Jednoduchý příklad (povinné)

Následující příklad potrápil značnou část třetí skupiny, pojďme si jej vyřešit *krok po kroku.*

12:45: Vyřešte $\log_4(x^2-9) = 3 + \log_4(x+3)$.

První "zrada" přichází ve formě konstanty 3 zadané v rovnici. Na cvičení jsme si ukazovali, že číslo 1 lze přepsat pomocí logaritmu, v této uloze pracujeme s logaritmy o základu 4, tj. $1 = \log_4 4$. My však potřebujeme přepsat číslo 3. Jak na to? Napišme si trojku jako $3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \log_4 4$. Pak stačí přeci použít třetí vlastnost logaritmů ze cvičení, tedy

$$\log x^\alpha = \alpha \log x \quad \text{(vlastnost 3)}\,.$$

To nám dovolí psát $3 \cdot \log_4 4 = \log_4 4^3 = \log_4 64$. Pak už stačí na pravou stranu použít vlastnost 1 (tj. součet logaritmů je logaritmus součinu), tedy

$$\begin{aligned} \log_4(x^2-9) &= \log_4 64 + \log_4(x+3)\,, \\ \log_4(x^2-9) &= \log_4\left[64(x+3)\right]\,. \end{aligned}$$

Nyní už stačí jen porovnat argumenty logaritmů neb máme obě strany rovnice zapsané jako logaritmus o tom samém základu z něčeho.

$$x^2 - 9 = 64(x+3)\,.$$

Zde můžeme roznásobit pravou stranu a vše dát na jednu rovnice a řešit kvadratickou rovnici. Anebo si všimneme, že levá strana je zapsána jako rozdíl čtverců, tj. $x^2-9 = (x+3)(x-3)$, potom

$$\begin{aligned} (x+3)(x-3) &= 64(x+3)\,, \\ x-3 &= 64\,, \\ x &= 67\,. \end{aligned}$$

Definiční obor úlohy je $D_f = (-3, +\infty)$, řešení tam tedy patří (kdybyste řešili kvadratickou rovnici, jeden kořenů vám vyjde -3 a ten tam nepatří)

Těžší příklad (dobrovolné)

Pojďme si vyřešit na první pohled složitěji vypadající logaritmickou nerovnici.

Zadání: Vyřešte $x^{\log x} \geq 1000x^2$ (pozn. zde $\log x$ značí dekadický logaritmus, tedy o základu 10).

Nejdříve rovnici zlogaritmujeme (tj. aplikujeme logaritmus na pravou i levou stranu nerovnice) a aplikujeme třetí vlastnost logaritmu (levá strana) a první vlastnost (pravá strana), to dává

$$\begin{aligned} \log\left(x^{\log x}\right) &\geq \log(1000x^2)\,, \\ \log x \log x &\geq \log 1000 + 2\log x\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\log x \log x = \log^2 x$, po převedení na jednu stranu

$$\log^2 x - 2\log x - \log 1000 \geq 0\,.$$

Stejně jako jsme použili substituci u rovnic exponenciálních, můžeme ji použít i zde s tím, že $\log x = y$, dále využijeme, že $\log 1000 = 3$ (pracujeme s dekadickým logaritmem!), potom

$$y^2 - 2y - 3 \geq 0\,.$$

Kořeny jsou $y_1 = -1$ a $y_2 = 3$, řešíme nerovnici $(y+1)(y-3) \geq 0$. Budeme řešit tabulkou (nulové body souhlasí s kořeny), výsledkem je (ověřte si!) sjednocení $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ (čísla -1 a 3 tam patří, protože neřešíme ostrou nerovnost!). Nesmíme ale zapomenout, že toto je řešení kvadratické nerovnice výše, musíme desubstitovat, tedy

$$
\begin{aligned}
-1 &= \log x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0.1\,, \\
3 &= \log x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1000\,.
\end{aligned}
$$

Zdálo by se tedy, že řešením nerovnice je sjednocení $(-\infty, 0.1] \cup [1000, +\infty)$. Je tomu ale skuktečně tak? Nikoliv, musíme vzít ještě v potaz definiční obor logaritmu $\log x$ (neb se vyskytuje v zadání), ten má definiční obor $D_f = (0, +\infty)$, musíme tedy seříznout sjednocení výše o záporná čísla, což nám jako výsledek nerovnice dá $(0, 0.1] \cup [1000, +\infty)$