1. (а) Представить слагаемые и результат в виде *нормализованного* числа с плавающей точкой двойной точности: $(-1)^s \cdot 2^{1023-e} \cdot 1.f$, где $1.f$ записано в двоичном виде. (б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-683,6640625 \cdot 2^{120} + 1177,0703125 \cdot 2^{173}$$

Решение. Переведём слагаемые в двоичную систему и преобразуем их затем к нормализованному виду $(-1)^s \cdot 2^{1023-e} \cdot 1.f$:

$$\begin{aligned}
-683,6640625 \cdot 2^{120} + 1177,0703125 \cdot 2^{173} = -1010101011.1010101 \cdot 2^{120} + 10010011001.0001001 \cdot 2^{173} = \\
-2^{129} \cdot 1.0101010111010101 - 2^{183} \cdot 1.00100110010001001 =
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlll}
 & (-1)^1 2^{1152-1023} \cdot 1.0101010111010101 & \sim 2^{129} & \sim 10^{37} \\
+ & (-1)^0 2^{1206-1023} \cdot 1.00100110010001001 & \sim 2^{183} & \sim 10^{55} \\
= & (-1)^0 2^{1206-1023} \cdot 1.00100110010001001 & \sim 2^{183} & \sim 10^{55} \\
 & \delta_{\text{абс}} = \text{разряды какого порядка не поместилось в 52 бита мантиссы} = & \sim 2^{129} & \sim 10^{39} \\
 & \delta_{\text{отн}} = \delta_{\text{абс}}/2^{183} & \sim 2^{-54} & \sim 10^{-16}
\end{array}$$

2. Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции (`eye`, `repmat`, `flipud` и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные:	*Нужно получить:*
Целое $n \geqslant 10$	$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{n\pi}{n} \\ \cos^2\frac{\pi}{n} & \cos^2\frac{2\pi}{n} & \cos^2\frac{3\pi}{n} & \cdots & \cos^2\frac{n\pi}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos^n\frac{\pi}{n} & \cos^n\frac{2\pi}{n} & \cos^n\frac{3\pi}{n} & \cdots & \cos^n\frac{n\pi}{n} \end{pmatrix}$

Решение.

`n = 10;`	
`A = repmat([1:n], n, 1);`	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$
`A = cos(A*pi/n);`	$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{n\pi}{n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{n\pi}{n} \end{pmatrix}$
`B = repmat([1:n]’, 1, n);`	$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$
`A = A.^B;`	$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{n\pi}{n} \\ \cos^2\frac{\pi}{n} & \cos^2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos^2\frac{n\pi}{n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \cos^n\frac{\pi}{n} & \cos^n\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos^n\frac{n\pi}{n} \end{pmatrix}$

3. (а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня z_i указать отрезок $[a_i, b_i]$, содержащий только один этот корень z_i). Для *каждого* корня (б) построить итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящийся к корню и (в) указать начальное значение x_0. Указание: локализацию проводить перебором интервалов $[a_i, b_i]$ или средствами математического анализа.

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

Решение. Табличным способом выделим отрезки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-3, -2]$, $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, для каждого из которых построим свой итерационный процесс.

Для $x \in [-3, -2]$ разделим исходное уравнение на x^2. В результате получим равносильное уравнение $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - 3$. Итерационный процесс для нахождения первого корня: $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 3$. Поскольку $|\varphi'(x)| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{1}{4} < 1$ для $x \in [-3, -2]$, то сходимость имеет место для всех начальных приближений $x_0 \in [-3, -2]$.

Для двух других отрезков исходное уравнение перепишем в виде $x^2(x+3) - 1 = 0$. Если $x_0 \in [-1, 0]$, то определим итерационный процесс $x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{x_n+3}}$; если $x_0 \in [0, 1]$, то $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n+3}}$. Можно показать, что в процессе итераций соответствующие отрезки отображаются в себя, поэтому сходимость построенных итерационных процессов следует из оценки $|\varphi'(x)| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right|^3 < 1$.

4. Известно, что интервалу $[a, b]$ принадлежит *только* корень x_* уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ и (б) обосновать какую из границ интервала $[a, b]$ можно принять за x_0. Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных $f'(x)$ и $f''(x)$ и использовать соответствующую теорему.

$$\sin(\ln x) = 0, \quad x_* \in [22, 24]$$

Решение. Построим итерационный процесс $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \sin(\log(x_n))}{\cos(\log(x_n))}$

Определим знаки производных на отрезке $[22, 24]$:

$$f'(x) = \frac{\cos(\log(x))}{x} \leqslant -0.0454 < 0, \; f''(x) = -\frac{\cos(\log(x))}{x^2} - \frac{\sin(\log(x))}{x^2} \geqslant 0.0018 > 0$$

Так как $f' \cdot f'' < 0$, то берем левую границу интервала $x_0 = 22$.

5. (а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ по узлам x_i. (б) Оценить сверху погрешность $|R_n(x)|$ приближения функции многочленом.

$$\sin(\arctan x) \qquad x_0 = 0, \; x_1 = \pi/2, \; x_2 = \pi$$

Решение. Строим многочлен Лагранжа по следующей таблице

x	0	$\pi/2$	π
$\sin(\arctan x)$	$\sin(\arctan 0)$	$\sin(\arctan \pi/2)$	$\sin(\arctan \pi)$

$$P_2(x) = -0.1488x^2 + 0.7707x$$

Найдем погрешность по формуле $R_2(x) = \frac{f'''(\xi}{3!}\omega_3(x) = \frac{f'''(\xi}{3!}(x-0)(x-\pi/2)(x-\pi)$:

$$f'''(x) = \frac{18\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{15\,x^4}{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}$$

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|\omega_3(x)| \leqslant \frac{3}{6}\cdot 1.4917 \approx 0.7459$$

6. Заданную функцию будут интерполировать на отрезке $[a,b]$ по чебышёвским узлам с заданной точностью $|R_n(x)| < \varepsilon$. Требуется (а) определить требуемое для заданной точности ε количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси Ox (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \cos x \quad \text{на отрезке } [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}] \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-2}$$

Решение.

Оценим погрешность многочлена Лагранжа для Чебышевских узлов:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\cdot 2^{1-2(n+1)}$$

Оказывается, что при $n=5$ справедливо $f^{(5)} = -\sin(x) - \frac{945}{32\,(x+1)^{\frac{11}{2}}}$ и $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\cdot 2^{1-2(n+1)} \approx 0.0058$.

Выпишем Чебышёвские узлы $x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$:
$x_1 = 3.1416 + 1.5708\cos\frac{9\pi}{10} = 1.6477$, $x_2 = 3.1416 + 1.5708\cos\frac{7\pi}{10} = 2.2183$, $x_3 = 3.1416 + 1.5708\cos\frac{5\pi}{10} = 3.1416$, $x_4 = 3.1416 + 1.5708\cos\frac{3\pi}{10} = 4.0649$, $x_5 = 3.1416 + 1.5708\cos\frac{1\pi}{10} = 4.6355$

7. Данные некоторого физического эксперимента представлены в таблице. Характер зависимости $y(x)$ заранее точно неизвестен. Есть предположения, что зависимость может быть линейной, квадратичной или кубической. (а) Методом среднеквадратического приближения построить три типа зависимостей $y(x)$ (т.е. аппроксимирующие многочлены первой, второй и третьей степени). (б) Для каждого типа зависимотей вычислить среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y(x_i)-y_i)^2}$. (в) Выбрать минимальное с.к.о. и указать соответствующий ему тип зависимости, т.е. наиболее вероятный в проведённом эксперименте.

x	0	1	2	3	4
y	-0.1	2.3	4.1	7.3	10.9

Решение.

Пусть вначале зависимость линейная: $x(t) = a + bx$. По методу среднеквадратического приближения получаем: $P_1(x) = 2.7000x - 0.5000$.

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{5}\left[\begin{array}{l}(-0.1-(2.7000\cdot 0-0.5000))^2 + (2.3-(2.7000\cdot 1-0.5000))^2 + (4.1-(2.7000\cdot 2-0.5000))^2 + \\ (7.3-(2.7000\cdot 3-0.5000))^2 + (10.9-(2.7000\cdot 4-0.5000))^2\end{array}\right]} = 0.5020$$

Аналогично для квадратичной зависимости: $P_2(x) = 0.2714x^2 + 1.6143x + 0.0429$ и $\sigma_2 = 0.2138$.

Аналогично для кубической зависимости: $P_3(x) = 0.0833x^3 - 0.2286x^2 + 2.3310x - 0.0571$ и $\sigma_3 = 0.1604$

Так как σ_3 наименьшее, следовательно, зависимость — кубическая.

8. (а) Методом неопределённых коэффициентов составить формулу для вычисления указанной производной по значениям функции в указанных узлах. (б) Раскладывая $y(x_i)$ в ряд Тейлора, определить порядок p погрешности $O(h^p)$ полученной формулы.

$$y''(x_1) = c_0 y(x_0) + c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2) + c_3 y(x_3) + O(h^p).$$

$$x_0 \underbrace{\text{———}}_{h} x_1 \underbrace{\text{———}}_{h} x_2 \underbrace{\text{———}}_{h} x_3$$

*Решение.*Приблизим функцию $y(x)$ многочленом Лагранжа по узлам x_0, x_1, x_2, x_3:

$$y(x) \approx P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k \frac{L_3^{(k)}(x)}{L_3^{(k)}(x_k)}.$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$y(x)'' \approx P_3''(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{L_3^{(k)}(x)}{L_3^{(k)}(x_k)}\right] = \sum_{k=0}^{3} y_k c_k(x),$$

где значение $c_k(x)$ не зависит от функции $y(x)$. Нас интересует y_1'', поэтому положим $x = x_1$:

$$y_1'' \approx \sum_{k=0}^{3} y_k c_k(x_1).$$

Далее вместо $c_k(x_1) = \text{const}$ будем писать просто c_k.

Вспомним, что многочлен Лагранжа $P_3(x)$ является точным приближением, когда функция $y(x)$ есть многочлен степени $\leqslant 3$. В частности, $P_3(x)$ точно аппроксимирует функции

$$z = 1, \quad z = x - x_0, \quad z = (x - x_0)^2, \quad z = (x - x_0)^3$$

(выбор именно этих многочленов обусловлен удобством дальнейших расчётов).

Несложно показать, что, если подобрать числа c_k таким образом, чтобы $z_1'' = \sum\limits_{k=0}^{3} z_k c_k$ было точным равенством (для выбранных четырёх многочленов z), то это будет значение $c_k(x)$ для многочлена Лагранжа в точке $x = x_1$.

Найдём производные:

z	1	$x - x_0$	$(x - x_0)^2$	$(x - x_0)^3$
z''	0	0	2	$6(x - x_0)$

. Для каждой колонки запишем $z_1'' = \sum\limits_{k=0}^{3} z_k c_k$:

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1,\\
0 &= c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0),\\
2 &= c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2,\\
6(x_1 - x_0) &= c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3.
\end{aligned}$$

Узлы x_i, $i = 0, 1, 2, 3$ — равноотстоящие с шагом h, поэтому $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_0 = 2h$, $x_3 - x_0 = 3h$:

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3,\\
0 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3,\\
2 &= c_1 h^2 + 4c_2 h^2 + 9c_3 h^2,\\
6 &= c_1 h^2 + 8c_2 h^2 + 27c_3 h^2.
\end{aligned}$$

Решая систему, получим:

$$c_0 = \frac{1}{h^2}, \quad c_1 = -\frac{2}{h^2}, \quad c_2 = \frac{1}{h^2}, \quad c_3 = 0.$$

Окончательно $y_1'' \approx \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$.

Имеем:

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + O(h^p),$$

где порядок p нужно определить. Для этого разложим y_i, $i = 0, 2$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_1 до члена h^4 (сейчас точно неясно до какого члена нужно раскладывать, но, если понадобится, разложение всегда можно продолжить):

$$y(x_0) = y(x_1) + (x_0 - x_1)y'(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2!}y''(x_1) + \\ + \frac{(x_0 - x_1)^3}{3!}y'''(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^4}{4!}y^{\mathrm{IV}}(x_1) + O((x_0 - x_1)^5),$$

$$y(x_2) = y(x_1) + (x_2 - x_1)y'(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2!}y''(x_1) + \\ + \frac{(x_2 - x_1)^3}{3!}y'''(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^4}{4!}y^{\mathrm{IV}}(x_1) + O((x_2 - x_1)^5),$$

В более компактной записи:

$$y_0 = y_1 - hy_1' + h^2 y_1''/2 - h^3 y_1'''/6 + h^4 y_1^{\mathrm{IV}}/24 + O(h^5),$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + h^2 y_1''/2 + h^3 y_1'''/6 + h^4 y_1^{\mathrm{IV}}/24 + O(h^5).$$

Подставим полученные значения в формулу для численной производной:

$$\frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) = \frac{1}{h^2}\left[h^2 y_1'' + \frac{h^4}{12}y_1^{\mathrm{IV}} + O(h^5)\right] = y_1'' + \underbrace{\frac{h^2}{12}y_1^{\mathrm{IV}} + O(h^3)}_{O(h^2)}.$$

Так как четвёртая производная в общем случае отлична от нуля, то порядок погрешности равен 2.

9. Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования ещё себя не проявляет.

ф-ла $y_1'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$; функ. $y(x) = \sin x$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$; погр. $\delta = 10^{-7}$.

Решение.

Формула численной производной с шагом h:

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2).$$

В действительности из-за погрешности δ компьютер вычисляет

$$y_1'' \approx \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2), \text{ где } \widetilde{y}_i = y_i \pm \delta.$$

Рассмотрим погрешность

$$\Delta = \left| y''(x_1) - \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \right| = \left| \left(y_1'' - \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \right) + \left(\frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_0 - 2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| y_1'' - \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \right| + \left| \frac{y_0 - \tilde{y}_0}{h^2} \right| + \left| \frac{2y_1 - 2\tilde{y}_1}{h^2} \right| + \left| \frac{y_2 - \tilde{y}_2}{h^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{|y^{\mathrm{IV}}(\eta)|}{12} h^2}_{\substack{\text{см. разложение} \\ \text{в лекции №5}}} + \frac{\delta}{h^2} + \frac{2\delta}{h^2} + \frac{\delta}{h^2} \leqslant \frac{M_4}{12} h^2 + \frac{4\delta}{h^2} = \Phi(h),$$

где $M_4 = \max\limits_{[x_0, x_2]} |y^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant 1$.

Минимизируем ошибку $\Phi(h)$:

$$h_{\mathrm{opt}}: \quad \Phi'(x) = \frac{M_4 h}{6} - \frac{8\delta}{h^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{opt}} = \sqrt[4]{\frac{48\delta}{M_4}} = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot 10^{-7}}{1}} \approx 0{,}047.$$

10. Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1, а затем с шагом h_2. Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинного значения интеграла I.

$$I = \int_1^2 x \sin x \, dx; \quad S(h) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ (ф-ла правых прямоуг.)}; \quad h_1 = 1/5, \ h_2 = 1/12.$$

Решение. Используя формулу правых прямоугольников, получим:

$$S(1/5) = \frac{1}{5} \left(1{,}2 \cdot \sin 1{,}2 + 1{,}4 \cdot \sin 1{,}4 + 1{,}6 \cdot \sin 1{,}6 + 1{,}8 \cdot \sin 1{,}8 + 2 \cdot \sin 2 \right) \approx 1{,}5338;$$

$$S(1/12) = \frac{1}{12} \left(\frac{13}{12} \sin \frac{13}{12} + \frac{14}{12} \sin \frac{14}{12} + \frac{15}{12} \sin \frac{15}{12} + \frac{16}{12} \sin \frac{16}{12} + \frac{17}{12} \sin \frac{17}{12} + \frac{18}{12} \sin \frac{18}{12} + \frac{19}{12} \sin \frac{19}{12} + \frac{20}{12} \sin \frac{20}{12} + \right.$$

$$\left. + \frac{21}{12} \sin \frac{21}{12} + \frac{22}{12} \sin \frac{22}{12} + \frac{23}{12} \sin \frac{23}{12} + \frac{24}{12} \sin \frac{24}{12} \right) \approx 1{,}4804.$$

Для оценки погрешности $S(1/12)$ воспользуемся методом Рунге. Справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = S(h) + O(h^p) = S(h) + ch^p + O(h^{p+1}), \quad c = \mathrm{const}.$$

Отбрасывая слагаемое меньшего порядка малости, получим:

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx \ \begin{array}{l} \approx S(1/5) + c(1/5)^1 \\ \approx S(1/12) + c(1/12)^1 \end{array}$$

Откуда

$$c \approx \frac{S(1/5) - S(1/12)}{(1/12)^1 - (1/5)^1}.$$

$$\text{погрешность} = |I - S(1/12)| \approx |c(1/12)^1| \approx \left| \frac{S(1/5) - S(1/12)}{(1/12)^1 - (1/5)^1} (1/12)^1 \right| \approx \left| \frac{1{,}5338 - 1{,}4804}{(1/12)^1 - (1/5)^1} (1/12)^1 \right| \approx 0{,}038.$$

11. Предложить способ вычисления несобственного интеграла на компьютере. Указание: использовать один из методов, рассмотренных на лекции или семинаре.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

Решение. Интеграл является несобственным, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$. Заметим, что для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0+0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\substack{\text{прав.}\\ \text{Лопит.}}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0.$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2-x^2)\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \ln x\,dx - \int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}dx$$

Первый интеграл вычисляется явно

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x}\,dx = -1.$$

Второй интеграл уже не является несобственным, следовательно, для его вычисления применима, например, составная формула Симпсона.

12. Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм: $||\mathbf{x}||_1 = \sum\limits_i |x_i|$, $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum\limits_i x_i^2}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$||A||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) =$$

$$= \max\left(|-1|+|3|+|1|, |3|+|-3|+|9|, |2|+|4|+|7|\right) = 15.$$

$||A||_2 = \sqrt{\max\limits_i \lambda_i(A^\top A)}$. Найдём матрицу

$$B = A^\top A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 17 \\ -3 & 99 & 57 \\ 17 & 57 & 69 \end{pmatrix}$$

И её собственные значения

$$|B-\lambda E| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -3 & 17 \\ -3 & 99-\lambda & 57 \\ 17 & 57 & 69-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 179\lambda^2 - 5132\lambda + 4356.$$

Из уравнения $|B-\lambda E| = 0$ получаем $\lambda_1 \approx 143{,}43$, $\lambda_2 \approx 34{,}69$ и $\lambda_3 \approx 0{,}88$. Выбираем максимальное с.з. λ_1 и получаем $||A||_2 = \sqrt{\lambda_1} \approx 11{,}96$.

13. Правая часть СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ содержит погрешность, норма которой равна $||\delta\mathbf{f}||_\infty$. Оценить относительную погрешность нормы решения $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$. Указание: воспользоваться оценкой $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \leqslant \mu(A)\dfrac{||\delta\mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty}$.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -8 \\ 6 & -6 & -8 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -7{,}1 \\ 7{,}2 \\ 6{,}7 \end{pmatrix}, \quad ||\delta\mathbf{f}||_\infty = 0{,}6$$

Решение.

$$||f||_\infty = \max\{|-7,1|; |7,2|; |6,7|\} = 7{,}2.$$

$$||A||_\infty = \max\{|-7| + |-3| + |-8|; |6| + |-6| + |-8|; |-5| + |1| + |-3|\} = 20.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1585 & 0.1037 & 0.1463 \\ -0.3537 & 0.1159 & 0.6341 \\ 0.1463 & -0.1341 & -0.3659 \end{pmatrix}$$

$$||A^{-1}||_\infty = \max\{|-0.1585|+|0.1037|+|0.1463|; |-0.3537|+|0.1159|+|0.6341|; |0.1463|+|-0.1341|+|-0.3659|\} = 1{,}1037.$$

$$\frac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \leqslant \mu(A)\frac{||\delta\mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty} = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty \frac{||\delta\mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty} \approx 20 \cdot 1{,}1037 \cdot \frac{0{,}6}{7{,}2} \approx 1{,}84.$$

14. Для задачи построить разностную схему с заданным порядком аппроксимации.

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \cos x + 1, \\ u(1) = 2, \; u'(3) - 3u(3) = 1, \end{cases} \qquad \text{желаемый порядок аппроксимации } p = 2.$$

Решение. Как видно из граничных условий, решение ищется на отрезке $[1, 3]$. Разобьём этот отрезок на n равных частей. Длина каждого частичного отрезка равна $h = (3 - 1)/n$. Введём в рассмотрение сетку $\omega = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $x_0 = 1, x_1 = 1 + h, x_2 = 2 + 2h, \dots, x_{n-1} = 3 - h, x_n = 3$. Рассмотрим также сеточную функцию $y_i = y(x_i)$, определённую только в узловых точках x_i, $i = 0, 1, \dots, n$.

Требуется построить систему линейных уравнений с неизвестными y_i, где $y_i \approx u(x_i)$. Совокупность таких y_i будет численным решением краевой задачи.

Погрешность аппроксимации должна по условию задачи иметь порядок 2 (т.е., например, уменьшение шага h вдвое должно уменьшать погрешность решения $|y_i - u(x_i)|$ в четыре раза).

Заменим в уравнении производную разделённой разностью (см. лекцию 5) $u''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$. Исходное дифференциальное уравнение перейдёт в разностное

$$u''(x) + u(x) = \cos x + 1 \;\to\; \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + y_i = \cos x_i + 1.$$

Убедимся, что получен второй порядок аппроксимации. В разностное уравнение вместо сеточной функции подставим точное решение, т.е. заменим y_i на $u_i = u(x_i)$. Кроме этого разложим $u_{i\pm1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' \pm \frac{h^3}{3!}u_i''' + \frac{h^4}{4!}u^{\mathrm{IV}}(\xi^\pm), \; \xi^- \in [x_{i-1}, x_i], \xi^+ \in [x_i, x_{i+1}].$$

После сокращения имеем

$$u_i'' - \frac{h^2}{12}[u^{\mathrm{IV}}(\xi^-) + u^{\mathrm{IV}}(\xi^+)] + u_i = \cos x_i + 1.$$

Вычитая из последнего равенства исходное дифференциальное уравнение, получаем невязку $\psi_n^{(1)} = -\frac{h^2}{12}[u^{\mathrm{IV}}(\xi^-) + u^{\mathrm{IV}}(\xi^+)] = -\frac{h^2}{6}u^{\mathrm{IV}}(\eta) = O(h^2)$, где $\eta \in [\xi^-, \xi^+]$. Получен требуемый порядок аппроксимации.

Очевидно, замена граничного условия $u(1) = 2$ на $y_0 = 2$ не имеет погрешности аппроксимации.

В правом граничном условии нельзя заменить $u'(3)$ левой разделённой разностью, так как $u'(3) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h^1)$. Выделим в $O(h^1)$ главный член. Из формулы Тейлора в окрестности $x_n = 3$ имеем

$$u(3-h) = u(3) - hu'(3) + \frac{h^2}{2}u''(3) + O(h^3),$$

откуда

$$u'(3) = \frac{u(3) - u(3-h)}{h} + \frac{h}{2}u''(3) + O(h^2).$$

Из исходного уравнения следует, что $u''(3) + u(3) = \cos(3) + 1$. Таким образом,

$$\frac{u(3) - u(3-h)}{h} + \frac{h}{2}[\cos(3) + 1 - u(3)] + O(h^2) - 3u(3) = 1.$$

Невязка для правого граничного условия равна $O(h^2)$, что даёт второй порядок аппроксимации.

Окончательный ответ — это система из $n+1$ линейного уравнения с неизвестными $y_0, y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + y_i = \cos x_i + 1, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ и } x_i = 1 + ih, \\ y_0 = 2, \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}[\cos(3) + 1 - y_n] - 3y_n = 1. \end{cases}$$

15. Для решения (начальной или краевой) задачи, где $x \in [0, 2]$, предложена разностная схема. Определить, аппроксимирует ли разностная схема задачу. Если аппроксимация имеет место, найти её порядок. Указание: использовать разложение в ряд Тейлора.

$$\begin{cases} u' + u = x \\ u'(0) = 1, \ u(2) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = ih \\ \dfrac{y_2 - y_0}{2h} = 1, \ y_n = 0 \text{ (где } x_n = 2) \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим разностное уравнение

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = ih.$$

Раскладывая u_{i+1} в окрестности u_i и подставляя в последнее уравнение, а затем вычитая исходное уравнение, получим невязку $\psi_1 = O(h^1)$.

Рассмотрим первое краевое условие в разностном виде

$$\frac{y_2 - y_0}{2h} = 1$$

Раскладывая u_2 в окрестности u_0 и подставляя в последнее уравнение, а затем вычитая исходное краевое условие, получим невязку $\psi_2 = O(h^1)$.

Рассмотрим второе краевое условие в разностном виде

$$y_n = 0.$$

В этом случае невязка ψ_3 равна нулю.

Так как $\lim\limits_{h\to 0} \max\{|\psi_1|, |\psi_2|, |\psi_3|\} = 0$, то аппроксимация имеет место. Порядок аппроксимации равен $\max\{1, 1\} = 1$.

16. Проверить выполнимость достаточных условий применимости метода прогонки для решения СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$. Если эти условия выполняются, решить систему методом прогонки (вычислять можно на компьютере, но в решении указать значения всех прогоночных коэффициентов α_i, β_i).

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем первое и последнее уравнения системы, чтобы она приобрела вид:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \varkappa_1 & & & & \Large 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\ \Large 0 & & & & \varkappa_2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_{n-1} \\ -\mu_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}64 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}46 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -0{,}09 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ -0{,}69 \end{pmatrix}$$

Проверим условия применимости метода прогонки:

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0,$$

$$|c_j| \geqslant |a_j| + |b_j|, \ j = 1, 2, \ldots, n-1 \ \ \text{(диагональное преобладание)},$$

$$|\varkappa_1| \leqslant 1, \ |\varkappa_2| < 1.$$

$$|10| \geqslant |7| + |-1|, \quad |20| \geqslant |-10| + |6|, \quad |18| \geqslant |10| + |-7|,$$

$$|-0{,}64| \leqslant 1, \quad |0{,}46| < 1.$$

Следовательно, метод прогонки применим.

Далее воспользуемся формулами

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$y_n = (\varkappa_2 \beta_n + \mu_2)/(1 - \varkappa_2 \alpha_n)$$

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = n-1, n-2, \ldots, 0,$$