Př. 1. Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+5n+3} - \sqrt{n^2-5n-9}\,.$$

Řešení:

Evaluujeme-li limitu, dostaneme nedefinovaný výraz $\infty - \infty$ (rozdíl nekonečen). K řešení použijeme fintu 3 (tj. rozšíření výrazem s opačným znaménkem ve tvaru jedničky), dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\ \to+\infty} \sqrt{n^2+5n+3} - \sqrt{n^2-5n-9} = \lim_{n\to+\infty} &\sqrt{n^2+5n+3} - \sqrt{n^2-5n-9} \\ &\cdot \frac{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2-5n-9}}{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2-5n-9}}\,.\end{aligned}$$

Na čitatel použijeme rozdíl čtverců $a^2 - b^2$, potom

$$\lim_{n\ \to+\infty} \frac{(n^2+5n+3)-(n^2-5n-9)}{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2-5n-9}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10n+12}{\sqrt{n^2+5n+3}+\sqrt{n^2-5n-9}}\,.$$

Zde stále po dosazení dostáváme ∞/∞, použijme fintu 1, což dává

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \frac{10+\frac{12}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}-\frac{9}{n^2}}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{10}{1+1} = 5\,.$$

Př. 2. Zderivujte funkci a nalezněte D_f i $D_{f'}$.

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x^2-3x} + \frac{x^2+4}{3x}$$

Řešení:

Funkce sestává ze dvou členů (exponenciála a lomená funkce), definičním oborem jsou reálná čísla bez nuly (tj. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, derivace součtu je součet derivací. Exponenciálu budeme derivovat jako složenou funkci, lomenou funkci pomocí pravidla o podílu.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{2x^2-3x}(4x-3) + \frac{2x\cdot 3x - (x^2+4)\cdot 3}{9x^2} \\ &= \mathrm{e}^{2x^2-3x}(4x-3) + \frac{6x^2-3x^2-12}{9x^2} \\ &= \mathrm{e}^{2x^2-3x}(4x-3) + \frac{x^2-4}{3x^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f' jsou reálná čísla bez nuly, tj. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Př. 3. Pro hyperbolu zadanou jako
$$f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$$
nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = -3$. Načtrtněte hyperbolu včetně tečny v tomto bodě. Vyznačte též průsečíky hyperboly a tečny se souřadnými osami.

Řešení:

Rovnice tečny je dána jako

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{směrnice}}\, x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{\text{absolutní člen}}\,.$$

Napočítejme si derivaci funkce $f(x)$, tedy

$$f'(x) = \frac{3\cdot(x+2)-(3x+1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}\,.$$

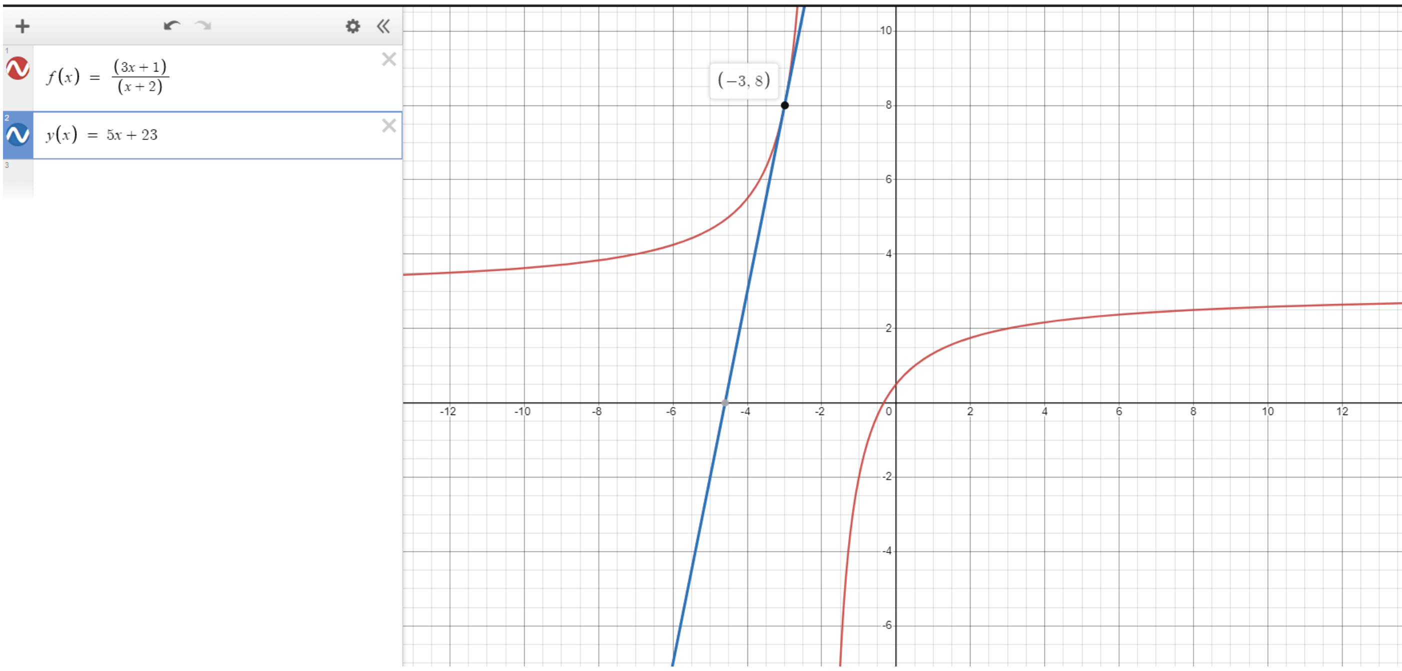
Nyní určíme $f'(-3)=5$ a $f(-3)=8$, rovnice tečny je pak ve tvaru

$$y(x) = 5x+8-5\cdot(-3) = 5x+23\,.$$

Průsečíky s osami pro tuto tečnu jsou $P_y=[0,23]$ a $P_x=[-23/5,0]$. Pro hyperbolu jsou potom $P_y=[0,1/2]$ a $P_x=[-1/3,0]$.
Abychom mohli hyperbolu nakreslit, převedeme jí do středového tvaru, tedy

$$(3x+1):(x+2) = 3-\frac{5}{x+2} = 3+\frac{-5}{x-(-2)}\,.$$

Středový tvar je pak $[-2,3]$ a protože $k=-5<0$, ramena leží v 2. a 4. kvadrantu.



Př. 4. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5\,.$$

Řešení:

1. Studovanou funkcí je kubický polynom třetího stupně. O polynomech víme, že jejich definiční obor jsou reálná čísla, $D_f = \mathbb{R}$. Nyní vyšetříme paritu funkce

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^3 + 3(-x)^2 + 9(-x) + 5 \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x + 5\,. \end{aligned}$$

   Vidíme, že $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) = -f(x)$, funkce tedy není lichá a ani sudá. Obor hodnot si necháme na konec (vykoukáme z grafu) neb invertovat kubický polynom není v našich silách.

2. Spočtěme průsečíky s osami. Průsečík s osou x naleznu tak, že položím $y = 0$, tzn. řeším

$$0 = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5\,.$$

   Toto je kubická rovnice - víme, že se dá řešit Cardanovými vzorci (to však neumíme), anebo budeme kořen hádat (dosazuj $\pm1, \pm2, \pm3,..$). To chvíli snažení si všimeneme, že $x = -1$ rovnici splňuje a je tedy kořenem. Tzn, že můžu psát

$$-x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = (x+1)P_2(x)$$

   Polynom $P_2(x)$ vyjádřím z rovnice výše jako

$$P_2(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 + 9x + 5}{x+1}\,,$$

$$(-x^3 + 3x^2 + 9x + 5) : (x+1) = -x^2 + 4x + 5\,.$$

   Nyní už mi stačí nalézt kořeny kvadratického polynomu $P_2(x) = -x^2 + 4x + 5$, ty nalezneme diskriminantem

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

   Vidíme, že kořen $x_{1,3} = -1$ je dvojnásobný a třetím kořenem je $x_2 = 5$, tzn. $P_x = [-1, 0]$ a $P_x = [5, 0]$. Nyní v tomto bodě ještě vyšetříme znaménko funkce - nulovými body jsou právě kořeny kubického polynomu, ty nám číselnou osu rozdělují na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$ a $(5, +\infty)$. Průsečík s osou y je triviální, položme $x = 0$, což nám ihned dává $P_y = [0, 5]$. Ověříme, že funkce v daných intervalech nabývá následujících znamének

$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: + \\ (-1, 5) &: + \\ (5, +\infty) &: - \end{aligned}$$

3. V tomto bodě spočítáme limity v krajních bodech D_f, což je pouze $\pm\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 &= \lim_{x\to+\infty} -x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) \overset{\text{VOAL}}{=} -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 &= \lim_{x\to-\infty} -x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) \overset{\text{VOAL}}{=} +\infty\,. \end{aligned}$$

   Zde pozor na znaménka, při výpočtu druhé limity na konci máme $-(-\infty)^3 = +\infty$.

4. V tomto bodě spočítáme první derivaci, tedy
$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9\,.$$
Definiční obor derivace jsou též reálná čísla, $D_{f'} = \mathbb{R}$.

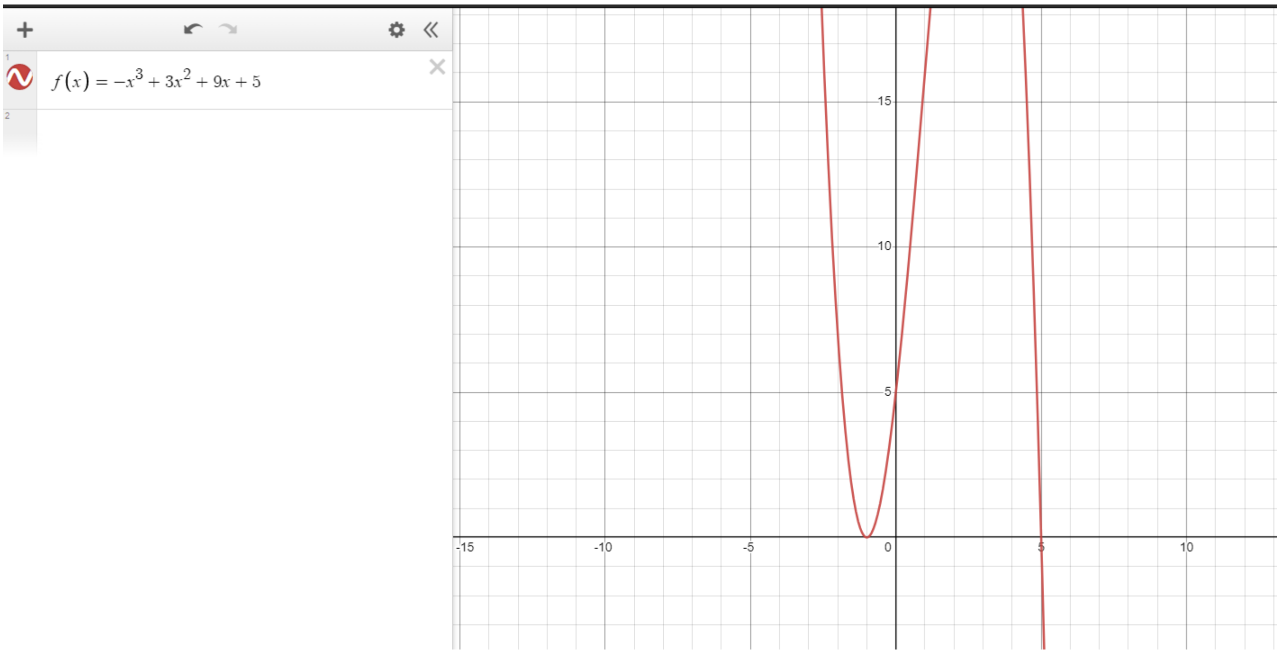
5. Nalezneme podezřelé body, tedy řešíme
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad (-3x^2 + 6x + 9) = 0\,.$$
Opět kořeny nalezneme diskriminantem
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+108}}{-6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6+12}{-6} = -1 \\ x_2 = \frac{-6-12}{-6} = 3 \end{cases}$$

6. Nyní vyšetříme monotonii. Nulové body $x_{1,2} = -1, 3$ nám dělí číselnou osu na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ a $(3, \infty)$. Potom znaménka f' v těchto intervalech jsou
$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: - \\ (-1, 3) &: + \\ (3, \infty) &: - \end{aligned}$$
Funcke roste na intervalu $(-1, 3)$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(3, \infty)$. Protože v těch nulovým bodech mění f' znaménko, ihned vidíme, že se jedná o lokální extrémy, a sice v bodě $x = -1$ minimum (klesáme, rosteme) a v bodě $x = 3$ maximum (rosteme, klesáme). Globální extrémy to být nemůžou, neb v $\pm\infty$ divergujeme do $\pm\infty$.

7. Asymptoty. Svislé žádné nemáme, neb nemáme díru v definičním oboru. Limity v $\pm\infty$ vycházejí $\pm\infty$, takže vodorovné též nemáme. Zbývá vyšetřit šikmé ($y = kx + q$), tedy
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 + 9x + 5}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} -x^2 + 3x + 9 = -\infty\,.$$
Protože směrnice vychází nekonečná, tak neexistují ani šikmé asymptoty.

8. Vyšetříme křivost, spočteme druhou derivaci
$$f''(x) = -6x + 6\,.$$
Inflexní bod získáme řešením $-6x + 6 = 0$, to dává $x = 1$ (zároveň je to jediným nulovým bodem druhé derivace). Ten nám dělí číselnou osu na $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, znaménko f'' v těchto intervalech
$$\begin{aligned} (-\infty, 1) &: + \\ (1, \infty) &: - \end{aligned}$$
Na intervalu $(-\infty, 1)$ je funkce konvexní, na intervalu $(1, \infty)$ je funkce konkávní.

9. Graf na další straně, z něho zároveň vidíme, že obor hodnot jsou též reálná čísla, $H_f = \mathbb{R}$.


$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$
15
10
5
-15
-10
-5
0
5
10