Часть 2 «Линейная алгебра»

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Числовое кольцо и поле

Определение 1. Всякая система чисел, содержащая сумму, разность и произведение любых двух своих чисел, называется ***числовым кольцом***.

Примеры числовых колец:

1)	целые числа – ***Z***;	5)	четные числа;
2)	рациональные числа – ***Q***;	6)	целые числа, нацело делящиеся на целое число ***k***;
3)	действительные числа - ***R***;	7)	несократимые дроби, знаменатели которых являются степенями простого числа ***p***
4)	комплексные числа – ***C***;		

Не являются числовыми кольцами:

1)	натуральные числа – ***N***:	пусть **a** и **b** натуральные числа: а) при **a**=**b** не существует **a**–**b**, т.к. не существует 0 (нуль); б) при **a**$\neq$**b** не существует либо **a**–**b**, либо **b**–**a**: одно из них отрицательно, а таких нет среди ***N***;
2)	любая система положительных чисел;	не существует либо **a**–**b**, либо **b**–**a**: одно из них отрицательно;
3)	любая система отрицательных чисел;	произведение отрицательных **a** и **b** есть положительное число;
4)	нечетные числа;	сумма и разность нечетных чисел – четное число

Определение 2. ***Числовым полем*** называется числовое кольцо, которое содержит частное любых своих двух чисел (делитель, конечно, отличен от нуля).

Примеры числовых полей:

1) рациональные числа **-** ***Q***;
2) действительные числа **-** ***R***;
3) комплексные числа – ***C.***

§ 2. Матрица

Матрицей называется прямоугольная таблица, состоящая из s *строк* и n *столбцов*; числа a_{ij} называются *элементами* матрицы (могут быть элементами любого числового поля), причем первый индекс указывает на номер строки, а второй – на номер столбца, на пересечении которых этот элемент стоит. Обозначение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{s1} & a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Если число строк равно числу столбцов, т.е. $s = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка n*. Диагональ этой матрицы, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол (состоит из элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$), называется *главной диагональю*; диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний (состоит из элементов: $a_{n1}, a_{\overline{n-1}2}, \ldots, a_{1n}$) называется *побочной диагональю*. Квадратная матрица порядка n называется *единичной матрицей порядка n*, если все элементы ее главной диагонали равны единице. а все элементы вне этой диагонали равны нулю.

ГЛАВА 2. АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 1. Сложение матриц

Определение. ***Суммой*** двух матриц А и В является матрица С, элементы которой определяются соотношением: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{s}$; $\boldsymbol{j} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$;

Свойства операции сложения матриц:

1. **A + B = B + A** – коммутативность (переместительность) операции;
2. **(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C** – ассоциативность (сочетательность) операции.

Свойства доказываются в соответствии с определением операции сложения матриц и с учетом свойств операции сложения элементов числового поля.

☺ Пример 1. Пусть заданы две матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислим их сумму.

Решение: В соответствии с определением суммы матриц можно записать:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+1 \\ 0+5 & 2+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

☻ ***Решите примеры***:

Пример 2. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вычислите их сумму.

Пример 3. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислите их сумму.

§ 2. Умножение матрицы на число

Определение. ***Произведением*** матрицы А на число λ является матрица С, элементы которой определяются соотношением: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, где $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{s}$; $\boldsymbol{j} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$. В соответствии с этой операцией: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за скобку матрицы.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1. $\lambda \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \lambda$ – коммутативность (переместительность) операции;
2. $\lambda \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{B}$ – распределительность операции для матриц;
3. $(\lambda + \varphi) \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \mathbf{A} + \varphi \cdot \mathbf{B}$ – распределительность операции для чисел;
4. $\lambda \cdot (\varphi \cdot \mathbf{A}) = (\lambda \cdot \varphi) \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \varphi \cdot \mathbf{A}$ – ассоциативность (сочетательность) операции для чисел;

5. $(\lambda \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}\,(\lambda \cdot \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ – коммутативность числа в произведении матриц;
6. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ – умножение матрицы на единицу.

Свойства доказываются в соответствии с определением операции умножения матрицы на число и с учетом свойств операции умножения элементов числового поля.

☺ Пример 4. Пусть задана матрица: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Умножим матрицу A на $\lambda = 2$.

Решение: В соответствии с определением произведения матрицы на число можно записать:

$$C = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot a_{11} & 2\cdot a_{12} & 2\cdot a_{13} & 2\cdot a_{14} \\ 2\cdot a_{21} & 2\cdot a_{22} & 2\cdot a_{23} & 2\cdot a_{24} \\ 2\cdot a_{31} & 2\cdot a_{32} & 2\cdot a_{33} & 2\cdot a_{34} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2\cdot a_{11} & 2\cdot a_{12} & 2\cdot a_{13} & 2\cdot a_{14} \\ 2\cdot a_{21} & 2\cdot a_{22} & 2\cdot a_{23} & 2\cdot a_{24} \\ 2\cdot a_{31} & 2\cdot a_{32} & 2\cdot a_{33} & 2\cdot a_{34} \end{pmatrix}$

Пример 5. Пусть задана матрица: $A=\begin{pmatrix} 12 & 24 & 48 & 60 \\ 36 & 72 & 12 & 24 \\ 0 & 48 & 24 & 36 \end{pmatrix}$. Вынесем за скобку матрицы общий множитель – число 12.

Решение: В соответствии с определением произведения матрицы на число можно записать:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 48 & 60 \\ 36 & 72 & 12 & 24 \\ 0 & 48 & 24 & 36 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

☻ ***Решите примеры***:

Пример 6. Задана матрица: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислите произведение матрицы A на $\lambda = 7$.

Пример 7. Пусть задана матрица: $A=\begin{pmatrix} 16 & 32 & 48 & 56 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Вынесем за скобку матрицы общий множитель.

§ 3. Умножение матриц

Определение. ***Произведением*** матрицы $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$ является матрица $\boldsymbol{C}$, элементы которой определяются соотношением: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{kj}$, где $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{s}$; $\boldsymbol{j} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$. Это правило умножения называют умножением “строка **x** столбец”, причем ***строка*** матрицы $\boldsymbol{A}$ умножается на ***столбец*** матрицы $\boldsymbol{B}$. Очевидно, матрица $\boldsymbol{C}$ имеет строк столько, как матрица $\boldsymbol{A}$, и столбцов столько, как матрица $\boldsymbol{B}$.

Свойства операции умножения матрицы на матрицу:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$ – операция *не коммутативна*;
2. $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ – ассоциативность (сочетательность) операции.
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ – дистрибутивность (распределительность) операции.

☺ Пример 8. Пусть заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Умножим матрицу $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$ по правилу “строка **x** столбец”,

Решение: Прежде всего, убеждаемся в том, что умножение возможно: число столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно числу строк матрицы $\boldsymbol{B}$.

На схеме выделены элементы перемножаемых матриц при вычислении элемента матрицы $\boldsymbol{C}$, расположенного во 2-й строке и 4-м столбце:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \\ \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \\ b_{44} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \\ c_{24} \\ \\ \end{array}}$$

Перемножая заданные матрицы по этой схеме, получаем:

$c_{11} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 15$, $c_{12} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) = 28$,
$c_{13} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 1 = 43$, $c_{14} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 11$,
$c_{15} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 43$,
$c_{21} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 7 \cdot 3 = 22$ $c_{22} = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) = 71$,
$c_{23} = 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 9 + 7 \cdot 1 = 79$, $c_{24} = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 21$,
$c_{25} = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 73$,
$c_{31} = 7 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 32$, $c_{32} = 7 \cdot 4 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-3) = 25$,
$c_{33} = 7 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 1 = 12$, $c_{34} = 7 \cdot 8 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 = 59$,
$c_{35} = 7 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 48$,

Ответ: $\begin{pmatrix} 15 & 28 & 43 & 11 & 43 \\ 22 & 71 & 79 & 21 & 73 \\ 32 & 25 & 12 & 59 & 48 \end{pmatrix}$.

☻ ***Решите примеры***:

Пример 9. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Вычислите произведение матриц.

Пример 10. Заданы матрицы: $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислите произведение матриц.

Пример 11. Заданы матрицы: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Вычислите произведение матриц.

Пример 12. Заданы матрицы: $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислите произведение матриц.

Вопросы для самопроверки:

1. Можно ли сложить матрицу с размерами (2x3) с матрицей с размерами (3x2)?
2. Можно ли умножить матрицу с размерами (2x3) на матрицу с размерами (2x3)?
3. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
4. Можно ли умножить матрицу $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{A}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?
5. Назовите свойства операции сложения матриц. Попробуйте их доказать.
6. Назовите свойства операции умножения матрицы на число. Попробуйте их доказать.
7. Назовите свойства операции умножения матриц. Попробуйте их доказать. Почему операция перемножения матриц не коммутативна?