

## 基于多目标进化算法的 MOEA/D 权重向量产生方法

马 庆

(湖南软件职业学院 湘潭 411100)

**摘 要** 在进化多目标优化研究领域,多目标优化是指对含有 2 个及以上目标的多目标问题的同时优化,其在近些年来受到越来越多的关注。随着 MOEA/D 的提出,基于聚合的多目标进化算法得到越来越多的研究,对 MOEA/D 算法的改进已有较多成果,但是很少有成果研究 MOEA/D 中权重的产生方法。提出一种使用多目标进化算法产生任意多个均匀分布的权重向量的方法,将其应用到 MOEA/D,MSOPS 和 NSGA-III 中,对这 3 个经典的基于聚合的多目标进化算法进行系统的比较研究。通过该类算法在 DTLZ 测试集、多目标旅行商问题 MOTSP 上的优化结果来分别研究该类算法在连续性问题、组合优化问题上的优化能力,以及使用矩形测试问题使得多目标进化算法的优化结果在决策空间可视化。实验结果表明,没有一个算法能适用于所有特性的问题。然而,MOEA/D 采用不同聚合函数的两个算法 MOEA/D\_Tchebycheff 和 MOEA/D\_PBI 在多数情况下的性能比 MSOPS 和 NSGA-III 更好。

**关键词** 进化多目标优化,多目标进化算法,多目标优化问题,性能指标,解集可视化

中图分类号 TP181 文献标识码 A

### Multi-objective Evolutionary Algorithm Based Weight Vectors Generation Method of MOEA/D

MA Qing

(Hunan Software Vocational Institute, Xiangtan 411100, China)

**Abstract** In the evolutionary multi-objective optimization (EMO) community, multi-objective optimization refers to simultaneous optimization of multi-objective problems with more than one objective, which has gained more and more attention in recent years. After the raise of MOEA/D, the aggregation-based multi-objective evolutionary algorithms have obtained more and more research, and there have been many achievements with regard to the improvement of MOEA/D. While, there has been little research about the generation method of weight vectors for MOEA/D. This paper proposed a method to generate any number of well-distributed weight vectors using MOEAs. And the generated weight vectors are applied to MOEA/D, MSOPS and NSGA-III. Then, the three aggregation-based multi-objective evolutionary algorithms are comprehensively compared through testing on DTLZ test suit, multi-objective TSP and rectangle test problem in order to study their optimization abilities on continuous and combinatorial problems and a visual observation in the decision space, respectively. The experimental results show that, none of the algorithms is able to solve problems with all different properties. While, the performance of MOEA/D\_Tchebycheff and MOEA/D\_PBI is better than MSOPS and NSGA-III in most cases.

**Keywords** Evolutionary multi-objective optimization (EMO), Multi-objective evolutionary algorithm (MOEA), Multi-objective optimization problems, Performance indicator, Solution visualization

近年来在进化多目标优化领域,许多 2 个及以上的测试问题及应用得到了广泛的研究,目前取得了不少有价值的研究成果。

大多进化多目标优化算法根据两个最主要的目标进行研究:1)最小化最终解集到真实 Pareto 面的距离;2)最大化最终解集的分布广泛性<sup>[1]</sup>。不同的多目标进化算法通过不同的方法来达到这两个目标。多目标进化算法的核心是其选择机制,并且根据它们的选择机制,可以将多目标进化算法分为 4 大类:基于 Pareto 支配关系的多目标进化算法、基于聚合的多目标进化算法、基于评价指标的多目标进化算法、基于分布性的多目标进化算法<sup>[2-5]</sup>。

目前较为流行的基于 Pareto 的多目标进化算法有:由 Deb 提出的第二代非支配排序遗传算法 NSGA-II<sup>[6]</sup>、Zitzler 等提出的第二代强度 Pareto 进化算法 SPEA2<sup>[7]</sup>、Pareto 支配区域控制进化算法 CDAS<sup>[8]</sup>等。早期的基于聚合的进化算法

简单地给予每个目标一个权重而得到一个权重和,这将多目标问题转化成了单目标问题,从而用遗传算法的方式求解。这种方式没有考虑到解集的分布性,同时对具有不同特性的问题较难得到最优解。近年来,由 Deb 提出的基于分解的多目标进化算法 MOEA/D<sup>[9]</sup>能够得到收敛性和分布性都很好的最优解集,使得基于聚合的进化多目标优化算法重新得到广泛的研究。此外, Hughes 等人提出多重单目标采样的多目标进化算法 MSOPS<sup>[10]</sup>; Deb 等人于 2013 年提出基于参考点的高维多目标进化算法 NSGA-III<sup>[11]</sup>。基于评价指标的多目标进化算法是将多目标进化算法的性能评价指标用于评价中间代解集的好坏,目前已取得不少有价值的研究成果。由 Zitzler 等于 2004 年提出的基于指标的多目标进化算法 IBEA<sup>[12]</sup>是这类算法的先驱; Beume 等提出的基于 S 度量选择的多目标进化算法 SMS-EMOA<sup>[13]</sup>和 Bader 等提出的基于超空间评估的多目标进化算法 HypE<sup>[14]</sup>都将 hypervolume 指

马 庆 男,硕士,讲师,主要研究方向为进化计算, E-mail: ivsd1983@163.com。

标应用到算法中来评价解集的优劣程度。

由于 MOEA/D 的提出,基于聚合的多目标进化算法在近年来得到了十分广泛的关注与研究,出现了较多优秀的成果。2009 年, Li H. 等<sup>[15]</sup>提出基于差分进化的 MOEA/D,并证明基于分解的多目标进化算法对解决具有复杂的 Pareto 集合形状的问题有较好的效果。Zhang Q. F. 等<sup>[16]</sup>提出 MOEA/D-EGO,用来解决昂贵的多目标优化问题。2010 年, Ishibuchi 等<sup>[17]</sup>提出在 MOEA/D 算法中同时使用不同的标量函数来评价个体的适应度。2013 年, Ishibuchi 等<sup>[18]</sup>研究了 MOEA/D 中 neighborhood size 与该算法性能之间的关系。2015 年, Liao J. P. 等<sup>[19]</sup>提出将自适应  $\epsilon$  支配和随机精英选择策略结合到 MOEA/D 中来解决其运行过程中丢失精英个体和收敛速度慢的缺点。然而,很少有研究 MOEA/D 中产生权重的方法方面的文献,并且对基于聚合的多目标进化算法性能的综合比较研究性的文献也非常少。因此,本文提出一种基于多目标进化算法产生 MOEA/D 权重的方法,同时将这些产生的权重应用到 MOEA/D, NSGA-III 和 MSOPS 中,系统公平地比较了 4 个经典的基于聚合的多目标进化算法(使用基于惩罚的边界交叉方法的 MOEA/D、使用 Tchebycheff 距离的 MOEA/D、NSGA-III 和 MSOPS)在 3 个系列的测试问题(DTLZ 测试集<sup>[20]</sup>、MOTSP<sup>[21]</sup>和 Rectangle<sup>[22]</sup>)上的优化性能,并使用 3 个性能评价指标 GD<sup>[23]</sup>、IGD<sup>[24]</sup>和 HV<sup>[25]</sup>来评价最终解集的收敛性和分布性。

## 1 权重产生方法

### 1.1 MOEA/D 中权重产生方法

MOEA/D 中使用 NBI(Normal Boundary Intersection)法在超平面上产生均匀分布的权重向量。其权重向量的个数  $N$  是由参数  $H$ (参数  $H$  表示边界被均匀分成的份数)控制的。因此,权重向量的个数  $N$  的表达式如式(1)所示,其中,  $m$  表示目标个数。

$$N = C_{H+m-1}^{m-1} \quad (1)$$

使用 NBI 法产生权重向量存在两点不足:1)由式(1)可知,权重向量的数目随着目标个数的增加而增加,且是一个非整百的数(MOEA/D 中的种群数目要求与权重向量的数目相同,而通常实验中设置的种群数目是 100 或者 200)。因此,在做多目标进化算法的对比实验时,其他的多目标进化算法的种群数目被设置为与 MOEA/D 的种群数目相同,这可能会导致对其他多目标进化算法的不公平。在对基于聚合的多目标进化算法进行比较时,因为不同的算法产生权重的方法不同,权重分布的均匀性和广泛性不同,依赖于权重向量而进化产生的最终解集不能公平地进行比较。2)NBI 法是在超平面上均匀取点,对于 Pareto 前沿是超平面的多目标优化问题,MOEA/D 得到的最终解集分布十分均匀(如 DTLZ1 测试问题);对于 Pareto 前沿是凹面的多目标优化问题,MOEA/D 得到的最终解集的分布边缘很均匀但中间稀疏(如 DTLZ2 测试问题);对于 Pareto 前沿是凸面的多目标优化问题,MOEA/D 得到的最终解集的分布边缘稀疏但中间较均匀(如 WFG2<sup>[26]</sup>测试问题)。

### 1.2 基于多目标进化算法的权重产生方法

提出的基于多目标进化算法的权重产生方法可以在不同类型的 Pareto 前沿面(如平面、凸面和凹面)上产生分布均匀

的任意数量的权重向量。其重要的原因是:Huband 等<sup>[26]</sup>提出可以将 DTLZ 和 WFG 系列测试函数中的决策向量分为距离决策向量和位置决策向量两个部分,其中距离决策向量与其距离函数决定个体到 Pareto 前沿面的距离,位置决策向量与其形状函数决定构成 Pareto 前沿面(如平面、凸面和凹面)的个体的位置。当距离决策向量的维数设置为 0 时,所有的个体均在 Pareto 前沿面上,随着运行代数的增加而改变种群的分布性。因此,基于多目标进化算法的权重产生方法的基本思想是使用多目标进化算法对较大数目的种群在 DTLZ 或者 WFG 测试函数上(将所有个体的距离决策向量的维数设置为 0)进行优化,再使用 SPEA2 的修剪操作将数目较大的种群修剪到规定的数量,则得到的修剪后的种群目标向量即为权重向量。

SPEA2 中的修剪操作对于保持种群良好的分布性有十分明显的效果。修剪操作的具体过程是:首先,计算种群中所有两两个体之间的欧氏距离。然后,找到最小距离连接的两个个体  $x_1$  和  $x_2$ ,分别找到这两个个体到其他种群中所有其他个体之间的最小距离  $x_{1\min}$  和  $x_{2\min}$ 。如果  $x_{1\min} < x_{2\min}$ ,删除个体  $x_1$ ,否则删除个体  $x_2$ 。

基于多目标进化算法的权重产生方法有两个步骤:

(1)随机产生 10000 个个体,选取 DTLZ1 测试函数,将个体的距离决策向量的维数设置为 0,选用一个分布广泛性较好且运行速度较快的多目标进化算法(如 NSGA-II, CDAS,  $\epsilon$ -MOEA 等)对种群进行优化。

(2)使用 SPEA2 的修剪操作将优化后的种群修剪到规定的任意数量,得到的种群的目标向量就是权重向量。

当需要产生在平面上分布的权重向量时,可以选取 DTLZ1 测试函数;当需要产生在凹面分布的权重向量时,可以选取 DTLZ2 测试函数;当需要产生在凸面上分布的权重向量时,可以选取 WFG2 测试函数。同样,当选取 DTLZ1-7 和 WFG1-9 测试函数作对比实验时,可以使用该权重产生的方法预先在这些测试函数上产生对应于测试函数的权重。

下面使用基于多目标进化算法的权重产生方法预先产生对应于测试函数的权重向量,将这些权重向量应用到 3 个基于聚合的多目标进化算法中,综合比较 3 个算法的收敛性和分布性。

## 2 3 个基于聚合的多目标进化算法

下面给出 3 个具有代表性的基于聚合的多目标进化算法的简要概述,其初始的更详尽的介绍需要参考出处文献。

MOEA/D:它是近年来最受欢迎的多目标进化算法之一。它首先初始化  $N$  个均匀且广泛分布的向量,使每个个体分别朝着每个向量的方向进化,相当于将多目标优化问题分解成了  $N$  个标量优化的子问题,通过种群中所有个体的不断进化可以同时得到这  $N$  个子问题的最优解。该算法提出了 3 种可以使用的加权方法:权重和加权方法(weigh sum approach)、切比雪夫加权方法(Tchebycheff approach)、基于惩罚的边界交叉的加权方法(penalty-based boundry intersection approach)。其中切比雪夫加权方法和基于惩罚的边界交叉的加权方法在原文中被证明了其优越的优化能力,因此本文将这两种加权方法分别用于 MOEA/D 中(分别简称为 MOEA/D\_Tchebycheff 和 MOEA/D\_PBI),来研究它们优化

能力的差异性和应用的环境。

NSGA-III; NSGA-III 的基本框架与 NSGA-II 相似,它首先进行非支配排序,选取非临界层的个体。对于临界层,使用分布性保持机制:选取靠近一组预先设定好的分布性很好的参考点的非支配个体填满归档集。因为其与 MOEA/D 都使用了均匀分布的参考向量来保持解集的分布性,所以研究它们之间的差异是十分有意义的。

MSOPS; MSOPS 首先产生  $T$  个均匀分布的目标向量,并基于选取的聚合函数来评价每个个体对于每个目标向量的性能,即为每个目标向量找到最合适的个体。原文中提出将两种聚合函数(weight min-max, Vector-Angle-Distance-Scaling)组合,同时用来评价个体对于目标的适应性能。MSOPS 不同于 MOEA/D 和 NSGA-III,它使用聚合函数来间接地为目标向量寻找最近的个体。

因此,研究基于聚合的多目标进化算法对开发分布性更好的算法有着十分重要的意义,并且对其工程应用有着指导性的作用。

### 3 实验设计

#### 3.1 测试问题

在多目标进化优化领域,针对多目标进化算法进行测试的测试集提出了许多有价值的研究成果<sup>[27-29]</sup>。本文选取 3 类测试问题来对 4 个基于聚合的多目标进化算法进行测试,并得到这些算法对特定问题的优化能力的优劣程度。

第一个选取的测试问题集是由 Deb 等人提出的 DTLZ 测试集,它的目标数目和决策数目可以延伸到任意维度。DTLZ 测试集包含了 9 个测试问题,在此,不考虑对 DTLZ8 和 DTLZ9 进行测试(DTLZ8 和 DTLZ9 包含了边界约束),其中 DTLZ1 到 DTLZ7 被选中作为本文的测试问题,用来测试算法对连续性问题的优化能力,测试的目标维数为 3, 5 和 10。DTLZ1-7 测试问题的详细特性如表 1 所列。

表 1 DTLZ 测试集、MOTSP 测试问题和 Rectangle 测试问题的特性( $M$  表示需要测试的目标数)

Problem	M	Properties
DTLZ1	3, 5, 10	Linear, Multimodal
DTLZ2	3, 5, 10	Concave
DTLZ3	3, 5, 10	Concave, Multimodal
DTLZ4	3, 5, 10	Concave, Biased
DTLZ5	3, 5, 10	Concave, Degenerate
DTLZ6	3, 5, 10	Concave, Biased
DTLZ7	3, 5, 10	Mixed, Disconnected
TSP(-0.2)	3, 5, 10	Convex, Negative correlation
TSP(0)	3, 5, 10	Convex, Zero correlation
TSP(0.2)	3, 5, 10	Convex, Positive correlation
Rectangle	4	Convex

第二个选取的测试问题是多目标旅行商问题 MOTSP,主要被用来测试算法对离散型问题的优化能力。MOTSP 问题中,使用  $k$  个距离矩阵来表示  $k$  个目标的旅行商问题(TSP),目的是同时优化这  $k$  个目标,使得这  $k$  个目标距离同时取得折中后的最小值。矩阵中的每一项表示城市节点  $i$  到城市节点  $j$  之间的距离。首先产生 MOTSP 问题的第一个目标距离矩阵,该矩阵中的每一项为随机产生的 0 到 1 之间的数,则第  $i$  个目标距离矩阵中的每一项的产生方法见式(2):

$$dis_{i+1}(a, b) = TSP_{cp} \cdot dis_i(a, b) + (1 - TSP_{cp}) \cdot rand() \quad (2)$$

其中,  $dis(a, b)$  表示从城市节点  $a$  到城市节点  $b$  之间的距离。

$rand()$  表示均匀随机产生一个 0 到 1 之间的数。 $TSP_{cp}$  表示距离矩阵  $i$  与距离矩阵  $i+1$  之间的相关程度,取值为 -1 到 1 之间。 $TSP_{cp} < 0$ ,  $TSP_{cp} = 0$ ,  $TSP_{cp} > 0$  分别表示负相关, 0 相关和正相关性。本文分别取  $TSP_{cp}$  的值为 -0.2, 0 和 0.2 来测试相关性因子对算法的影响,实验的目标维数设置为 3, 5, 10, 该测试问题的详细属性如表 1 所列。

第三个测试问题是由李密青等提出的可视化矩形测试问题(Rectangle),其主要用来将多目标进化算法优化得到的解集在目标空间可视化。它的关键特性是位于二维决策空间矩形中的 Pareto 最优解集的分布图极大地相似于它们在四维目标空间超矩形中的分布图。从二维决策空间矩形中的 Pareto 最优解集的分布图中,不仅可以看到最优解集的收敛程度,而且可以看到它们的分布性(这在平行坐标图中是很难观察清楚的)。该问题的几何特性如表 1 所列。

#### 3.2 性能评价指标

本文使用 3 个广泛应用的性能评价指标 Generational Distance (GD), Inverted Generational Distance (IGD) 和 Hypervolume Indicator (HV) 来评价被比较的 4 个算法。IGD 和 HV 都是用来评价算法的综合性能,包括收敛性和分布性。IGD 指标的计算公式如式(3)所示。

$$D_{P_F \rightarrow S}(S) = \frac{1}{|P_S|} \sum_{z^1 \in P_S} \min_{z^0 \in S} \{d(z^0, z^1)\} \quad (3)$$

IGD 的计算需要首先知道测试问题的真实 Pareto 面  $P_F$ ,然后在真实 Pareto 面上均匀地产生与种群数量相同个数的点,找到目标空间最终解集  $S$  中与真实 Pareto 面  $P_F$  上的点对应的距离最小的个体,再计算  $P_F$  上的所有点到  $S$  之间的平均距离,因此,IGD 的值越小代表最优解集的综合性能越好。

HV 的计算需要首先定义一个参考点集合  $R(R \subset Z, Z$  表示  $n$  维空间的点集),使用  $A$  表示决策空间 Pareto 最优解集,  $R$  中的每一个参考点都被  $A$  中的所有个体支配。HV 指标  $I_H$  的计算公式如式(4)所示。

$$I_H(A, R) = \lambda(H(A, R)) \quad (4)$$

这里,

$$H(A, R) = \{z \in Z; \exists a \in A \exists r \in R: f(a) \leq z \leq r\} \quad (5)$$

其中,  $\lambda$  表示 Lebesgue measure,  $\lambda(H(A, R))$  的计算如式(6)所示。

$$\lambda(H(A, R)) = \int_{R^n} L_{H(A, R)}(z) dz \quad (6)$$

其中,  $L_{H(A, R)}$  表示  $H(A, R)$  的特征函数。 $H(A, R)$  解释为目标空间 Pareto 最优解集和参考点集围成的超体空间。因此 HV 指标计算该超体空间的大小,一般用于测试问题的真实 Pareto 面未知的情况。所以 HV 的值越大表示最优解集的越靠近真实 Pareto 面,综合性能越好。本文使用蒙德卡罗采样的方法近似计算 HV 的值来大大减少时间消耗。

#### 3.3 实验参数设置

本文所有的实验数据都是通过每个算法在每个测试问题上独立重复运行 30 次获得。每个算法的迭代次数是 500。种群和归档集的中个体的数目都设置为 100。交叉概率为 1, 变异概率为  $1/n$  ( $n$  表示种群大小)。同时,对于 DTLZ 系列测试函数和 Rectangle 问题,使用实数模拟二进制交叉(SBX)和多项式变异(PM),且它们的  $\eta$  参数都设置为 20;对于 MOTSP 问题,使用顺序交叉和反演算子。

特别地,在 MOEA/D 中,邻居种群(the neighborhood set)的大小设置为种群数目的 10%,且惩罚参数(the penalty parameter)设置为 5。

## 4 实验数据和结果分析

### 4.1 DTLZ 系列测试问题

本节给出了 4 个基于聚合的多目标进化算法在 DTLZ 测试集上的实验结果,表 2 和表 3 分别列出了 4 个算法在 DTLZ1 到 DTLZ7 上的 GD 和 IGD 实验结果,表中的每个单元的数据表示每个算法在某个测试函数的某一维上独立重复运行 30 得到的实验数据的均值或者方差。其中,加双下划线和加单下划线标志的数据分别为综合性能表现第一和第二的算法。

表 2 4 个基于聚合的多目标进化算法在 DTLZ 测试集上的 GD 值

DTLZ1				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 1.718E-03	<u>2.246E-04</u>	2.260E-04	2.737E-02
	Std 3.650E-03	<u>6.248E-07</u>	9.850E-06	6.648E-02
5	Mean <u>1.611E-03</u>	<u>1.796E-04</u>	1.920E-03	2.426E-03
	Std <u>2.879E-05</u>	<u>4.654E-05</u>	2.915E-04	1.817E-03
10	Mean 4.309E-03	<u>1.681E-03</u>	2.565E-01	3.248E-02
	Std <u>1.374E-04</u>	<u>1.060E-04</u>	4.051E-01	4.452E-02
DTLZ2				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 3.887E-05	<u>3.783E-05</u>	1.871E-04	1.449E-04
	Std 3.601E-05	<u>1.776E-05</u>	1.326E-04	8.403E-05
5	Mean <u>1.883E-04</u>	3.171E-04	4.666E-04	9.558E-04
	Std 2.521E-04	<u>4.775E-05</u>	9.165E-05	1.497E-04
10	Mean 2.238E-04	5.954E-04	6.163E-04	3.981E-03
	Std <u>2.701E-04</u>	<u>4.833E-05</u>	3.396E-04	2.345E-03
DTLZ3				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>1.017E-04</u>	2.460E-04	2.018E-04	4.259E-04
	Std <u>1.021E-04</u>	1.493E-04	<u>1.311E-04</u>	4.037E-04
5	Mean <u>7.200E-04</u>	<u>5.321E-04</u>	1.592E-03	2.644E-01
	Std <u>1.465E-03</u>	<u>2.596E-04</u>	2.984E-03	2.902E-01
10	Mean <u>1.310E-04</u>	4.402E-04	5.611E-01	2.624E+01
	Std <u>7.416E-05</u>	7.084E-04	1.358E+00	2.031E+01
DTLZ4				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>2.521E-05</u>	4.386E-05	2.547E-04	1.771E-04
	Std <u>3.884E-05</u>	<u>3.465E-05</u>	3.521E-04	1.012E-04
5	Mean <u>3.975E-05</u>	<u>1.781E-04</u>	5.174E-04	2.622E-03
	Std <u>2.835E-05</u>	2.385E-04	<u>1.409E-04</u>	1.083E-03
10	Mean <u>6.105E-05</u>	1.161E-04	4.336E-04	2.516E-02
	Std <u>7.420E-05</u>	1.350E-04	<u>1.025E-04</u>	7.977E-03
DTLZ5				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>4.297E-05</u>	5.269E-02	1.167E-01	1.994E-04
	Std <u>6.670E-05</u>	2.648E-03	5.012E-03	8.724E-05
5	Mean 7.755E-02	<u>1.691E-02</u>	1.701E-01	<u>6.541E-02</u>
	Std 2.243E-03	<u>2.104E-03</u>	3.863E-03	1.307E-02
10	Mean <u>9.822E-02</u>	<u>7.306E-04</u>	1.933E-01	1.603E-01
	Std 1.167E-02	<u>1.015E-03</u>	<u>3.377E-03</u>	2.535E-02
DTLZ6				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>3.952E-03</u>	6.785E-02	1.914E-01	9.075E-03
	Std 3.514E-03	<u>3.261E-05</u>	8.246E-03	3.898E-03
5	Mean <u>2.771E-01</u>	<u>3.933E-02</u>	4.176E-01	6.121E-01
	Std <u>4.048E-03</u>	4.053E-03	1.388E-02	1.496E-02
10	Mean <u>2.505E-01</u>	<u>6.265E-03</u>	6.252E-01	7.910E-01
	Std <u>5.485E-03</u>	<u>1.285E-03</u>	1.013E-02	7.137E-02
DTLZ7				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>1.031E-03</u>	6.505E-03	3.771E-03	3.430E-03
	Std 5.686E-04	<u>4.752E-04</u>	<u>2.933E-04</u>	1.787E-03
5	Mean 1.022E-02	<u>5.748E-03</u>	<u>9.272E-03</u>	2.667E-02
	Std 1.248E-03	<u>4.623E-04</u>	<u>2.658E-04</u>	1.166E-02
10	Mean 4.714E-02	<u>2.606E-02</u>	3.714E-02	2.848E+00
	Std <u>1.982E-03</u>	9.390E-03	<u>2.019E-03</u>	4.736E-01

表 3 4 个基于聚合的多目标进化算法在 DTLZ 测试集上的 IGD 值

DTLZ1				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>2.031E-02</u>	2.421E-02	2.263E-02	<u>2.189E-02</u>
	Std <u>2.121E-05</u>	1.123E-04	6.923E-04	5.867E-03
5	Mean <u>6.428E-02</u>	8.732E-02	7.616E-02	6.731E-02
	Std <u>1.285E-04</u>	7.414E-04	1.572E-03	3.461E-03
10	Mean <u>1.171E-01</u>	2.098E-01	<u>1.660E-01</u>	7.476E-01
	Std <u>6.105E-04</u>	1.239E-02	<u>4.657E-03</u>	4.360E-01
DTLZ2				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>5.306E-02</u>	6.569E-02	5.999E-02	<u>5.322E-02</u>
	Std <u>1.338E-05</u>	4.313E-04	1.216E-03	<u>9.649E-05</u>
5	Mean <u>1.723E-01</u>	2.278E-01	2.082E-01	1.740E-01
	Std <u>1.341E-04</u>	2.634E-03	7.145E-03	7.398E-04
10	Mean <u>5.381E-01</u>	7.918E-01	<u>6.462E-01</u>	9.157E-01
	Std <u>1.580E-03</u>	4.400E-02	<u>7.563E-03</u>	1.571E-01
DTLZ3				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean <u>5.334E-02</u>	6.601E-02	5.972E-02	<u>5.380E-02</u>
	Std <u>2.806E-04</u>	2.856E-04	1.190E-03	8.855E-04
5	Mean <u>1.732E-01</u>	2.257E-01	<u>2.072E-01</u>	1.136E+00
	Std <u>1.154E-03</u>	<u>2.070E-03</u>	9.041E-03	1.293E+00
10	Mean <u>7.620E-01</u>	8.151E-01	<u>6.512E-01</u>	5.250E+01
	Std 2.808E-01	<u>2.752E-02</u>	<u>4.373E-03</u>	5.930E+01
DTLZ4				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 3.789E-01	4.726E-01	5.915E-02	<u>1.960E-01</u>
	Std 3.998E-01	3.922E-01	<u>1.428E-03</u>	<u>2.650E-01</u>
5	Mean 6.210E-01	5.232E-01	<u>1.994E-01</u>	3.828E-01
	Std 3.919E-01	3.183E-01	<u>7.889E-03</u>	<u>2.885E-01</u>
10	Mean 8.022E-01	<u>7.624E-01</u>	<u>6.111E-01</u>	1.229E+00
	Std 1.004E-01	<u>6.060E-02</u>	<u>5.704E-03</u>	7.501E-02
DTLZ5				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 1.436E-02	<u>7.295E-03</u>	1.748E-02	1.446E-02
	Std 2.169E-04	<u>6.361E-05</u>	1.111E-03	5.588E-03
5	Mean <u>1.538E-02</u>	2.248E-02	<u>6.871E-02</u>	4.194E-01
	Std 8.955E-04	<u>6.805E-04</u>	1.301E-02	2.411E-01
10	Mean <u>3.194E-02</u>	6.857E-02	<u>6.588E-02</u>	1.236E+00
	Std <u>5.181E-05</u>	7.463E-03	8.996E-03	2.613E-01
DTLZ6				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 4.151E-02	<u>3.175E-02</u>	6.325E-02	6.853E-02
	Std <u>1.133E-02</u>	1.662E-02	1.262E-02	1.213E-02
5	Mean <u>6.784E-02</u>	<u>9.588E-02</u>	2.115E-01	5.171E+00
	Std <u>1.779E-02</u>	3.842E-02	<u>2.614E-02</u>	2.883E-01
10	Mean <u>1.017E-01</u>	<u>1.331E-01</u>	9.067E-01	7.707E+00
	Std <u>2.832E-02</u>	3.034E-02	2.072E-01	8.189E-01
DTLZ7				
	MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean 1.497E-01	2.023E-01	<u>1.423E-01</u>	<u>1.301E-01</u>
	Std <u>2.768E-03</u>	8.406E-02	<u>1.353E-02</u>	2.788E-02
5	Mean 1.582E+00	<u>5.650E-01</u>	<u>5.247E-01</u>	1.258E+00
	Std 4.350E-01	<u>1.867E-01</u>	<u>4.909E-02</u>	3.956E-01
10	Mean 3.226E+00	<u>1.196E+00</u>	<u>1.230E+00</u>	3.056E+01
	Std 1.023E+00	<u>3.639E-01</u>	<u>2.961E-02</u>	4.066E+00

在此,根据表 2 和表 3 分析 4 个算法的性能。在具有非常多个局部最优的线性问题 DTLZ1 的所有测试的目标维数上,MOEA/D\_PBI 的收敛性最好。MSOPS 在 DTLZ1 的 3 维上的收敛性排名第二,MOEA/D\_Tchebycheff 在 DTLZ1 的 5 维和 10 维上的收敛性排名第二。然而,从表 3 中可以看出,MOEA/D\_Tchebycheff 的综合性能比 MOEA/D\_PBI 好,实验数据说明了前者的分布性比后者好。在比较容易收敛的凹面问题 DTLZ2 上,MOEA/D\_Tchebycheff 和 MOEA/D\_PBI 的收敛性相当,排名前两位。然而从表 3 中可以得出

MOEA/D\_Tchebycheff 的分布性比 MOEA/D\_PBI 好的结论。在难以收敛的多模问题 DTLZ3 上, MOEA/D\_Tchebycheff 在 3 维和 10 维上的收敛性最好, MOEA/D\_PBI 在 5 维上的收敛性最好。MSOPS 在 3 维上的收敛性排名第二。从表 3 中得出, MOEA/D\_Tchebycheff 的综合性能最好, 且在 5 维上的分布性明显好于 MOEA/D\_PBI。MSOPS 在 10 维上的综合性能最好, 说明其分布性远好于 MOEA/D\_Tchebycheff 和 MOEA/D\_PBI。在偏转问题 DTLZ4 上, MOEA/D\_Tchebycheff 的收敛性最好, 其次是 MOEA/D\_PBI。然而, 从表 3 中得到, MSOPS 的综合性能最好, 其次是 NSGA-III。说明 MSOPS 和 NSGA-III 的分布性都比 MOEA/D\_Tchebycheff 和 MOEA/D\_PBI 好。在退化问题 DTLZ5 上, MOEA/D\_Tchebycheff 在 3 维上的收敛性最好, 其次是 NSGA-III。MOEA/D\_PBI 在 5 维和 10 维上的收敛性最好。收敛性排名第二的是 NSGA-III。综合性能上, MOEA/D\_PBI 在 3 维上好于 MOEA/D\_Tchebycheff, 说明其在 3 维上的分布性明显好于 MOEA/D\_Tchebycheff, 但是随着目标数目的增加, MOEA/D\_Tchebycheff 的分布性超过了 MOEA/D\_PBI。在更加难以收敛的退化问题 DTLZ6 上, MOEA/D\_PBI 比 MOEA/D\_Tchebycheff 在高维(目标维数大于 3)的收敛性好。但是 MOEA/D\_Tchebycheff 在高维上的分布性更好, 导致其综合性能比 MOEA/D\_PBI 更好。在非连续性的波浪形的测试问题 DTLZ7 上, MSOPS 的收敛性仅次于 MOEA/D\_PBI, 但是其在 5 维上的综合性能最好。NSGA-III 在 3 维上的综合性能最好。

图 1 表示 4 个基于聚合的多目标进化算法在 3 维 DTLZ1(一个线性的 Pareto 最优前沿, 满足每个目标范围在 0 到 0.5 时,  $f_1 + f_2 + \dots + f_M = 0.5$ ) 上的可视化最终解集。MOEA/D\_PBI 和 NSGA-III 的分布广泛性和均匀性都很好, 且分布性相似, 这是因为它们受均匀广泛分布的权重向量的影响, 每个个体会朝着对应的权重向量的方向进化。MSOPS 的分布均匀性和广泛性很好, 但是采用原文提出的权重产生方法时每个权重的位置有两个个体重叠, 使得最优前沿上更多区域没有个体覆盖。MOEA/D\_Tchebycheff 的分布均匀性一般, 边界上缺乏个体分布, 且也有个体扎堆。这是因为权重 Tchebycheff 聚合方法的使用使得个体受预先分布的权重向量的影响更小。

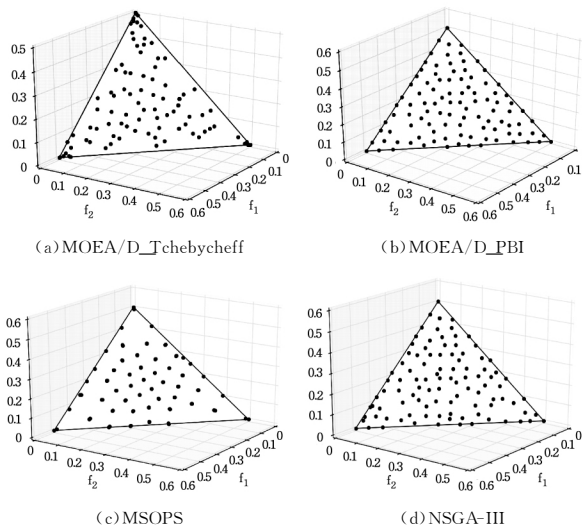


图 1 4 种基于聚合的多目标进化算法在 DTLZ1 的 3 维上的解集

图 2 表示 4 个基于聚合的多目标进化算法在 10 维

DTLZ3(一个球形的 Pareto 最优前沿, 满足在每个目标范围在 0 到 1 时,  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_M^2 = 1$ ) 上的可视化最终解集。该图是高维多目标进化算法用于解集可视化的平行坐标系图, 其横坐标表示每个目标 ( $f_1, f_2, \dots, f_M$ ), 纵坐标表示在某个目标上的目标值, 使用一条折线表示一个解集。当算法在 DTLZ3 的 10 维上收敛时, 所有解集的目标值都不能超过 1.0, 若在某几维目标上没有个体的目标值表示算法的分布广泛性不够好, 算法的分布均匀性目前还无法通过平行坐标系图看出。因此, 除了 NSGA-III, 其他 3 个算法都收敛到了 DTLZ3 的真实 Pareto 面上。其中 MOEA/D\_PBI 的分布广泛性最好, 其次是 MSOPS 和 MOEA/D\_Tchebycheff。

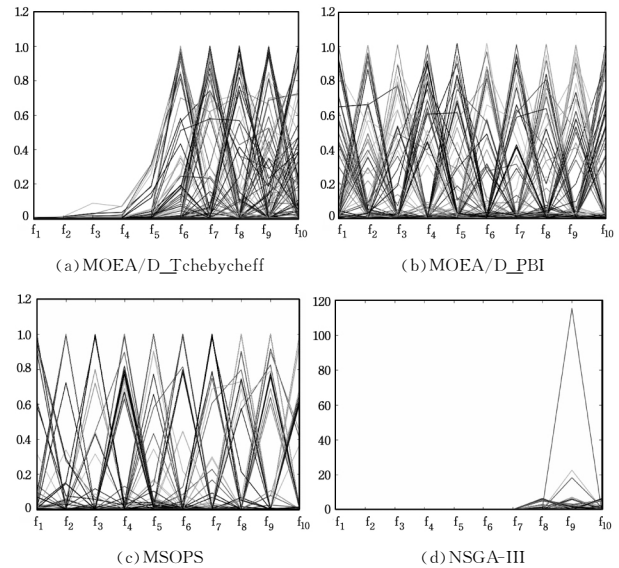


图 2 4 种基于聚合的多目标进化算法在 DTLZ3 的 10 维上的解集

#### 4.2 多目标旅行商问题

多目标旅行商问题是最具有代表性的组合优化问题之一, 其展现了与连续性优化问题不一样的特性。参数 TSP<sub>cp</sub> 越小意味着目标之间的冲突越大。

表 4 4 个基于聚合的多目标进化算法在 MOTSP 上的 HV 值

MOTSP(-0.2)					
		MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean	5.897E+03	<u>6.102E+03</u>	<u>6.091E+03</u>	5.431E+03
	Std	1.103E+02	1.119E+02	1.506E+02	2.388E+02
5	Mean	9.723E+05	<u>1.000E+06</u>	6.920E+05	5.611E+05
	Std	<u>3.246E+04</u>	3.906E+04	7.260E+04	6.824E+04
10	Mean	<u>1.845E+11</u>	<u>7.337E+10</u>	6.339E+10	7.876E+09
	Std	1.351E+10	8.623E+09	9.606E+09	<u>1.882E+09</u>
MOTSP(0)					
		MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean	5.322E+03	5.492E+03	<u>5.562E+03</u>	4.792E+03
	Std	1.403E+02	<u>1.076E+02</u>	<u>1.286E+02</u>	2.780E+02
5	Mean	8.484E+05	<u>9.534E+05</u>	7.780E+05	6.009E+05
	Std	<u>2.617E+04</u>	4.035E+04	4.369E+04	3.974E+04
10	Mean	<u>1.496E+11</u>	1.024E+11	<u>9.842E+10</u>	1.317E+10
	Std	<u>1.106E+10</u>	1.642E+10	2.506E+10	<u>3.993E+09</u>
MOTSP(0.2)					
		MOEA/D_Tche	MOEA/D_PBI	MSOPS	NSGA-III
3	Mean	4.814E+03	<u>5.020E+03</u>	5.019E+03	4.338E+03
	Std	1.217E+02	<u>9.381E+01</u>	1.329E+02	1.487E+02
5	Mean	7.655E+05	<u>8.783E+05</u>	7.929E+05	5.739E+05
	Std	3.392E+04	<u>2.777E+04</u>	3.475E+04	6.174E+04
10	Mean	1.231E+11	<u>1.251E+11</u>	<u>1.239E+11</u>	1.667E+10
	Std	<u>1.221E+10</u>	1.711E+10	1.627E+10	<u>4.696E+09</u>

表 4 给出了 4 个基于聚合的多目标进化算法在 MOTSP

上的 HV 值。当  $TSP_{cp}$  取值为  $-0.2$  时, MOEA/D\_PBI 在 3 维和 5 维上的综合性能最好, MOEA/D\_Tchebycheff 在 10 维上的综合性能最好, MSOPS 在 3 维上的综合性能与 MOEA/D\_PBI 相当, NSGA-III 的综合性能在 4 个算法中最差。当  $TSP_{cp}$  取值为  $0$  时, MSOPS 在 3 维上的综合性能最好, MOEA/D\_PBI 在 5 维上的综合性能最好, MOEA/D\_Tchebycheff 在 10 维上的综合性能最好, NSGA-III 在 5 维和 10 维上的稳定性最好。当  $TSP_{cp}$  取值为  $0.2$  时, MOEA/D\_PBI 在 3 维、5 维和 10 维上的综合性能都是最好的, MSOPS 在 3 维、5 维和 10 维上的综合性能排第二。

### 4.3 Rectangle 问题

本文使用 4 维目标的 Rectangle 测试问题将 4 个算法的分布性和收敛性在 2 维决策空间中可视化。因为算法在该问题下的决策空间中个体的位置与目标空间中该个体的位置高度相关, 因此可以很容易通过观察解集在决策空间的位置分布来研究其在目标空间中的分布和收敛情况。图 3 表示 4 个基于聚合的多目标进化算法在 4 维 Rectangle 测试问题上的解集分布。每个小图的灰色阴影区域表示真实 Pareto 解集的边界。从图中可以看出 4 个算法均没有完全收敛。其中 MOEA/D\_Tchebycheff 和 NSGA-III 的收敛性比 MOEA/D\_PBI 和 MSOPS 更好。MSOPS 较难收敛, 它有更多的个体分布在灰色边界外。MOEA/D\_Tchebycheff 和 NSGA-III 的分布广泛性一般, 它们在某些区域无个体分布。

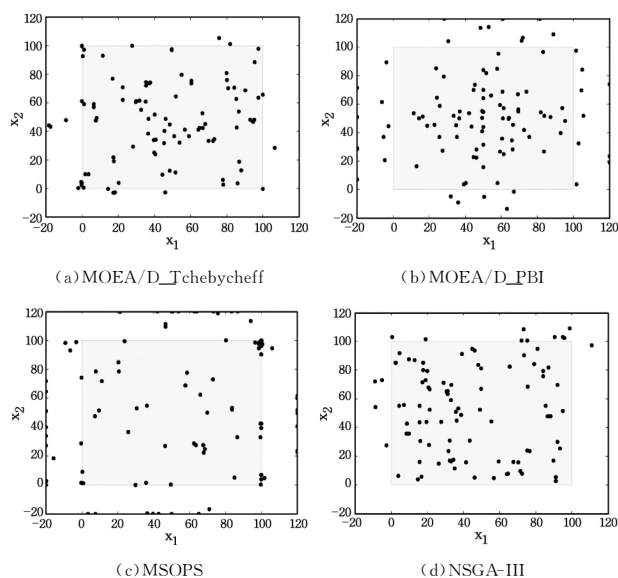


图 3 4 种基于聚合的多目标进化算法在 Rectangle 的 4 维上的解集

### 4.4 实验结果总结

基于以上对 4 个基于聚合的多目标进化算法的性能分析与比较, 可以得出以下结论: MOEA/D\_PBI 的分布性最好, 但是受到预先设定的权重向量的引导作用, MOEA/D\_PBI 和 MOEA/D\_Tchebycheff 在退化问题 DTLZ5 上的收敛性会下降。MOEA/D\_PBI 在 DTLZ 测试函数的某些情况下的 GD 值比 MOEA/D\_Tchebycheff 好, 但是相应的 IGD 值比 MOEA/D\_Tchebycheff 差, 从数据上说明 MOEA/D\_Tchebycheff 的分布性更好, 然而实际上 MOEA/D\_PBI 的分布性比 MOEA/D\_Tchebycheff 好, 由此说明 GD 和 IGD 指标在某种程度上不准确, 这主要因为使用有限个不均匀分布的真实 Pareto 面上的点模拟真实 Pareto 面来计算 GD 和 IGD 值,

使得本来更加均匀的 MOEA/D\_PBI 的最终解集计算得到的 IGD 值比分布性较差的 MOEA/D\_Tchebycheff 的最终解集计算得到的 IGD 值更大。MSOPS 和 NSGA-III 的收敛性在大多数测试问题上都比 MOEA/D 差, 但是在分布性上有较大提高。在离散型测试问题上, MOEA/D 的综合性能比 MSOPS 和 NSGA-III 更好。

**结束语** 本文提出的基于多目标进化算法的权重产生方法能够产生对应于不同测试问题的较均匀的权重向量, 这对基于聚合的多目标进化算法之间的比较有公平性的意义。

本文的实验分析结果对基于聚合的多目标进化算法在实际应用方面有着指导性的意义, 且对进一步研究基于聚合的多目标进化算法有重要的参考价值。

未来的工作可以进一步研究基于聚合的多目标进化算法和其他类多目标进化算法之间的性能差异。此外, 研究更准确地反映算法性能的指标也是十分重要的。

### 参考文献

- [1] Deb K. Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms(1st ed.) [M]. Wiley-Interscience series in systems and optimization. Chichester, New York: John Wiley & Sons, 2001
- [2] Wagner T, Beume N, Naujoks B. Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization[C]// Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer, 2007: 742-756
- [3] Ishibuchi H, Tsukamoto N, Nojima Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review[J]. IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2008, 1(6): 2424-2431
- [4] Yang S, Li M, Liu X, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736
- [5] Li M, Yang S, Liu X. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(3): 348-365
- [6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197
- [7] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization[C]// Evolutionary Methods for Design, Optimisation, and Control. CIMNE, Barcelona, Spain, 2002: 95-100
- [8] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs[C]// Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer, 2007: 5-20
- [9] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731
- [10] Hughes E J. Multiple single objective Pareto sampling[C]// IEEE Congress on Evolutionary Computation, vol. 4. Canberra, Australia: IEEE, 2003: 2678-2684
- [11] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577-601

(下转第 160 页)

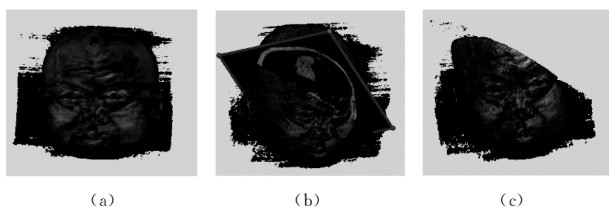


图5 体绘制重建示意图以及交互操作 2

**结束语** 本文对体绘制技术的基本流程进行了研究,进一步详细分析和研究其光学成像的数学模型,分析并利用图像空间扫描法中的光线投射 Ray Casting 方法进行体绘制,对其颜色赋值、重采样、图像合成等关键技术进行了深入讨论和研究,然后利用 MITK 算法平台中的数据模型和算法模型,结合 Ray Casting 的原理进行算法类的创建并实现了医学数据的体绘制,最后在医学三维重建系统中显示出重建组织的三维模型,对体绘制的三维模型能够进行光照属性、表面属性和环境参数的交互操作。在系统功能上设定了法平面切割以及动态平面切割显示和抓屏操作。此外也可以进行旋转、缩放、平移等交互操作。

本文的工作既是基于 MITK 算法平台进行三维体绘制的一个成功尝试,同时也验证了 Ray Casting 算法的可行性实现,并可以在未来进一步拓展其功能并进行不同算法的探索研究。

## 参考文献

- [1] 翟争峰,蒲立新,等. 基于 GPU 的医学图像三维重建体绘制技术综述[J]. 中国数字医学,2015,10(4):11-13
- [2] Max N. First International Symposium on 3DPVT 2002 [J]. Computer Graphics Forum,2002,21(4):814-815
- [3] Herrera I, Buchart C, Aguinaga I, et al. Study of a ray-casting technique for the visualization of deformable volumes [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics,2014,20(11):1555-1565
- [4] Marz K, Franz A M. MITK-US: real-time ultrasound support within MITK [J]. International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery,2014,9(3):411-420
- [5] 谢树森,黄禄华,黄梅珍,等. 一种模拟生物组织的光学模型[J]. 中国激光医学杂志,1992(3):131-134
- [6] 陈坤,刘新国. 基于光线的全局优化多视图三维重建方法[J]. 计算机工程,2013,39(11):235-239
- [7] 何正权. 伪彩色编码的物理基础及其电路实现[J]. 中国超声医学杂志,1994,10(7):1-3
- [8] 何江平,瞿中. 计算机断层扫描图像的剖切研究[J]. 计算机科学,2006,33(1):267-277
- [9] 孙一鸣. PACS 系统中三维图像重构及可视化技术[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学,2007
- [10] (上接第 122 页)
- [12] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C] // Parallel Problem Solving from Nature. Springer, 2004:832-842
- [13] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume[J]. European Journal of Operational Research,2007,181(3):1653-1669
- [14] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation,2011,19(1):45-76
- [15] Li Hui, Zhang Qing-fu. Multiobjective Optimization Problems With Complicated Pareto Sets [C] // MOEA/D and NSGA-II IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2009:284-302
- [16] Zhang Qing-fu, Liu Wu-dong, Tsang E, et al. Expensive Multiobjective Optimization by MOEA/D with Gaussian Process Mode[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2010, 14(3):456-474
- [17] Ishibuchi H, Sakane Y, Tsukamoto N, et al. Simultaneous Use of Different Scalarizing Functions in MOEA/D [C] // Genetic and Evolutionary Computation Conference. 2010:519-526
- [18] Ishibuchi H, Akedo N, Nojima Y. Relation between Neighborhood Size and MOEA/D Performance on Many-Objective Problems [C] // Evolutionary Multi-criterion Optimization. 2013:459-474
- [19] Liao Jian-ping, et al. MOEA/ D Multi-objective Optimization with Adaptive  $\epsilon$ -domination based Random Elitist and Non-uniform Domination Strategy [C] // CENET 2015. 2015:061
- [20] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization [C] // Evolutionary Multiobjective Optimization, ser. Advanced Information and Knowledge Processing. Springer,2005:105-145
- [21] Corne D W, Knowles J D. Techniques for highly multiobjective optimisation: Some nondominated points are better than others [C] // Genetic and Evolutionary Computation Conference. London, England, UK, 2007:773-780
- [22] Li M, Yang S, Liu X. A test problem for visual investigation of high-dimensional multi-objective search [C] // IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2014
- [23] Veldhuizen D A V, Lamont G B. Evolutionary computation and convergence to a Pareto front [C] // Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1998 Conference. University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA; Stanford University Bookstore, October 1998:221-228
- [24] Bosman P A, Thierens I G D. The balance between proximity and diversity in multi-objective evolutionary algorithms [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2):174-188
- [25] Bader J, Deb K, Zitzler E. Faster hypervolume-based search using monte carlo sampling [C] // Multiple Criteria Decision Making for Sustainable Energy and Transportation Systems, vol. 634. Auckland, New Zealand: Springer, 2008:313-326
- [26] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A Review of Multiobjective Test Problems and a Scalable Test Problem Toolkit [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(5): 477-506
- [27] Veldhuizen D A V, Lamont G B. Multiobjective evolutionary algorithm test suites [C] // Proceedings of the 1999 ACM Symposium on Applied Computing. San Antonio, Texas: ACM, 1999: 351-357
- [28] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results [J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2):173-195
- [29] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization [C] // Evolutionary Multiobjective Optimization, ser. Advanced Information and Knowledge Processing. Springer, 2005:105-145