ГЛАВА 7. Евклидовы и унитарные пространства

§ 1. Определения и примеры евклидовых и унитарных пространств

Евклидовым пространством называется линейное пространство E над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел такое, что для любых двух векторов $\vec{x},\vec{y}\in E$ определено действительное число $(\vec{x},\vec{y})$, называемое ***скалярным произведением*** и удовлетворяющее для любых векторов $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in E$ и числа $\lambda\in\mathbb{R}$ следующим условиям (эти условия называются *аксиомами скалярного произведения*):

1. $(\vec{x},\vec{x})>0;\ (\vec{x},\vec{x})=0\Leftrightarrow\vec{x}=0$ (*невырожденность*);
2. $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$ (*дистрибутивность*);
3. $(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$;
4. $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x})$ (*коммутативность*).

Свойства 2 и 3, взятые вместе, называют *линейностью по первому аргументу*. Используя коммутативность скалярного произведения (свойство 4), можно доказать *линейность по второму аргументу*: $(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z}),\ (\vec{x},\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$.

Унитарным пространством называется линейное пространство U над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, в котором для любых двух векторов $\vec{x},\vec{y}\in U$ определено скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{C}$, называемое ***скалярным произведением*** и удовлетворяющее для любых $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in U$ и $\lambda\in\mathbb{C}$ аксиомам:

1. $(\vec{x},\vec{x})>0;\ (\vec{x},\vec{x})=0\Leftrightarrow\vec{x}=0$;
2. $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$;
3. $(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$;

$4'$. $(\vec{y},\vec{x})=\overline{(\vec{x},\vec{y})}$

(здесь черта означает взятие *сопряжённого* числа: $\overline{a+bi}=a-bi$).
Из определения сразу следует, что в унитарном пространстве имеет место *линейность скалярного произведения по первому аргументу*. Однако, для второго аргумента мы имеем: $(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z})$, но $(\vec{x},\lambda\vec{y})=\overline{\lambda}(\vec{x},\vec{y})$.

Задача 1. Доказать, что $(\vec{0},\vec{a})=0$ для любого вектора $\vec{a}$ евклидова или унитарного пространства.

Доказательство. Для любого вектора $\vec{b}$ мы имеем: $(\vec{b},\vec{a})=(\vec{b}+\vec{0},\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})+(\vec{0},\vec{a})$, откуда $(\vec{0},\vec{a})=0$.

Примеры евклидовых и унитарных пространств.

1. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ всех строк $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где $x_i\in\mathbb{R}$, с покомпонентным сложением:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(x_1',x_2',\ldots,x_n')=(x_1+x_1',x_2+x_2',\ldots,x_n+x_n')$$

и покомпонентным умножением на действительные числа:

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

становится евклидовым пространством, если скалярное произведение определить по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$

2. Пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций будет являться евклидовым пространством, если скалярное произведение определить по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \tag{2}$$

3. Множество l_2 всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, является евклидовым пространством со скалярным произведением $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n).$

4. Множество $\mathbb{C}^n$ всех строк $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, комплексных чисел с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на комплексные числа является унитарным пространством со скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \ldots + x_n \overline{y}_n. \tag{3}$$

5. Множество комплексных функций действительного аргумента, непрерывных на отрезке $[a,b]$, является унитарным пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \tag{4}$$

Замечания. 1. Формула (1) – далеко не единственная формула, задающая на множестве $\mathbb{R}^n$ евклидово пространство. Например, формулы $(x, y)_1 = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 5x_3 y_3$ и $(x, y)_2 = 3x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 + x_3 y_3$ удовлетворяют аксиомам скалярного произведения, а значит, превращают $\mathbb{R}^3$ евклидово пространство. Аналогично этому можно скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$ определять не только по формуле (3).

2. Множество *интегрируемых* на отрезке $[a,b]$ действительных функций (не обязательно непрерывных) со “скалярным произведением” (2) не является евклидовым пространством, так как не выполнена аксиома 1 скалярного произведения. Действительно, нетрудно привести пример разрывной функции $f(x)$, не Равной тождественно нулю, для которой $(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx = 0.$ Однако, если отождествить функции f

и g, удовлетворяющие равенству $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=0$ (т.е. считать их за одну функцию), то все аксиомы скалярного произведения будут выполнены, и мы получим более широкое, чем $C[a,b]$, евклидово пространство функций. Одно из таких расширений обозначается $L_2[a,b]$.

3. Наряду с формулой (2), на множестве $C[a,b]$ часто рассматривается скалярное произведение более общего вида:

$$(f,g)=\int_a^b \lambda(x)f(x)g(x)dx,$$

где $\lambda(x)$ – положительная непрерывная функция.

§ 2. Неравенство Шварца. Геометрия евклидовых пространств

В любом евклидовом пространстве E для векторов $x,y\in E$ справедливо ***неравенство Шварца***:

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y). \tag{5}$$

В конкретных евклидовых пространствах это неравенство имеет свой специальный вид. Например, в пространстве $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением, определённым по формуле (1), неравенство (5) – это *неравентво Коши – Буняковского*:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2\le\sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n y_i^2, \tag{6}$$

а в пространстве функций со скалярным произведением (2) неравенство (5) превращается в *интегральное неравенство*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\cdot\int_a^b g^2(x). \tag{7}$$

В унитарном пространстве неравенство Шварца имеет вид

$$|(x,y)|^2\le(x,x)(y,y). \tag{8}$$

Геометрия евклидовых пространств

Скалярное произведение позволяет ввести в евклидовом пространстве понятия длины вектора и угла между векторами. А именно, ***длина вектора*** x вычисляется по формуле

$$|x|=\sqrt{(x,x)}. \tag{9}$$

Часто длину вектора называют *нормой* и обозначают $\|x\|$. Далее, из неравенства Шварца (5) следует, что для любых ненулевых векторов x,y выполняется неравенство $-1\le\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\le 1.$ Поэтому можно ввести понятие угла между векторами, этот угол φ мы будем вычислять по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}, \tag{10}$$

которая совпадает с формулой школьного курса геометрии в случае обычных векторов плоскости или трёхмерного пространства.

Длина вектора, определённая по формуле (9), обладает обычными свойствами длины: $|0|=0$, $|x+y|\le|x|+|y|$, $|\lambda x|=|\lambda|\cdot|x|$.

Задача 2. *Найти длины сторон и величины углов треугольника ABC в пространстве* $\mathbb{R}^6$, *если* $A=(5,4,0,3,2,4)$, $B=(2,-1,1,3,1,4)$, $C=(-2,-1,4,4,-2,3)$.

Решение. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}=(2-5,-1-4,1-0,3-3,1-2,4-0)=(-3,-5,1,0,-1,4)$$

и аналогично $\overrightarrow{AC}=(-7,-5,4,1,-4,-1)$. Отсюда

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+25+1+0+1+0}=6,\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{49+25+16+1+16+1}=6\sqrt{3},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)\cdot(-7)+(-5)\cdot(-5)+1\cdot 4+0\cdot 1+(-1)\cdot(-4)+4\cdot(-1)=54.$$

Далее, имеем: $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{54}{6\cdot 6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $A=30°$. Вычислим ещё одну сторону треугольника: $BC=\sqrt{16+0+9+1+9+1}=6$. Так как $AB=BC$, то $C=A=30°$. Наконец, $B=180°-30°-30°=120°$.

Задача 3. *Найти угол между стороной* n*-мерного куба и его диагональю*.

Решение. Можно считать, что ребро куба равно 1. Расположим n-мерный куб так, чтобы его вершины имели координаты $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, где каждое ε_i равно 0 или 1. Вектор, направленный по стороне, равен $\vec{a}=(1,0,0,\ldots,0)$, а вектор, направленный по диагонали, равен $\vec{b}=(1,1,1,\ldots,1)$. Найдём угол φ между этими векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1+0+\ldots+0}{\sqrt{1+0+\ldots+0}\sqrt{1+1+\ldots+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

§ 3. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Векторы $\vec{x},\vec{y}$ евклидова (или унитарного) пространства называются ***ортогональными*** (записывается: $\vec{a}\perp\vec{b}$), если $(\vec{x},\vec{y})=0$.

Для ненулевых векторов ортогональность означает, что угол между векторами равен 90°, нулевой вектор ортогонален любому вектору пространства.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ евклидова пространства называется ***ортогональной системой***, если $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$ при $i \neq j$. ***Ортонормированная система*** векторов – такая система, в которой векторы попарно ортогональны друг другу и длины векторов равны 1: $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$ при $i \neq j$ и $|\vec{a}_i| = 1$ при всех i. Это можно записать следующим образом:

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases} \qquad (11)$$

Вводя *символ Кронекера* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases}$ определение ортонормированной системы векторов можно записать компактно: $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij}$.

Заметим, что из ортогональной системы векторов, если все векторы ненулевые, легко сделать ортонормированную систему. А именно, пусть $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ – ортогональная система векторов. Тогда $\dfrac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}, \ldots, \dfrac{\vec{u}_k}{|\vec{u}_k|}$ – ортонормированная система.

Задача 4. Доказать, что ненулевые ортогональные векторы линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ – попарно ортогональные векторы и пусть $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{u}_k = 0$. Умножив это равенство скалярно на $\vec{u}_i$, получим: $\lambda_1 (\vec{u}_1, \vec{u}_i) + \ldots + \lambda_i (\vec{u}_i, \vec{u}_i) + \ldots + \lambda_k (\vec{u}_k, \vec{u}_i) = 0$. Отсюда $\lambda_i = 0$. Ввиду произвольности i мы получаем, что векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ линейно независимы.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ евклидова (или унитарного) пространства называется ***ортонормированным базисом***, если он является ортонормированной системой векторов этого пространства. Аналогичным образом определяется ***ортогональный базис***.

Ортонормированный базис евклидова пространства хорош тем, что вычисление скалярного произведения и другие вычисления (длины векторов, расстояния и углы) осуществляются в нём гораздо проще, чем в произвольном базисе. Так, например, формула скалярного произведения в ортогональном базисе выглядит так: $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ (формула (1)), в то время как в произвольном базисе $(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (e_i, e_j) x_i x_j$; длина вектора в ортонормированном базисе равна $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, а в произвольном

$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(e_i,e_j)x_ix_j}$. Аналогичная ситуация имеет место в унитарном пространстве.

Оказывается, *в любом конечномерном евклидовом или унитарном пространстве существует ортонормированный базис*, и для его построения можно использовать процесс ортогонализации, который будет описан ниже. В бесконечномерных пространствах также есть ортонормированные базисы, но доказательство этого утверждения гораздо сложнее, и мы приводить его здесь не будем.

Заметим, что достаточно напучиться строить ортогональный базис, так как ортонормированный из него получается совсем просто. Опишем теперь процесс построения ортогонального базиса *евклидова* пространства, для унитарного действия точно такие же.

Алгоритм построения ортогонального базиса. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ – произвольный базис евклидова пространства. Будем строить по нему ортогональный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

1. В качестве первого вектора нового базиса возьмём вектор f_1, т.е. положим $e_1 = f_1$.
2. Вектор e_2 будем искать в виде $e_2 = f_2 + \lambda e_1$, и подберём λ так, чтобы выполнялось условие $e_2 \perp e_1$. Имеем: $0=(e_2,e_1)=(f_2+\lambda e_1,e_1)=(f_2,e_1)+\lambda(e_1,e_1)$, откуда $\lambda=-\dfrac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$.
3. Вектор e_3 будем искать в виде $e_3 = f_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$, и подберём α,β так, чтобы выполнялись условия $e_3 \perp e_1$, $e_3 \perp e_2$. Имеем: $\begin{cases} 0=(e_3,e_1)=(f_3+\alpha e_1+\beta e_2,e_1)=(f_3,e_1)+\alpha(e_1,e_1), \\ 0=(e_3,e_2)=(f_3+\alpha e_1+\beta e_2,e_2)=(f_3,e_2)+\beta(e_2,e_2), \end{cases}$ откуда $\alpha=-\dfrac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)}$, $\beta=-\dfrac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)}$.
4. Далее будем искать вектор e_4 в виде $e_4 = f_4 + \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3$, и будем подбирать коэффициенты ξ,η,ζ так, чтобы этот вектор был перпендикулярен векторам e_1,e_2,e_3.

Процесс завершится построением ортогонального базиса $e_1,e_2,\dots,e_n$.

Процесс ортогонализации имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. А именно, если в евклидовом пространстве дан “косой” базис, то мы его “выпрямляем”. На первый базисный вектор никаких условий не налагается, поэтому мы берём $e_1 = f_1$. Затем среди векторов вида $f_2 + \lambda e_1$ (концы этих векторов лежат на прямой, параллельной вектору e_1) мы берём тот единственный, который перпендикулярен вектору e_1 (см. рис. 1).

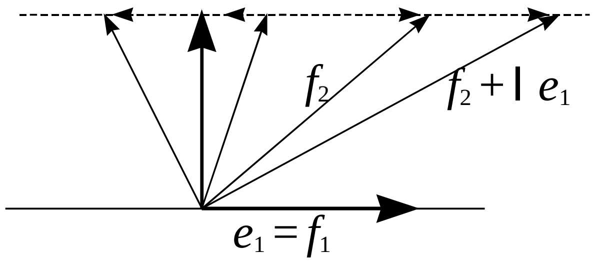

Рис.1.

Затем среди векторов вида $f_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$, концы которых лежат на плоскости, параллельной векторам e_1 и e_2, выбираем тот единственный, который перпендикулярен этой плоскости (см. рис. 2).

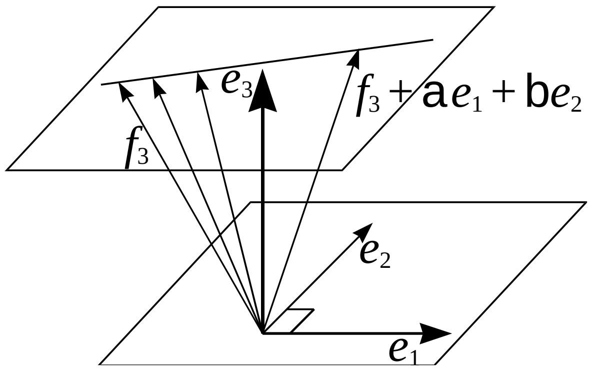

Рис.2.

И т.д. В результате "косой" базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ "выпрямится" до ортогонального $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание. Этот алгоритм может быть применён и к *линейно зависимым* векторам $f_1, f_2, \ldots, f_n$, которые базиса не образуют. В этом случае у нас некоторые из построенных векторов e_i будут получаться равными 0. Отбрасывая нулевые векторы, мы получим ортогональный базис подпространства, натянутого на векторы $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Кстати говоря, этот алгоритм можно использовать также для проверки линейной зависимости или независимости системы векторов евклидова (или унитарного) пространства.

Задача 5. *Построить ортонормированный базис подпространства пространства* $\mathbb{R}^4$, *натянутого на систему векторов* $f_1 = (2, -1, 0, 1)$, $f_2 = (-3, 1, 1, 1)$ *и* $f_3 = (1, 1, -2, 2)$.

Решение. Нам требуется построить ортонормированный базис евклидова пространства H, которое является линейной оболочкой векторов f_1, f_2, f_3: $H = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$. Применим к этим векторам процесс ортогонализации.

Вначале возьмём $e_1 = f_1 = (2, -1, 0, 1)$. Вектор e_2 будем искать в виде $e_2 = f_2 + \lambda e_1$. Из условия перпендикулярности $e_2 \perp e_1$ получаем: $\lambda = -\dfrac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\dfrac{-6 - 1 + 0 + 1}{4 + 1 + 0 + 1} = 1$. Следовательно, $e_2 = f_2 + e_1 = (-1, 0, 1, 2)$.

Далее, следующий базисный вектор будем искать в виде $e_3 = f_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$. Из условий $e_3 \perp e_1$ и $e_3 \perp e_2$ получаем: $\alpha = -\frac{f_3 e_1}{e_1 e_1} = -\frac{2-1+0+1}{4+1+0+1} = -\frac{1}{3}$ и $\beta = -\frac{f_3 e_2}{e_2 e_2} = -\frac{-1+0-2+2}{1+0+1+4} = \frac{1}{6}$. Отсюда $e_3 = f_3 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{6}e_2 = (1,1,-2,1) - \frac{1}{3}(2,-1,0,1) + \frac{1}{6}(-1,0,1,2) = \frac{1}{6}(1,8,-11,6)$. Таким образом, ортогональный базис пространства H таков: $u_1 = (2,-1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1,2)$, $u_3 = (1,8,-11,6)$. Ортонормированный базис получится, если мы разделим каждый вектор на его длину: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0,1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,2)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{221}}(1,8,-11,6)$.

Задача 6. *Убедиться в том, что векторы* $f_1 = (1,-2,-1,3)$, $f_2 = (4,1,-1,-1) \in \mathbb{R}^4$ *ортогональны, и дополнить систему этих векторов до ортогонального базиса*.

Решение. Проверим ортогональность. Имеем: $(f_1, f_2) = 4-2+1-3 = 0$. Следовательно, $f_1 \perp f_2$. Таким образом, мы можем положить $e_1 = f_1$, $e_2 = f_2$. Другие векторы e_3, e_4 ортогонального базиса удовлетворяют условиям $e_3 \perp e_1, e_2$ и $e_4 \perp e_1, e_2$. Пусть $x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^4$. Условие $x \perp e_1, e_2$ даёт систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдём *фундаментальную систему решений* этой системы. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 4: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \quad 9x_2 + 3x_3 - 13x_4 = 0. \end{cases}$ Перенесём x_3, x_4 в правую часть: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_3 - 3x_4, \\ \quad 9x_2 = -3x_3 + 13x_4. \end{cases}$ Переменные x_3, x_4 здесь *свободные*, а переменные x_1, x_2 – *связанные*. Придадим свободным переменным значения: вначале $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, и найдём x_1, x_2. Составим таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4
1/3	−1/3	1	0
−1/9	13/9	0	1

Таким образом, можно считать, что $f_3 = (1,-1,3,0)$, $f_4 = (-1,13,0,9)$. Эти векторы перпендикулярны векторам f_1, f_2, но не перпендикулярны друг другу. Применим к ним процесс ортогонализации. Положим $u_3 = f_3 = (1,-1,3,0)$, $u_4 = f_4 + \lambda u_3$. Так как должно быть $u_4 \perp u_3$, то $\lambda = -\frac{f_4 u_3}{u_3^2} = \frac{14}{11}$. Отсюда

$$u_4 = (-1,13,0,9) + \frac{14}{11}(1,-1,3,0) = \frac{1}{11}(3,129,42,99) = \frac{3}{11}(1,43,14,33).$$

Таким образом, дополнением векторов f_1, f_2 до ортогонального базиса будет служить, например, система векторов $f_3 = (1,-1,3,0)$, $f_4' = (1,43,14,33)$.

§ 4. Ортогональное дополнение

Пусть H – подпространство конечномерного евклидова пространства E. ***Ортогональным дополнением*** подпространства H называется множество

$$H^{\perp} = \{x \in E \mid \forall x \in H \;\; x \perp h\}. \tag{12}$$

Таким образом, $H^{\perp}$ состоит из всех векторов, ортогональных всем векторам из H. Нетрудно доказать, что $H^{\perp}$ является подпространством пространства E. Кроме того, имеет место утверждение.

Теорема. Если E – конечномерное евклидово пространство и H – его подпространство, то любой вектор $x \in E$ *представим в виде*

$$x = h + h^{\perp}, \tag{13}$$

где $h \in H$, $h^{\perp} \in H^{\perp}$, причём такое представление *единственно*.

Вектор $h \in H$ в формуле (13) называется ***ортогональной проекцией*** вектора x на подпространство H, а вектор $h^{\perp}$ – ***ортогональной составляющей*** (см. рис. 1). Равенство (13) показывает, что пространство E раскладывается в сумму подпространств H и $H^{\perp}$. Если каждый элемент суммы двух подпространств H_1 и H_2 раскладывается в сумму векторов из H_1 и H_2 *единственным образом*, то говорят, что эти подпространства образуют *прямую сумму* и записывают её в виде $H_1 \oplus H_2$. Таким образом, утверждение теоремы состоит в том, что для любого подпространства H евклидова пространства E имеет место разложение в прямую сумму

$$E = H \oplus H^{\perp}. \tag{14}$$

Ещё одно интересное свойство состоит в том, что понятие ортогонального дополнения является взаимным: если второе подпространство есть ортогональное дополнение к первому, то первое будет являться ортогональным дополнением ко второму:

$$(H^{\perp})^{\perp} = H. \tag{15}$$

Замечания. 1. Из формулы (14) следует, что если $h_1, \ldots, h_k$ – базис подпространства H, а $h_1', \ldots, h_m'$ – базис его ортогонального дополнения $H^{\perp}$, то множество $h_1, \ldots, h_k, h_1', \ldots, h_m'$ будет являться базисом пространства E. Для размерностей этих пространств имеет место равенство

$$\dim E = \dim H + \dim H^{\perp}. \tag{16}$$

2. Если X – произвольное подмножество евклидова пространства E, т.е. X необязательно является подпространством, то всё равно можно определить $X^{\perp}=\{y\in E \mid \forall x\in X \;\; y\perp x\}$. При этом $X^{\perp}$ будет являться подпространством, но, конечно, сформулированная выше теорема теперь верна не будет, а равенства (14), (16) потеряют смысл.
3. Всё вышесказанное справедливо для конечномерного унитарного пространства.
4. В бесконечномерном случае равенства (14) и (15) верны не для всех подпространств. Но равенства $H^{\perp\perp\perp}=H^{\perp}$, $E=H^{\perp}\oplus H^{\perp\perp}$ сохраняются и в бесконечномерном случае.

Опишем теперь процесс нахождения ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора. Пусть E – евклидово пространство, H – его подпространство и $x\in E$. Пусть $h_1,\dots,h_k$ – базис подпространства H (не обязательно ортогональный). Запишем вектор x в виде $x=y+z$, где $y\in H$, $z\in H^{\perp}$. Так как $y\in H$, то $y=\alpha_1h_1+\ldots+\alpha_kh_k$, а так как $z\in H^{\perp}$, то мы имеем систему уравнений: $(x-\alpha_1h_1-\ldots-\alpha_kh_k)h_i=0$ $(i=1,2,\dots,k)$. Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{cases}\alpha_1h_1^2+\alpha_2h_1h_2+\ldots+\alpha_kh_1h_k=xh_1,\\ \alpha_1h_1h_2+\alpha_2h_2^2+\ldots+\alpha_kh_2h_k=xh_2,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \alpha_1h_1h_k+\alpha_2h_2h_k+\ldots+\alpha_kh_k^2=xh_k.\end{cases} \tag{17}$$

Из этой системы можно найти числа $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, из которых находим ортогональную проекцию $y=\alpha_1h_1+\ldots+\alpha_kh_k$. Ортогональная составляющая z находится простым вычитанием: $z=x-y$.

Матрица системы (17)

$$\begin{pmatrix} h_1^2 & h_1h_2 & \dots & h_1h_k\\ h_1h_2 & h_2^2 & \dots & h_2h_k\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_1h_k & h_2h_k & \dots & h_k^2\end{pmatrix}$$

называется *матрицей Грама*. Она невырожденна, если векторы $h_1,\dots,h_k$ линейно независимы (это нам дано в условии задачи). Таким образом, система (17) имеет единственное решение. Впрочем, это и так ясно ввиду того, что всякий вектор однозначно разлагается по базису $h_1,\dots,h_k,h_1',\dots,h_m'$.

Вычисления сильно упрощаются в случае, если базис $h_1,\dots,h_k$ пространства H является ортонормированным. Если $h_ih_j=\delta_{ij}$, то матрица Грама есть единичная матрица. Следовательно, $\alpha_i=xh_i$ $(i=1,2,\dots,k)$. Коэффициенты α_i называются *коэффициентами Фурье*. Алгоритм нахождения проекции вектора теперь можно сформулировать следующим образом.

1. Находим коэффициенты Фурье вектора x по формулам
$$\alpha_i = (x, h_i) \ (i = 1, 2, \dots, k). \tag{18}$$
2. Вычисляем ортогональную проекцию y вектора x на подпространство H по формуле $y = \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_k h_k$.

Задача 7. *Найти ортогональную проекцию вектора* $x = (1, -1, 0, 1, 2)$ *пространства* $\mathbb{R}^5$ *на подпространство, порождённое векторами* $h_1 = (1, 0, 1, -1, 0)$, $h_2 = (-1, 2, 0, 0, 1)$, $h_3 = (0, 1, 0, 1, 1)$.

Решение. Найдём скалярные произведения: $h_1^2 = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 3$, $h_1 h_2 = -1 + 0 + 0 + 0 + 0 = -1$ и аналогично $h_1 h_3 = -1$, $h_2^2 = 6$, $h_2 h_3 = 3$, $h_3^2 = 3$. Далее, $xh_1 = 3$, $xh_2 = -2$, $xh_3 = 0$. Подставим эти цифры в систему (17):
$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 3, \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Решив эту систему, получим: $\alpha_1 = \frac{8}{9} = \frac{27}{24}$, $\alpha_2 = -\frac{2}{3} = -\frac{16}{24}$, $\alpha_3 = \frac{25}{24}$.
Найдём ортогональную проекцию:
$$y = \sum \alpha_i h_i = \frac{27}{24}(1, 0, 1, -1, 0) - \frac{16}{24}(-1, 2, 0, 0, 1) + \frac{25}{24}(0, 1, 0, 1, 1) = \frac{1}{24}(43, -7, 21, 2, 15).$$
Наконец, найдём ортогональную составляющую:
$$z = x - y = \frac{1}{24}(-19, -17, 21, 2, 15).$$

Задача 8. *Найти базис ортогонального дополнения* $H^{\perp}$ *подпространства* H, *натянутого на систему векторов* $a_1 = (1, 1, 3, -1, 0)$, $a_2 = (0, -1, 2, 1, 1)$, $a_3 = (2, 1, -1, 3, 1)$.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит $H^{\perp}$ в том и только том случае, если он удовлетворяет системе уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 0, \\ \quad - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$
Найдём фундаментальную систему решений этой системы: $u_1 = (-20, 17, 4, 9, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0, 1)$. Она и будет базисом пространства $H^{\perp}$.

§ 5. Ортогональные операторы. Ортогональные матрицы

Пусть E – евклидово пространство. Линейный оператор $A: E \to E$ называется ***ортогональным***, если он не изменяет скалярного произведения, т.е. для любых $x, y \in E$
$$(Ax, Ay) = (x, y). \tag{19}$$
Из определения следует, что ортогональный оператор не изменяет длин векторов и углов между ними, т.е. сохраняет все геометрические свойства фигур. На плоскости или в трёхмерном

пространстве ортогональный оператор определяет *движение* (например, поворот, симметрию относительно прямой, точки, плоскости).

Матрицу линейного оператора A будем обозначать также буквой A. Для ортогонального оператора имеет место утверждение:

Теорема. Линейный оператор A является ортогональным в том и только том случае, если его матрица в ортонормированном базисе удовлетворяет условию

$$AA^{\mathrm{T}} = E. \tag{20}$$

Условие (20) равносильно условию $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

Отметим ещё одно свойство ортогональных операторов: *собственные значения ортогонального оператора по модулю равны 1*. Таким образом, если λ – собственное значение ортогонального оператора, то $\lambda = e^{i\varphi}$ для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Матрица, удовлетворяющая условию (20), называется ***ортогональной матрицей***. У ортогональной матрицы обратная матрица совпадает с транспонированной. Ортогональную матрицу можно определить и по-другому: *ортогональная матрица – это матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому*.

Задача 9. Найти общий вид ортогональной матрицы размера 2×2.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица. Так как $AA^{\mathrm{T}} = E$, то мы имеем: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ ac + bd = 0, \\ c^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение даёт, что $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$ при некотором φ. Из второго получаем: $c\cos\varphi + d\sin\varphi = 0$, а значит, $c = k\sin\varphi$, $d = -k\cos\varphi$ при некотором $k \in \mathbb{R}$. Подставляя в последнее уравнение системы, получим: $k^2 = 1$, т.е. $k = \pm 1$. Таким образом, общий вид ортогональной (2×2)-матрицы таков:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В унитарном пространстве U линейный оператор $A: U \to U$, сохраняющий скалярное произведение (т.е. $(Ax, Ay) = (x, y)$), называется ***унитарным***. Его матрица в ортонормированном базисе удовлетворяет равенству $U^{-1}=\bar{U}^{\mathrm{T}}$, где T обозначает, как и раньше, транспонирование, а $\bar{U}$ – матрица, полученная из матрицы U заменой каждого элемента на комплексно сопряжённый. Если обозначить $U^{*}=\bar{U}^{\mathrm{T}}$, то условие на матрицу будет выглядеть так: $U^{-1}=U^{*}$. Матрица, удовлетворяющая этому условию, называется ***унитарной***. Собственные значения унитарного оператора (и унитарной матрицы) по модулю равны 1.

§ 6. Симметрические (самосопряжённые) операторы

Линейный оператор $A: E\to E$, где E – евклидово пространство, называется ***симметрическим***, или ***самосопряжённым***, если для любых векторов $x, y\in E$ выполняется равенство

$$(Ax, y)=(x, Ay). \tag{21}$$

В унитарном пространстве также рассматриваются линейные операторы, удовлетворяющие условию (21), они называются, как и в действительном случае, самосопряжёнными, но слово “симметрический” к ним не применяется.

Необходимые и достаточные условия того, чтобы оператор был симметрическим, даёт следующая теорема.

Теорема. *Если линейный оператор $A: E\to E$ является симметрическим, то в любом ортонормированном базисе матрица оператора A является симметрической (т.е. $A^{\mathrm{T}}=A$). Наоборот, если матрица оператора A в некотором ортонормированном базисе симметрическая, то оператор A симметрический.*

Для любого оператора $A: E\to E$ *сопряжённый оператор* $A^{*}: E\to E$ определяется условием $(A^{*}x, y)=(x, Ay)$. В каждом ортонормированном базисе его матрица является транспонированной к матрице оператора A. Симметрический (самосопряжённый) оператор – это оператор, совпадающий с сопряжённым.

Важные свойства симметрических операторов описывает следующая теорема.

Теорема. *Пусть $A: E\to E$ – симметрический линейный оператор. Тогда:*

1) *собственные значения оператора A действительны;*
2) *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны друг другу;*
3) *пространство E имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Задача 10. *Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора, заданного следующей матрицей в ортонормированном базисе:*

$$A=\begin{pmatrix}-13 & 4 & -4\\ 4 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём собственные значения и собственные векторы линейного оператора A (здесь мы линейный оператор и его матрицу обозначаем одной буквой A). Напомним, что собственные значения определяются из характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где E – единичная матрица. Имеем:

$$0=\begin{vmatrix}-13-\lambda & 4 & -4\\ 4 & 2-\lambda & 1\\ -4 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda+15).$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2}=3,\quad \lambda_3=-15.$ Теперь найдём собственные векторы: они находятся из системы линейных уравнений $(A-\lambda E)x=0.$

При $\lambda=3$ имеем:

$$\begin{cases}-16x_1+4x_2-4x_3=0,\\ \quad 4x_1-x_2\ +x_3\ \ =0,\\ -4x_1+x_2\ -x_3\ \ =0.\end{cases}$$

Найдём фундаментальную систему решений этой системы. Будем считать x_1,x_2 свободными переменными, а x_3 – связанной. Составим таблицу

x_1	x_2	x_3
1	0	–4
0	1	1

Таким образом, $u_1=(1,0,-4),\ u_2=(0,1,1).$

При $\lambda=3$ имеем:

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-4x_3=0,\\ 4x_1+17x_2+x_3=0,\\ -4x_1+x_2+17x_3=0.\end{cases}$$

Фундаментальное решение системы: $u_3=(4,-1,1).$

Мы видим, что вектор u_3 перпендикулярен векторам u_1,u_2 (так и должно быть ввиду сформулированной выше теоремы). Векторы u_1,u_2 не ортогональны, поэтому к ним следует применить процесс ортогонализации. Положим $v_1=u_1,\quad v_2=u_2+\xi v_1.$ Из условия $v_2\perp v_1$ получаем: $\xi=-\dfrac{u_2v_1}{v_1^2}=-\dfrac{-4}{1+0+16}=\dfrac{4}{17}.$ Отсюда $v_2=u_2+\dfrac{4}{17}v_1=(0,1,1)+\dfrac{4}{17}(1,0,-4)=\dfrac{1}{17}(4,17,1).$ Мы получили ортогональный базис из собственных векторов: $u_1 = (1,0,-4)$, $u_2' = (4,17,1)$, $u_3 = (4,-1,1)$. Ортонормированный базис из собственных векторов мы получим, разделив каждый из этих векторов на его длину: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1,0,-4)$, $u_2' = \frac{1}{\sqrt{206}}(4,17,1)$, $u_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,1)$.

В случае унитарного пространства матрица A самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет следующему условию: $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ (это комплексный аналог условия симметричности $a_{ij} = a_{ji}$, которое мы имели в евклидовом пространстве). Матрица, удовлетворяющая этому условию, называется *эрмитовой.* Условие эрмитовости матрицы A может быть записано также в виде $A^{\mathrm{T}} = \overline{A}$. В заключение приведём таблицу соответствия понятий в евклидовом и унитарном пространствах.

евклидово пространство		унитарное пространство	
симметрическая матрица	$A^{\mathrm{T}} = A$	эрмитова матрица	$A^{\mathrm{T}} = \overline{A}$
симметрический (самосопряжённый) оператор	$(Ax, y) = (x, Ay)$	самосопряжённый оператор	$(Ax, y) = (x, Ay)$
ортогональная матрица	$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$	унитарная матрица	$\overline{A^{\mathrm{T}}} = A^{-1}$
ортогональный оператор	$(Ax, Ay) = (x, y)$	унитарный оператор	$(Ax, Ay) = (x, y)$