Poznámka: Přímka je 1D množina, nemá tudíž vnitřek M^0. Někteří z Vás si formálně napočítali stacionární body (tj. $\partial_x f = 0$ a $\partial_y f = 0$). Ten Vám vyšel očekávaně mimo přímku. Kdybyste se však volným extrémem na přímku trefili, měli byste už jistotu, že je i oným vázaným extrémem, který byste získali dosazovací metodou.

Zadání: Hledejte globální extrémy na úsečce s koncovými body A a B.

a) $f(x,y) = 3x^2 + x + y^2 + 3y$; $A = [-1,4], B = [3,0]$

Nejdříve spočítáme z koncových bodů rovnici přímky. Ta má obecně tvar $y = ax + b$, sestavíme soustavu rovnic

$$4 = -a + b\,,$$

$$0 = 3a + b\,.$$

Rovnice od sebe odečteme a získáme $4 = -4a$, z toho $a = -1$ a dosazením např. do první rovnice získáme $b = 3$. Rovnice přímky je tak $y = -x + 3$.
Naše kompaktní (tj. uzavřená, omezená) množina, na které hledáme extrém, je jednorozměrná - (tj. nemá M^0), to je dobrá zpráva. Stačí se nám zabývat okrajovými body a hledat vázaný extrém na vazbě danou $y = -x + 3$. Vázaný extrém budeme hledat dosazovací metodou

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,-x+3) \\ &= 3x^2 + x + (-x+3)^2 + 3(-x+3) \\ &= 3x^2 + x + x^2 - 6x + 9 - 3x + 9 \\ &= 4x^2 - 8x + 18 \\ &= h_1(x)\,. \end{aligned}$$

Stacionární bodu 1D funkce h_1 hledáme jako $h_1'(x) = 8x - 8 = 0$, z toho máme stacionární bod $x = 1$ a dosazením do předpisu pro přímku získáme $y = 2$. Kandidát na extrém je $[1,2]$. Porovnáme funkční hodnoty v kandidátech (tj. nalezený kandidát a okrajové body A a B), pak

$$f(1,2) = 3 + 1 + 4 + 6 = 14 \tag{1}$$

$$f(-1,4) = 3 - 1 + 16 + 12 = 30 \tag{2}$$

$$f(3,0) = 27 + 3 = 30\,. \tag{3}$$

Z toho plyne, že v bodech A, B je maximum a v bodě [1,2] minimum.

12:45

b) $f(x,y) = 2x^2 + 2x + y^2 + y$; $A = [0,-4], B = [3,2]$
Nejdříve spočítáme z koncových bodů rovnici přímky. Ta má obecně tvar $y = ax + b$, sestavíme soustavu rovnic

$$-4 = b\,,$$

$$2 = 3a + b\,.$$

Rovnice od sebe odečteme a získáme $-6 = -3a$, z toho $a = 2$ a z první rovnice hned vidíme $b = -4$. Rovnice přímky je tak $y = 2x - 4$.
Naše kompaktní (tj. uzavřená, omezená) množina, na které hledáme extrém, je jednorozměrná - (tj. nemá M^0), to je dobrá zpráva. Stačí se nám zabývat okrajovými body a hledat vázaný extrém na vazbě danou $y = 2x - 4$. Vázaný extrém budeme hledat dosazovací metodou

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,2x-4) \\ &= 2x^2 + 2x + (2x-4)^2 + (2x-4) \\ &= 2x^2 + 2x + 4x^2 - 16x + 16 + 2x - 4 \\ &= 6x^2 - 12x + 12 \\ &= h_2(x)\,. \end{aligned}$$

Stacionární bodu 1D funkce h_2 hledáme jako $h_2'(x) = 12x - 12 = 0$, z toho máme stacionární bod $x = 1$ a dosazením do předpisu pro přímku získáme $y = -2$. Kandidát na extrém je $[1,-2]$.

Porovnáme funkční hodnoty v kandidátech (tj. nalezený kandidát a okrajové body A a B), pak

$$f(1,-2) = 2 + 2 + 4 - 2 = 6 \tag{4}$$
$$f(0,-4) = 16 - 4 = 12 \tag{5}$$
$$f(3,2) = 30\,. \tag{6}$$

Z toho plyne, že v bodě B je maximum a v bodě [1,-2] minimum.