5. Цилиндр второго порядка (рис. 5.23)

а) эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

б) гиперболический (рис. 5.24)

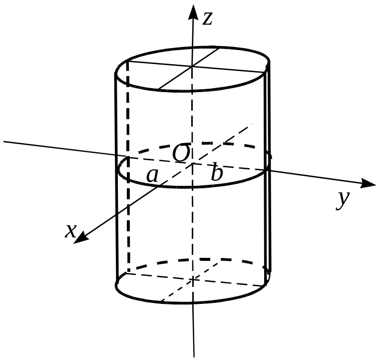


Ðèñ. 5.22

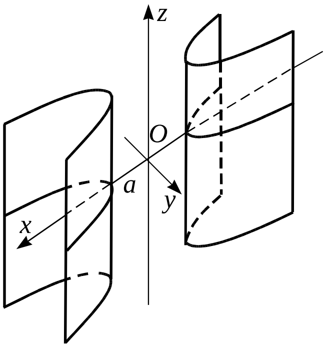
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в) параболический (5.25)

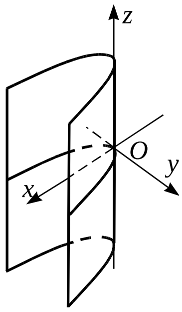
$$y^2=2px$$



Ðèñ. 5.23



Ðèñ. 5.24



Ðèñ. 5.25

Основным методом исследования формы поверхности по ее уравнению является метод сечений.

Метод сечений заключается в том, что в уравнении поверхности последовательно полагают $z=\mathrm{const}$, $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$ (то есть «пересекают» поверхность плоскостями, параллельными координатным) и в зависимости от вида кривой, получающейся в сечении, делают заключение о типе поверхности и ее расположении.

Задача 6. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=z$$

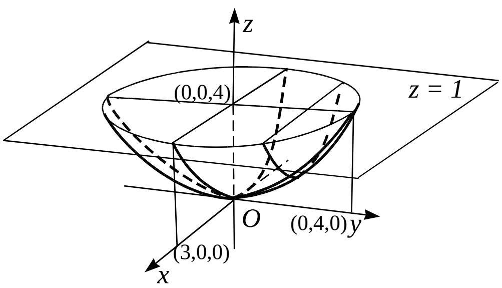
Решение. Положим $z=c\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=c$, или $\frac{x^2}{9c}+\frac{y^2}{16c}=1$. (5.30)

Отметим, что при $c<0$ точек пересечения нет (следовательно, в области $z<0$ точек поверхности нет); при $c>0$ уравнение (5.30) определяет эллипс с полуосями $a=3\sqrt{c}$ и $b=4\sqrt{c}$; при $c=0$ – точка $O(0{,}0{,}0)$ (поверхность проходит через начало координат).

Пусть, $x=c\Rightarrow\frac{c^2}{9}+\frac{y^2}{16}=z$, или $y^2=16z-\frac{16}{9}c^2$, или $y^2=16\left(z-\frac{1}{9}c^2\right)$ – парабола с $p=8$, смещенная по оси OZ вверх на $\frac{1}{9}c^2$.

Пусть, $y=c\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{c^2}{16}=z$, или $x^2=9z-\frac{9}{16}c^2$, или $x^2=9\left(z-\frac{1}{16}c^2\right)$ – парабола с $p=\frac{9}{2}$, смещенная по оси OZ вверх на $\frac{1}{16}c^2$.

$z=1$



Ðèñ. 5.26

На Рис.5.26.изображен эллипс, получающийся в сечении плоскостью (полуоси $a=3, b=4$).

Представив общий характер кривых, получающийся в сечении, уже нетрудно выбрать из девяти поверхностей соответствующую.

Итак, поверхность – эллиптический параболоид (Рис. 5.26.).

Перечислим теперь *вырожденные* и *мнимые* поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – ***мнимый эллипсоид*** (эта "поверхность" не имеет действительных точек)***;***

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – ***точка, или мнимый конус с действительной вершиной;***

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – ***мнимый эллиптический цилиндр*** (эта "поверхность" не имеет действительных точек)***;***

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – ***пара пересекающихся плоскостей;***

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – ***пара мнимых плоскостей с общей действительной прямой;***

6. $x^2=A,\ A>0$ – ***пара параллельных плоскостей;***

7. $x^2=A,\ A<0$ – ***пара мнимых параллельных плоскостей;***

8. $x^2=0$ – ***пара совпадающих плоскостей.***

Задача 7. Доказать, что однополостный гиперболоид состоит целиком из прямых линий, т.е. через каждую точку этой поверхности проходит прямая, целиком лежащая на поверхности гиперболоида.

Доказательство. Запишем каноническое уравнение гиперболоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Возтмём на гиперболоиде какую-нибудь точку (x_0,y_0,z_0) и проведём через неё прямую с направляющим вектором (q_1,q_2,q_3). Её параметрическое уравнение имеет вид $x=x_0+q_1t,\ y=y_0+q_2t,\ z=z_0+q_3t.$ Потребуем, чтобы все точки этой прямой принадлежали гиперболоиду. Для этого при всех t должно быть выполнено равенство

$$\frac{(x_0+q_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+q_2t)^2}{b^2}-\frac{(z_0+q_3t)^2}{c^2}=1.$$

Так как $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$ то должны быть равны 0 коэффициенты при t и t^2, а значит, должна выполняться система уравнений

$$\begin{cases}\frac{x_0q_1}{a^2}+\frac{y_0q_2}{b^2}-\frac{z_0q_3}{c^2}=0,\\ \frac{q_1^2}{a^2}+\frac{q_2^2}{b^2}-\frac{q_3^2}{c^2}=0.\end{cases}$$

Положим $q_3=c.$ Тогда $\frac{q_1^2}{a^2}+\frac{q_2^2}{b^2}=1.$ Отсюда следует, что для некоторого угла φ

мы будем иметь $q_1 = a\cos\varphi,\ q_2 = b\sin\varphi.$ Подставив в первое уравнение системы, получим: $\frac{x_0}{a}\cos\varphi + \frac{y_0}{b}\sin\varphi = \frac{z_0}{c}.$ Так как $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > \frac{z_0^2}{c^2},$ то такой угол φ существует. Значит, числа q_1, q_2 тоже существуют. Таким образом, существует прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и целиком лежащая на гиперболоиде. Утверждение доказано.

Задача 8. Прямая $x+1 = y = z$ вращается вокруг оси аппликат. Написать уравнение получившейся при этом поверхности вращения.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x = -1+t,$ $y = z = t.$ Если точка (x, y, z) повернётся на угол φ вокруг оси $Oz,$ то получится точка $(X, Y, Z),$ где $X = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$ $Y = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$ $Z = z.$ Для любого угла φ мы имеем: $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2.$ Отсюда будем иметь: $X^2 + Y^2 = (-1+t)^2 + t^2 = (-1+Z)^2 + Z^2.$ Преобазуем это уравнение: $X^2 + Y^2 - 2(Z - 0{,}5)^2 = 0{,}5.$ Это уравнение однополостного гиперболоида.

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду, изобразить эту кривую и найти её характеристики:

   а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 150y - 159 = 0;$ б) $9x^2 - 25y^2 + 36x - 150y - 414 = 0;$

   в) $y^2 + 16x - 2y + 33 = 0;$ г) $25x^2 + 9y^2 + 200x - 54y + 256 = 0;$

   д) $x^2 + 2y^2 - 6x + 20y + 59 = 0.$

   Ответ: 1. а) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ – эллипс; центр: $C = (-1; 3);$ полуоси: $a = 5,$ $b = 4;$ фокусы: $F_1 = (-4; 3),$ $F_2 = (2; 3);$ б) $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ – гипербола; центр: $C = (-2; -3);$ полуоси: $a = 5,$ $b = 3;$ фокусы: $F_1 = (-6; -3),$ $F_2 = (2; -3);$ асимптоты: $y + 3 = \pm 0{,}6(x+2);$ в) $(y-1)^2 = -16(x+2)$ – парабола; вершина: $A = (-2; 1);$ $p = 8;$ фокус: $F = (-6; 1);$ директриса: $x = 2;$ г) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ – эллипс; центр: $C = (-4; 3);$ полуоси: $a = 3,$ $b = 5;$ фокусы: $F_1 = (-4; -1),$ $F_2 = (-4; 7);$ е) $(x-3)^2 + 2(y+5)^2$ – точка (точнее: две мнимые прямые, пересекающиеся в действительной точке.

2. Что представляет собой следующая кривая второго порядка:

   а) $2x^2 - 3y^2 - xy - 5y - 2 = 0;$ б) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$

   Ответ: а) пара пересекающихся прямых $x - y - 1 = 0$ и $2x + 3y + 2 = 0;$ б) пара совпадающих прямых $x + 2y - 3 = 0.$

3. Найти координаты фокусов кривой $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 1.$

   Ответ: $F_1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}; -\frac{\sqrt{10}}{3}\right),$ $F_2 = \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}; \frac{\sqrt{10}}{3}\right).$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $35x^2+12xy+30y^2=150.$

Ответ: $\pi\sqrt{6}.$

5. а) Составить уравнение эллипса с фокусами $(3;-1)$ и $(3;5),$ касающегося оси ординат.

б) Составить уравнение гиперболы с вершиной $(3;6)$ и асимптотами $y-5=\pm 2(x-3).$

в) Составить уравнение параболы с фокусом $(-3;4)$ и директрисой $x=1.$

Ответ: а) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{18}=1;$ б) $\frac{(x-3)^2}{0,25}-\frac{(y-5)^2}{1}=-1;$ в) $(y+1)^2=-8(x+3).$

6. Составить уравнение параболы с вершиной $(1;1)$ и фокусом $(0;0).$

Ответ: $(x-y)^2=-8(x+y)+16.$

7. Установить вид поверхности второго порядка, приведя её уравнение к каноническому виду, и изобразить поверхность:

а) $x^2-z^2-2x-2z-1=0;$ б) $9x^2+4y^2-4z^2+18x=0;$ в) $4x^2-z^2-8x-6y+4=0;$

г) $4x^2+y^2+4z^2-8x+4y+4=0;$ д) $4x^2-4y^2-z^2+8y+2z-4=0;$ е) $x^2+z^2=6z.$

Ответ: а) $(x-1)^2-(z+1)^2=1$ – гиперболический цилиндр; б) $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{y^2}{9/4}-\frac{z^2}{9/4}=1$ – однополостный гиперболоид; в) $y=\frac{(x-1)^2}{3/2}-\frac{z^2}{6}$ – гиперболический параболоид; г) $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ – эллипсоид; д) $4x^2-4(y-1)^2-(z-1)^2=-1$ – двуполосный гиперболоид; е) $x^2+(z-3)^2=9$ – эллиптический цилиндр.

8. Доказать, что гиперболический параболоид состоит из прямых линий.