Př. 1B. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n+1}+4^{n+1}}{2^{n-1}-9^{n-1}}\,.$$

Řešení:

Použijeme fintu 2, člen s největším základem je 9^n:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n+1}+4^{n+1}}{2^{n-1}-9^{n-1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{9^n}{9^n}\frac{9^{1/2}+4\cdot(4/9)^n}{2^{-1}\cdot(2/9)^n-9^{-1}} \\ &= \frac{9^{1/2}}{-9^{-1}} \\ &= -27\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Př. 2B. Zderivujte funkci a určete definiční obor D_f a $D_{f'}$:

$$f(x) = (6x-1)\ln(2x+4) + \sqrt{16x^2+5}\,.$$

Řešení:

Definiční obor funkce určíme ze dvou podmínek, z logaritmu a odmocniny, vidíme, že musí platit

$$\begin{aligned}2x+4 &> 0\,,\\ 16x^2+5 &\geq 0\,.\end{aligned}$$

Na reálných číslech platí druhá podmínka vždy ($x^2 > -5/16$, druhá mocnina nějakého čísla je vždy kladná), z první podmínky tedy $D_f = (-2,+\infty)$.
Derivace vychází

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6\ln(2x+4) + (6x-1)\cdot\frac{1}{2x+4}\cdot 2 + \frac{32x}{2\sqrt{16x^2+5}} \\ &= 6\ln(2x+4) + \frac{6x-1}{x+2} + \frac{16x}{\sqrt{16x^2+5}}\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Musíme si zde navíc ohlídat, že z druhého členu vidíme, že $x \neq -2$, z logaritmu zase dostaneme $(-2,+\infty)$, jejich průnikem jednoduše máme $D_{f'} = D_f = (-2,+\infty)$ (ve třetím členu nikdy nulou dělit nebudeme).

Př. 3B Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = -x^2+8x+20$ v bodě $x_0 = 2$, nakreslete.

Řešení:

Víme, že rovnice tečny je

$$\begin{aligned}y(x) &= ax+b\,,\\ y(x) &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0\,.\end{aligned}$$

Derivace dává $f'(x) = -2x+8$, v bodě $x_0 = 2$ dostaneme $a = f'(2) = 4$, směrnice tečny je tedy 4. Pak stačí spočítat $f(2) = -4+16+20 = 32$ a člen $x_0 f'(x_0) = 8$, celkově tedy $b = 32-8 = 24$. Rovnice tečny tedy

$$y(x) = 4x+24\,.$$

Bod dotyku je pak $T[2, f(x_0)] = T[2,32]$. Průsečíky tečny s osami $P_y = [0,24]$ a $P_x = [-6,0]$.
Pak stačí spočítat parametry paraboly:

$$\begin{aligned}P_y &= [0,20] \quad P_{x1} = [-2,0]\,,\\ P_{x2} &= [10,0] \quad V = [4,36]\,.\end{aligned}$$

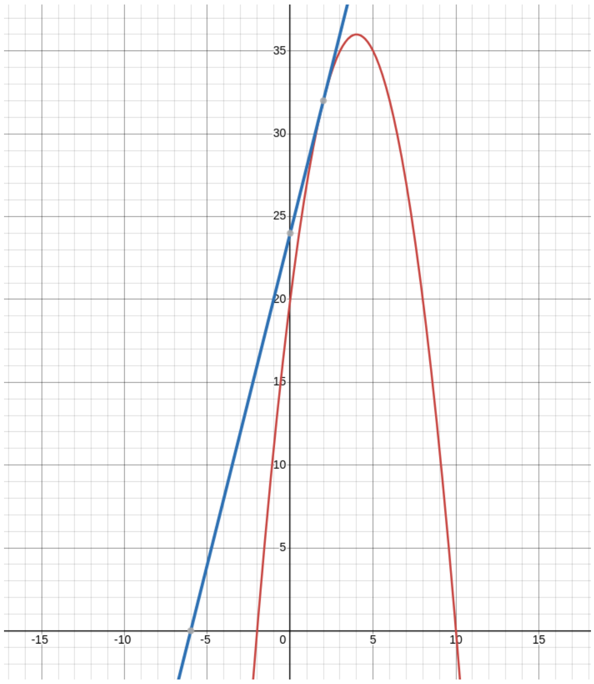

Figure 1: Graf k úloze 3.

Př. 4B. Průběh funkce $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

Řešení:

1. Jedná se o polynom, definiční obor jsou reálná čísla, $D_f = \mathcal{R}$. Paritu funkce vyšetříme
$$f(-x) = -x^3 - x^2 + 5x - 3\,.$$
Taková funkce se nerovná ani $-f(x)$ a ani $f(-x)$, funkce není sudá ani lichá.

2. Průsečík s osou y hned vidíme $P_y = [0, -3]$. Průsečíky s osou x musíme nalézt řešením rovnice $f(x) = 0$. Jedná se o kubickou funkci, uhádneme nejdříve jeden kořen ($x = -1$), další dva kořeny pak nalezneme dělením
$$P_2(x) = (x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x + 1) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)\,.$$
Vidíme, že kořen $x = -1$ dvojnásobný, třetí kořen je $x = 3$, tj. $P_{x1,2} = [-1, 0]$ a $P_{x3} = [3, 0]$. Znaménko vyšetřujeme na reálné ose rozsekané na tři podintervaly, zjišťujeme
$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: \text{ záporná} \\ (-1, 3) &: \text{ záporná} \\ (3, +\infty) &: \text{ kladná}\,. \end{aligned}$$

3. Limity jsou jednoduché, použijeme fintu 1:
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x \to +\infty \\ -\infty & \text{pro } x \to -\infty \end{cases}$$

4. Derivace $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$. Řešením rovnice $f' = 0$ získáme dva kořeny/nulové body, a sice $x_1 = 5/3$ a $x_2 = -1$. Monotonie pak dává:
$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: f' > 0 \\ (-1, 5/3) &: f' < 0 \\ (5/3, +\infty) &: f' > 0\,. \end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ roste na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(5/3, +\infty)$ a klesá na intervalu $(-1, 5/3)$. Vidíme, že v bodě $x = -1$ je (lokální) maximum a v bodě $x = 5/3$ je (lokální) minimum. Protože limity z funkce $f(x)$ utíkají do $\pm\infty$, tyto extrémy jsou nutně lokální! Funkční hodnoty pak $f(-1) = 0$ a $f(5/3) = -256/27$.

5. Žádné vertikální asymptoty nejsou (definiční obor jsou reálná čísla). Vodorovné také ne (limity z $f(x)$ vycházejí $\pm\infty$). Potenciální šikmá asymptota má směrnici danou limitou $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, vidíme ale, že podělení $x-$kem pouze sníží řád polynomu na kvadratický, směrnice tedy nutně vyjdou nekonečné a tím pádem šikmá asymptota neexistuje.

6. Druhá derivace vychází $f''(x) = 6x-2$, inflexní bod získáme řešením rovnice $f'' = 0$, získáme $x = 1/3$ (tento inflexní bod je zároveň jediný nulový bod druhé derivace, snadno tak určíme křivost). Křivost:

$$(-\infty, 1/3) : f'' < 0\,,$$
$$(1/3, +\infty) : f'' > 0\,.$$

   Funkce $f(x)$ je tedy konkávní na intervalu $(-\infty, 1/3)$ a konvexní na intervalu $(1/3, +\infty)$. Funkční hodnota inflexního bodu $f(1/3) = -128/27$.

7. Z grafu funkce (níže) vidíme, že obor hodnot musí být $H_f = \mathcal{R}$.

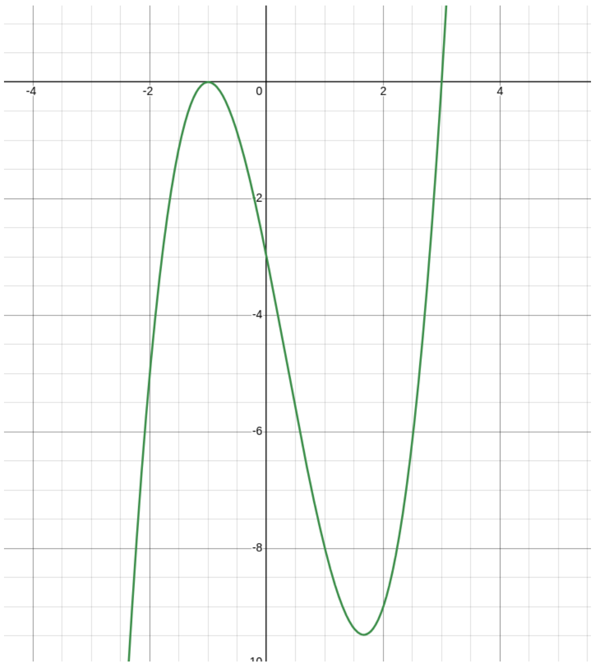

Figure 2: Graf funkce z úlohy 4.