

博弈论补充习题

助教：李国鹏 *

2024 年 3 月 30 日

1 导论

- 先学会解决一个问题
- 再学会提出好的问题

2 习题

2.1 分蛋糕博弈 均衡: $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

假设两个人分一个蛋糕，每个人可以宣布自己想要的份额，即 $a_1 \in [0, 1]$ 且 $a_2 \in [0, 1]$ 。如果 $a_i + a_j \leq 1$ ，则按照该份额分配。如果 $a_i + a_j > 1$ ，则双方均无法分得蛋糕，个体的收益为其分得的蛋糕份额。求解该博弈均衡。如果是3个人呢？ n 个人呢？

2.2 古诺产量竞争 $n=1$ 时: $P = a - bQ$, $\pi = PQ - cQ$, 令 $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$ $Q = \frac{a-c}{2b}$.

假设市场需求函数为 $P = a - bQ$ ，其中 P 是市场价格，而 Q 则是所有企业产量之和。假设市场上有 n 家企业进行产量竞争，企业 i ($1 \leq i \leq n$) 生产一单位产品的边际成本为 c 。求解 $n = 1, n = 2$ ，以及一般情况 n 家企业的产量和对应的市场价格。 $n=2$ 时求产量

$$n=2 \text{ 时 } Q_1 = Q_2 = \frac{a-c}{3b}$$
$$n=N \text{ 时 } Q_i = \frac{a-c}{(N+1)b}$$

2.3 古诺产量竞争：差异化成本

假设市场需求函数为 $P = a - bQ$ ，市场上有2家企业进行产量竞争，企业1生产一单位产品的边际成本为 c_1 ，而企业2则为 c_2 ，假设 $c_1 > c_2$ 。求

*联系方式：邮箱: guopengli@hust.edu.cn 或者 QQ: 2640747785

基本同上. $Q_1 = \frac{a-c_1-bQ_2}{2b}$ $Q_2 = \frac{a-c_2-bQ_1}{2b}$

联立 $Q_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}$ $Q_2 = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}$

解2家企业的产量和对应的市场价格，对比两家企业的产量，你发现了什么？

$$D = \begin{cases} 0 & p_1 > p_2 \\ \frac{1}{2} & p_1 = p_2 \\ 1 & p_1 < p_2 \end{cases} \quad \text{另一边同理.}$$

2.4 博川德价格竞争

$$p_1 = p_2 = c \quad \text{利润都是0}$$

市场上有寡头企业1和2竞争，竞争的策略是他们的价格（分别为 p_1 和 p_2 ），并且两个企业生产同质化产品，且产品的边际成本为固定常数 c 。不失一般性，假设市场上有1单位消费者。请写出消费者对两家企业产品的需求函数以及均衡时的厂商利润。

2.5 差异化产品竞争 - 样条 - 样算

市场上有寡头企业1和2竞争，竞争的策略是他们的价格（分别为 p_1 和 p_2 ），并且两个企业生产差异化产品，企业1的需求函数为 $x_1 = p_2 - ap_1$ ，而企业2的需求函数为 $x_2 = p_1 - bp_2$ ，其中 $0 < a, b < 1$ ，请求解两家企业的均衡价格。

$$p_1 = \frac{bc + 2abc}{4ab - 1}, \quad p_2 = \frac{ac + 2abc}{4ab - 1}$$

2.6 打怪博弈

$$0/100$$

假设有100个勇士为了守护村庄要去打妖怪，妖怪很强大，如果小于90个人去，均会被妖怪吃掉，每个打妖怪的人损失5单位，其他人损失1单位。而大于等于90个人时，妖怪会被打死，打妖怪的人由于成为英雄会获得5单位收益，其他人则是1单位。请求解该博弈的均衡。

2.7 时尚品博弈

$$10$$

假设有100个爱美的女孩子买奢侈品。每个女生的决策是买或者不买。 $a_i = 0$ 表示不买， $a_i = 1$ 表示买。每个女孩子都想标新立异，如果有超过10个人穿这件衣服，她们买的收益就是-1，反之为1。请求解该博弈均衡。

2.8 公地悲剧

假设有 n 个牧民，每个人可以决定是否养一只羊，即牧民 i 的策略是 $s_i \in \{0, 1\}$ 。牧民 i 的收益为

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = -4 \sum_{j=1}^n s_j, \quad \text{总体上不养}$$

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) = s_i - \frac{5(\sum_{i=1, \dots, n} s_i)}{n} \quad \text{个人: } n > 5 \text{ 养}$$

求解该问题的社会福利最大化的解和均衡解，均衡是否是社会最优呢？是否取决于 n 呢？

$$n < 5 \text{ 不养}$$

2.9 选美博弈

假设有一组数位于 $[0, 100]$ 之间，有3个人参与竞猜。如果谁猜的数距离位于平均值的 $2/3$ 更近，则谁获得1，其余人获得0，如果有多个人同时最接近，则均分1单位收益。求解该博弈均衡。如果是4个人，5个人一直到 n 个人呢？

如果每个人的收益分为两部分，第一部分是报数的直接收益 αa_i ，第二部分则是如果谁猜的数距离位于平均值的 $2/3$ 更近，则谁获得1，其余人获得0，如果有多个人同时最接近，则均分一单位收益。此时的均衡是什么呢？如何取决于 n 呢？