9:15

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

Najdi nejdříve limity v krajních bodech definičního oboru ($D_f = \mathbb{R}$, neb diskriminant kvadratického polynomu je $D = (-4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 < 0$.), tzn. hledejme limity

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} \overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{x\to-\infty} |x| \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} = +\infty\,.$$

Obě limity mají stejné znaménko u nekonečna, globální extrém (konkrétně minimum, maximum ne) může existovat.
Najdi stacionární body, tj. řeš rovnici $f'(x) = 0$. Máme

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 8}} \cdot (2x - 4) = 0\,.$$

Nulovým bodem je pouze $x_0 = 2$. Ten rozděluje číselnou osu na intervaly $(-\infty, 2)$ a $(2, \infty)$. Pak

$$f'(x) = \begin{cases} f' > 0 & \text{pro } x \in (2, \infty) \quad \text{tzn. } f \text{ je zde rostoucí} \\ f' < 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 2) \quad \text{tzn. } f \text{ je zde klesající} \end{cases}$$

Na závěr ověřme, že $x_0 = 2$ je extrém pomocí f''(x), tedy

$$f''(x) = \frac{4}{(x^2 - 4x + 8)^{3/2}}\,,$$

$$f''(2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

Protože druhá derivace je kladná, bod $[2, f(2)] = [2, 2]$ je skutečně globální minimum. Nakreslete si graf funkce v Desmosu: https://www.desmos.com/calculator?lang=en

12:45

a) $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$

Najdi nejdříve limity v krajních bodech definičního oboru ($D_f = \mathbb{R}$, neb definiční obor exponenciály i lineární funkce je $\mathbb{R}$), tzn. hledejme limity

$$\lim_{x\to+\infty} (x + 2)\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\infty} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x + 2)\mathrm{e}^{-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty\,.$$

Při výpočtu první limity po limitním přechodu dostaneme nedefinovaný výraz $\infty \cdot 0$, proto jsme přešli k L'hospitalově pravidlu převodem exponenciály do jmenovatele. Funkce diverguje v minus nekonečnu, nemůže mít globální minimum, může mít však globální maximum. Najdi stacionární body, tj. řeš rovnici $f'(x) = 0$. Máme

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x + 2)\mathrm{e}^{-x}(-1) = \mathrm{e}^{-x}(-x - 1) = 0\,.$$

Nulovým bodem je pouze $x_0 = -1$. Ten rozděluje číselnou osu na intervaly $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

$$f'(x) = \begin{cases} f' < 0 & \text{pro } x \in (-1, \infty) \quad \text{tzn. } f \text{ je zde klesající} \\ f' > 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \quad \text{tzn. } f \text{ je zde rostoucí} \end{cases}$$

Na závěr ověřme, že $x_0 = -1$ je extrém pomocí f''(x), tedy

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}x\,,$$

$$f''(-1) = -\mathrm{e} < 0\,.$$

Protože druhá derivace je záporná, bod $[-1, f(-1)] = [-1, \mathrm{e}]$ je skutečně globální maximum. Nakreslete si graf funkce v Desmosu: https://www.desmos.com/calculator?lang=en