# 考试内容

## 1随机过程的定义

是一个二元函数.

## 2.随机过程的数字特征

均值函数,方差函数,协方差函数,相关函数,这几个函数之间的关系

## 3. 几种重要的随机过程

二阶矩的概念,正交增量过程的概念,性质独立增量过程

后面有很多章节是专门讲的,这里不说

![[00\_随机考点#第二章 - 随机过程的概念]]

# **1.随机过程的数学定义**

1. **随机变量的定义**

在每次试验中，以一定概率取某个事先已知但未确定的数值。

1. **随机过程的定义**

随时间或其他参数变化的随机变量。

设 是概率空间， 为参数集。随机变量族 构成一个随机过程，其特性如下：

1. 对固定的 ， 是 上的随机变量。
2. 对固定的 ， 是随机过程的一个样本函数(又叫做轨道)。

**统计规律**

**· 柯尔莫哥洛夫存在定理:**

F的分布已知,可以唯一确定相应的随机变量.

• **有限维分布函数族**：

若 为随机过程，则对任意 和 ，定义随机向量联合分布函数为：

# **2.随机过程的数字特征**

## **2.1 均值函数**

反映随机过程在时刻 的平均值：

m是关于t的函数.是时间轴上拉出来的一条线

## **2.2 方差,协方差函数**

### **2.2.1方差函数**

==要求随机过程是二阶矩过程,针对的对象都是同一个随机过程里的切片==

1. 对于所有 ，均值函数 存在并有限：
2. 对于所有 ，二阶矩 存在并有限：

### **2.2.2协方差函数**

反映随机过程在时刻 和 的线性相关程度：

自变量是t和s.

#### 证明:

**（1）展开乘积** 展开协方差函数的定义：

将括号展开：

**（2）代入期望的定义** • 。 • 。 • 。

代入后：

故得证

**方差函数** 是特殊的协方差函数.描述随机过程在时刻 对均值的偏离程度：

其中： • 是随机过程的**均值函数**。 • 表示随机过程在时刻 的方差。

## **2.3 相关函数**

描述随机过程在时刻 和 的线性相关性：

## 2.4互相关函数和互协方差函数

带互字的都是两个随机过程的关系

### **2.4.1. 互相关函数**

**定义**

设 和 是两个随机过程，其互相关函数定义为：

其中： • 是两个时间点； • 表示 和 的相关程度。

**直观理解**

互相关函数描述了两个随机过程 和 在不同时间点 和 上的**线性相关性**。 • 如果 ，说明 和 在某种意义上正相关； • 如果 ，说明两者负相关； • 如果 ，说明两者在这两个时间点上**不相关**。

### **2.4.2. 互协方差函数**

**定义**

互协方差函数是互相关函数去掉均值影响的版本，定义为：

其中： • 是 的均值； • 是 的均值。

### **2.4.3. 互相关函数与互协方差函数的关系**

两者的关系如下：

• 互相关函数包含了均值的影响； • 互协方差函数则剔除了均值的影响，更能体现随机过程之间的线性关系。

# 3.几种重要的随机过程

## 3.1二阶矩过程

1. **定义**

若随机过程的均值和二阶矩均存在，则称其为**二阶矩过程**：

1. **性质**：

• 均值函数必存在。 • 协方差函数和相关函数均存在。 • Schwarz 不等式：

3. 证明

证明二阶矩过程就用定义证明就行.证明

## 3.2正交增量过程

### **定义**

==正交增量过程是一个零均值的二阶矩过程==

设随机过程 定义在一个时间域 上。如果对于任意==两个不重叠的时间区间 和 （即 ）==，对应的增量 和 满足以下**正交性**条件，则称 为**正交增量过程**：

其中：

• 是复值随机过程。 • 是增量的复共轭。共轭加上之后就让复过程也满足了计算,不影响实过程的计算.

正交增量过程的核心性质是不同时间区间上的增量彼此正交。这意味着：

### **性质**

拆开来乘,得到的那个t-s和s-0正交的,所以第二项没了.成为了:

就是小的那个的方差.

## 3.3独立增量过程

## 定义

设随机过程 定义在时间域 上。如果对于任意一组==不重叠==的时间区间 、、、，对应的增量：

$$

X(t\_2) - X(t\_1), X(t\_4) - X(t\_3) , , X(t\_n) - X(t\_{n-1})

$$

是**相互独立的随机变量**，则称 是一个**独立增量过程**。

**独立增量的条件：**

这里用的是那个独立的定义 说的专业一点就是: 对于任意正整数 ，任意时间点 ，有：

简单来说，这意味着每段时间的增量与其他时间段的增量统计上**互不依赖**。

## 3.4马尔可夫过程

t期只受t-1期状态影响,成为马尔可夫性,又叫无后效性

## 3.5正态过程和维纳过程

### 3.5.1正态过程

任何切面都是正态

一个随机过程 被称为**正态过程**，如果对于任意的时间点 ，随机向量 服从**多元正态分布**。

具体来说，正态过程满足：

其中： • 均值向量 ； • 协方差矩阵 ； • 是均值函数； • 是协方差函数。

### 3.5.2维纳过程(布朗运动过程)

维纳过程（Wiener Process），又称布朗运动，是正态过程的一个特殊类型。它是一个连续时间随机过程，满足以下条件：

1. **初值**：；
2. **独立增量**：对于任意 ，随机变量 和 相互独立；
3. **正态增量**：对于任意 ，；
4. **连续性**： 几乎处处连续。

维纳过程是独立增量过程,是正交增量过程也是正态过程,所以维纳过程的均值恒为0.

## 3.6平稳过程

分为严平稳(狭义平稳)和宽平稳(广义平稳)

### 3.6.1严平稳

与时间无关

**定义**

一个随机过程 是**严平稳**的，如果对于任意的时间点 和任意的时间偏移量 ，随机变量的联合分布满足：

其中 表示联合分布函数。

**==性质==**

• 随机过程的所有阶联合分布不随时间发生变化。 • 均值,方差,均方差均为常数

**特性**

• 严平稳的随机过程一般不依赖于具体时间点 ，而只与时间差 相关。

### 3.6.2宽平稳

**定义**

一个随机过程 是**宽平稳**的（又称为二阶平稳或弱平稳），如果满足以下条件：

1. 均值为常数，与时间 无关：
2. 方差有限且不随时间变化：
3. 协方差仅取决于时间差 ，与具体时间点无关：

* 其中 是协方差函数。

**核心要求**

• 只要求随机过程的均值、方差和协方差与时间无关。 • 与严平稳相比，宽平稳对高阶分布没有要求。

**特性**

• 宽平稳的条件更弱，更容易满足。严平稳一定是宽平稳 • 如果一个随机过程是宽平稳的，它的时间序列图通常呈现一定的规律性。

## **3.7复随机过程**

仅修改二次的算法,使用来替换X^2 .

**1. 定义**

若随机过程 和 是实值随机过程，则复随机过程定义为：

**2. 数字特征**

复随机过程的均值函数、方差函数、相关函数和协方差函数是描述**复随机过程统计特性**的重要工具。以下是这些函数的详细定义及意义。

**均值函数（Mean Function）**

**定义：** 复随机过程的均值函数定义为：

均值函数可以进一步分解为：

**方差函数（Variance Function）**

**定义：**

复随机过程 在时间 上的方差定义为：

**4. 相关函数（Correlation Function）**

**定义：**

复随机过程 的相关函数定义为：

如果写作实部和虚部，相关函数可以进一步分解为：

**5. 协方差函数（Covariance Function）**

**定义：**

复随机过程 的协方差函数定义为： $$

B\_X(s, t) = .

$$

**展开：**

将定义展开，可以得到协方差函数与相关函数的关系：

## 3.8各个过程的关系

### 正交和独立

正交增量过程不是独立增量过程,独立增量过程只有在均值恒为0且二阶矩存在的情况下是正交增量过程.

### 平稳独立增量过程

==平稳和独立都是形容增量的==

布朗运动(维纳过程)和泊松过程都是平稳独立增量过程

1. **初值**：

* 通常约定过程从零开始。

1. **独立增量**： 对于任意的时间区间 ，如果这两个区间互不重叠（即  t\_2 < t\_3 ），则增量  X(t\_2) - X(t\_1)  和  X(t\_4) - X(t\_3)  是相互独立的。
2. **平稳增量**： 增量的分布仅与时间间隔有关，而与具体时间点无关。也就是说，对于任意  s < t ：

* 其中  f(t-s)  是一个仅与时间间隔  t-s  有关的分布。