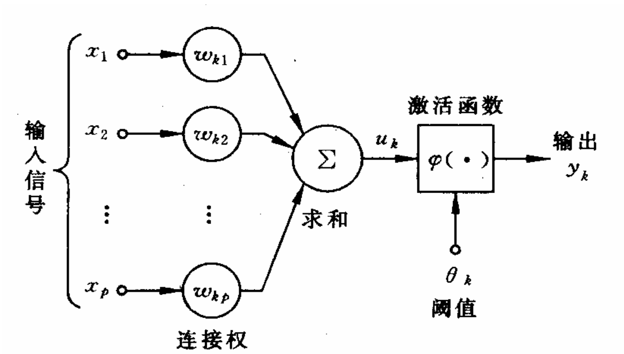
第十九章　神经网络模型

§1　神经网络简介

人工神经网络是在现代神经科学的基础上提出和发展起来的，旨在反映人脑结构及功能的一种抽象数学模型。自 1943 年美国心理学家 W. McCulloch 和数学家 W. Pitts 提出形式神经元的抽象数学模型—MP 模型以来，人工神经网络理论技术经过了 50 多年曲折的发展。特别是 20 世纪 80 年代，人工神经网络的研究取得了重大进展，有关的理论和方法已经发展成一门界于物理学、数学、计算机科学和神经生物学之间的交叉学科。它在模式识别，图像处理，智能控制，组合优化，金融预测与管理，通信，机器人以及专家系统等领域得到广泛的应用，提出了 40 多种神经网络模型，其中比较著名的有感知机，Hopfield 网络，Boltzman 机，自适应共振理论及反向传播网络（BP）等。在这里我们仅讨论最基本的网络模型及其学习算法。

1.1　人工神经元模型

下图表示出了作为人工神经网络（artificial neural network，以下简称 NN）的基本单元的神经元模型，它有三个基本要素：



（i）一组连接（对应于生物神经元的突触），连接强度由各连接上的权值表示，权值为正表示激活，为负表示抑制。

（ii）一个求和单元，用于求取各输入信号的加权和（线性组合）。

（iii）一个非线性激活函数，起非线性映射作用并将神经元输出幅度限制在一定范围内（一般限制在 $(0,1)$ 或 $(-1,1)$ 之间）。

此外还有一个阈值 θ_k（或偏置 $b_k = -\theta_k$）。

以上作用可分别以数学式表达出来：

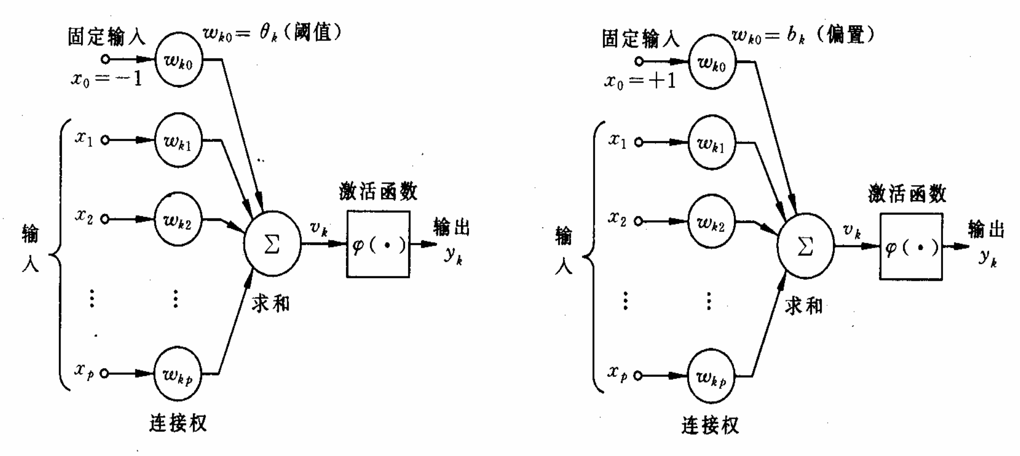
$$u_k = \sum_{j=1}^{p} w_{kj} x_j \,,\quad v_k = u_k - \theta_k \,,\quad y_k = \varphi(v_k)$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 为输入信号，$w_{k1}, w_{k2}, \cdots, w_{kp}$ 为神经元 k 之权值，u_k 为线性组合结果，θ_k 为阈值，$\varphi(\cdot)$ 为激活函数，y_k 为神经元 k 的输出。

若把输入的维数增加一维，则可把阈值 θ_k 包括进去。例如

$$v_k = \sum_{j=0}^{p} w_{kj} x_j \,,\quad y_k = \varphi(u_k)$$

此处增加了一个新的连接，其输入为 $x_0 = -1$（或 $+1$），权值为 $w_{k0} = \theta_k$（或 b_k），如下图所示。



激活函数$\varphi(\cdot)$可以有以下几种:

（i）阈值函数

$$\varphi(v)=\begin{cases}1, & v\ge 0\\ 0, & v<0\end{cases} \tag{1}$$

即阶梯函数。这时相应的输出y_k为

$$y_k=\begin{cases}1, & v_k\ge 0\\ 0, & v_k<0\end{cases}$$

其中$v_k=\sum_{j=1}^{p}w_{kj}x_j-\theta_k$，常称此种神经元为$M-P$模型。

（ii）分段线性函数

$$\varphi(v)=\begin{cases}1, & v\ge 1\\ \frac{1}{2}(1+v), & -1<v<1\\ 0, & v\le -1\end{cases} \tag{2}$$

它类似于一个放大系数为 1 的非线性放大器，当工作于线性区时它是一个线性组合器，放大系数趋于无穷大时变成一个阈值单元。

（iii）sigmoid 函数

最常用的函数形式为

$$\varphi(v)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha v)} \tag{3}$$

参数$\alpha>0$可控制其斜率。另一种常用的是双曲正切函数

$$\varphi(v)=\tanh\left(\frac{v}{2}\right)=\frac{1-\exp(-v)}{1+\exp(-v)} \tag{4}$$

这类函数具有平滑和渐近性，并保持单调性。

Matlab 中的激活（传递）函数如下表所示：

函数名	功　能
purelin	线性传递函数

hardlim	硬限幅传递函数
hardlims	对称硬限幅传递函数
satlin	饱和线性传递函数
satlins	对称饱和线性传递函数
logsig	对数 S 形传递函数
tansig	正切 S 形传递函数
radbas	径向基传递函数
compet	竞争层传递函数

各个函数的定义及使用方法，可以参看 Matlab 的帮助（如在 Matlab 命令窗口运行 help tansig，可以看到 tantig 的使用方法，及 tansig 的定义为 $\varphi(v)=\frac{2}{1+e^{-2v}}-1$）。

1.2 网络结构及工作方式

除单元特性外，网络的拓扑结构也是 NN 的一个重要特性。从连接方式看 NN 主要有两种。

（i）前馈型网络

各神经元接受前一层的输入，并输出给下一层，没有反馈。结点分为两类，即输入单元和计算单元，每一计算单元可有任意个输入，但只有一个输出（它可耦合到任意多个其它结点作为其输入）。通常前馈网络可分为不同的层，第 i 层的输入只与第 $i-1$ 层输出相连，输入和输出结点与外界相连，而其它中间层则称为隐层。

（ii）反馈型网络

所有结点都是计算单元，同时也可接受输入，并向外界输出。

NN 的工作过程主要分为两个阶段：第一个阶段是学习期，此时各计算单元状态不变，各连线上的权值可通过学习来修改；第二阶段是工作期，此时各连接权固定，计算单元状态变化，以达到某种稳定状态。

从作用效果看，前馈网络主要是函数映射，可用于模式识别和函数逼近。反馈网络按对能量函数的极小点的利用来分类有两种：第一类是能量函数的所有极小点都起作用，这一类主要用作各种联想存储器；第二类只利用全局极小点，它主要用于求解最优化问题。

§2 蠓虫分类问题与多层前馈网络

2.1 蠓虫分类问题

蠓虫分类问题可概括叙述如下：生物学家试图对两种蠓虫（Af 与 Apf）进行鉴别，依据的资料是触角和翅膀的长度，已经测得了 9 支 Af 和 6 支 Apf 的数据如下：

Af: (1.24,1.27)，(1.36,1.74)，(1.38,1.64)，(1.38,1.82)，(1.38,1.90)，(1.40,1.70)，(1.48,1.82)，(1.54,1.82)，(1.56,2.08).

Apf: (1.14,1.82)，(1.18,1.96)，(1.20,1.86)，(1.26,2.00)，(1.28,2.00)，(1.30,1.96).

现在的问题是：

（i）根据如上资料，如何制定一种方法，正确地区分两类蠓虫。

（ii）对触角和翼长分别为(1.24,1.80)，(1.28,1.84)与(1.40,2.04)的 3 个标本，用所得到的方法加以识别。

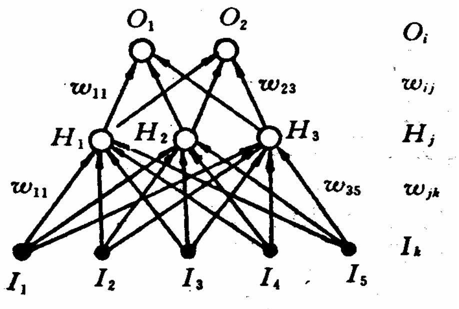
（iii）设 Af 是宝贵的传粉益虫，Apf 是某疾病的载体，是否应该修改分类方法。

如上的问题是有代表性的，它的特点是要求依据已知资料（9 支 Af 的数据和 6 支 Apf 的数据）制定一种分类方法，类别是已经给定的（Af 或 Apf）。今后，我们将 9 支

Af 及 6 支 Apf 的数据集合称之为学习样本。

2.2　多层前馈网络

为解决上述问题，考虑一个其结构如下图所示的人工神经网络，



激活函数由

$$\varphi(v)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha v)}$$

来决定。图中最下面单元，即由●所示的一层称为输入层，用以输入已知测量值。在我们的例子中，它只需包括两个单元，一个用以输入触角长度，一个用以输入翅膀长度。中间一层称为处理层或隐单元层，单元个数适当选取，对于它的选取方法，有一些文献进行了讨论，但通过试验来决定，或许是最好的途径。在我们的例子中，取三个就足够了。最上面一层称为输出层，在我们的例子中只包含二个单元，用以输出与每一组输入数据相对应的分类信息．任何一个中间层单元接受所有输入单元传来的信号，并把处理后的结果传向每一个输出单元，供输出层再次加工，同层的神经元彼此不相联接，输入与输出单元之间也没有直接联接。这样，除了神经元的形式定义外，我们又给出了网络结构。有些文献将这样的网络称为两层前传网络，称为两层的理由是，只有中间层及输出层的单元才对信号进行处理；输入层的单元对输入数据没有任何加工，故不计算在层数之内。

为了叙述上的方便，此处引人如下记号上的约定：令 s 表示一个确定的已知样品标号，在蠓虫问题中，$s=1,2,\cdots,15$，分别表示学习样本中的 15 个样品；当将第 s 个样品的原始数据输入网络时，相应的输出单元状态记为 $O_i^s(i=1,2)$，隐单元状态记为 $H_j^s(j=1,2,3)$，输入单元取值记为 $I_k^s(k=1,2)$。请注意，此处下标 i,j,k 依次对应于输出层、中间层及输入层。在这一约定下，从中间层到输出层的权记为 w_{ij}，从输入层到中间层的权记为 $\overline{w}_{jk}$。如果 w_{ij}，$\overline{w}_{jk}$ 均已给定，那么，对应于任何一组确定的输入 (I_1^s,I_2^s)，网络中所有单元的取值不难确定。事实上，对样品 s 而言，隐单元 j 的输入是

$$\bar{h}_j^s=\sum_{k=1}^{2}\overline{w}_{jk}I_k^s \qquad (5)$$

相应的输出状态是

$$H_j^s=\varphi(\bar{h}_j^s)=\varphi(\sum_{k=1}^{2}\overline{w}_{jk}I_k^s) \qquad (6)$$

由此，输出单元 i 所接收到的迭加信号是

$$h_i^s = \sum_{j=1}^{3} w_{ij} H_j^s = \sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s) \tag{7}$$

网络的最终输出是

$$O_i^s = \varphi(h_i^s) = \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} H_j^s) = \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s)) \tag{8}$$

这里，没有考虑阈值，正如前面已经说明的那样，这一点是无关紧要的。还应指出的是，对于任何一组确定的输入，输出是所有权 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$ 的函数。

如果我们能够选定一组适当的权值 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$，使得对应于学习样本中任何一组 Af 样品的输入 (I_1^s, I_2^s)，输出 $(O_1^s, O_2^s) = (1,0)$，对应于 Apf 的输入数据，输出为 $(0,1)$，那么蠓虫分类问题实际上就解决了。因为，对于任何一个未知类别的样品，只要将其触角及翅膀长度输入网络，视其输出模式靠近 $(1,0)$ 亦或 $(0,1)$，就可能判断其归属。当然，有可能出现介于中间无法判断的情况。现在的问题是，如何找到一组适当的权值，实现上面所设想的网络功能。

2.3 向后传播算法

对于一个多层网络，如何求得一组恰当的权值，使网络具有特定的功能，在很长一段时间内，曾经是使研究工作者感到困难的一个问题，直到 1985 年，美国加州大学的一个研究小组提出了所谓向后传播算法（Back-Propagation），使问题有了重大进展，这一算法也是促成人工神经网络研究迅猛发展的一个原因。下面就来介绍这一算法。

如前所述，我们希望对应于学习样本中 Af 样品的输出是 $(1,0)$，对应于 Apf 的输出是 $(0,1)$，这样的输出称之为理想输出。实际上要精确地作到这一点是不可能的，只能希望实际输出尽可能地接近理想输出。为清楚起见，把对应于样品 s 的理想输出记为 $\{T_i^s\}$，那么

$$E(W) = \frac{1}{2} \sum_{i,s} (T_i^s - O_i^s)^2 \tag{9}$$

度量了在一组给定的权下，实际输出与理想输出的差异，由此，寻找一组恰当的权的问题，自然地归结为求适当 W 的值，使 $E(W)$ 达到极小的问题。将式（8）代入（9），有

$$E(W) = \frac{1}{2} \sum_{s,i} [T_i^s - \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s))]^2 \tag{10}$$

易知，对每一个变量 w_{ij} 或 $\overline{w}_{ij}$ 而言，这是一个连续可微的非线性函数，为了求得其极小点与极小值，最为方便的就是使用最速下降法。最速下降法是一种迭代算法，为求出 $E(W)$ 的（局部）极小，它从一个任取的初始点 W_0 出发，计算在 W_0 点的负梯度方向 $-\nabla E(W_0)$，这是函数在该点下降最快的方向；只要 $\nabla E(W_0) \neq 0$，就可沿该方向移动一小段距离，达到一个新的点 $W_1 = W_0 - \eta \nabla E(W_0)$，$\eta$ 是一个参数，只要 η 足够小，定能保证 $E(W_1) < E(W_0)$。不断重复这一过程，一定能达到 E 的一个（局部）极小点。就本质而言，这就是 BP 算法的全部内容，然而，对人工神经网络问题而言，这一算法的具体形式是非常重要的，下面我们就来给出这一形式表达。

对于隐单元到输出单元的权 w_{ij} 而言，最速下降法给出的每一步的修正量是

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \eta \sum_s [T_i^s - O_i^s]\varphi'(h_i^s)H_j^s = \eta \sum_s \delta_i^s H_j^s \tag{11}$$

此处令

$$\delta_i^s = \varphi'(h_i^s)[T_i^s - O_i^s] \tag{12}$$

对输入单元到隐单元的权 $\overline{w}_{jk}$

$$\begin{aligned}\Delta \overline{w}_{jk} &= -\eta \frac{\partial E}{\partial \overline{w}_{jk}} = \eta \sum_{s,i} [T_i^s - O_i^s]\varphi'(h_i^s) w_{ij} \varphi'(h_j^s) I_j^s \\ &= \eta \sum_{s,i} \delta_i^s w_{ij} \varphi'(h_j^s) I_k^s = \eta \sum_s \overline{\delta}_j^s I_k^s \end{aligned} \tag{13}$$

此处

$$\overline{\delta}_j^s = \varphi'(h_j^s) \sum_i w_{ij} \delta_i^s$$

从（11）和（13）式可以看出，所有权的修正量都有如下形式，即

$$\Delta w_{pq} = \eta \sum_s \delta_p^s v_q^s \tag{14}$$

指标 p 对应于两个单元中输出信号的一端，q 对应于输入信号的一端，v 或者代表 H 或者代表 I。形式上看来，这一修正是“局部”的，可以看作是 Hebb 律的一种表现形式。还应注意，δ_i^s 由实际输出与理想输出的差及 h_i^s 决定，而 $\overline{\delta}_j^s$ 则需依赖 δ_i^s 算出，因此，这一算法才称为向后传播算法。稍加分析还可知道，利用由（11）~（13）式所给出的计算安排，较之不考虑 δ_p^s 的向后传播，直接计算所有含 φ' 的原表达式，极大地降低了计算工作量。这组关系式称作广义 $\delta-$法则，它们不难推广到一般的多层网络上去。

利用这一迭代算法，最终生成在一定精度内满足要求的 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$ 的过程，称为人工神经网络的学习过程。可以看出，这里所提供的学习机制是元与元之间权的不断调整，学习样本中任何一个样品所提供的信息，最终将包含在网络的每一个权之中。参数 η 的大小则反映了学习效率。

为了更有效地应用 BP 算法，我们做出如下一些补充说明。

（i）在式（11）与（13）中，$\Delta w_{ij}, \Delta \overline{w}_{jk}$ 表示为与所有样品 s 有关的求和计算。实际上，我们还可以每次仅考虑输入一个样品所造成的修正，然后，按照随机选取的顺序，将所有样品逐个输入，不断重复这一手续，直至收敛到一个满意的解为止。

（ii）在如上的算法中，利用实际输出与理想输出差的平方和作为度量 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$ 优劣的标准，这并不是唯一的度量方式，完全可以从其它的函数形式出发，例如从相对熵出发，导出相应的算法。

（iii）在如上的讨论中使用的是最速下降法，显然，这也不是唯一的选择，其它的非线性优化方法，诸如共轭梯度法，拟牛顿法等，都可用于计算。为了加速算法的收敛速度，还可以考虑各种不同的修正方式。

（iv）BP 算法的出现，虽然对人工神经网络的发展起了重大推动作用，但是这一算法仍有很多问题．对于一个大的网络系统，BP 算法的工作量仍然是十分可观的，这主要在于算法的收敛速度很慢。更为严重的是，此处所讨论的是非线性函数的优化，那么它就无法逃脱该类问题的共同困难：BP 算法所求得的解，只能保证是依赖于初值选取的局部极小点。为克服这一缺陷，可以考虑改进方法，例如模拟退火算法，或从多个

随机选定的初值点出发，进行多次计算，但这些方法都不可避免地加大了工作量。

2.4 蠓虫分类问题的求解

下面利用上文所叙述的网络结构及方法，对蠓虫分类问题求解。编写 Matlab 程序如下：

```
clear
p1=[1.24,1.27;1.36,1.74;1.38,1.64;1.38,1.82;1.38,1.90;
   1.40,1.70;1.48,1.82;1.54,1.82;1.56,2.08];
p2=[1.14,1.82;1.18,1.96;1.20,1.86;1.26,2.00
   1.28,2.00;1.30,1.96];
p=[p1;p2]';
pr=minmax(p);
goal=[ones(1,9),zeros(1,6);zeros(1,9),ones(1,6)];
plot(p1(:,1),p1(:,2),'h',p2(:,1),p2(:,2),'o')
net=newff(pr,[3,2],{'logsig','logsig'});
net.trainParam.show = 10;
net.trainParam.lr = 0.05;
net.trainParam.goal = 1e-10;
net.trainParam.epochs = 50000;
net = train(net,p,goal);
x=[1.24 1.80;1.28 1.84;1.40 2.04]';
y0=sim(net,p)
y=sim(net,x)
```

§3 处理蠓虫分类的另一种网络方法

3.1 几个有关概念

在介绍本节主要内容之前，首先说明几个不同的概念。在上一节中，我们把利用 BP 算法确定联接强度，即权值的过程称为“学习过程”，这种学习的特点是，对任何一个输入样品，其类别事先是已知的，理想输出也已事先规定，因而从它所产生的实际输出与理想输出的异同，我们清楚地知道网络判断正确与否，故此把这一类学习称为在教师监督下的学习；与它不同的是，有些情况下学习是无监督的，例如，我们试图把一组样品按其本身特点分类，所要划分的类别是事先未知的，需要网络自身通过学习来决定，因而，在学习过程中，对每一输入所产生的输出也就无所谓对错，对于这样的情况，显然 BP 算法是不适用的。

另一个有关概念是所谓有竞争的学习。在上节所讨论的蠓虫分类网络中，尽管我们所希望的理想输出是 (1,0) 或 (0,1)，但实际输出并不如此，一般而言，两个输出单元均同时不为 0。与此不同，我们完全可以设想另外一种输出模式：对应任何一组输入，所有输出单元中，只允许有一个处于激发态，即取值为 1，其它输出单元均被抑制，即取值为 0。一种形象的说法是，对应任何一组输入，要求所有的输出单元彼此竞争，唯一的胜利者赢得一切，失败者一无所获，形成这样一种输出机制的网络学习过程，称为有竞争的学习。

3.2 最简单的无监督有竞争的学习

本节叙述一种无监督有竞争的网络学习方法，由此产生的网络可用来将一组输入样品自动划分类别，相似的样品归于同一类别，因而激发同一输出单元，这一分类方式，是网络自身通过学习，从输入数据的关系中得出的。

蠓虫分类问题对应有教师的网络学习过程，显然不能由如上的方法来解决。但在这种无监督有竞争的学习阐明之后，很容易从中导出一种适用于有监督情况的网络方法；此外，本节所介绍的网络，在数据压缩等多种领域，都有其重要应用。

考虑一个仅由输入层与输出层组成的网络系统，输入单元数目与每一样品的测量值数目相等，输出单元数目适当选取。每一个输入单元与所有输出单元联接，第 j 个输入元到第 i 个输出元的权记为 w_{ij}，同层单元间无横向联接。无妨假设所有输入数值均已规化到 $[-1,1]$ 之间，又因为是有竞争的学习，输出单元只取 0 或 1 两个值，且对应每一组输入，只有一个输出元取 1。

取 1 的输出元记为 i^*，称之为优胜者．对于任何一组输入 s，规定优胜者是有最大净输入的输出元，即对输入 $I=(I_1,\cdots,I_n)$ 而言，

$$h_i=\sum_j w_{ij}I_j\equiv W_i\cdot I \tag{15}$$

取最大值的单元，其中 W_i 是输出元 i 所有权系数组成的向量，也就是说

$$W_{i^*}\cdot I\geq W_i\cdot I\,,\quad (\forall i) \tag{16}$$

如果权向量是按照 $\sum_j w_{ij}^2=1$ 的方式标准化的，（16）式等价于

$$|W_{i^*}-I|\leq|W_i-I|,\quad (\forall i) \tag{17}$$

即优胜者是其标准化权向量最靠近输入向量的输出元。令 $O_{i^*}=1$，其余的输出 $O_i=0$。这样的输出规定了输入向量的类别，但为了使这种分类方式有意义，问题化为如何将学习样本中的所有样品，自然地划分为聚类，并对每一聚类找出适当的权向量。为此，采用如下的算法：随机取定一组不大的初始权向量，注意不使它们有任何对称性。然后，将已知样品按照随机顺序输入网络。对输入样品 s，按上文所述确定优胜者 i^*，对所有与 i^* 有关的权作如下修正

$$\Delta w_{i^*j}=\eta(I_j^s-w_{i^*j}) \tag{18}$$

所有其它输出单元的权保持不变。注意到 $O_{i^*}=1$，$O_i=0(i\neq i^*)$，所有权的修正公式可统一表示为

$$\Delta w_{i^*j}=\eta O_i(I_j^s-w_{i^*j})$$

这一形式也可视为 Hebb 律的一种表现。（18）式的几何意义是清楚的，每次修正将优胜者的权向量向输入向量移近一小段距离，这使得同一样品再次输入时，i^* 有更大的获胜可能。可以合理地预期，反复重复以上步骤，使得每个输出单元对应了输入向量的一个聚类，相应的权向量落在了该聚类样品的重心附近。当然，这只是一个极不严密的说明。

特别应当指出，上述算法，对于事先按照 $\sum I_j=1$ 标准化了的输入数据更为适用，整个过程不难由计算机模拟实现。

为了更有效地使用如上算法，下面对实际计算时可能产生的问题，作一些简要说明。

首先，如果初始权选择不当，那么可能出现这样的输出单元，它的权远离任何输入向量，因此，永远不会成为优胜者，相应的权也就永远不会得到修正，这样的单元称之为死单元。为避免出现死单元，可以有多种方法。一种办法是初始权从学习样本中抽样选取，这就保证了它们都落在正确范围内；另一种办法是修正上述的学习算法，使得每一步不仅调整优胜者的权，同时也以一个小得多的 η 值，修正所有其它的权。这样，对于总是失败的单元，其权逐渐地朝着平均输入方向运动，最终也会在某一次竞争中取胜。此外，还存在有多种处理死单元的方法，感兴趣的读者可从文献中找到更多的方法。

另外一个问题是这一算法的收敛性。如果式（18）或（19）中反映学习效率的参数 η 取为一个固定常数，那么权向量永远不会真正在某一有限点集上稳定下来。因此，应当考虑在公式中引进随学习时间而变化的收敛因子。例如，取 $\eta=\eta(t)=\eta_0 t^{-a}$，$0<a\le 1$。这一因子的适当选取是极为重要的，$\eta$ 下降太慢，无疑增加了不必要工作量，η 下降太快，则会使学习变得无效。

3.3　LVQ 方法

上述有竞争学习的一个最重要应用是数据压缩中的向量量子化方法（Vector Quantization）。它的基本想法是，把一个给定的输入向量集合 I^s 分成 M 个类别，然后用类别指标来代表所有属于该类的向量。向量分量通常取连续值，一旦一组适当的类别确定之后，代替传输或存储输入向量本身，可以只传输或存储它的类别指标。所有的类别由 M 个所谓“原型向量”来表示，我们可以利用一般的欧氏距离，对每一个输入向量找到最靠近的原型向量，作为它的类别。显然，这种分类方法可以通过有竞争的学习直接得到。一旦学习过程结束，所有权向量的集合，便构成了一个“电码本”。

一般而言，上述无监督有竞争的学习，实际提供了一种聚类分析方法，对如蠓虫分类这种有监督的问题并不适用。1989 年，Kohonen 对向量量子化方法加以修改，提出了一种适用于有监督情况的学习方法，称为学习向量量子化（Learning Vector Quantization），该方法可用于蠓虫分类问题。在有监督的情况下，学习样品的类别是事先已知的，与此相应，每个输出单元所对应的类别也事先作了规定，但是，代表同一类别的输出单元可以不止一个。

在 LVQ 中，对于任一输入向量，仍按无监督有竞争的方式选出优胜者 i^*，但权的修正规则则依输入向量的类别与 i^* 所代表的是否一致而不同，确切地说，令

$$\Delta w_{i^*j}=\begin{cases}\eta(I_j^s-w_{i^*j}) & \text{一致情况}\\ -\eta(I_j^s-w_{i^*j}) & \text{不一致情况}\end{cases}$$

前一种情况，修正和无监督的学习一致，权朝向样品方向移动一小段距离；后一种则相反，权向离开样品方向移动，这样就减少了错误分类的机会。

对于上述的蠓虫分类问题，我们编写 Matlab 程序如下：

```
clear
p1=[1.24,1.27;1.36,1.74;1.38,1.64;1.38,1.82;1.38,1.90;
   1.40,1.70;1.48,1.82;1.54,1.82;1.56,2.08];
p2=[1.14,1.82;1.18,1.96;1.20,1.86;1.26,2.00
   1.28,2.00;1.30,1.96];
p=[p1;p2]'
pr=minmax(p)
goal=[ones(1,9),zeros(1,6);zeros(1,9),ones(1,6)]
net = newlvq(pr,4,[0.6,0.4])
net = train(net,p,goal)
Y = sim(net,p)
x=[1.24 1.80;1.28 1.84;1.40 2.04]'
sim(net,x)
```

习 题 十 九

1. 利用 BP 算法及 sigmoid 函数，研究以下各函数的逼近问题

（i） $f(x)=\dfrac{1}{x}$， $1 \le x \le 100$

（ii） $f(x)=\sin x$， $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

对每一函数要完成如下工作：

① 获取两组数据，一组作为训练集，一组作为测试集；

② 利用训练集训练一个单隐层的网络；用测试集检验训练结果，改变隐层单元数，研究它对逼近效果的影响。

2. 给定待拟合的曲线形式为

$$f(x)=0.5+0.4\sin(2\pi x)$$

在 $f(x)$ 上等间隔取 11 个点的数据，在此数据的输出值上加均值为 0，均方差 $\sigma=0.05$ 的正态分布噪声作为给定训练数据，用多项式拟合此函数，分别取多项式的阶次为 1，3 和 11 阶，图示出拟合结果，并讨论多项式阶次对拟合结果的影响。