ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение линейного пространства.

В § 3 гл. 5 $\boldsymbol{n}$-мерное векторное пространство было определено как упорядоченная система $\boldsymbol{n}$ чисел. Для $\boldsymbol{n}$-мерных векторов были введены операции сложения и умножение на числа, что привело к понятию $\boldsymbol{n}$-мерного линейного векторного пространства.

Теперь определим векторное пространство аксиоматически: предварительно о свойствах отдельных векторов ничего не говорим, но определяем свойства вводимых над векторами операций.

Определение: Множество $\boldsymbol{V}$ будем называть действительным линейным (векторным, аффинным) пространством, если:

- всякой паре элементов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{V}$ поставлен в соответствие однозначно определенный элемент $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{V}$, называемый *суммой*;
- *произведение* элемента $\boldsymbol{a}$ на действительное *число* λ однозначно определено и принадлежит множеству $\boldsymbol{V}$;
- введенные операции обладают свойствами (аксиомы):

1.	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$	сложение коммутативно;
2.	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	сложение ассоциативно;
3.	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$	существует нуль-элемент;
4.	$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$	существует противоположный элемент (единственный).

Из аксиом 1-4 следует существование и единственность разности $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$. Для любых элементов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{V}$, для любых действительных чисел k и t и для действительного числа 1 должны иметь место равенства 5÷8 и их следствия:

5.	$k(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}\pm k\boldsymbol{b}$		$0\cdot\boldsymbol{a}=0$
6.	$(k\pm t)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}\pm t\boldsymbol{a}$	$\longrightarrow$	$(-1\cdot\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$
7.	$k(t\boldsymbol{a})=(kt)\boldsymbol{a}$		$k\cdot 0=0$
8.	$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$		$k\boldsymbol{a}=0$, если $k=0$ или $\boldsymbol{a}=0$

Если бы было определено не только умножение на действительное число, но и на комплексное, то мы получили бы комплексное линейное пространство.

Приведем несколько примеров линейного пространств.

☺ *Пример 97*. ***В геометрии***: множество геометрических векторов с известной операцией сложения векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (диагональ параллелограмма со сторонами $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$) и умножения вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ.

Пример 98. ***В алгебре***: системы $\boldsymbol{n}$ чисел: $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (строки матрицы, коэффициенты линейного уравнения и т.п.), для которых операцию сложения векторов $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ обычно определяют так:

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n).$$

а произведением вектора α на число $\boldsymbol{k}$ называется вектор:

$$k\alpha=(ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Пример 99. ***В анализе***: совокупность всех непрерывных функций на сегменте $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, причем операциями считаем сложение функций и умножение их на число.

Для уточнения понятия «линейное пространство» приведем также несколько примеров совокупностей (множеств элементов), которые не являются линейными пространствами.

Пример 100. Совокупность всех непрерывных функций на $[a, b]$ таких, что $|f(x)| \le 1$ не образует линейного пространства: из того, что $|f_1(x)| \le 1$ и $|f_2(x)| \le 1$ не следует, что $|f_1(x) + f_2(x)| \le 1$.

Пример 101. Множество многочленов степени ***n*** не образует линейного пространства, т.к. сумма многочленом степени ***n*** может оказаться многочленом более низкой степени: например $(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t$.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 102. Докажите, что линейными пространствами являются:

- совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа ***n***, с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа;
- множество матриц порядка ***n*** с операциями: сумма матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$ есть матрица $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение матрицы $\|a_{ik}\|$ на число λ есть матрица $\|\lambda \cdot a_{ik}\|$;
- введенные операции обладают свойствами (аксиомы) линейного пространства.

В приведенных примерах одни и те же операции сложения и умножения на числа производятся над совершенно разными объектами. Нетрудно проверить , что в них выполняются все аксиомы линейного пространства Для того, чтобы изучать все такие примеры с единой точки зрения, и введено понятие линейного (аффинного) пространства.

§ 2. Конечномерное пространство. Базис в *n*- мерном пространстве.

Мы изучаем конечномерные линейные векторные пространства. Понятие размерности пространства является сложным и может быть определено только в результате изучения понятия линейной зависимости системы векторов.

2.1. Число измерений (размерность) пространства.

Определение. Пусть R – линейное пространство. Векторы x, y, z, …, v называют линейно зависимыми, если существуют такие числа α, β, γ, … , θ, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \theta v = 0, \tag{1}$$

векторы x, y, z, …, v называют линейно независимыми, если равенство (1) существует только при числа α = β = γ = … = θ = 0.

Если векторы x, y, z, …, v линейно зависимы, т.е. в равенстве (1) не все коэффициенты равны нулю, пусть это будет α , то можно записать, разделив (1) на α :

$$x = \lambda y + \mu z + \ldots + \varsigma v, \tag{2}$$

Из (2) следует, что вектор x есть линейная комбинация векторов y, z, …, v. Вывод: *если векторы x, y, z, ..., v линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных*. Верно и обратное (учтем как (2) получается из (1) и наоборот): векторы, один из которых есть линейная комбинация остальных, линейно зависимы.

Вопросы для самопроверки:

1. Если среди векторов x, y, z, …, v имеется нулевой вектор, то будут ли эти векторы линейно независимы? Обоснуйте ответ.

2. Если векторы x, y, z, … линейно зависимы, то можно ли добавлением к ним некоторого количества независимых векторов получить систему независимых векторов?
3. Докажите, что если векторы y, z, …, v линейно независимы, то представление (2) для вектора ***x*** единственно.

Определение. Линейное пространство R называется $\boldsymbol{n}$-мерным, если в нем существует $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов и нет большего числа линейно независимых векторов.

Если в пространстве R можно найти любое число линейно независимых векторов, то R называется *бесконечномерным*.

Приведем несколько примеров $\boldsymbol{n}$-мерных и бесконечномерного линейных пространств.

☺ *Пример 103*. Пусть имеем R–пространство, векторами которого являются системы $\boldsymbol{n}$ действительных чисел. В этом пространстве можно указать $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов (легко доказывается):

$$x_1 = (1, 0, \dots, 0).$$
$$x_2 = (0, 1, \dots, 0).$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Пример 104. Пусть имеем R–пространство, векторами которого являются непрерывные функции: $f_1(t)=1$, $f_2(t)=t$, … , $f_N(t)=t^{N-1}$, где N произвольное целое число. Совокупность указанных функций – линейно независимые векторы (легко доказывается). В этом пространстве имеется произвольное число линейно независимых функций. Это значит, что указанное пространство – *бесконечномерно*.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 105. Пусть имеем R–пространство, векторами которого являются системы $\boldsymbol{n}$ действительных чисел:

$$x_1 = (1, \ 1, \ \dots, \ 1),$$
$$x_2 = (0, \ 1, \ \dots, \ 1),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = (0, \ 0, \ \dots, \ 1).$$

Докажите, что указанная система векторов линейно независима.

Пример 106. Пусть имеем R–пространство, векторами которого являются многочлены степени не выше $(\boldsymbol{n}-1)$. Докажите, что система $\boldsymbol{n}$ векторов-многочленов $1, t, \dots, t^{n-1}$ линейно независима.

Для понимания многих вопросов, связанных с понятием линейной зависимости (и независимости) векторов важно знать следующую лемму:

Лемма. (основная, часто ее называют теоремой) Пусть в линейном пространстве задана система векторов: $f_1, f_2, \dots, f_k$.
пусть также каждый из векторов: $g_1, g_2, \dots, g_m$
есть линейная комбинация векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$. Тогда, если векторы $g_1, g_2, \dots, g_m$ линейно независимы, то $\boldsymbol{m \le k}$.

На основании леммы заметим:

- среди линейных комбинаций векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$ не может быть больше чем $\boldsymbol{k}$ линейно независимых;
- если в пространстве R существуют $\boldsymbol{k}$ линейно независимых векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$ таких, что каждый вектор из R есть их линейная комбинация, то пространство R $\boldsymbol{k}$-мерно.

2.2. Базис в *n*- мерном пространстве.

Определение. Совокупность ***n*** линейно независимых векторов e_1, e_2, . . . , e_n ***n***-мерного пространства R называется *базисом* в R.

По определению ***n***-мерного пространства в нем существует ***n*** линейно независимых векторов, т.е. существует базис.

Произвольную систему из ***k*** линейно независимых векторов f_1, f_2, . . . , f_k, где $k < n$, можно дополнить до базиса в ***n***-мерном пространстве R.

2.3. Задание произвольного вектора в базисе *n*- мерного пространства.

Пусть имеем в ***n***-мерном векторном пространства R базис $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$. Так как система векторов $x, e_1, e_2, ..., e_n$ линейно зависима (число векторов равно (***n***+1), т.е. больше размерности пространства), то можно получить разложение вектора ***x*** в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - координаты вектора ***x*** в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Теорема. *Каждый вектор* ***x*** *из* ***n****-мерного пространства R можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.* e_1, e_2, . . . , e_n:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n, \tag{3}$$

числа x_1, x_2, … x_n, называются *координатами* вектора ***x*** в базисе e_1, e_2, . . . , e_n.

Если векторы ***x*** и ***y*** в базисе e_1, e_2, . . . , e_n имеют вид:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n, \tag{4}$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n, \tag{5}$$

то их сумму и умножение вектора на действительное число λ можно представить выражениями:

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + ... + (x_n + y_n)e_n, \tag{6}$$

$$\lambda x = \lambda x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2 + ... + \lambda x_n e_n, \tag{7}$$

т.е. *при сложении векторов* ***x*** *и* ***y*** *их координаты складываются; при умножении вектора* ***x*** *на число* λ *его координаты умножаются на это число.*

Ясно, что только нулевой вектор имеет все координаты равными нулю.

§ 3. Изоморфизм *n*- мерных пространств.

В разобранных примерах некоторые пространства не отличаются друг от друга с точки зрения рассматриваемых свойств: так, в случае трехмерного пространства свойства векторов как направленных отрезков по отношению к операциям сложения и умножения на число совпадают со свойствами векторов, заданных в виде троек чисел.

Определение. Линейные пространства R и R' называются изоморфными, если между векторами $x \in R$ и $x' \in R'$ можно установить взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$ так, что если вектору x соответствует вектор x', а вектору y соответствует вектор y', то

1) вектору ***x*** + ***y*** соответствует вектор $x' + y'$;
2) вектору λx соответствует вектор $\lambda x'$

Из определения изоморфизма следует, что равенство $\alpha x + \beta y + \gamma z + ... + \theta v = 0$ равносильно равенству $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + ... + \theta v' = 0$, т.е. линейно зависимым векторам из линейного пространства R соответствуют линейно зависимые векторы из R' , и обратно. Это значит, что *пространства различной размерности не могут быть между собой изоморфны*.

Теорема. *Все линейные пространства, имеющие одну и ту же размерность, изоморфны друг другу.*

Итак, единственной существенной характеристикой конечномерного пространства является его размерность.

§ 4 Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Целью настоящего параграфа является получение расчетных формул для вычисления координат **n**-мерного вектора при переходе от одного базиса к другому. Эти фор-мулы зависят от того, как выражается переход от одного базиса к другому: в одних случаях используют системы базисных векторов в виде матриц-строк, в других – в виде матриц-столбцов:

1) матрицы-строки:
$$\begin{cases} e = (e_1, e_2, \ldots., e_n), \\ e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n), \end{cases} \tag{8}$$

2) матрицы-столбцы:
$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \ldots \\ e'_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Учитывая, что в литературе используются как запись (8), так и запись (9), рассмотрим применение обеих записей.

4.1. Преобразования с использованием записи базиса в виде матрицы-строки.

Рассмотрим примеры, в которых получим формулы преобразования координат при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ с использованием формы (8).

Так как система векторов $e'_j, e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно зависима (число векторов равно (**n**+1), т.е. больше размерности пространства), то можно получить разложение вектора e'_j в базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$:

$$e'_j = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \ldots + c_{nj}e_n, \tag{10}$$

где $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}$ - координаты вектора e'_j в базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Применяя форму (8) записи систем векторов базисов e_j и e'_j выражение (10) можно представить в виде:

$$e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

или в компактной форме: $e' = e \cdot C_1$.

Матрицу C_1 называют матрицей перехода от базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ с использованием формы (8).

4.1.1. Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому.

Рассмотрим примеры, в которых получим формулы для вычисления матрицы перехода от базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ с использованием формы (8).

☺ Пример 107. Пусть задан некоторый базис $i=(i_1,i_2,i_3,i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ и $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$, если:

$$e=(e_1,e_2,e_3,e_4)=(i_1,i_2,i_3,i_4)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=i\cdot A_1, \tag{12}$$

$$e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)=(i_1,i_2,i_3,i_4)\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=i\cdot B_1, \tag{13}$$

Решение: Представим записи (12) и (13) в компактной форме:

$$e=i\cdot A_1 \qquad \to \qquad i=e\cdot A_1^{-1},$$

$$e'=i\cdot B_1, \qquad \to \qquad e'=e\cdot A_1^{-1}\cdot B_1=e\cdot C_1,$$

где C_1 – искомая матрица перехода от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$.

Последнее (если учесть, что $A_1=E$, где E – единичная матрица, и то, что $A_1^{-1}=E$) можно записать в виде:

$$e'=e\cdot C_1=e\cdot B_1.$$

В последней записи матрица $C_1=B_1$ является искомой матрицей перехода.

Ответ: матрица перехода от базиса ***e*** к базису e' есть матрица $C_1=B_1$ (см. решение задачи).

Пример 108. Пусть задан некоторый базис $i=(i_1,i_2,i_3,i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ и $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$, если:

$$e=(e_1,e_2,e_3,e_4)=(i_1,i_2,i_3,i_4)\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=i\cdot A_1, \tag{14}$$

$$e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)=(i_1,i_2,i_3,i_4)\cdot\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=i\cdot B_1, \tag{15}$$

Решение: Представим записи (14) и (15) в компактной форме:

$$e=i\cdot A_1 \qquad \to \qquad i=e\cdot A_1^{-1},$$

$$e'=i\cdot B_1, \qquad \to \qquad e'=e\cdot A_1^{-1}\cdot B_1=e\cdot C_1,$$

где $C_1=A_1^{-1}\cdot B_1$ –матрица перехода от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$:

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Ответ: матрица перехода от базиса ***e*** к e' есть матрица $C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1$ (см. решение задачи).

4.1.2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

Пусть в линейном пространстве R в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ задан вектор ***a*** :

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n, \qquad (16)$$

или в форме

$$a = (e_1, e_2, ..., e_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = e \cdot \alpha, \qquad (17)$$

представляющей координаты вектора ***a*** в виде матрицы-столбца (по другому записать матричное выражение (17) было бы невозможно).

Этот же вектор ***a*** в линейном пространстве R в базисе $e' = (e_1', e_2', ..., e_n')$ имеет вид:

$$a = \alpha_1' e_1' + \alpha_2' e_2' + ... + \alpha_n' e_n', \qquad (18)$$

или в форме

$$a = (e_1', e_2', ..., e_n') \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = e' \cdot \alpha'. \qquad (19)$$

Учитывая (16) и (18) для вектора ***a*** получаем тождественную запись:

$$a = e' \cdot \alpha' = e \cdot C_1 \cdot \alpha' = e \cdot \alpha, \qquad (20)$$

откуда следует:

$$C_1 \cdot \alpha' = \alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha' = C_1^{-1} \cdot \alpha, \qquad (21)$$

где C_1^{-1} - обратная матрица для матрицы C_1 перехода от старого базиса к новому, или в иной форме:

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = C_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

☺ Пример 109. Пусть линейное пространство R трехмерное с базисом $e = (e_1, e_2, e_3)$ и в нем задан вектор $a = e_1 + 4e_2 - e_3$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e' = (e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \cdot C_1,$$

где C_1 – матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ к базису $e' = (e_1', e_2', e_3')$. Требуется найти координаты вектора ***a*** в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3')$.

Решение: В соответствии с формулой (17) для вычисления координат вектора ***a*** в базисе $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ требуется вычислить для матрицы перехода C_1 обратную матрицы. Ее можно найти любым их способов, рассмотренных в Гл.4, § 2:

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

Используя найденную матрицу C_1^{-1}, запишем строку координат вектора ***a*** в базисе $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix},$$

т.е. $$a = -13e'_1 + 6e'_2 - 27e'_3$$

Ответ: $a = -13e'_1 + 6e'_2 - 27e'_3$.

Пример 110. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$:

$$e = (e_1, e_2, e_3, e_4) = (i_1, i_2, i_3, i_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i \cdot A_1,$$

$$e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = (i_1, i_2, i_3, i_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = i \cdot B_1,$$

Необходимо составить формулу преобразования координат вектора $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$ при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$.

Решение: В Примере 107 была получена матрица C_1 перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$:

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

В соответствии с формулой (18) для вычисления координат вектора ***x*** необходимо вычислить обратную матрицу C_1^{-1}. Применяя один из способов вычисления обратных матриц, получаем выражение для $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 + x'_4 e'_4$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = C_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Если теперь присваивать параметрам (x_1, x_2, x_3, x_4) некоторые значения, то будем получать определенные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: . $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 111</u>. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$, если:

$$e = (e_1, e_2, e_3, e_4) = (i_1, i_2, i_3, i_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = i \cdot A_1, \qquad (24)$$

$$e' = (e_1', e_2', e_3', e_4') = (i_1, i_2, i_3, i_4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = i \cdot B_1, \qquad (25)$$

Необходимо составить формулу преобразования координат вектора $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$ при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Решение: В Примере 108 была получена матрица C_1 перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к базису $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

В соответствии с формулой (18) для вычисления координат вектора $\boldsymbol{x}$ необходимо вычислить обратную матрицу C_1^{-1}. Применяя один из способов вычисления обратных матриц, получаем выражение для $x = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' + x_4' e_4'$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = C_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Если теперь присваивать параметрам (x_1, x_2, x_3, x_4) некоторые значения, то будем получать определенные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: . $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 112. Пусть R линейное 4-мерное пространство с базисом $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и в нем задан вектор $a = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e' = (e_1', e_2', e_3', e_4') = (e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = e \cdot C_1,$$

где C_1 – матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: $a = \frac{5}{4}e_1' + \frac{1}{4}e_2' - \frac{1}{4}e_3' - \frac{1}{4}e_4'$.

Пример 113. Пусть R линейное 4-мерное пространство с базисом $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и в нем задан вектор $a = e_4$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e' = (e_1', e_2', e_3', e_4') = (e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = e \cdot C_1,$$

где C_1 – матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: $a = e_1' - e_3'$.

4.2. Преобразования с использованием записи базиса в виде матрицы-столбца.

Рассмотрим примеры, в которых получим формулы преобразования координат при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ к базису $e' = (e_1', e_2', ..., e_n')$ с использованием формы (9).

Так как система векторов $e'_j, e_1, e_2, ..., e_n$ линейно зависима (число векторов равно (***n***+1), т.е. больше размерности пространства), то можно получить разложение вектора e'_j в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$e'_j = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + ... + c_{nj}e_n, \qquad (27)$$

где $c_{1j}, c_{2j}, ..., c_{nj}$ - координаты вектора e'_j в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Применяя форму (9) записи систем векторов базисов e_j и e'_j выражение (10) можно представить в виде:

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ ... \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

или в компактной форме: $e' = C_2 \cdot e$.

Матрицу C_2 называют матрицей перехода от базиса $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ с использованием формы (9) (при переходе от записи (8) к записи (9) матрицу C_2 получают транспонированием матрицы C_1, и наоборот).

4.2.1. Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому.

Рассмотрим примеры, в которых получим формулы для вычисления матрицы перехода от базиса $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ с использованием формы (9).

☺ Пример 114. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$, если:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = A_2 \cdot i, \qquad (29)$$

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = B_2 \cdot i, \qquad (30)$$

Решение: Представим записи (29) и (30) в компактной форме:

$$e = A_2 \cdot i \qquad \to \qquad i = A_2^{-1} \cdot e,$$

$$e' = B_2 \cdot i, \qquad \to \qquad e' = B_2 A_2^{-1} \cdot e \cdot = C_2 \cdot e,$$

где $C_2 = B_2 A_2^{-1}$ –матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$:

Последнее (если учесть, что $A_2 = E$, где E – единичная матрица, и то, что $A_2^{-1} = E$) можно записать в виде:

$$e' = C_2 \cdot e = B_2 \cdot e.$$

В последней записи матрица $C_2 = B_2$ является искомой матрицей перехода.

Ответ: матрица перехода от базиса ***e*** к базису e' есть матрица $C_2 = B_2$ (см. решение задачи).

Пример 115. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$, если:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = A_2 \cdot i\,, \tag{31}$$

$$e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = B_2 \cdot i\,, \tag{32}$$

Решение: Представим записи (31) и (32) в компактной форме:

$$e = A_2 \cdot i \qquad \to \qquad i = A_2^{-1} \cdot e\,,$$
$$e' = B_2 \cdot i\,, \qquad \to \qquad e' = B_2 A_2^{-1} \cdot e \cdot = C_2 \cdot e\,,$$

где $C_2 = B_2 A_2^{-1}$ –матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$:

$$C_2 = B_2 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

Ответ: матрица перехода от базиса ***e*** к e' есть матрица $C_2 = B_2 A_2^{-1}$ (см. решение задачи).

4.2.2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

Пусть в линейном пространстве R в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ задан вектор ***a*** :

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n\,, \tag{33}$$

или в форме

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot e\,, \tag{34}$$

представляющей координаты вектора ***a*** в виде матрицы-столбца (по другому записать матричное выражение (34) было бы невозможно).

Этот же вектор ***a*** в линейном пространстве R в базисе $e' = (e_1', e_2', ..., e_n')$ имеет вид:

$$a = \alpha_1' e_1' + \alpha_2' e_2' + ... + \alpha_n' e_n'\,, \tag{35}$$

или в форме

$$a = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4') \cdot \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{pmatrix} = \alpha' \cdot e'\,, \tag{36}$$

Учитывая (34) и (36) для вектора ***a*** получаем тождественную запись:

$$a = \alpha' \cdot e' = \alpha' \cdot C_2 \cdot e \cdot = \alpha \cdot e, \qquad (37)$$

откуда следует:

$$\alpha' \cdot C_2 = \alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha' = \alpha \cdot C_2^{-1}, \qquad (38)$$

где C_2^{-1} - обратная матрица для матрицы C_2 перехода от старого базиса к новому, или в иной форме:

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4') \cdot C_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \qquad (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \cdot C_2^{-1}. \qquad (39)$$

☺ Пример 116. Пусть линейное пространство R трехмерное с базисом $e = (e_1, e_2, e_3)$ и в нем задан вектор $a = e_1 + 4e_2 - e_3$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = C_2 \cdot e,$$

где C_2 – матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ к базису $e' = (e_1', e_2', e_3')$.

Требуется найти координаты вектора ***a*** в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3')$.

Решение: В соответствии с формулой (38) для вычисления координат вектора ***a*** в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3')$ требуется вычислить для матрицы перехода C_2 обратную матрицы. Ее можно найти любым их способов, рассмотренных в Гл.4, § 2:

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix},$$

Используя найденную матрицу C_2^{-1}, запишем строку координат вектора ***a*** в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3')$:

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = (1{,}4{,}-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} = (-13{,}6{,}-27),$$

т.е.

$$a = -13e_1' + 6e_2' - 27e_3'$$

Ответ: $a = -13e_1' + 6e_2' - 27e_3'$.

Пример 117. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = A_2 \cdot i,$$

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = B_2 \cdot i\,,$$

Необходимо составить формулу преобразования координат вектора $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$ при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$.

Решение: В Примере 112 была получена матрица C_2 перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$:

$$C_2 = A_2^{-1} \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

В соответствии с формулой (38) для вычисления координат вектора $\boldsymbol{x}$ необходимо вычислить обратную матрицу C_2^{-1}. Применяя один из способов вычисления обратных матриц, получаем выражение для $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 + x'_4 e'_4$:

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot C_2^{-1} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь присваивать параметрам (x_1, x_2, x_3, x_4) некоторые значения, то будем получать определенные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$.

Ответ: $.(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

. <u>Пример 118</u>. Пусть задан некоторый базис $i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$: Необходимо построить матрицу переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$, если:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = A_2 \cdot i\,,$$

$$e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = B_2 \cdot i,$$

Необходимо составить формулу преобразования координат вектора $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$ при переходе от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Решение: В Примере 113 была получена матрица C_2 перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к базису $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

$$C_2 = B_1 \cdot A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

В соответствии с формулой (38) для вычисления координат вектора $\boldsymbol{x}$ необходимо вычислить обратную матрицу C_2^{-1}. Применяя один из способов вычисления обратных матриц, получаем выражение для $x = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' + x_4' e_4'$:

$$(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot C_2^{-1} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь присваивать параметрам (x_1, x_2, x_3, x_4) некоторые значения, то будем получать определенные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: . $(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

☻ ***Решите примеры***:

Пример 119. Пусть R линейное 4-мерное пространство с базисом $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и в нем задан вектор $a = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e' = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ e_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = C_2 \cdot e,$$

где C_2 – матрица перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ к $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$.

Ответ: $a=\frac{5}{4}e'_1+\frac{1}{4}e'_2-\frac{1}{4}e'_3-\frac{1}{4}e'_4$.

Пример 120. Пусть R линейное 4-мерное пространство с базисом $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ и в нем задан вектор $a=e_4$. В рассматриваемом пространстве задан еще один базис:

$$e'=\begin{pmatrix}e'_1\\e'_2\\e'_3\\e'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&3&1\\1&1&0&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\e_4\end{pmatrix}=C_2\cdot e,$$

где C_2 – матрица перехода от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$.

Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$.

Ответ: $a=e'_1-e'_3$.

Вопросы для самопроверки:

1. Может ли матрица C перехода от базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ к $e'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ быть прямоугольной?
2. Если система векторов базиса $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ представляется в виде матрицы-строки, то строка координат вектора $\boldsymbol{a}$ представляется в виде столбца, и наоборот. Почему?

§ 5 Подпространства линейного пространства

Нередко возникает необходимость разбиения линейного векторного пространства на части, называемые подпространствами. В рамках определенного подпространства решение частной задачи может оказаться более рациональным. Ниже рассматриваются некоторые из вопросов, связанных с определением и использованием подпространств.

5.1. Определение подпространства и примеры.

Определение: Подпространством R' пространства R называется совокупность элементов из R таких, что эти элементы сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в R операций сложения и умножения на число:

$$x\in R', y\in R' \quad\longrightarrow\quad \begin{cases}x+y\in R',\\ \lambda x\in R'.\end{cases}$$

☺ *Пример 121*. Приведем некоторые примеры подпространств:

a) Нулевое подпространство, т.е. подпространство, состоящее из единственного элемента – нуля;
b) Все пространство R;
c) Совокупность векторов $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию: $$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n=0;$$
d) В трехмерном пространстве: совокупность векторов, проходящих через начало координат;
e) В трехмерном пространстве: совокупность векторов, принадлежащих плоскости, проходящей через начало координат.

Очевидно, всякое подпространство R' пространства R *содержит нулевой элемент пространства* R.

Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства: в подпространстве не может быть больше линейно независимых векторов, чем во всем пространстве.

Самым простым подпространством является одномерное. Базис этого подпространства состоит из одного вектора e_1. Это значит, что одномерное подпространство состоит из векторов вида αe_1, где β – произвольное число.

Аналогично, векторы вида $\alpha e_1 + \beta e_2$, где e_1 и e_2 - фиксированные линейно независимые векторы, а α и β - произвольные числа, образуют двумерное подпространство.

☺ <u>*Пример 122*</u>. Доказать, что в ***n***-мерном пространстве *R*, где вектор есть строка ***n*** чисел, все ***n***-мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой, образуют подпространство R'. Найти базис и размерность этого подпространства.

Решение: Пусть векторы *x* и *y* заданного подпространства записанs в виде: $x = (x_1, a, x_3, a, x_5 ...)$, $y = (y_1, b, y_3, b, y_5 ...)$. Тогда, в соответствии с определением суммы векторов и умножения вектора на число в пространстве R имеем:

$$x + y = (x_1 + y_1, a + b, x_2 + y_2, a + b, x_3 + y_3, ...),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda a, \lambda x_3, \lambda a, \lambda x_5 ...),$$

из чего следует, что $x \in R', y \in R' \;\longrightarrow\; \begin{cases} x + y \in R', \\ \lambda x \in R'. \end{cases}$

Учитывая определение вектора подпространства, а также свойства операций суммы векторов и умножения вектора на число в пространстве R запишем базис подпространства R':

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots),$$
$$e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots),$$
$$e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$e_0 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots),$$

причем, если размерность ***n*** пространства *R* – четное число, то вектор e_0 закончится числом 1, а вектор e_{n-1} -числом 0, и наоборот. В таком случае, нетрудно подсчитать, размерность подпространства R' определяется числом: $r = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, где $f = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ - функция выделения целой части числа.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 123*</u>. Проверить являются ли множества векторов подпространствами:

1. Множество ***n***-мерных векторов $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, у которых координаты с четными номерами равны нулю;
2. Множество ***n***-мерных векторов $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, у которых $x_1 - x_2$;
3. Множество квадратных матриц, у которых элементами главной диагонали являются нули:
4. Множество всех многочленов f(t), удовлетворяющих условию f(0)=0, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочленов на число.

5.2. Сумма и пересечение подпространств.

Пусть заданы два подпространства R_1 и R_2 ***n***-мерного пространства *R*.

<u>Определение</u>: Если каждый вектор **x** пространства R можно, и притом единственным образом, представить как сумму двух векторов:

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$, то говорят, что пространство R разложено в прямую сумму подпространств R_1 и R_2. Это записывают так:

$$R = R_1 + R_2,$$

<u>Теорема</u>. *Для того, чтобы пространствоR разлагалось в прямую сумму подпространств R_1 и R_2,достаточно, чтобы:*

1. Подпространства R_1 и R_2 имели только один общий вектор $x = 0$ (нулевой вектор).

2. Сума размерностей этих подпространств была равна размерности пространства R.

Пусть имеем два произвольных подпространства R_1 и R_2 линейного пространства R. Подпространство *<u>пересечения</u>* R_1 и R_2 - это совокупность векторов, принадлежащих обоим подпространствам R_1 и R_2:

$$R_0 = R_1 \cap R_2$$

☺ *<u>Пример 124</u>*. Пусть R_1 и R_2 – два двумерных подпространства трехмерного пространства (две плоскости, проходящие через начало координат). Тогда их пересечение $R_0 = R_1 \cap R_2$ есть одномерное подпространство (прямая, по которой эти плоскости пересекаются).

По двум подпространствам R_1 и R_2 можно построить еще одно подпространство, которое называют *<u>суммой</u>*: векторами этого подпространства являются всевозможные суммы вида:

$$x = x_1 + x_2, \qquad (*)$$

где $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$, его обозначают: $\tilde{R} = R_1 + R_2$ (в отличие от прямой суммы двух подпространств, запись (*) элемента из R может быть неоднозначной. Легко проверить, что построенные элементы (*) образуют подпространство.

<u>Теорема</u>. *Сумма размерностей R_1 и R_2, равна размерности их суммы плюс размерность пересечения.*

☺ *<u>Пример 125</u>*. Найдем базис пересечения подпространств $R_0 = R_1 \cap R_2$, если R_1 натянут на векторы a_1 и a_2, а R_2 – на векторы b_1 и b_2:

$$a_1 = (1,2,1,0), \qquad a_2 = (-1,1,1,1),$$
$$b_1 = (2,-1,0,1), \qquad b_2 = (1,-1,3,7).$$

Решение: Нетрудно заметить, что векторы a_1 и a_2, b_1 и b_2: - линейно независимы. Согласно вышеприведенной теореме запишем размерность пересечения $R_0 = R_1 \cap R_2$ в виде d = k+r-s, где k = 2 – число независимых векторов, порождающих подпространство R_1; r = 2 – число независимых векторов, порождающих подпространство R_2; s – число независимых векторов, порождающих подпространство $R_1 \cup R_2$ (его предстоим вычислить).

Применяя один из способов вычисления ранга системы векторов, получаем: s = 3. В таком случае размерность пересечения d = 2 + 2 - 3 = 1/

Найдем базис из условия:

$$c = x_1 a_1 + x_2 a_2 = x_3 b_1 + x_4 b_2$$

или

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 = 2x_3 + 1x_4, \\ 2x_1 + 1x_2 = -1x_3 - 1x_4, \\ 1x_1 + 1x_2 = 0x_3 + 3x_4, \\ 0x_1 + 1x_2 = 1x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Решая эту систему одним из способов, изложенных в Гл.5, получим: $x_1 = -s$; $x_2 = 4s$; $x_3 = -3s$; $x_4 = s$, где s – произвольная постоянная. Принимая $s = -1$, получим:

$$c = a_1 - 4a_2 = 3b_1 - b_2 = (5, -2, -3, -4).$$

Ответ: базис пересечения подпространств: $c = a_1 - 4a_2 = 3b_1 - b_2 = (5, -2, -3, -4)$.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 126. Найдем базис пересечения подпространств $R_0 = R_1 \cap R_2$, если R_1 натянут на векторы a_1 и a_2, а R_2 – на векторы b_1 и b_2:

$$a_1 = (1,2,0,3), \quad a_2 = (1,1,-1,3),$$
$$b_1 = (1,0,-2,3), \quad b_2 = (-1,3,1,1).$$

Ответ: базис пересечения подпространств: $c = -4a_1 + 13a_2 = 8b_1 + 3b_2 = (5, 9, -13, 27)$.

Пример 127. Найдем базис пересечения подпространств $R_0 = R_1 \cap R_2$, если R_1 натянут на векторы a_1 и a_2, а R_2 – на векторы b_1 и b_2:

$$a_1 = (2,3,-2,2), \quad a_2 = (1,1,-1,1),$$
$$b_1 = (1,0,2,1), \quad b_2 = (2,3,1,2).$$

Ответ: базис пересечения подпространств: $c = 2a_1 - 3a_2 = -b_1 + b_2 = (1, 3, -1, 1)$.

§ 6 Линейные преобразования (операторы)

Пусть дано n – мерное действительное линейное пространство V_n. Рассмотрим *преобразование* этого пространства (отображение), переводящее *каждый* вектор a пространства V_n в некоторый вектор a' этого же пространства. Вектор a' называется *образом* вектора a:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & a' \\ \textit{прообраз} & & \textit{образ} \\ V_n & & V_n \end{array}$$

Если обозначить преобразование через φ, то условимся записывать:

$$a' = \varphi a$$

Мы будем рассматривать только линейные преобразования.

6.1. Определение линейного преобразования пространства V_n.

Определение: Преобразование φ линейного пространства V_n называется *линейным* преобразованием этого пространства, если:

1) $\boldsymbol{\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b}$, *причем* $a, b \in V_n$
2) $\boldsymbol{\varphi(\mu a) = \mu(\varphi a)}$, *где* $\boldsymbol{\mu}$ - *любое число.*

Из определения следует: линейное преобразование переводит любую линейную комбинацию данных векторов в линейную комбинацию (с теми же коэффициентами) образов этих векторов:

$$\varphi(k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ra_r) = k_1(\varphi a_1) + k_2(\varphi a_2) + \ldots + k_r(\varphi a_r).$$

6.2. Свойства линейного преобразования.

Выделим основные свойства линейного преобразования:

1) при любом линейном преобразовании φ линейного пространства V_n нулевой вектор $\boldsymbol{0}$ остается неподвижен: $\varphi 0 = 0$;
2) образом вектора, *противоположного* для данного вектора $\boldsymbol{a}$, служит вектор, *противоположный* для образа вектора $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{\varphi(-a) = -(\varphi a)}$;
3) линейное преобразование **ε**, оставляющее всякий вектор на месте: $\boldsymbol{\varepsilon a = a}$ – называют *тождественным*;

4) линейное преобразование **ω**, отображающее всякий вектор ***a*** в нуль: **ω*a* = 0** – называют <u>*нулевым*</u>;

Пусть в пространстве V_n выделен базис $e=(e_1,e_2,...,e_n)$. Всякий вектор ***a*** этого пространства однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов базиса. В соответствии с определением линейного преобразования образ вектора ***a*** с теми же коэффициентами выражается через образы векторов базиса. Это значит: всякое линейное преобразование **φ** пространства V_n однозначно определяется заданием образов $\varphi e=(\varphi e_1,\varphi e_2,...,\varphi e_n)$ фиксирован-ного базиса $e=(e_1,e_2,...,e_n)$. Так как всякий вектор **φ*e**_i_* = ***c**_i_* обладает определенной записью:

$$c_i=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+...+a_{in}e_n,\ \ i=1,2,...,n,$$

то линейное преобразование **φ** может быть однозначно определено квадратной матрицей. Это значит, что *между всеми линейными преобразованиями пространства V_n и всеми квадратными матрицами порядка* ***n*** *имеем взаимно однозначное соответствие.*

$$\varphi e = Ae,$$

причем, как увидим далее, при смене базиса матрица линейного преобразования также определенным образом изменится.

6.3. Операции над линейными преобразованиями.

Пусть в пространстве V_n заданы линейные преобразования **φ** и ψ, причем в некотором базисе (произвольном) матрицей преобразования **φ** является матрица ***A***, а преобразо-вания ψ - матрица ***B***. Тогда для произвольного вектора ***a*** пространства V_n могут быть определены:

<u>*Сумма*</u> линейных преобразований **φ** и ψ : такое <u>*линейное*</u> преобразование, что:

$$(\varphi+\psi)a = \varphi a+\psi a=Aa+Ba = (A+B)a. \qquad (40)$$

<u>*Произведение*</u> линейных преобразований **φ** и ψ: такое <u>*линейное*</u> преобразование, что:

$$(\varphi\psi)a = \varphi(\psi a) = A\cdot Ba. \qquad (41)$$

<u>*Произведение*</u> линейного преобразования **φ** на число λ: такое <u>*линейное*</u> преобразование, что:

$$(\lambda\varphi)a = \lambda(\varphi a) = \lambda\cdot Aa. \qquad (42)$$

6.4. Нахождение координат вектора φ*a* для данного вектора *a*.

Пусть задан вектор $a=(a_1,a_2,...,a_n)e$, где **e** – матрица-столбец, и линейное преобразование определяется квадратной матрицей ***A***. Тогда образ вектора ***a*** может быть записан в виде:

$$\varphi a=(a_1,a_2,...,a_n)Ae. \qquad (43)$$

Это значит, что строка координат **φ*a*** равна строке координат вектора ***a***, умноженной справа на матрицу ***A*** линейного преобразования **φ** в базисе $e=(e_1,e_2,...,e_n)$.

☺ <u>*Пример 128*</u>. Пусть в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$ трехмерного линейного пространства задан вектор $a=5e_1+e_2-2e_n$ и линейное преобразование **φ** задается матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора ***a*** вектор **φ*a***.

Решение: Воспользуемся формулой (43):

$$(5,1,-2)\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}=(-9,16,0)\text{ , т.е.}\qquad \varphi a=(-9e_1+16e_2).$$

Ответ: $\varphi a=(-9e_1+16e_2)$.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 129*</u>. Пусть в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$ трехмерного линейного пространства задан вектор $a=2e_1-3e_2+e_n$ и линейное преобразование **φ** задается матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора ***a*** вектор **φ*a***.

Ответ: $\varphi a=(-5e_1-8e_2-10e_3)$.

<u>*Пример 130*</u>. Пусть в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$ трехмерного линейного пространства задан вектор $a=e_1-4e_2+3e_n$ и линейное преобразование **φ** задается матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора ***a*** вектор **φ*a***.

Ответ: $\varphi a=(-6e_1-21e_2+2e_3)$.

§ 7. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Как показано в § 4, выражения, определяющие действия с матрицами, зависят от формы записи систем векторов базиса. Рассмотрим случаи использования форм записи систем векторов базиса в виде (8) и (9) в задаче «Преобразование матрицы линейного оператора …».

7.1. Преобразования с использованием записи базиса в виде матрицы-строки.

Применяя форму (8) записи систем векторов базисов ***e*** и e' можно записать:

$$e'=(e_1',e_2',...,e_n')=(e_1,e_2,...,e_n)\cdot\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (44)$$

или в компактной форме: $$e'=e\cdot C_1; \qquad (45)$$

пусть матрицы линейного преобразования **φ** определяются в базиса ***e*** выражением:

$$\varphi e=(e_1,e_2,...,e_n)\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}=eA_1, \qquad (46)$$

и в базисе e' выражением:

$$\varphi e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = e'B_1, \tag{47}$$

Несложно доказать, что: $C_1 B_1 = A_1 C_1$,
откуда получаем:

$$B_1 = C_1^{-1} A_1 C_1 \quad \text{и} \quad A_1 = C_1 B_1 C_1^{-1}. \tag{48}$$

Замечание: Матрицы ***A*** и ***B*** называют ***подобными*** для формы (8) записи систем векторов базисов ***e*** и e', если они связаны равенством:

$$CB = AC,$$

где матрица *C* – некоторая невырожденная матрица, которую обычно называют _трансформирующей_ матрицей.

7.2. Преобразования с использованием записи базиса в виде матрицы-столбца.

Применяя форму (9) записи систем векторов базисов ***e*** и e' можно записать:

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ ... \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & ... & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & ... & c_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{1n} & c_{2n} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix}, \tag{49}$$

или в компактной форме: $e' = C_2 e$; (50)

пусть матрицы линейного преобразования **φ** определяются в базиса ***e*** выражением:

$$\varphi e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix} = A_2 e, \tag{51}$$

и в базисе e' выражением:

$$\varphi e' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ ... \\ e'_n \end{pmatrix} = B_2 e', \tag{52}$$

Несложно доказать, что: $B_2 C_2 = C_2 A_2$,
откуда получаем:

$$B_2 = C_2 A_2 C_2^{-1} \quad \text{и} \quad A_2 = C_2^{-1} B_2 C_2 \tag{53}$$

Замечания: Для одних и тех же систем векторов $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$:

- матрицы C_2 и C_1 перехода от базиса ***e*** к базису e' превращаются одна в другую транспонированием;
- матрицы линейных преобразований A_2 и A_1 (аналогично B_2 и B_1) в базисе ***e*** (также для e') превращаются одна в другую транспонированием.

Замечание: Матрицы ***A*** и ***B*** называют ***подобными*** для формы (9) записи систем векторов базисов ***e*** и e', если они связаны равенством:

$$BC = CA,$$

где матрица C – некоторая невырожденная матрица, которую обычно называют *трансформирующей* матрицей.

Ниже приведены примеры применения полученных формул для разных случаев записи систем векторов базисов $\boldsymbol{e}$ и e'.

☺ *Пример 131*. В базисе : $e=(e_1,e_2,...,e_n)$ для формы записи (8) системы векторов базиса задана матрица линейного преобразования **φ**: $A_1=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$.

Найдем матрицу этого преобразования в базисе: $e_1'=e_1+2e_2$, $e_2'=2e_1+3e_2$

Решение: Как было показано, форма записи решения зависит от вида записи системы векторов базисов $\boldsymbol{e}$ и e'.

Случай 1. По условию имеем (см. (44) и (45)): $e'=e\cdot C_1=(e_1,e_2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.Применим полученную в п. 7.1 формулу (48):

$$B_1=C_1^{-1}A_1C_1=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Случай 2. По условию имеем (см. (49) и (50)): $e'=C_2e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$.Применим полученную в п. 7.1 формулу (53):

$$B_2=C_2A_2C_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: . $B_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=B_2$

Пример 132. Найдем линейное преобразование, переводящее векторы $a_1=(2,0,3)$, $a_2=(4,1,5)$, $a_3=(3,1,2)$ соответственно в векторы: $b_1=(1,2,-1)$, $b_2=(4,5,-2)$, $b_3=(1,-1,1)$

Решение: Задача может быть записана в форме, используемой в Примере 106:

Пусть задан некоторый базис $i=(i_1,i_2,i_3)$, и через его векторы определены еще два базиса: $e=(e_1,e_2,e_3)$ и $e'=(e_1',e_2',e_3')$: Необходимо построить матрицу перехода от базиса $e=(e_1,e_2,e_3)$ к $e'=(e_1',e_2',e_3')$, если:

$$e=(e_1,e_2,e_3)=(i_1,i_2,i_3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}=i\cdot A_1,$$

$$e'=(e_1',e_2',e_3')=(i_1,i_2,i_3)\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}=i\cdot B_1.$$

Вычисляя обратную матрицу одним из способов, получаем матрицу линейного преобразования $C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1$, переводящего систему векторов $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ в систему векторов $e' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$:

$$C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -21 & 9 \\ 5 & 9 & -6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

Ответ: матрица линейного преобразования $C_1 = A_1^{-1} \cdot B_1$ (см. решение задачи).

<u>*Пример 133*</u>. Линейное преобразование A_1 в базисе $a_1 = (1.2)$, $a_2 = (-1.1)$ имеет матрицу преобразования:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу этого преобразования в базисе $b_1 = (1.-2)$, $b_2 = (3.-1)$.

Решение: Учитывая приведенные примеры, данную задачу можно решать по схеме:

1) решить задачу Пр.130 и найти матрицу C_1 перехода от базиса $a = (a_1, a_2)$ к базису $b = (b_1, b_2)$;
2) решить задачу Пр.129 и найти матрицу $B_1 = C_1^{-1} A_1 C_1$ линейного преобразования в базисе $b = (b_1, b_2)$.

Ответ: матрица линейного преобразования $B_1 = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 134*</u>. Линейное преобразование A_1 в базисе $a_1 = (1.2)$, $a_2 = (-1.1)$ имеет матрицу преобразования:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу этого преобразования в базисе $b_1 = (1.-2)$, $b_2 = (3.-1)$.

Ответ: матрица линейного преобразования $B_1 = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

§ 8. Характеристическая матрица, характеристические корни, собственные значения и собственные векторы.

8.1. Характеристическая матрица и характеристический многочлен.

<u>Определение 1</u>: Матрица $(A - \lambda E)$ называется характеристической матрицей матрицы A и записывается в виде:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \qquad (54)$$

где A – квадратная матрица порядка $\boldsymbol{n}$ с действительными элементами и число λ– некоторое неизвестное число.

<u>Определение 2</u>: Определитель $|A-\lambda E|$ - многочлен от λ степени ***n*** называют характеристическим, а его корни – характеристическими корнями (могут быть как действительными, так и комплексными).

Известно, что *<u>подобные</u>* матрицы обладают *<u>одинаковыми</u>* характеристическими многочленами, следовательно, *<u>одинаковыми</u>* характеристическими корнями. Поэтому эти корни называют характеристическими корнями линейного преобразования φ.

8.2. Собственные значения и собственные векторы преобразования.

Пусть в пространстве V_n задано линейное преобразование **φ**. Если вектор ***b*** отличен от нуля и:

$$\varphi \boldsymbol{b} = \lambda_0 \boldsymbol{b}.$$

где λ_0- действительное число. Тогда вектор ***b*** называют *<u>собственным вектором</u>* преобразования **φ**, а число λ_0 - *<u>собственным значением</u>* этого преобразования.

<u>Теорема</u>: Действительные характеристические корни линейного преобразования **φ**, если они существуют, и только они, служат собственными значениями этого преобразования.

<u>Замечание</u>: В комплексном линейном пространстве *<u>всякое</u>* линейное преобразование обладает собственными векторами (их ***n***).

Для нахождения собственных векторов удобно пользоваться формой записи векторов матрица-столбец. Тогда, исходя из записи линейного преобразования:

$$\varphi b = Ab,$$

можно записать $\boldsymbol{Ab} = \lambda_0 \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{Ab} - \lambda_0 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Последнее означает, что совокупность ненулевых решений системы линейных уравнений:

$$(A-\lambda_0 E)\cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_0 & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \qquad (55)$$

совпадают с совокупностью собственных векторов линейного преобразования **φ**.

☺ *<u>Пример 135</u>*. Найти собственные векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Решение задачи может проводиться по следующему алгоритму:

1) находим корни характеристического многочлена:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda+1)\cdot(\lambda-6),$$

т.е. корни многочлена **φ(λ)**: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

2) находим собственные векторы линейного преобразования, используя общую запись системы уравнений (55).

а) собственный вектор b_1 для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_2 = -1$, следует: $b_1 = (1, -1)$.

б) собственный вектор b_2 для собственного числа $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 - -2x_2 = 0. \end{cases} \quad \to \qquad -5x_1 + 2x_2 = 0.$$

Пусть $x_1 = 2$, тогда $x_2 = 5$, следует: $b_2 = (2, 5)$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$; собственные векторы линейного преобразования: для $\lambda_1 = -1$ имеет значение $b_1 = (1, -1)$, для $\lambda_2 = 6$ значение $b_2 = (2, 5)$.

Пример 136. Найти собственные векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: Решение задачи может проводиться по следующему алгоритму:

1) находим корни характеристического многочлена:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = (\lambda + 1)^3,$$

т.е. корни многочлена **φ(λ)**: $\lambda_1 = -1$, кратности 3.

2) находим собственные векторы линейного преобразования, используя общую запись системы уравнений (55).

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = x_3, \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = c$, тогда $x_1 = 2c$, $x_2 = -c$, следует: $b = c\cdot(2, -1, 1)$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; собственные векторы линейного преобразования имеют вид: $b = c\cdot(2, -1, 1)$, где $c \neq 0$.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 137. Найти собственные значения и векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; собственные векторы линейного преобразования имеют вид: $b = c\cdot(1, 1, -1)$, где $c \neq 0$.

Ответ: собственные числа: векторы преобразования: $b = c\cdot(1, 1, -1)$, где $c \neq 0$.

Пример 138. Найти собственные значения и векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$; собственные векторы линейного преобразования: для $\lambda_1 = 3$ имеет значение $b_1 = c\cdot(1, 1, 1)$, для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ значение $b = c\cdot (1,2,3)$, причем $c \neq 0$.

§ 9. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду.

Линейное преобразование **φ** тогда и только тогда задается в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ диагональной матрицей, если все векторы этого базиса являются собственными векторами преобразования **φ**.

Это следует из равенств:

$$\varphi e_i = \lambda_i e_i \text{ , } i = 1, 2, \dots , n$$

или

$$e' = \begin{pmatrix} \varphi e_1 \\ \varphi e_2 \\ \dots \\ \varphi e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = Ae, \qquad (56)$$

Известно, что собственные векторы $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ линейного преобразования **φ**, относящиеся к различным собственным векторам, составляют линейно независимую систему.

<u>Следствие</u>: Всякая матрица, *<u>все</u>* характеристические корни которой действительные и различны, подобна диагональной матрице, т.е. *<u>приводится к диагональной форме</u>*. Это значит, что в базисе $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$, составленном из собственных векторов, матрица линейного преобразования имеет диагональную форму.

☺ *<u>Пример 139</u>*. Найти собственные векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Построить базис, составленный из собственных векторов и матрицу линейного преобразования в этом базисе.

Решение: Решение задачи может проводиться по следующему алгоритму:

1) находим корни характеристического многочлена:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda + 1)\cdot(\lambda - 6),$$

т.е. корни многочлена **φ(λ)**: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

2) находим собственные векторы линейного преобразования, используя общую запись системы уравнений (55).

а) собственный вектор b_1 для собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_2 = -1$, следует: $b_1 = (1, -1)$.

б) собственный вектор b_2 для собственного числа $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 - -2x_2 = 0. \end{cases} \quad \rightarrow \qquad -5x_1 + 2x_2 = 0.$$

Пусть $x_1 = 2$, тогда $x_2 = 5$, следует: $b_2 = (2, 5)$.

3) строим базис из собственных найденных векторов $b = (b_1, b_2)$.

4) составляем диагональную матрицу линейного заданного преобразования в базисе $b = (b_1, b_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$; собственные векторы линейного преобразования: для $\lambda_1 = -1$ имеет значение $b_1 = (1, -1)$, для $\lambda_2 = 6$ значение $b_2 = (2, 5)$; диагональная форма матрицы линейного преобразования в базисе $b = (b_1, b_2)$ имеет простейший вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

☻ ***Решите примеры***:

<u>*Пример 140*</u>. Найти собственные векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Построить базис, составленный из собственных векторов и матрицу линейного преобразования в этом базисе.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$;

собственные векторы: $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, -3)$,

диагональная матрица: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

. <u>*Пример 141*</u>. Найти собственные векторы линейного преобразования **φ**, заданного в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Построить базис, составленный из собственных векторов и матрицу линейного преобразования в этом базисе.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$;

собственные векторы: $b_1 = (1, 1, 0, 0)$, $b_2 = (1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 0, 1)$, $b_3 = (1,-1,-1,-1)$,

диагональная матрица: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

***Вопросы для самопроверки*:**

1. Что такое линейное пространство?
2. Может ли линейное пространство состоять из а) двух элементов; б) одного элемента; в) 100 элементов?
3. Образует ли линейное пространство множество всех действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения на число?
4. Могут ли в линейном пространстве существовать два нулевых элемента?
5. Что понимают под операцией вычитания в линейном пространстве?
6. Справедливо ли равенство 0 = -0?
7. Какие элементы линейного пространства называют линейно независимыми?
8. Можно ли утверждать, что элементы e_1, e_2, … e_n линейного пространства R линейно независимы, если данный элемент x этого пространства единственным образом выражается в виде линейной комбинации указанных n элементов?
9. Пусть в линейном пространстве R даны n линейно независимых элементов e_1, e_2, … e_n . Что еще надо потребовать, чтобы указанная совокупность элементов была базисом в данном линейном пространстве?
10. С какой целью вводится базис в линейном пространстве?
11. Пусть дано множество всех тех элементов линейного пространства, каждая компонента которых равна или 0 или 1. Сколько различных базисом содержит это множество?
12. Сколько базисов имеется в каждом линейном пространстве?
13. Пусть в линейном пространстве R даны n линейно независимых элементов e_1, e_2, … e_n . Что еще надо потребовать, чтобы размерность этого линейного пространства была равна n?
14. Как связаны между собой размерность линейного пространства и число элементов в базисе этого линейного пространства? Является ли это соответствие взаимным?
15. Какова формула перехода от одного базиса к другому в линейном пространстве?
16. Что такое подпространство линейного пространства?
17. В определении подпространства M линейного пространства R речь идет о корректности линейных операций на множестве M. Что понимают под этими операциями?
18. Какое соответствие между элементами двух линейных пространств называют изоморфизмом?
19. Какие линейные пространства называют изоморфными?
20. Что называется линейным оператором?
21. Что такое линейное преобразование пространства?
22. Как определяется матрица линейного оператора?
23. Как изменяется матрица линейного преобразования (оператора) при переходе от одного базиса к другому?
24. Что такое произведение линейных преобразований?
25. Чему равна матрица произведения линейных преобразований?
26. Что такое характеристическая матрица линейного преобразования?
27. Что такое характеристический многочлен линейного преобразования?
28. Что называется собственным вектором линейного преобразования, действующего в линейном пространстве R над числовым полем K?
29. Что такое собственное значение линейного преобразования, действующего в линейном пространстве R над числовым полем K?
30. Каким может быть максимальное число собственных значений у линейного оператора, действующего в линейном пространстве размерности n?
31. Зависят ли собственные значения линейного преобразования от выбора базиса в линейном пространстве, в котором действует это преобразование?
32. Всякий ли линейный оператор, действующий в линейном пространстве R над числовым полем K, имеет хотя бы одно собственное значение?
33. Как найти собственные значения линейного оператора?
34. Как найти собственные векторы линейного преобразования?