

Př. 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \sqrt{n^2 - 5n - 9}.$$

Řešení:

Evaluuujeme-li limitu, dostaneme nedefinovaný výraz $\infty - \infty$ (rozdíl nekonečen). K řešení použijeme fintu 3 (tj. rozšíření výrazem s opačným znaménkem ve tvaru jedničky), dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \sqrt{n^2 - 5n - 9} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \sqrt{n^2 - 5n - 9} \\ &\cdot \frac{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \sqrt{n^2 - 5n - 9}}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \sqrt{n^2 - 5n - 9}}. \end{aligned}$$

Na čitatel použijeme rozdíl čtverců $a^2 - b^2$, potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 5n + 3) - (n^2 - 5n - 9)}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \sqrt{n^2 - 5n - 9}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n + 12}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \sqrt{n^2 - 5n - 9}}.$$

Zde stále po dosazení dostáváme ∞/∞ , použijme fintu 1, což dává

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} \frac{10 + \frac{12}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{n} - \frac{9}{n^2}}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{10}{1 + 1} = 5.$$

Př. 2. Zderivujte funkci a nalezněte D_f i $D_{f'}$

$$f(x) = e^{2x^2 - 3x} + \frac{x^2 + 4}{3x}$$

Řešení:

Funkce sestává ze dvou členů (exponenciála a lomená funkce), definičním oborem jsou reálná čísla bez nuly (tj. $\mathbb{R} - \{0\}$), derivace součtu je součet derivací. Exponenciálu budeme derivovat jako složenou funkci, lomenou funkci pomocí pravidla o podílu.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x^2 - 3x}(4x - 3) + \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 4) \cdot 3}{9x^2} \\ &= e^{2x^2 - 3x}(4x - 3) + \frac{6x^2 - 3x^2 - 12}{9x^2} \\ &= e^{2x^2 - 3x}(4x - 3) + \frac{x^2 - 4}{3x^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f' jsou reálná čísla bez nuly, tj. $\mathbb{R} - \{0\}$.

Př. 3. Pro hyperbolu zadanou jako

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 2}$$

nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = -3$. Načtrhněte hyperbolu včetně tečny v tomto bodě. Vyznačte též průsečíky hyperboly a tečny se souřadnými osami.

Řešení:

Rovnice tečny je dána jako

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{směrnice}} x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{\text{absolutní člen}}.$$

Napočítejme si derivaci funkce $f(x)$, tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 \cdot (x+2) - (3x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{5}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Nyní určíme $f'(-3) = 5$ a $f(-3) = 8$, rovnice tečny je pak ve tvaru

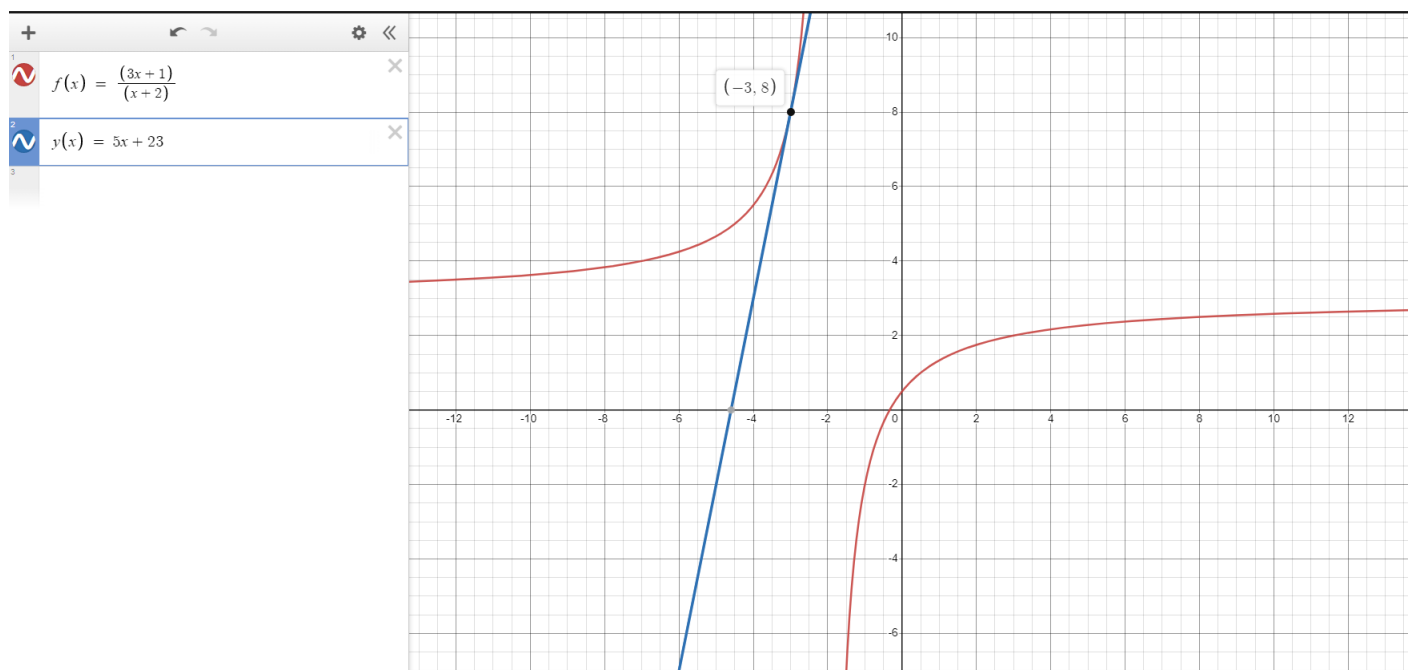
$$y(x) = 5x + 8 - 5 \cdot (-3) = 5x + 23.$$

Průsečíky s osami pro tuto tečnu jsou $P_y = [0, 23]$ a $P_x = [-23/5, 0]$. Pro hyperbolu jsou potom $P_y = [0, 1/2]$ a $P_x = [-1/3, 0]$.

Abychom mohli hyperbolu nakreslit, převedeme jí do středového tvaru, tedy

$$(3x+1) : (x+2) = 3 - \frac{5}{x+2} = 3 + \frac{-5}{x - (-2)}.$$

Středový tvar je pak $[-2, 3]$ a protože $k = -5 < 0$, ramena leží v 2. a 4. kvadrantu.



Př. 4. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$$

Řešení:

1. Studovanou funkcí je kubický polynom, o polynomech víme, že jejich definiční obor jsou reálná čísla, $D_f = \mathbb{R}$. Nyní vyšetříme paritu funkce

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^3 + 3(-x)^2 + 9(-x) + 5 \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x + 5. \end{aligned}$$

Vidíme, že $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, funkce tedy není lichá a ani sudá. Obor hodnot si necháme na konec (vykoukáme z grafu) neb invertovat kubický polynom není v našich silách.

2. Spočteme průsečíky s osami. Průsečík s osou x nalezneme tak, že položíme $y = 0$, tzn. řešíme

$$0 = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$$

Toto je kubická rovnice - víme, že se dá řešit Cardanovými vzorci (to však neumíme), anebo budeme kořen hádat (dosazujeme $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). To chvíli snažení si všimneme, že $x = -1$ rovnici splňuje a je tedy kořenem. Tzn, že můžeme psát

$$-x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = (x + 1)P_2(x)$$

Polynom $P_2(x)$ vyjádřím z rovnice výše jako

$$P_2(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 + 9x + 5}{x + 1},$$

$$(-x^3 + 3x^2 + 9x + 5) : (x + 1) = -x^2 + 4x + 5.$$

Nyní už mi stačí nalézt kořeny kvadratického polynomu $P_2(x) = -x^2 + 4x + 5$, ty nalezneme diskriminantem

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Super, vidíme, že kořen $x_{1,3} = -1$ je dvojnásobný a třetím kořenem je $x_2 = 5$, tzn. $P_x = [-1, 0]$ a $P_x = [5, 0]$. Nyní v tomto bodě ještě vyšetříme znaménko funkce - nulovými body jsou právě kořeny kubického polynomu, ty nám číselnou osu rozdělují na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$ a $(5, +\infty)$. Průsečík s osou y je triviální, položíme $x = 0$, což nám ihned dává $P_y = [0, 5]$. Ověříme, že funkce v daných intervalech nabývá následujících znamének

$$\begin{aligned} (-\infty, -1) : &+ \\ (-1, 5) : &+ \\ (5, +\infty) : &- \end{aligned}$$

3. V tomto bodě spočítáme limity v krajních bodech D_f , což je pouze $\pm\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) \stackrel{\text{VOAL}}{=} -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) \stackrel{\text{VOAL}}{=} +\infty. \end{aligned}$$

Zde pozor na znaménka, při výpočtu druhé limity na konci máme $-(-\infty)^3 = +\infty$.

4. V tomto bodě spočítáme první derivaci, tedy

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9.$$

Definiční obor derivace jsou též reálná čísla, $D_{f'} = \mathbb{R}$.

5. Nalezneme podezřelé body, tedy řešíme

$$f'(x) = 0 \rightarrow (-3x^2 + 6x + 9) = 0.$$

Opět kořeny nalezneme diskriminantem

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{-6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6+12}{-6} = -1 \\ x_2 = \frac{-6-12}{-6} = 3 \end{cases}$$

6. Nyní vyšetříme monotonii. Nulové body $x_{1,2} = -1, 3$ nám dělí číselnou osu na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ a $(3, \infty)$. Potom znaménka f' v těchto intervalech jsou

$$(-\infty, -1) : -$$

$$(-1, 3) : +$$

$$(3, \infty) : -$$

Funkce roste na intervalu $(-1, 3)$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(3, \infty)$. Protože v těch nulových bodech mění f' znaménko, ihned vidíme, že se jedná o lokální extrémy, a sice v bodě $x = -1$ minimum (klesáme, rosteme) a v bodě $x = 3$ maximum (rosteme, klesáme). Globální extrémy to být nemůžou, neb v $\pm\infty$ divergujeme do $\pm\infty$.

7. Asymptoty. Svislé žádné nemáme, neb nemáme díru v definičním oboru. Limity v $\pm\infty$ vycházejí $\pm\infty$, takže vodorovné též nemáme. Zbývá vyšetřit šikmé ($y = kx + q$), tedy

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 + 9x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^2 + 3x + 9 = -\infty.$$

Protože směrnice vychází nekonečná, tak neexistují ani šikmé asymptoty.

8. Vyšetříme křivost, spočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -6x + 6.$$

Inflexní bod získáme řešením $-6x + 6 = 0$, to dává $x = 1$ (zároveň je to jediným nulovým bodem druhé derivace). Ten nám dělí číselnou osu na $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, znaménko f'' v těchto intervalech

$$(-\infty, 1) : +$$

$$(1, \infty) : -$$

Na intervalu $(-\infty, 1)$ je funkce konvexní, na intervalu $(1, \infty)$ je funkce konkávní.

9. Graf na další straně, z něho zároveň vidíme, že obor hodnot jsou též reálná čísla, $H_f = \mathbb{R}$.

Průběžný test (cvičný)

