1 Vector 向量

有向量的地方，就有几何

几何——指向真理之乡，创造哲学之魂。

Geometry will draw the soul toward truth and create the spirit of philosophy.

—— 柏拉图 (Plato) | 古希腊哲学家 | 424/423 ~ 348/347 BC

- `matplotlib.pyplot.quiver()` 绘制箭头图
- `numpy.add()` 向量/矩阵加法
- `numpy.array([[4,3]])` 构造行向量
- `numpy.array([[4,3]]).T` 行向量转置得到列向量
- `numpy.array([[4], [3]])` 构造列向量
- `numpy.array([4, 3])[:, None]` 构造列向量；按照 `[:, None]` 形式广播序列；`None` 代表 `numpy.newaxis`，增加新维度
- `numpy.array([4, 3])[:, numpy.newaxis]` 构造列向量
- `numpy.array([4, 3])[None, :]` 构造行向量；按照 `[None, :]` 形式广播序列；`None` 代表 `numpy.newaxis`，增加新维度
- `numpy.array([4, 3])[numpy.newaxis, :]` 构造行向量
- `numpy.array([4,3])` 构造一维序列，严格来说不是行向量
- `numpy.array([4,3]).reshape((1, -1))` 构造行向量
- `numpy.array([4,3]).reshape((-1,1))` 构造列向量
- `numpy.array([4,3], ndmin=2)` 构造行向量
- `numpy.linalg.norm()` 默认计算 L2 范数
- `numpy.ones()` 生成全 1 向量/矩阵
- `numpy.r_[]` 将一系列的序列合并；`'r'` 设定结果以行向量（默认）展示，比如 `numpy.r_[numpy.array([1,2]), 0, 0, numpy.array([4,5])]` 默认产生行向量
- `numpy.r_['c', [4,3]]` 构造列向量
- `numpy.subtract()` 向量/矩阵减法
- `numpy.zeros()` 生成全 0 向量/矩阵
- `zip(*)` 用于将可迭代的对象作为参数，将对象中对应的元素打包成一个个元组，然后返回由这些元组组成的列表。*代表解包，返回的每一个都是元祖类型，而并非是原来的数据类型

1.1 向量：有箭头的线段，一行或一列元素

向量的内涵极为丰富，本节主要从几何和数据两个视角来看向量。

几何视角

如图 1 所示，平面上，向量是**有方向的线段** (directed line segment)。**线段的长度代表向量的大小** (the length of the line segment represents the magnitude of the vector)。**箭头代表向量的方向** (the direction of the arrowhead indicates the direction of the vector)。

本书中，向量符号采用加粗斜体小写字母，比如 $\boldsymbol{a}$；矩阵符号则采用加粗斜体大写字母，比如 $\boldsymbol{A}$。

图 1 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 的**起点** (initial point) 是 O，向量的**终点** (terminal point) 是 A。如果向量的起点和终点相同，向量则为**零向量** (zero vector)，可以表示为 $\boldsymbol{0}$。

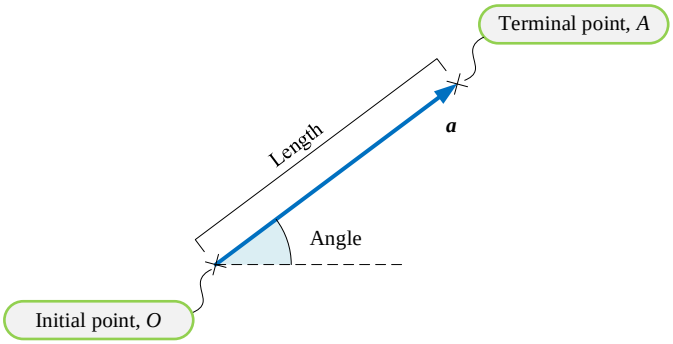


图 1. 向量起点、终点、大小和方向

图 2 给出的是几种向量的类型。

和起点无关的向量叫做**自由向量** (free vector)，如图 2 (a)；和起点有关的向量被称作，**固定向量** (fixed vector)，如图 2 (b) 和 (c)；方向上沿着某一个特定直线的向量，称之为**滑动向量** (sliding vector)，如图 2 (d)。没有特别说明时，本书的向量一般是自由向量。

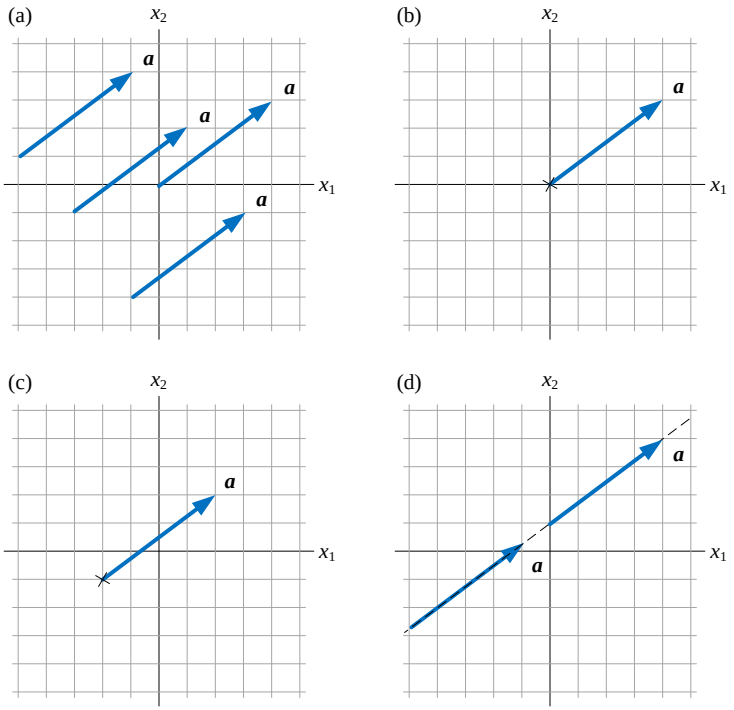


图 2. 几种向量类型

从解析几何角度看，向量和坐标直接相关。

如图 3 (a) 所示，一般情况下直角坐标系中任意一点坐标可以通过**多元组** (tuple) 来表达，比如图 3 (a) 所示平面直角坐标系上 A 点坐标 (4, 3)，B 点坐标 (−3, 4)。

图 3 (b) 所示，以原点作为向量起点，A 点对应向量 $\boldsymbol{a}$ 终点，B 点对应向量 $\boldsymbol{b}$ 终点。

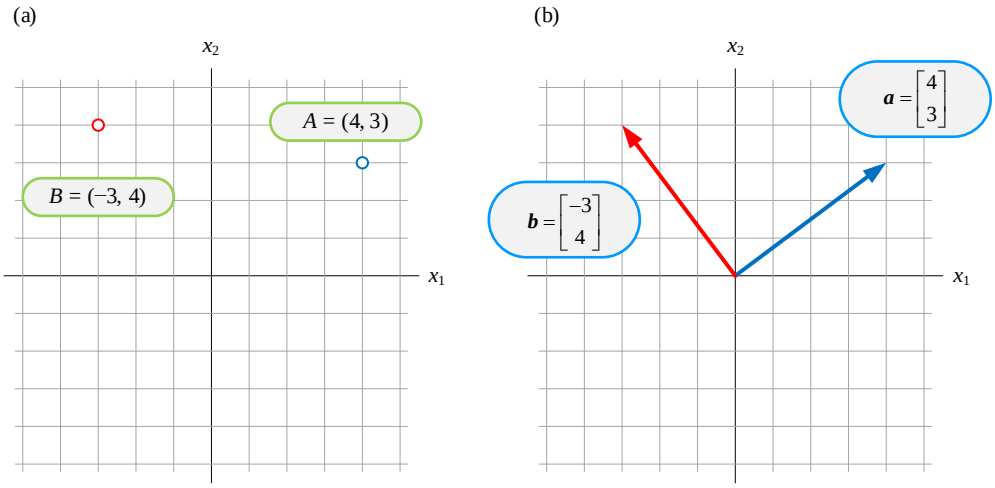


图 3. 平面坐标和向量关系

向量也可以是两点连线构造的有方向线段，如图 4 所示。图中向量 $\boldsymbol{a}$ 以 P 为起点、A 为终点，长度是 A 和 P 两点距离。

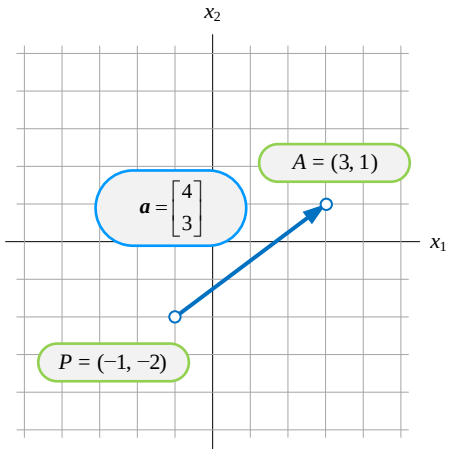


图 4. 连接两点的有方向线段

继续丰富向量的几何内涵

向量的几何视角还可以进一步扩展。

几何上，切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线；曲线的法线是垂直于曲线上一点的切线的直线。将切线、法线两个概念进入向量中可以得到**切向量** (tangent vector) 和**法向量** (normal vector) 这两个概念。图 5 所示为直线和曲线某一点处的切向量和法向量。

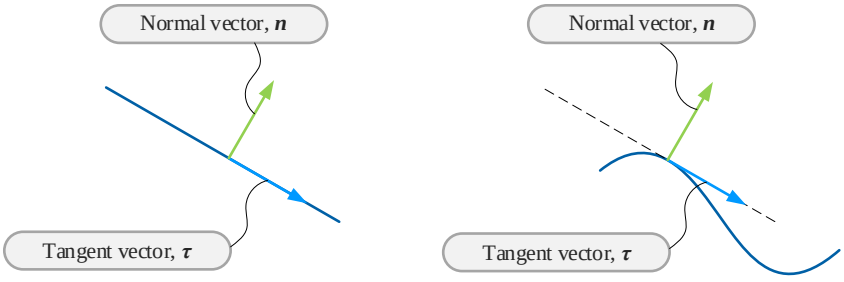


图 5. 切向量和法向量

自然界的风、水流、电磁场，在空间的每一个点上对应的物理量既有强度也有方向。将这些既有大小又有方向的场抽象出来就是**向量场** (vector field)。

在从书中，我们会使用向量场来描述函数在某一点的**梯度向量** (gradient vector)。图 6 所示为函数 $f(x_1, x_2)$ 在各个点处的曲面等高线和梯度向量在 x_1x_2 平面上的投影。仔细观察，可以发现任意一点处梯度向量垂直于该点处等高线。

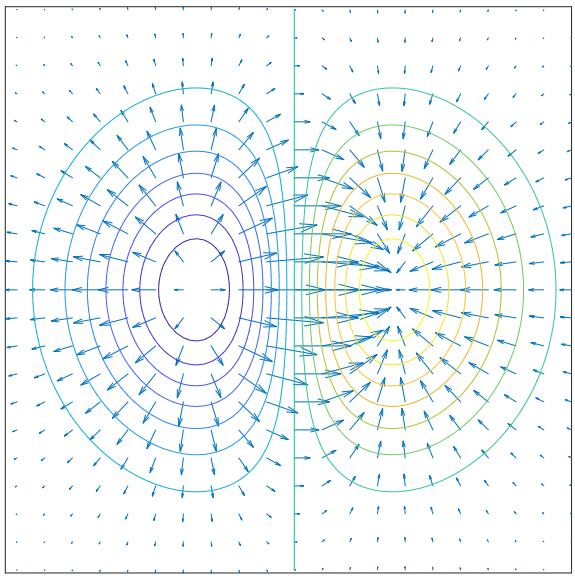


图 6. 函数的向量场

图 7 所示为 $f(x_1, x_2)$ 函数对应的三维曲面。把图 7 比作一座山峰的话，山峰上任意一点的梯度就是该点坡度最陡峭方向的反方向，梯度向量的大小告诉我们坡度有多陡。

白话来说，曲面某一点的梯度向量就是该点放置一个小球，滚下瞬间小球运动方向叫做梯度下降方向，反方向就是梯度向量方向。本书将在多元微积分中介绍梯度向量这一概念。

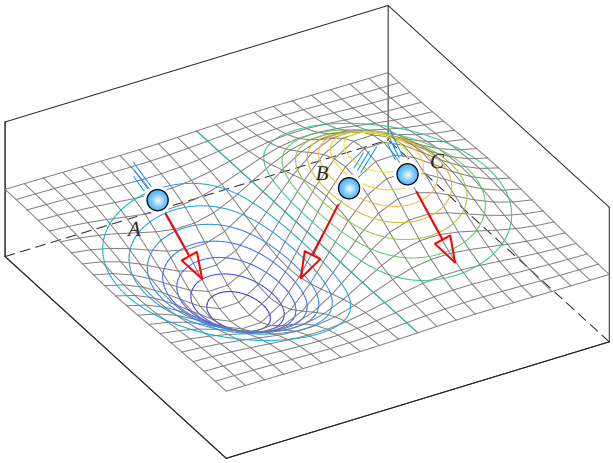


图 7. 三维曲面上定义梯度向量

数据视角

从数据角度来看，矩阵就是表格，它是由若干行或若干列元素排列得到的阵列。矩阵内的元素可以是实数、虚数、符号，甚至是数学式。

向量可以看做是**一维矩阵** (one-dimensional matrix)；向量要么一行多列、要么一列多行。而矩阵可以视作是一系列排列整齐的行向量或列向量。

一行多列的向量是**行向量** (row vector)，一列多行的向量叫**列向量** (column vector)；白话讲，行向量将 n 个数字排成一行，结构为 $1 \times n$ (代表 1 行，n 列)，如图 8 (a)。下式行向量 $\boldsymbol{a}$ 为 1 行 4 列：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

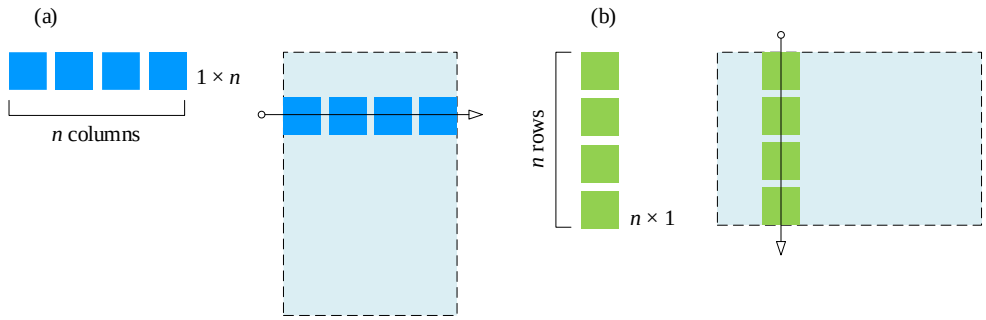


图 8. 行向量和列向量

列向量将 n 个数字排成一列，结构为 $n \times 1$ (代表 n 行，1 列)。

举个例子，下式行向量 $\boldsymbol{b}$ 为 4 行 1 列：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

不加说明时，本书中向量一般指的是列向量。

如图 9 所示，数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的每一行是一个行向量，代表一个观察值；$\boldsymbol{X}$ 的每一列为一个列向量，代表某个特征上的所有数据。

本丛书使用频率最高的数据是鸢尾花卉数据集。数据集的全称为**安德森鸢尾花卉数据集** (Anderson's Iris data set)，是植物学家埃**德加 · 安德森** (Edgar Anderson) 在加拿大魁北克加斯帕半岛上的采集的 150 个鸢尾花样本数据。

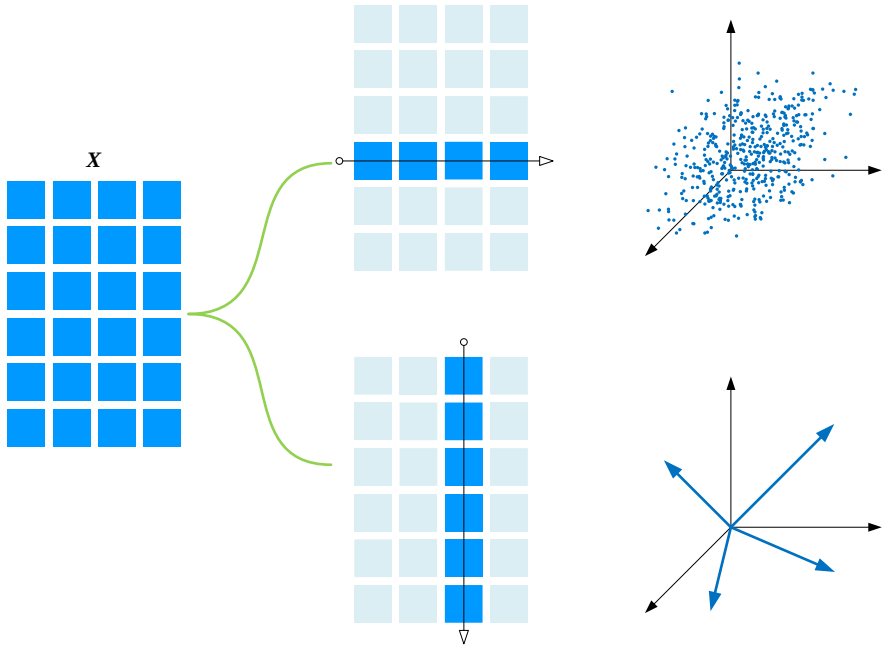
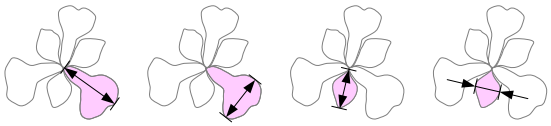


图 9. 观察数据的两个角度



Index	Sepal length X_1	Sepal width X_2	Petal length X_3	Petal width X_4	Species C
1	5.1	3.5	1.4	0.2	
2	4.9	3	1.4	0.2	
3	4.7	3.2	1.3	0.2	
...	...	...	...	...	Setosa C_1
49	5.3	3.7	1.5	0.2	
50	5	3.3	1.4	0.2	
51	7	3.2	4.7	1.4	
52	6.4	3.2	4.5	1.5	
53	6.9	3.1	4.9	1.5	
...	...	...	...	...	Versicolor C_2
99	5.1	2.5	3	1.1	
100	5.7	2.8	4.1	1.3	
101	6.3	3.3	6	2.5	
102	5.8	2.7	5.1	1.9	
103	7.1	3	5.9	2.1	
...	...	...	...	...	Virginica C_3
149	6.2	3.4	5.4	2.3	
150	5.9	3	5.1	1.8	

图 10. 鸢尾花数据表格，单位为厘米 (cm)

这些数据都属于鸢尾属下的三个亚属，分别是**山鸢尾** (setosa)、**变色鸢尾** (versicolor) 和**维吉尼亚鸢尾** (virginica)。每一类鸢尾花收集了 50 条样本记录，共计 150 条。

四个特征被用作样本的定量分析，它们分别是**花萼长度** (sepal length)、**花萼宽度** (sepal width)、**花瓣长度** (petal length) 和**花瓣宽度** (petal width)。

图 10 所示为鸢尾花数据集中部分数据。数据整体可以看做是一个矩阵，矩阵的每一列为鸢尾花一个特征的数据样本，矩阵的每一行为某一朵鸢尾花不同特征的数值。

图 11 所示为 9 只股票在 2020 年股价的部分数据。

图 11 所示的数据也是一个矩阵。从向量的角度，数据的每一行是一个行向量，代表一天的收盘价格。数据的每一列是列向量，代表一支股票在一年内的走势。

Date	TSLA	TSM	COST	NVDA	FB	AMZN	AAPL	NFLX	GOOGL
2-Jan-2020	86.05	58.26	281.10	239.51	209.78	1898.01	74.33	329.81	1368.68
3-Jan-2020	88.60	56.34	281.33	235.68	208.67	1874.97	73.61	325.90	1361.52
6-Jan-2020	90.31	55.69	281.41	236.67	212.60	1902.88	74.20	335.83	1397.81
7-Jan-2020	93.81	56.60	280.97	239.53	213.06	1906.86	73.85	330.75	1395.11
8-Jan-2020	**98.43**	**57.01**	**284.19**	**239.98**	**215.22**	**1891.97**	**75.04**	**339.26**	**1405.04**
9-Jan-2020	96.27	57.48	288.75	242.62	218.30	1901.05	76.63	335.66	1419.79
10-Jan-2020	95.63	57.12	286.65	243.92	218.06	1883.16	76.80	329.05	1428.96
13-Jan-2020	104.97	58.28	289.18	251.56	221.91	1891.30	78.44	338.92	1440.03
14-Jan-2020	107.58	58.54	289.07	246.87	219.06	1869.44	77.39	338.69	1430.59
15-Jan-2020	103.70	56.66	290.10	245.17	221.15	1862.02	77.05	339.07	1439.20
16-Jan-2020	102.70	57.01	292.23	248.52	221.77	1877.94	78.02	338.62	1450.16
17-Jan-2020	102.10	56.85	293.82	248.87	222.14	1864.72	78.88	339.67	1479.52
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
30-Dec-2020	694.78	108.49	373.71	525.83	271.87	3285.85	133.52	524.59	1736.25
31-Dec-2020	705.67	108.63	376.04	522.20	273.16	3256.93	132.49	540.73	1752.64

图 11. 股票收盘股价数据

1.2 行向量：一行多列，一个样本数据点

如上一节所述，行向量是一个 $1 \times n$ 的矩阵，即 1 行、n 列。如图 12 所示，行向量**转置** (transpose) 得到列向量，反之亦然。转置运算符号为正体上标 $^{\mathrm{T}}$。

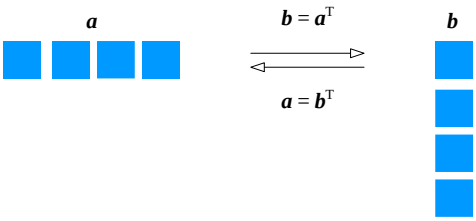


图 12. 行向量的转置结果是一个列向量

表 1 所示为利用 Numpy 构造行向量几种常见方法。可以用 len(a) 计算向量的长度，即向量中元素个数。

表 1. 构造行向量

代码	注意事项
a = numpy.array([4,3])	严格地说，这种方法产生的并不是行向量；运行 a.ndim 发现 a 只有一个维度；因此，转置 numpy.array([4,3]).T 得到的仍然是一维序列，只不过默认展示方式为行向量
a = numpy.array([[4,3]])	运行 a.ndim 发现 a 有二个维度；这个行向量转置 a.T 可以获得列向量；a.T 求 a 转置，等价于 a.transpose()
a = numpy.array([4,3], ndmin=2)	ndmin=2 设定数据有两个维度；转置 a.T 可以获得列向量
a = numpy.r_['r', [4,3]]	numpy.r_[] 将一系列的序列合并；'r' 设定结果以行向量 （默认） 展示，比如 numpy.r_[numpy.array([1,2]), 0, 0, numpy.array([4,5])] 默认产生行向量
a = numpy.array([4,3]).reshape((1, -1))	reshape() 按某种形式重新排列数据；-1 自动获取序列长度 n
a = numpy.array([4, 3])[None, :]	按照 [None, :] 形式广播序列；None 代表 numpy.newaxis，增加新维度
a = numpy.array([4, 3])[numpy.newaxis, :]	等同于上一例

行向量和矩阵

丛书常用 $\boldsymbol{X}$ 表达数据矩阵，$\boldsymbol{X}$ 的每一行代表一个数据点。为了方便区分，构造 $\boldsymbol{X}$ 的一系列行向量序号采用“上标加括号”表达，比如 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 代表 $\boldsymbol{X}$ 的第一行。

如图 13 所示，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 可以写作：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(6)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

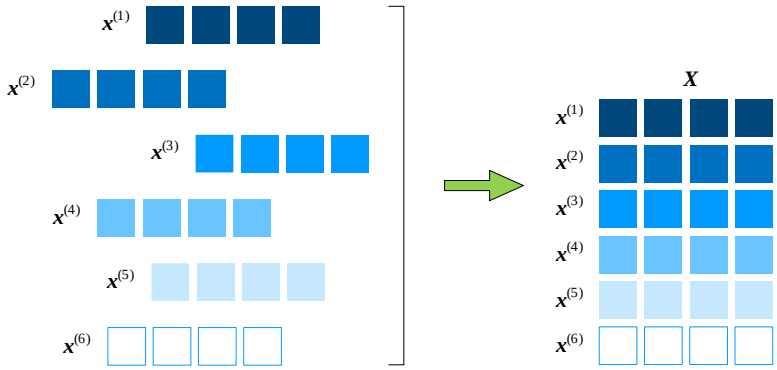
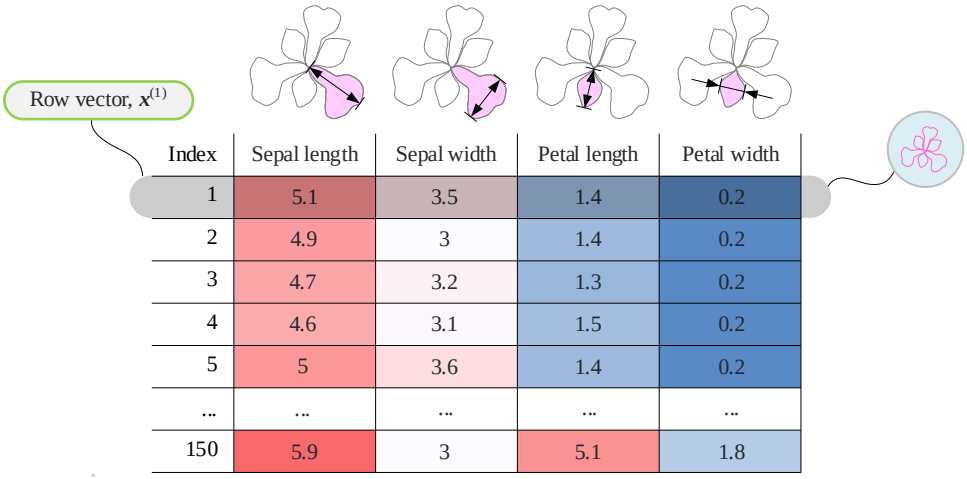


图 13. 矩阵由一系列行向量构造

图 14 所示为鸢尾花数据。前文提到，每一行为一朵鸢尾花样本花萼长度、花萼宽度、花瓣长度和花瓣宽度测量结果。$\boldsymbol{x}^{(15)}$ 代表第 15 个样本数据点，也就是编号为 15 的鸢尾花样本。



Index	Sepal length	Sepal width	Petal length	Petal width
1	5.1	3.5	1.4	0.2
2	4.9	3	1.4	0.2
3	4.7	3.2	1.3	0.2
4	4.6	3.1	1.5	0.2
5	5	3.6	1.4	0.2
...	...	...	...	...
150	5.9	3	5.1	1.8

图 14. 鸢尾花数据，行向量代表样本数据点

1.3 列向量：一列多行，一个特征

列向量是一个 $n \times 1$ 的矩阵，即 n 行、1 列。列向量转置得到行向量。

数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的每一列代表一个特征，因此列向量又常称作**特征向量** (feature vector)；注意，此特征向量不同于特征值分解中的**特征向量** (eigenvector)。

同样，为了方便区分，构造 $\boldsymbol{X}$ 的列向量序号采用下标表达，比如 $\boldsymbol{x}_1$。如图 15 所示，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 看做是 4 个等长列向量整齐排列得到：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

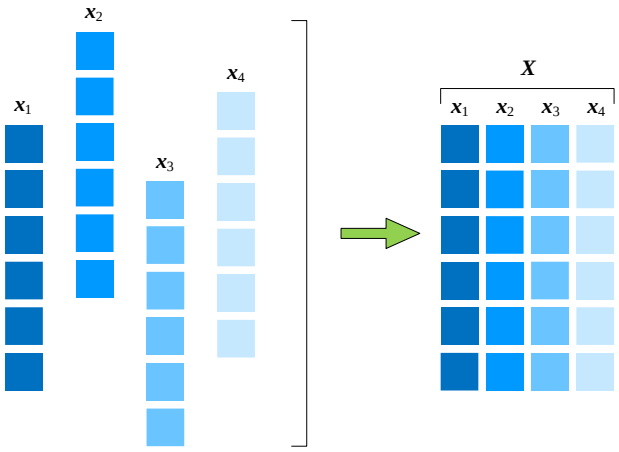


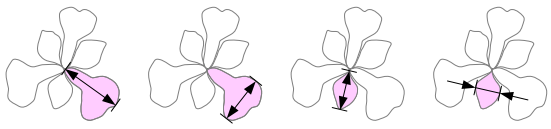
图 15. 矩阵由一排列向量构造

表 2 总结 Numpy 构造列向量几种常见方法。

表 2. 构造列向量

代码	注意事项
`a = numpy.array([[4], [3]])`	运行 `a.ndim` 发现 `a` 有二个维度；`numpy.array([[4], [3]]).T` 获得行向量
`a = numpy.r_['c', [4,3]]`	`numpy.r_[]` 将一系列的序列合并；`'c'` 设定结果以列向量展示，比如 `np.r_['c', numpy.array([1,2]), 0, 0, numpy.array([4,5])]` 默认产生行向量
`a = numpy.array([4,3]).reshape((-1, 1))`	`reshape()` 按某种形式重新排列数据；`-1` 自动获取序列长度 `n`
`a = numpy.array([4, 3])[:, None]`	按照 `[:, None]` 形式广播序列；`None` 代表 `numpy.newaxis`，增加新维度
`a = numpy.array([4, 3])[:, numpy.newaxis]`	等同于上一例

图 16 所示鸢尾花数据每一列代表鸢尾花的一个特征，比如花萼长度 (第 1 列，列向量 $\boldsymbol{x}_1$)、花萼宽度 (第 2 列，列向量 $\boldsymbol{x}_2$)、花瓣长度 (第 3 列，列向量 $\boldsymbol{x}_3$) 和花瓣宽度 (第 4 列，列向量 $\boldsymbol{x}_4$)。



Index	Sepal length	Sepal width	Petal length	Petal width
1	5.1	3.5	1.4	0.2
2	4.9	3	1.4	0.2
3	4.7	3.2	1.3	0.2
4	4.6	3.1	1.5	0.2
5	5	3.6	1.4	0.2
...	...	...	...	...
150	5.9	3	5.1	1.8

Column vector, x_1

图 16. 鸢尾花数据，列向量代表数据特征

特殊列向量

全零列向量 (zero column vector) $\boldsymbol{0}$，是指每个元素均为 0 的列向量：

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

代码 `numpy.zeros((4,1))` 可以生成 4 × 1 全 0 列向量。

全 1 列向量 (all-ones column vector) $\boldsymbol{1}$，是指每个元素均为 1 的列向量：

$$\boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

代码 `numpy.ones((4,1))` 可以生成 4 × 1 全 1 列向量。

再次强调，一般情况，本书默认向量为列向量，除非具体说明。

1.4 向量长度：模，欧氏距离，L^2 范数

向量长度 (length of a vector) 又叫做**向量模** (vector norm)、**欧几里得距离** (Euclidean distance)、**欧几里得范数** (Euclidean norm) 或 L^2 **范数** (L2-norm)。

定义向量 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为：

$$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

注意，$\|\boldsymbol{a}\|_2$ 下角标 2，代表 L^2 范数；没有特殊说明，$\|\boldsymbol{a}\|$ 默认代表 L^2 范数。L^2 范数是 L^p 范数的一种，本书后续还要介绍其他各种范数。

二维向量的模

特别地，对于如下二维向量：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

二维向量 $\boldsymbol{a}$ 的 L^2 范数为：

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{10}$$

图 17 给出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模可以这样计算得到：

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \|\boldsymbol{b}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \tag{11}$$

二维向量 $\boldsymbol{a}$ 角度可以通过反正切求解：

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \tag{12}$$

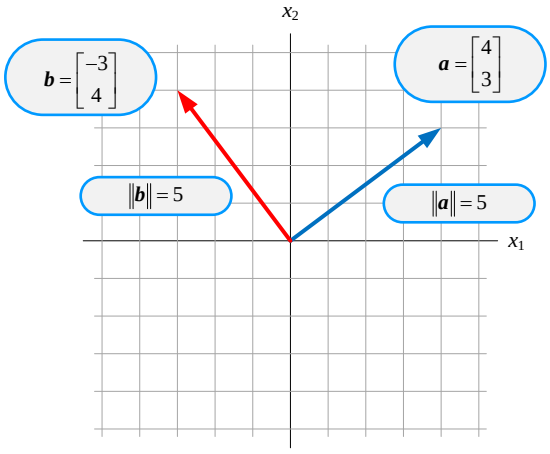


图 17. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模

Bk4_Ch1_01.py 绘制图 17 所示向量。matplotlib.pyplot.quiver() 绘制箭头图。

```
# Bk4_Ch1_01.py

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def draw_vector(vector,RBG):
    array = np.array([[0, 0, vector[0], vector[1]]])
    X, Y, U, V = zip(*array)
    plt.quiver(X, Y, U, V,angles='xy', scale_units='xy',scale=1,color = RBG)

fig, ax = plt.subplots()

draw_vector([4,3],np.array([0,112,192])/255)
draw_vector([-3,4],np.array([255,0,0])/255)

plt.ylabel('$x_2$'); plt.xlabel('$x_1$'); plt.axis('scaled')
ax.set_xlim([-5, 5]); ax.set_ylim([-5, 5])
ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
plt.show()
```

函数 `numpy.linalg.norm()` 默认计算 L^2 范数；也可以用 `numpy.sqrt(np.sum(a**2))` 计算向量 $\boldsymbol{a}$ 的 L^2 范数。`Bk4_Ch1_02.py` 计算图 17 中向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 模。

```
# Bk4_Ch1_02.py

import numpy as np

# define two column vectors
a = np.array([[4], [3]])
b = np.array([[-3], [4]])

# calculate L2 norm
a_L2_norm = np.linalg.norm(a)
b_L2_norm = np.linalg.norm(b)
```

值得一提的是，和 $\|\boldsymbol{a}\|$ 等长的二维向量，如果起点重合，它们的终点位于同一个圆上，如图 18 (a) 所示。

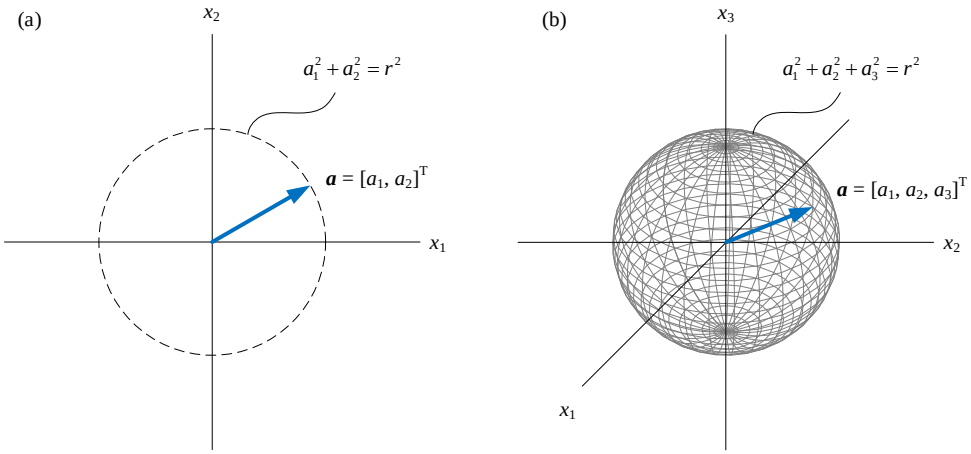


图 18. 等 L^2 范数向量

三维向量的模

类似地，对于三维向量：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \tag{13}$$

三维向量 $\boldsymbol{a}$ 的 L^2 范数为：

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{14}$$

图 18 (b) 所示为起点相同的等长三维向量终点位于同一正圆球面上。

单位向量

长度为 1 的向量被称作**单位向量** (unit vector)。

图 19 (a) 所示平面直角坐标系，起点位于原点的单位向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$ 终点位于**单位圆** (unit circle) 上：

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \tag{15}$$

如图 19 (b) 所示平面直角坐标系中，$\boldsymbol{e}_1$ ($\boldsymbol{i}$) 和 $\boldsymbol{e}_2$ ($\boldsymbol{j}$) 分别为沿着 x_1 (水平) 和 x_2 (竖直) 方向的单位向量：

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

显然，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 相互垂直。

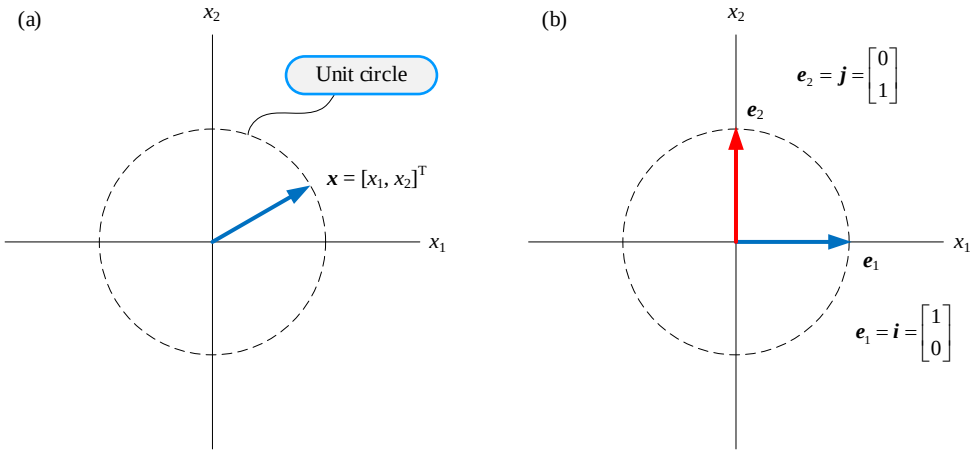


图 19. 单位向量

图 17 给出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 可以用 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 表达：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{b} &= -3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

(17) 用到的便是向量加减法，这是下一节要介绍的内容。

图 17 这个平面就是用 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 张成的。白话说，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 撑起 $\mathbb{R}^2$ 这个平面，平面上的点都可以表达成：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \tag{18}$$

而上式中的 (x_1, x_2) 向量终点在平面上的坐标点。

三维直角坐标系

三维直角坐标系中，$\boldsymbol{e}_1$ ($\boldsymbol{i}$)、$\boldsymbol{e}_2$ ($\boldsymbol{j}$) 和 $\boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{k}$) 分别为沿着 x_1、x_2 和 x_3 单位向量：

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$\boldsymbol{e}_1$ ($\boldsymbol{i}$)、$\boldsymbol{e}_2$ ($\boldsymbol{j}$) 和 $\boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{k}$) 两两相互垂直。

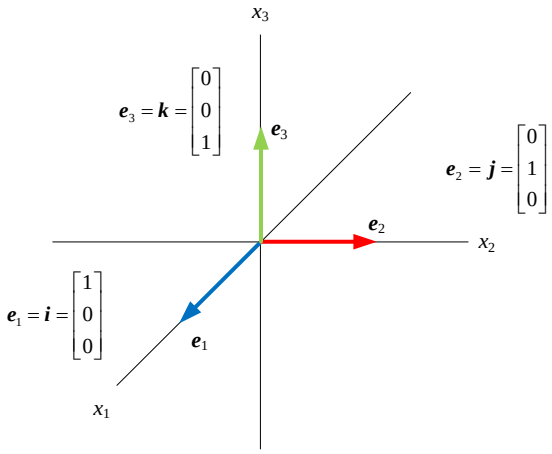


图 20. 三维空间单位向量

同理，图 20 这个三维空间是用 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 张成的。白话说，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 撑起 $\mathbb{R}^3$ 这个三维空间，空间的点都可以表达成：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{20}$$

而上式中的 (x_1, x_2, x_3) 向量终点在平面上的坐标点。

等距线：同心圆

如图 21 所示，向量 $\boldsymbol{x}$ 的模长度 $\|\boldsymbol{x}\|$ 取得不同数值时，我们可以得到一系列同心圆：

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = c \tag{21}$$

这个向量模就是欧几里得距离，也叫欧氏距离。图 21 中等高线这就是我们在本系列丛书《数学要素》一册中讲到的等距线。

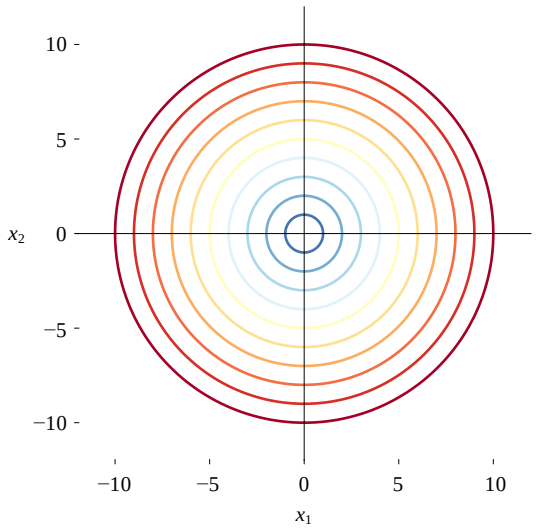


图 21. 相等 L^2 范数向量终点位于一系列同心圆等高线上

Bk4_Ch1_03.py 绘制图 21。

```
# Bk4_Ch1_03.py

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x1 = np.linspace(-10, 10, num=201);
x2 = x1;

xx1, xx2 = np.meshgrid(x1,x2)
p = 2
zz = ((np.abs((xx1))**p) + (np.abs((xx2))**p))**(1./p)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 12))

ax.contour(xx1, xx2, zz, levels = np.arange(11), cmap='RdYlBu_r')

ax.axhline(y=0, color='k', linewidth = 0.25)
ax.axvline(x=0, color='k', linewidth = 0.25)
ax.set_xlim(-12, 12)
ax.set_ylim(-12, 12)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
ax.set_xlabel('$x_1$')
ax.set_ylabel('$x_2$')
ax.set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.show()
```

1.5 加减法：对应位置元素分别相加减

从数据角度看，两个等长列向量相加，结果为对应位置元素分别相加，得到长度相同的列向量，比如下例：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+5\\5-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \tag{22}$$

两个等长列向量相减，则是对应元素分别相减，得到等长列向量，比如下例：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-5\\5-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\6\end{bmatrix} \tag{23}$$

该原理也适用于等长行向量加减法。

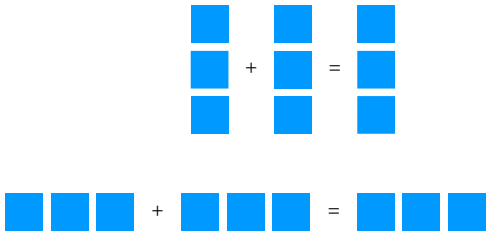


图 22. 数据角度看向量加法

几何视角

从几何角度看，**向量加法** (vector addition) 结果可以用**平行四边形法则** (parallelogram method) 或**三角形法则** (triangle method) 获得，具体如图 23 所示。

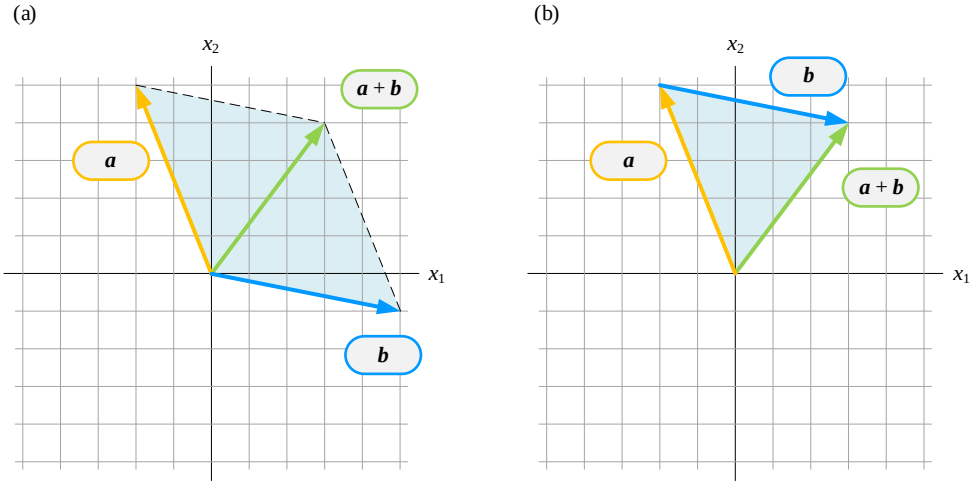


图 23. 几何角度看向量加法

向量减法 (vector subtraction)，向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$，可以将向量 $\boldsymbol{b}$ 换向得到 $-\boldsymbol{b}$；然后再计算向量 $-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的和，即：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\6\end{bmatrix} \tag{24}$$

注意，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 结果相反：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-6\end{bmatrix} \tag{25}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$，得到的结果 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 对应向量箭头，指向 $\boldsymbol{a}$ 终点；相反，向量 $\boldsymbol{b}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$ 得到的结果 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，指向 $\boldsymbol{b}$ 终点。

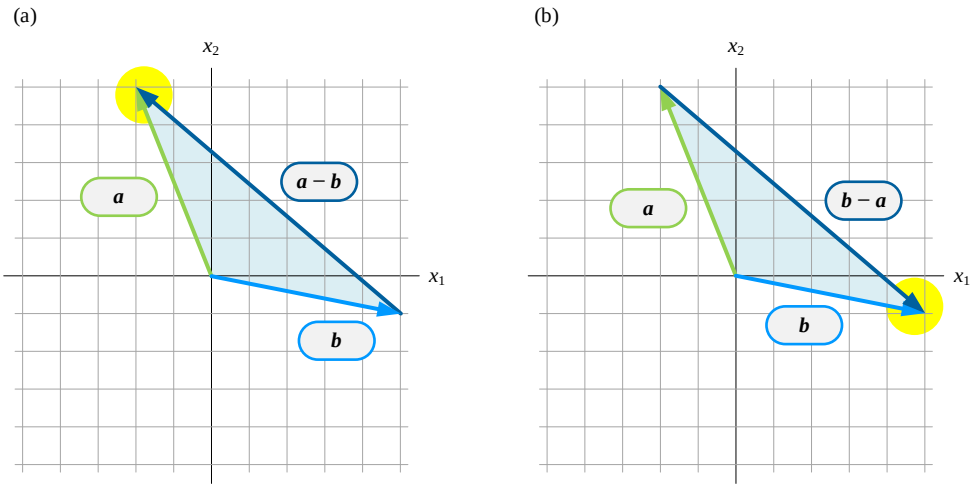


图 24. 几何角度向量减法

请大家注意以下性质：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\\&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{26}$$

两个向量相同，当且仅当两者大小方向均相同。如果两个向量的大小相同但是方向相反，两者互为反向量。两个向量方向相同或相反，则称向量平行。

`Bk4_Ch1_04.py` 计算本节向量加减法示例。

```
# Bk4_Ch1_04.py
```

```
import numpy as np

# define two column vectors
a = np.array([[-2], [5]])
b = np.array([[5], [-1]])

# calculate vector addition
a_plus_b = a + b
a_plus_b_2 = np.add(a,b)

# calculate vector subtraction
a_minus_b = a - b
a_minus_b_2 = np.subtract(a,b)

b_minus_a = b - a
b_minus_a_2 = np.subtract(b,a)
```

1.6 标量乘法：向量缩放

向量标量乘法 (scalar multiplication of vectors) 指的是标量和向量每个元素分别相乘，结果仍为向量。

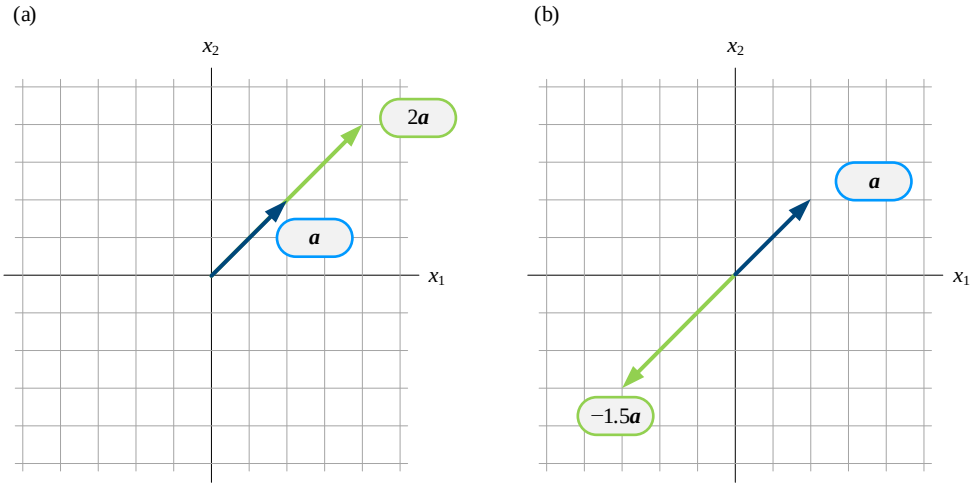
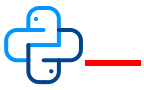


图 25. 向量标量乘法

从几何角度，标量乘法将向量按标量大小成比例缩放，向量方向同向或反向，如图 25 所示。

Bk4_Ch1_05.py 完成图 25 中运算。



```
# Bk4_Ch1_05.py

import numpy as np

# define a column vector
a = np.array([[2], [2]])
```

```
b = 2*a
c = -1.5*a
```

请读者注意以下标量乘法性质：

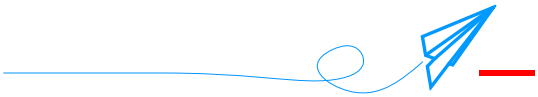
$$\begin{aligned}(t+k)\boldsymbol{a} &= t\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}\\ t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= t\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\\ t(k\boldsymbol{a}) &= tk\boldsymbol{a}\\ 1\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}\\ -1\boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a}\\ 0\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{27}$$

其中，t 和 k 为标量。

向量 $\boldsymbol{a}$ 除以自身的模得到 **a 方向上的单位向量** (unit vector in the direction of vector $\boldsymbol{a}$)：

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{28}$$

$\hat{\boldsymbol{a}}$ 读作 “vector a hat”。`a/numpy.linalg.norm(a)` 可以计算向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量。



最后用四幅图来总结本章核心内容。学完本章，希望读者看到任何向量，可以试着从几何、数据两个角度来思考问题。

从几何角度，向量是既有长度又有方向的量。从数据角度，表格数据可以看做是矩阵。

矩阵的每一行向量是一个样本点，每一列向量代表一个特征。提到向量模、L^2 范数、欧几里得距离，希望大家能够联想到正圆、正圆球。

用到向量加减法时，想到平行四边形法则和三角形法则。