Глава 2. Уравнения прямой на плоскости

§ 1. Уравнения прямой на плоскости

Напомним, что прямая l на плоскости Oxy может быть задана следующими уравнениями (см. рис. 1):

общим:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{n} = (A, B)$ – *нормальный вектор* прямой (т.е. любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой). A и B – любые действительные числа, за исключением случая $A = B = 0$.

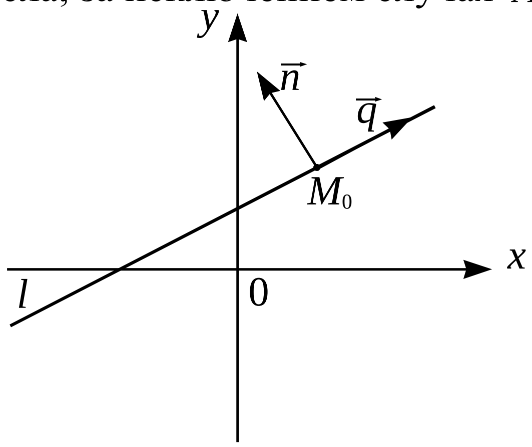

Рис.1.

Если прямая проходит через точку $M_0 = (x_0; y_0)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$, то её уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно векторному уравнению $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, где $M = (x; y)$.

каноническим:

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}. \qquad (3)$$

Здесь $\vec{q} = (q_1; q_2)$ – *направляющий вектор* прямой, т.е. любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой. q_1 и q_2 – любые действительные числа, за исключением случая $q_1 = q_2 = 0$. Отметим, что в уравнении (3) *формально допускается 0 в знаменателе*. Это не означает, конечно, что допустимо деление на 0: формулу (3) следует считать эквивалентом равенства $(x - x_0) \cdot q_2 = (y - y_0) \cdot q_1$, в котором никакого деления на 0 нет. Приведём примеры: уравнение $\frac{x+3}{0} = \frac{y-5}{7}$ определяет прямую $x = -3$, параллельную оси Oy; уравнение оси Ox имеет вид $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0}$.

параметрическим:

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1 t, \\ y = y_0 + q_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \qquad (4)$$

Число t называется *параметром*. Система уравнений (4) равносильна векторному уравнению $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{q}$ (см. рис. 2).

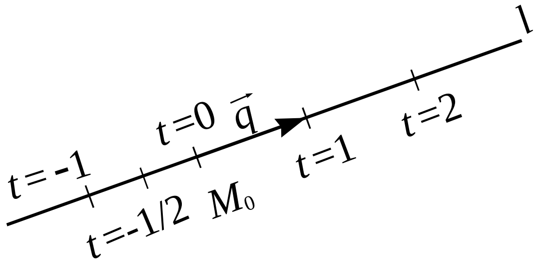

Рис.2.

Параметр t имеет прозрачный *геометрический смысл*: модуль числа t означает, сколько векторов $\vec{q}$ "укладывается" на векторе $\overrightarrow{M_0M}$, а знак обозначает расположение точки M на прямой l: при $t > 0$ точка M находится с той стороны, куда направлен вектор $\vec{q}$, а при $t < 0$ – в противоположной стороне.

с угловым коэффициентом (см. рис. 3):

$$y = kx + b. \qquad (5)$$

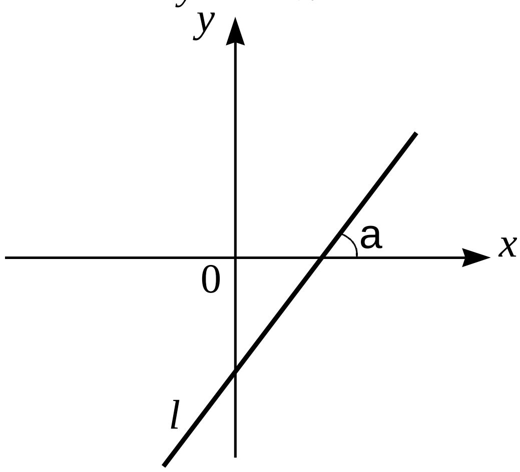

Рис.3.

Здесь k – угловой коэффициент, т.е. $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой l к оси Ox. Уравнением (5) может быть задана любая прямая, не коллинеарная оси Oy.

"*в отрезках*" (см. рис. 4):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (6)$$

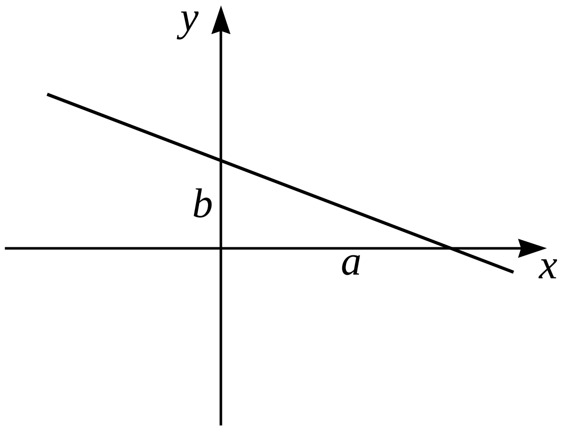

Рис.4.

Здесь a,b – отрезки, отсекаемые прямой l от осей координат. При этом допускается, что $a<0$ или $b<0$. Уравнением (6) может быть задана любая прямая, за исключением прямых, коллинеарных какой-либо из осей координат, а также прямых, проходящих через начало координат.

Замечание. Уравнения (1)-(6) задают прямые не только в прямоугольной, но и в произвольной *косоугольной* системе координат. При этом вектор $\vec{q}=(q_1;q_2)$ будет по-прежнему направляющим вектором прямой (т.е. вектором, коллинеарным этой прямой). Однако, вектор $\vec{n}=(A;B)$ в уравнениях (1), (2) может уже не быть перпендикулярным данной прямой. “Угловой коэффициент” k в уравнении (5) может не равняться тангенсу угла между прямой и осью абсцисс. Наконец, числа a и b в уравнении (6) в косоугольной системе координат будут не истинными длинами отсекаемых на осях отрезков, а *относительными длинами* (если $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – базисные векторы, то на оси Ox отрезки следует измерять “в векторах $\vec{e}_1$”, а на оси Oy – “в векторах $\vec{e}_2$”).

Задача 1. Написать каноническое, параметрическое и общее уравнение прямой, проходящей через точки $A=(-1;3)$ и $B=(4;1)$.

Решение. Направляющим вектором прямой AB можно считать вектор $\vec{q}=\overrightarrow{AB}=(5;-2)$. В качестве точки M_0 можно взять A или B. Пусть, например, $M_0=A=(-1;3)$. Тогда по формуле (3) получим:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-2}. \qquad (7)$$

Это каноническое уравнение прямой AB. Приравняем эти дроби к числу t, получим: $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-2}=t$, откуда $\begin{cases} x=-1+5t, \\ y=3-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Это параметрическое уравнение прямой AB. Из равенства (7) имеем: $-2(x+1)=5(y-3)$, т.е. $2x+5y-13=0$.

Это общее уравнение прямой AB.

Задача 2. Дана прямая $l: 3x-4y+2=0$. Составить уравнение прямой l', проходящей через точку $P=(4;-1)$ и параллельной прямой l, а также прямой l'', проходящей через точку P и перпендикулярной прямой l.

Решение. (см. рис. 5)

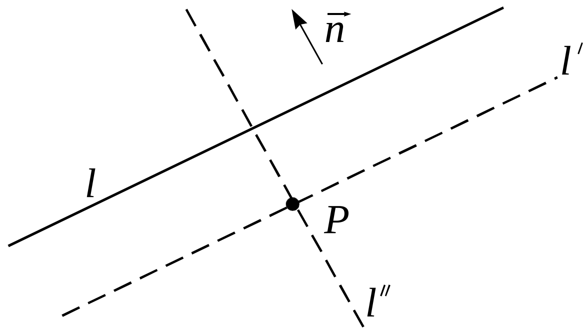

Рис.5.

Из уравнения прямой l находим ее нормальный вектор: $\vec{n}=(3;-4)$. Взяв $M_0=P$, запишем равенство (2): $3(x-4)-4(y+1)=0$, т.е. $3x-4y-16=0$. Это уравнение прямой l'.

Заметим, что вектор $\vec{n}$ является направляющим вектором прямой l'', а значит, можно записать уравнение этой прямой согласно равенству (3). Мы получим: $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{-4}$, откуда $-4(x-4)=3(y+1)$, или $4x+3y-13=0$. Это уравнение прямой l''.

Задача 3. Найти угол между прямыми $l_1: 2x-5y+1=0$ и $l_2: 4x+y+3=0$.

Решение. Найдём нормальные векторы этих прямых: $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$, $\overrightarrow{n_2}=(4;1)$. Угол φ между прямыми равен углу между их нормальными векторами. Следовательно,

$$\cos\varphi=\cos\angle\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2\cdot 4-5\cdot 1}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{-1}{\sqrt{13\cdot 17}}.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\dfrac{-1}{\sqrt{221}}$. обычно под углом между прямыми берут острый угол, образованный этими прямыми. Поэтому мы можем считать, что угол равен $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{221}}$.

Задача 4. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $l: 3x+y-5=0$ относительно:

а) начала координат; б) оси абсцисс; в) точки $A=(-1;4)$.

Решение. а) Симметрия относительно начала координат переводит точку $(x;y)$ в точку $(-x;-y)$. Поэтому уравнение симметричной прямой мы получим, заменяя x на $-x$ и y на $-y$. Таким образом, искомое уравнение будет таково: $-3x-y-5=0$, или $3x+y+5=0$.

б) Симметрия относительно оси абсцисс задается формулами $x'=x$, $y'=-y$. Отсюда получаем: $3x-y-5=0$.

в) (см. рис. 6)

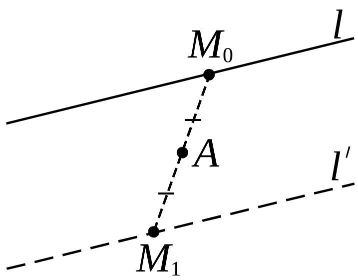

Рис.6.

Возьмём какую-нибудь точку прямой l, например, $M_0=(0;5)$ (для этого достаточно подобрать числа x,y, удовлетворяющие уравнению $3x+y-5=0$). Пусть M_1 – точка, симметричная точке M_0 относительно точки A. Тогда $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{M_0A}=(-1;-1)$ и $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM_1}=(-1;3)+(-1;-1)=(-2;2)$. Следовательно, $M_1=(-2;2)$. Отсюда получаем уравнение прямой l': $3(x+2)+(y-2)=0$, т.е. $3x+y+4=0$.

Замечание. Решение задачи 4(в) может быть упрощено, если использовать формулу симметрии плоскости относительно точки (см. раздел «Геометрические преобразования»).

Задача 5. Спроектировать току $P=(3;5)$ на прямую $y=2x+1$.

Решение. (см. рис. 7)

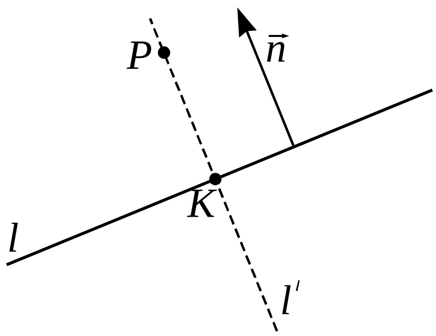

Рис.7.

Обозначим через l прямую $y=2x+1$. Уравнение этой прямой можно переписать в виде $2x-y+1=0$. Найдём нормальный вектор прямой l: $\vec{n}=(2;-1)$. Этот вектор может быть принят в качестве направляющего вектора прямой l': $\vec{q'}=(2;-1)$. Запишем параметрические уравнения прямой l':

$$x=3+2t,\quad y=5-t. \tag{8}$$

Теперь найдем координаты точки K пересечения прямых l и l', подставив формулы (8) в уравнение прямой l, получим: $5-t=2(3+2t)+1$. Отсюда $t=-\dfrac{2}{5}$. Подставим теперь это значение t в (8), получим: $x=3+2\cdot(-0,4)=2,2,\quad y=5-(-0,4)=5,4.$ Таким образом, $K=(2,2;5,4)$. Точка K – это и есть проекция точки P на прямую l.

Задача 6. Составить уравнение высоты AH, медианы AM и биссектрисы AL треугольника ABC, если $A=(-8;3)$, $B=(10;-1)$, $C=(-1;9)$.

Решение. (см. рис. 8).

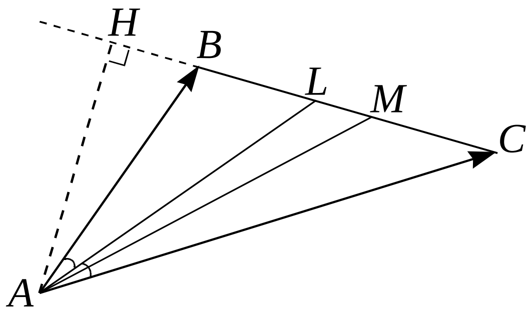

Рис.8.

Имеем: $\overrightarrow{BC}=(-11;10)$. Вектор $\overrightarrow{BC}$ является нормальным вектором прямой AH, т.е. $\vec{n}=(-11;10)$. В качестве точки M_0 прямой AH возьмём точку A. Запишем теперь уравнение высоты AH: $-11(x+8)+10(y-3)=0$, т.е. $11x-10y+118=0$.

Далее, направляющим вектором прямой AM может служить вектор $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Если направляющий вектор умножить на 2, то он по-прежнему останется направляющим вектором. Поэтому возьмём $\vec{q}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(18;-4)+(7;6)=(25;2)$. Отсюда получаем уравнение прямой AM: $\dfrac{x+8}{25}=\dfrac{y-3}{2}$, или $2x-25y+91=0$.

Составим теперь уравнение биссектрисы AL. Найдём длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{18^2+4^2}=2\sqrt{9^2+2^2}=2\sqrt{85}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{7^2+6^2}=\sqrt{85}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{AC}$ имеют одинаковую длину, поэтому вектор $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ направлен по биссектрисе угла A, а значит, является направляющим вектором прямой AL. Вычисляем:

$\vec{u}=(18;-4)+2(7;6)=(32;8)=8\cdot(4;1)$. Запишем каноническое уравнение прямой AL: $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y-3}{1}$; отсюда получаем: $x-4y+20=0$.

Замечание. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, то вектор $\vec{u}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ – вектор, направленный по биссектрисе угла, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{v}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ – по биссектрисе смежного угла (см. рис. 9).

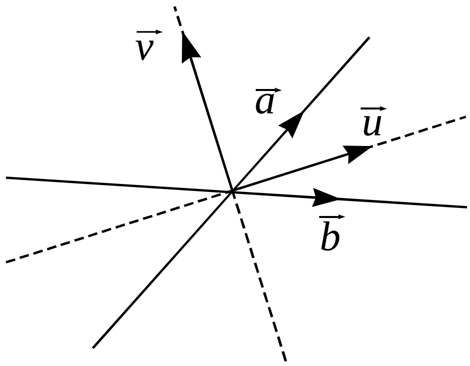

Рис.9.

Если $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$, а $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Задача 7. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x-2y+1=0$, $4x+y-5=0$ и координаты его центра: $(-5;6)$. Составить уравнения двух других сторон и уравнения диагоналей.

Решение (см. рис. 10).

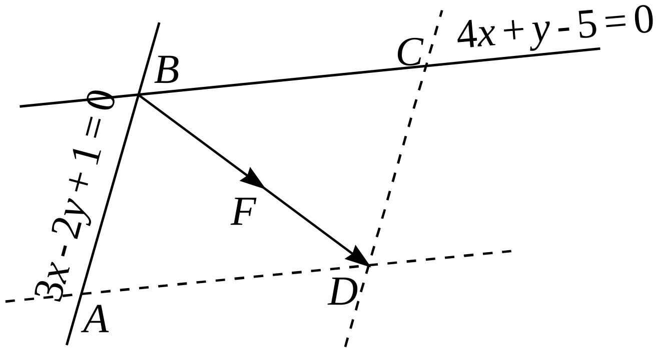

Рис.10.

Обозначим вершины параллелограмма буквами A, B, C, D, а его центр буквой F. Можно считать, что даны уравнения сторон AB и BC. Найдём вершину B, решив систему

$$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\ 4x+y-5=0.\end{cases}$$

Прибавим к первому уравнению удвоенное второе, получим: $11x-9=0$, откуда $x=\frac{9}{11}$. Далее, $y=5-4\cdot\frac{9}{11}=\frac{19}{11}$. Следовательно, $B=\left(\frac{9}{11};\frac{19}{11}\right)$. Затем вычисляем: $\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{64}{11};\frac{47}{11}\right)$,

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{BF}=(-5;6)+\left(-\frac{64}{11};\frac{47}{11}\right)=\left(-\frac{119}{11};\frac{113}{11}\right).$$

Отсюда $D=\left(-\frac{119}{11};\frac{113}{11}\right)$. Через точку D проводим прямую, параллельную AB, получаем CD: $3\left(x+\frac{119}{11}\right)-2\left(y-\frac{113}{11}\right)=0$, $3x-2y+53=0$. Аналогично получаем уравнение AD: $4\left(x+\frac{119}{11}\right)+\left(y-\frac{113}{11}\right)=0$, т.е. $4x+y+33=0$. Теперь найдём точку A:

$$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\3x+y+33=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=-\frac{67}{11}$, $y=-\frac{95}{11}$, т.е. $A=\left(-\frac{67}{11};-\frac{95}{11}\right)$.

Осталось получить уравнения диагоналей AC и BD. Имеем: $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{12}{11};\frac{161}{11}\right)$. Взяв $\vec{q}=\overrightarrow{AF}$, $M_0=F$, получим уравнение AC: $\frac{x+5}{12}=\frac{y-6}{161}$, а значит, $161x-12y+877=0$. Аналогично получим уравнение BD: $\vec{q}=\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{64}{11};\frac{47}{11}\right)$, $M_0=F=(-5;6)$, откуда получаем: $\frac{x+5}{-64}=\frac{y-6}{47}$, т.е. $47x+64y-139=0$.

Задача 8. Даны координаты одной из вершин треугольника: $(3;-1)$ и уравнения двух его медиан: $3x-y+4=0$, $x-2=0$. Найти координаты двух других вершин треугольника.

Решение.. Так как точка $(3;-1)$ не удовлетворяет уравнениям данных прямых, то можно считать, что $(3;-1)$ – это вершина B, а данные прямые – медианы, выходящие из вершин A и C соответственно (см. рис. 11).

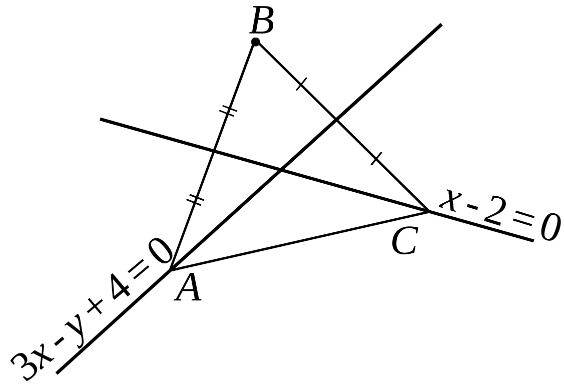

Рис.11.

Обозначим данные прямые через m и n. Возьмём какую-нибудь точку на прямой m: $K=(-1;1)$. Пусть T – точка, симметричная точке B относительно K. Тогда

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BK}=(3;-1)+2\cdot(-4;2)=(-5;3).$$

Следовательно, $T=(-5;3)$. Через точку T проводим прямую $m' \parallel m$: $3(x+5)-(y-3)=0$, т.е. $3x-y+18=0$. Точку C найдём, пересекая прямые n и m':

$$\begin{cases} x-2=0, \\ 3x-y+18=0. \end{cases}$$

Получаем: $C=\left(2;-\dfrac{16}{3}\right)$.

Аналогично находим точку A. А именно, возьмём точку на прямой n: $L=(2;0)$. Пусть U – точка, симметричная точке B относительно L. Тогда $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BL}=(3;-1)+2\cdot(-1;1)=(1;1)$. Уравнение прямой n', параллельной n и проходящей через U: $x-1=0$. Точку A находим из системы

$$\begin{cases} 3x-y+4=0, \\ x-1=0. \end{cases}$$

Отсюда $A=(1;7)$.

Задача 9. Через точку $(1;2)$ провести прямую, пересекающую положительные части осей координат и образующую с осями координат треугольник наименьшей площади.

Решение (см. рис. 12).

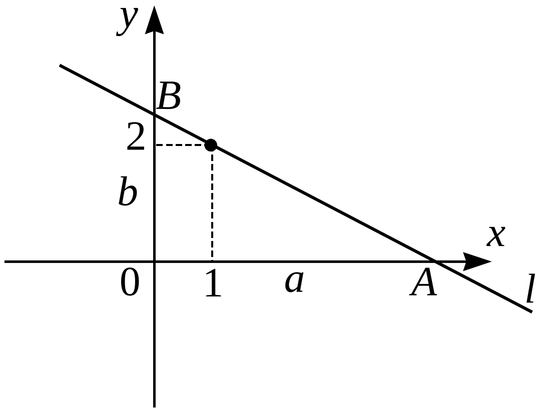

Рис.12.

Пусть l – искомая прямая и a, b – отрезки, отсекаемые прямой l от осей координат. Тогда $a > 1$. Запишем уравнение прямой l “в отрезках” (см. формулу (6)): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Так как $(1; 2) \in l$, то $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Отсюда $b = \frac{2}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{2a}{a-1}$. Найдём площадь треугольника OAB: $S(a) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$. Найдём наименьшее значение функции $S(a)$ на множестве $(1; +\infty)$. Для этого вычислим производную: $S'(a) = \frac{2a \cdot (a-1) - a^2 \cdot 1}{(a-1)^2} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}$. Очевидно, $S'(a) = 0$ при $a = 2$. Составим таблицу:

	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
S'	$-$	0	$+$
S	□	4	□

Из таблицы видно, что функция $S(a)$ имеет в точке $a = 2$ минимум, равный $S(2) = 4$. При $a = 2$ получаем: $b = \frac{2 \cdot 2}{2 - 1} = 4$, а значит, уравнение прямой l таково: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, или $2x + y - 4 = 0$.

§ 2. Расстояние и отклонение точки от прямой на плоскости

Пусть l – прямая, заданная уравнением $Ax + By + C = 0$, и $P = (x_P; y_P)$ – произвольная точка плоскости. Тогда ***расстояние*** $\rho(P, l)$ ***от точки*** P ***до прямой*** l выражается формулой

$$\rho(P, l) = \frac{| Ax_P + By_P + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (9)$$

Заметим, что в знаменателе этой дроби стоит длина вектора $\vec{n} = (A; B)$ – нормального вектора прямой l. Таким образом, *чтобы найти расстояние от точки до прямой, надо подставить* *координаты точки в уравнение прямой и разделить полученное число на длину нормального вектора*; при этом мы получим число, которое может быть отрицательным – в этом случае берём его по абсолютной величине.

Решим несколько задач.

Задача 10. Найти расстояние от точки $(-3;1)$ до прямой $y=2x$.

Решение. Обозначим данную точку буквой P, а прямую буквой l. Преобразуем уравнение прямой к виду $Ax+By+Cz=0$, получим: $2x-y=0$. Теперь применим формулу (9):

$$\rho(P,l)=\frac{|2\cdot(-3)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Задача 11. Найти расстояние между параллельными прямыми $l_1:\ 3x-5y+1=0$ и $l_2:\ 3x-5y-2=0$.

Решение. Очевидно, расстояние между параллельными прямыми равно расстоянию от какой-нибудь точки первой прямой до второй прямой. Найдём точку первой прямой. Возьмём, например, $x=0$ и подставим это число в уравнение прямой l_1. Мы получим: $y=0,2$. Таким образом, точка $P=(0;0,2)$ принадлежит прямой l_1. Теперь мы можем вычислить расстояние $\rho(l_1,l_2)$ между прямыми:

$$\rho(l_1,l_2)=\rho(P,l_2)=\frac{|3\cdot 0-5\cdot 0,2-2|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Задача 12. На оси абсцисс найти точку, равноудалённую от прямых $x-y+3=0$ и $x+7y-1=0$.

Решение. Общий вид точек, лежащих на оси абсцисс, токов: $P=(a;0)$. Обозначим данные прямые через l_1 и l_2. По условию $\rho(P,l_1)=\rho(P,l_2)$, поэтому по формуле (9) будем иметь:

$$\frac{|a-0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+7\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+7^2}}.$$

Отсюда получаем: $\dfrac{|a+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-1|}{5\sqrt{2}}$; $5|a+3|=|a-1|$; $5a+15=\pm(a-1)$. Если $5a+15=a-1$, то $a=-4$; если $5a+15=1-a$, то $a=7/3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $P_1=(-4;0)$ и $P_2=(7/3;0)$.

Убрав в формуле (9) знак абсолютной величины, мы получим величину

$$\delta(P,l)=\frac{Ax_P+By_P+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{10}$$

называемую ***отклонением точки*** P ***от прямой*** l. Как видно из формул (9) и (10), отклонение лишь знаком может отличаться от расстояния. Очевидно, $\delta=\pm\rho$ и $\rho=|\delta|$.

Геометрический смысл отклонения следующий (см. рис. 13):

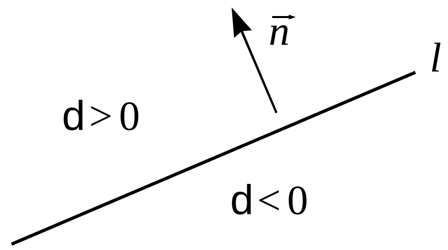

Рис.13.

отклонение по абсолютной величине равно расстоянию, причём $\delta > 0$, если точка P находится от прямой l по ту сторону, в которую направлен нормальный вектор $\vec{n}$, и $\delta < 0$, если она находится по другую сторону.

Замечание. В ряде учебников отклонение определяется чуть по-другому, а именно, $\delta = -\rho$, если $C > 0$, и $\delta = \rho$, если $C < 0$. Тогда знак δ будет положительный, если точка P находится по ту сторону от прямой, в которой лежит начало координат, и отрицательный, если по другую сторону. Мы не будем пользоваться этим определением отклонения, а будем использовать формулу (10).

Покажем, как с помощью отклонения просто решаются задачи, которые с помощью расстояния решаются гораздо сложнее.

Задача 13. Определить, пересекает ли отрезок PQ прямую l, если $P = (3; 1)$, $Q = (-1; 4)$, а прямая l задана уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Спросить, пересекает ли отрезок PQ прямую l, – это всё равно, что спросить, точки P и Q лежат по одну иди по разные стороны от прямой l. Вычислим отклонения:

$$\delta(P,l) = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 1 - 5}{\cdot\ \cdot\ \cdot} > 0, \quad \delta(Q,l) = \frac{2\cdot(-1) + 3\cdot 4 - 5}{\cdot\ \cdot\ \cdot} > 0$$

(знаменатели дробей мы не вычисляем, так как нам нужны не сами отклонения, а только их знаки). Так как отклонения имеют одинаковые знаки, то точки P и Q лежат по одну сторону от прямой l, а значит, отрезок PQ не пересекает прямую l.

Задача 14. Выяснить, лежит ли точка $M = (2; 5)$ внутри треугольника ABC, если $A = (-1; 3)$, $B = (0; 4)$, $C = (7; 2)$.

Решение. Составим уравнения прямых AB, BC и AC.

$\vec{q}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (1; 1)$, уравнение: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-9}{1}$, т.е. $x - y + 10 = 0$;

$\vec{q}_{BC} = \overrightarrow{BC} = (7; -2)$, уравнение: $\dfrac{x-0}{7} = \dfrac{y-4}{-2}$, т.е. $2x + 7y - 28 = 0$;

$\vec{q}_{AC} = \overrightarrow{AC} = (8; -7)$, уравнение: $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y-9}{-7}$, т.е. $7x + 8y - 65 = 0$.

Для того, чтобы точка лежала внутри треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы она лежала: 1) по ту же сторону от прямой AB, где лежит точка C, 2) по ту же сторону от прямой BC, где лежит точка A, и 3) по ту же сторону от прямой AC, где лежит точка B. Вычисляем отклонения: $\delta(M,AB)=\dfrac{2-5+10}{\dots}>0$,

$\delta(C,AB)=\dfrac{7-2+10}{\dots}>0$ – одного знака. Далее,

$\delta(M,BC)=\dfrac{2\cdot 2+7\cdot 5-28}{\dots}>0$, $\delta(A,BC)=\dfrac{2\cdot(-1)+7\cdot 9-28}{\dots}>0$ – одного

знака. Наконец, $\delta(M,AC)=\dfrac{7\cdot 2+8\cdot 5-65}{\dots}<0$, $\delta(B,AC)=\dfrac{7\cdot 0+8\cdot 4-65}{\dots}<0$ –

одного знака. Следовательно, точка M лежит внутри ΔABC.

Задача 15. Определить, лежит ли точка $(1;2)$ между параллельными прямыми $3x-y-2=0$ и $2y-6x+3=0$.

Решение. Обозначим данную точку через P, а прямые – l_1 и l_2. Проверим, что эти прямые действительно параллельны. Для этого вычислим их нормальные векторы: $\vec{n}_1=(3;-1)$, $\vec{n}_2=(-6;2)$. Мы видим, что $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, следовательно, $l_1 \parallel l_2$. (Заметим, что на самом деле тот факт, что векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны означает, что прямые параллельны *или совпадают*; но мы не будем различать эти два случая, здесь удобно считать, что любая прямая параллельна самой себе). Преобразуем одно из уравнений так, чтобы нормальные векторы были одинаковы. Тогда получим: l_1: $3x-y-2=0$, l_2: $3x-y-1{,}5=0$. Тогда они имеют один и тот же нормальный вектор $\vec{n}=(3;-1)$ (см. рис. 14). Из рисунка видно, что точка будет лежать между прямыми в точности тогда, когда отклонения разных знаков.

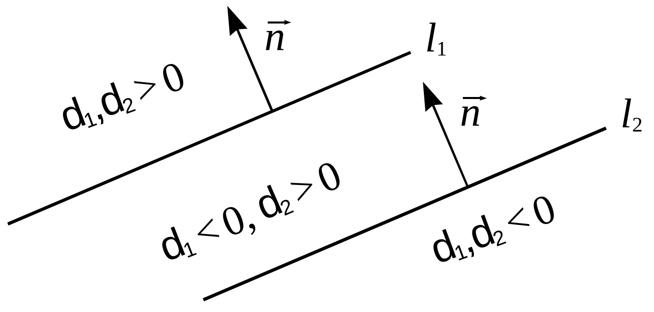

Рис.14.

Вычисляем отклонения: $\delta(P,l_1)=\dfrac{3\cdot 1-2-2}{\dots}<0$, $\delta(P,l_2)=\dfrac{3\cdot 1-2-1{,}5}{\dots}<0$.

Так как отклонения одного знака, то точка P не лежит между прямыми l_1 и l_2.

Задача 16. Определить, точка $M=(-1;4)$ лежит внутри тупого или внутри острого угла, образованного прямыми $4x-3y+2=0$ и $x+2y-6=0$.

Решение. Сначала обсудим принципиальный вопрос о том, как различить ситуации острого и тупого угла между прямыми. Пусть l_1, l_2 – прямые, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ их нормальные векторы, δ_1, δ_2 – отклонения точки M от этих прямых. Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то возможны два случая: (а) $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ – острый и (б) $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ – тупой (см. рис. 15).

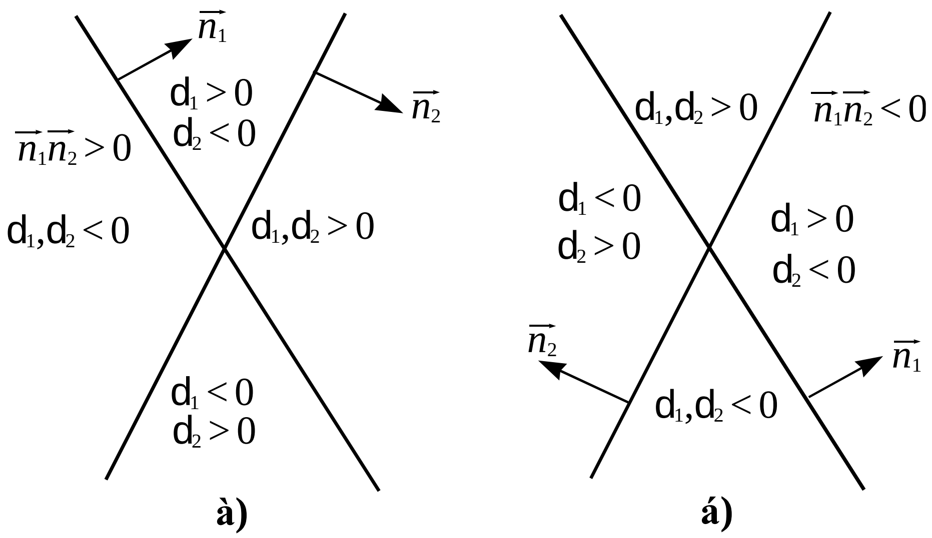

Рис.15.

В перовом случае, как видно из рисунка, для нахождения точки M внутри острого угла необходимо и достаточно выполнение неравенства $\delta_1 \cdot \delta_2 < 0,$ а во втором случае нахождение внутри острого угла равносильно неравенству $\delta_1 \cdot \delta_2 > 0.$

Применим эти соображения к нашей ситуации. Имеем: $\vec{n}_1=(4;-3),$ $\vec{n}_2=(1;2).$ Так как $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4\cdot 1 - 3\cdot 2 < 0,$ то имеет место случай (б). Вычислим отклонения: $\delta_1 = \delta(M, l_1) = \dfrac{4\cdot(-1)-3\cdot 4+2}{\cdots} < 0,$

$\delta_2 = \delta(M, l_2) = \dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot 4-6}{\cdots} > 0.$ Так как δ_1 и δ_2 разных знаков и имеет место случай (б), то точка M лежит внутри тупого угла.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны точки $P=(3;1)$ и $Q=(-1;6)$. Составить уравнения прямых, проходящих через концы отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку. Ответ: $4x-5y-7=0,$ $4x-5y+34=0.$
2. При каком a прямые $3x-2y+1=0$ и $ax+5y-2007=0$ перпендикулярны? Ответ: $a=\dfrac{10}{3}.$

3. Даны точки $A=(3;-2)$ и $B=(1;5)$. Найти точку пересечения прямой AB с осью ординат. Ответ: $(0;8,5)$.
4. Составить общее уравнение прямой, заданной параметрическими уравнениями $x=3-2t$, $y=2+5t$. Ответ: $5x+2y-19=0$.
5. Составить уравнение средней линии $MN \parallel AB$ треугольника ABC, если $A=(2;3)$, $B=(-1;4)$, $C=(8;1)$. Ответ: $x+3y-11=0$.
6. Даны точка $M=(-2;5)$ и прямая l: $3x+4y-6=0$. Составить уравнение геометрического места точек B, являющихся серединами отрезков MA, где $A \in l$. Ответ: $3x+4y-10=0$.
7. Составить уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек $A=(3;7)$ и $B=(2;-5)$. Ответ: $2x+24y-29=0$.
8. Известно уравнение стороны AB параллелограмма $ABCD$: $3x-2y+4=0$, его диагонали AC: $x-y=0$ и вершина $D=(-5;4)$. Найти координаты вершин A, B и C. Ответ: $A=(-4;-4)$, $B=(-22;-31)$, $C=(-23;-23)$.
9. Найти точку, симметричную точке $(2;1)$ относительно прямой $6x-4y+5=0$. Ответ: $(-1;3)$.
10. Через точку $(-1;3)$ провести прямую, отсекающую от осей координат треугольник площадью 2. Ответ: $x+y-2=0$, $9x+y+6=0$.
11. Через точку $(-1;3)$ провести прямую, пересекающую положительные части координатных осей так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый между осями координат, имел наименьшую длину. Ответ: $x+2y-10=0$.
12. Через точку $(3;1)$ провести прямую, касающуюся окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=17$. Ответ: $4x-y-11=0$.
13. Найти расстояние от начала координат до прямой $3x-4y+2=0$. Ответ: $0,4$.
14. Найти расстояние между прямыми, заданными параметрически: $x=2-5t$, $y=1+2t$ и $x=1+10t$, $y=3-4t$. Ответ: $8/\sqrt{29}$.
15. На прямой $y=x$ найти все точки, равноудалённые от прямых $y=x+1$ и $y=7x-1$. Ответ: $(1;1)$ и $(-2/3;-2/3)$.
16. Написать уравнение геометрического места точек, для которых расстояние до прямой $3x-5y+1=0$ в 3 раза больше расстояния до прямой $10x+6y-3=0$. Ответ: две прямые: $8x-36y+9=0$ и $28x-24y+3=0$, по-другому: $10x+6y-3=\pm 6(3x-5y+1)$.
17. Определить, по одну или по разные стороны от прямой $3x+5y-7=0$ расположены точки $(1;1)$ и $(-3;3)$. Ответ: по разные.

18. Определить, лежит ли точка M внутри угла ABC, если $A=(2;-7)$, $B=(-4;-9)$, $C=(-8;1)$, $M=(-9;12)$. Ответ: лежит.
19. Определить, точки $(-1;3)$ и $(5;13)$ лежат в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных прямыми $3x-7y+46=0$ и $4x+y-11=0$. Ответ: в вертикальных.
20. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих системе неравенств $x+y-3\geq 0$, $3x-2y+4\leq 0$, $x-3y+10\leq 0$.
21. Поставить вместо звёздочек знаки $<$ или $>$ так, чтобы область плоскости, определяемая неравенствами $3x+5y*0$, $2x-y-4*0$, $4x+y+3*0$, была ограниченной. Ответ: $<, <, >$.