

# 4 Matrix 矩阵

所有矩阵运算都是重要数学工具，都有应用场景



数字统治万物。

*Number rules the universe.*

—— 毕达哥拉斯 (Pythagoras) | 古希腊哲学家、数学家 | 570 ~ 495 BC



- ▶ `numpy.add()` 矩阵加法运算，等同于 `+`
- ▶ `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- ▶ `numpy.linalg.det()` 计算行列式值
- ▶ `numpy.linalg.inv()` 计算矩阵逆
- ▶ `numpy.linalg.matrix_power()` 计算矩阵幂
- ▶ `numpy.matrix()` 构造二维矩阵，有别于 `numpy.array()`
- ▶ `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- ▶ `numpy.ones()` 生成全 1 矩阵，输入为矩阵形状
- ▶ `numpy.ones_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵
- ▶ `numpy.subtract()` 矩阵减法运算，等同于 `-`
- ▶ `numpy.trace()` 计算矩阵迹
- ▶ `numpy.zeros()` 生成零矩阵，输入为矩阵形状
- ▶ `numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ▶ `transpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`

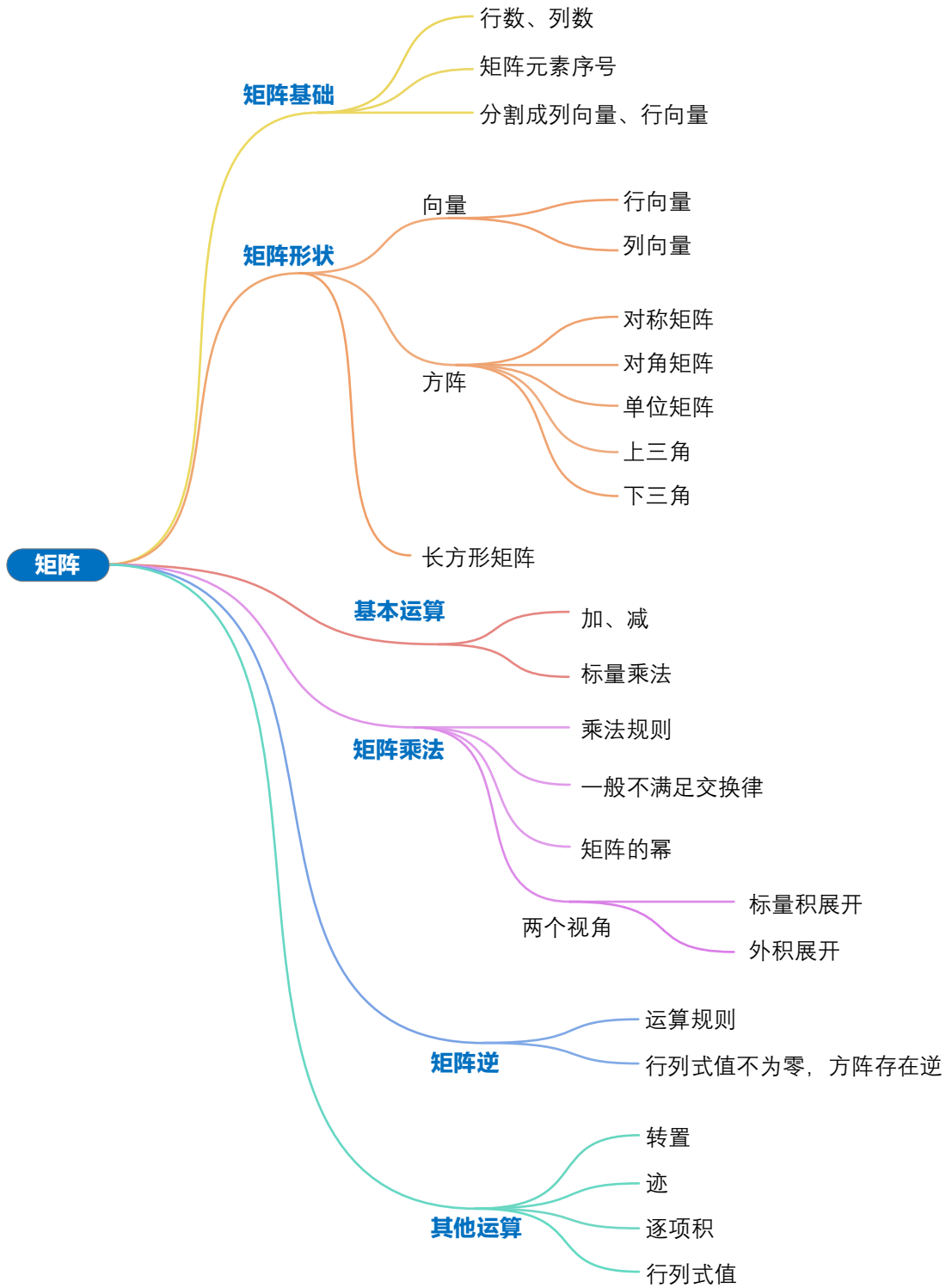
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 4.1 矩阵：一个不平凡的表格

别怕，矩阵无非就是一个表格！

一般来说，矩阵是由标量组成的矩形数组 (array)。但是，矩阵内的元素不局限于标量，也可以是虚数、符号，乃至代数式、偏导等等。

在有些语境下，更高维度的数组叫张量 (tensor)，因此向量和矩阵可以分别看作是一维和二维的张量。严格来讲，张量是不同参考系间特定的变换法则。从这个角度来看，矩阵完成特定的线性映射 (linear mapping)，矩阵的不平凡之处就在于此。

本书矩阵通常由粗体、斜体、大写字母表示，比如  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  等。特别地，我们用  $\mathbf{X}$  表达样本数据矩阵。

▲ 注意，如果是随机变量  $X_j$  构成的列向量，本系列丛书会用希腊字母  $\boldsymbol{\chi}$ ，比如  $D$  维随机变量  $\boldsymbol{\chi} = [X_1, X_2, \dots, X_D]^T$ 。

如图 1 所示，一个  $n \times D$  ( $n$  by capital  $D$ ) 矩阵  $\mathbf{X}$ ，具体如下：

$$\mathbf{X}_{n \times D} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中， $n$  是**矩阵行数** (number of rows in the matrix)， $D$  是**矩阵列数** (number of columns in the matrix)。

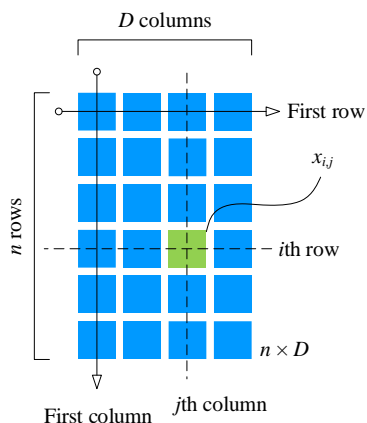


图 1.  $n \times D$  矩阵  $\mathbf{X}$

从数据角度， $n$  是样本个数， $D$  是样本数据特征数。比如，鸢尾花数据集，不考虑标签 (即鸢尾花三大类 setosa、versicolor、virginica)，数据集本身  $n = 150$ ， $D = 4$ 。



本系列丛书《数学要素》第 1 章专门聊过为什么会选择  $n$  和  $D$  这两个字母，这里就不再重复。

## 矩阵构造

矩阵  $X$  中，**元素** (element)  $x_{ij}$  被称作  $(i, j)$  元素 ( $ij$  entry 或  $ij$  element)。  $x_{ij}$  出现在  $i$  行、 $j$  列 (appears in row  $i$  and column  $j$ )。

**▲** 注意  $i$  和  $j$  的先后次序，先说行，再说列。

重要的事情说几遍都不嫌多！如图 2 所示，矩阵  $X$  可以看做是由一组行向量或列向量按照一定规则构造。比如，矩阵  $X$  可以写成一组上下叠放的行向量：

$$X_{n \times D} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中，行向量  $\mathbf{x}^{(i)}$  为矩阵  $X$  第  $i$  行，具体为：

$$\mathbf{x}^{(i)} = [x_{i,1} \quad x_{i,2} \quad \cdots \quad x_{i,D}] \quad (3)$$

以鸢尾花数据集为例，它的每一行代表一朵花。

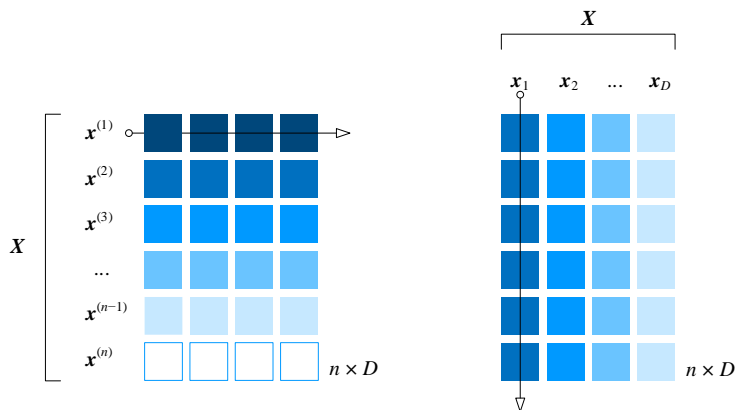


图 2. 矩阵可以看做是由行向量或列向量构造

矩阵  $X$  也可以写成一组左右放置的列向量：

$$X_{n \times D} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_D] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中，列向量  $\mathbf{x}_j$  为矩阵  $\mathbf{X}$  第  $j$  列：

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

还是以鸢尾花数据集为例，它的每一列代表一个特征，比如花萼长度。再次强调，一般情况，本书单独给出一个向量时默认其为列向量，除非具体说明。而在数据矩阵中，每一行行向量代表一个数据点。

实际上，图 2 思路是用纵线或横线将矩阵划分成**分块矩阵** (block matrix)。



分块矩阵有助于简化矩阵运算，本书第 6 章将深入介绍分块矩阵相关内容。



Bk4\_Ch4\_01.py 介绍如何用不同方式构造矩阵。注意，`numpy.matrix()` 和 `numpy.array()` 都可以构造矩阵。但是两者结果有显著区别。`numpy.matrix()` 产生的数据类型是严格的 2 维 `<class 'numpy.matrix'>`；而 `numpy.array()` 产生的数据可以是 1 维、2 维、乃至  $n$  维，类型统称为 `<class 'numpy.ndarray'>`。此外，在乘法和乘幂运算时，这两种不同方式构造的矩阵也会有明显差别，本章后续将逐步介绍。

## 4.2 矩阵形状：每种形状都有特殊用途

矩阵形状对于矩阵运算至关重要。本书之前介绍的**行向量** (row vector) 和**列向量** (column vector) 也是特殊形状的矩阵。稍作回顾，行向量可以看做一行多列的矩阵，列向量是一列多行矩阵。

图 3 总结几种常见矩阵形状，本节逐一讲解。

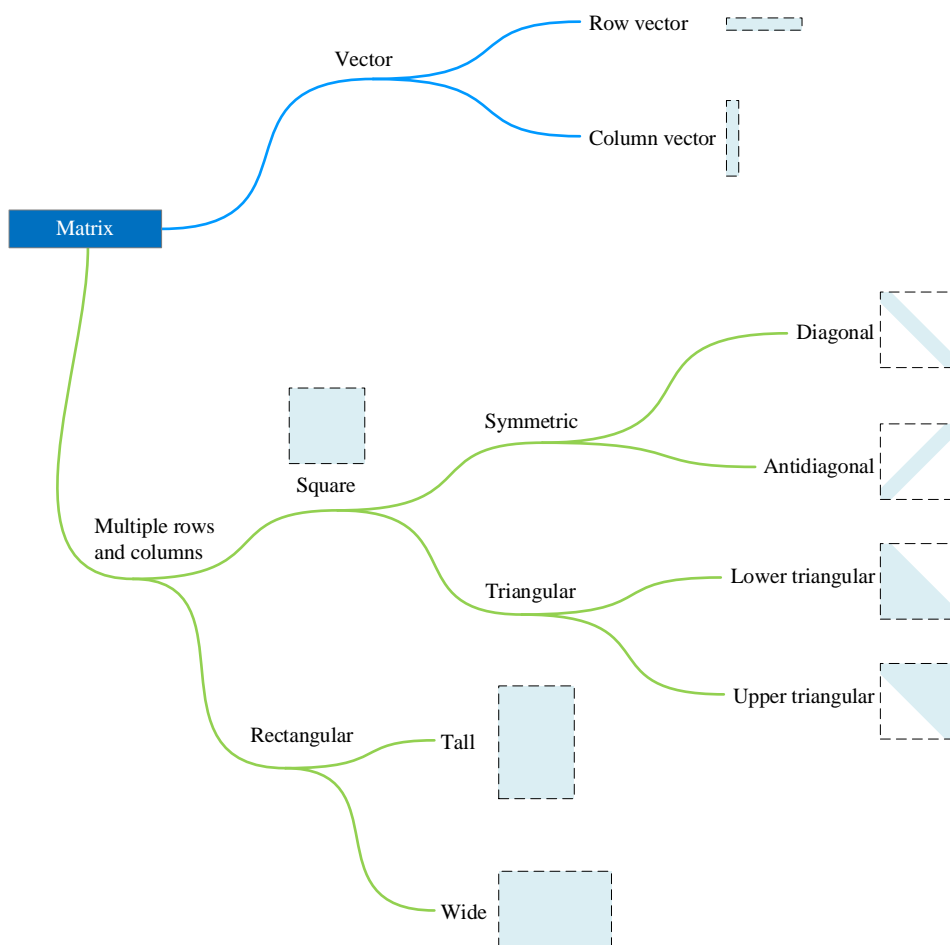


图 3. 几种常见矩阵形状

## 方阵

**方阵** (square matrix) 指的是行、列数相等的矩阵。 $n \times n$  矩阵被称作  **$n$  阶方阵** ( $n$ -square matrix)。

**对称矩阵** (symmetric matrix) 是一种特殊方阵。对阵矩阵的右上和左下方元素以**主对角线** (main diagonal) 镜像对称。主对角线和**副对角线** (antidiagonal, secondary diagonal, minor diagonal) 的位置如图 4 所示。

对称矩阵**转置** (transpose) 结果为本身。比如，满足下式的矩阵  $A$  便是对称矩阵：

$$A = A^T \quad (6)$$

本章后续将详细介绍转置运算。

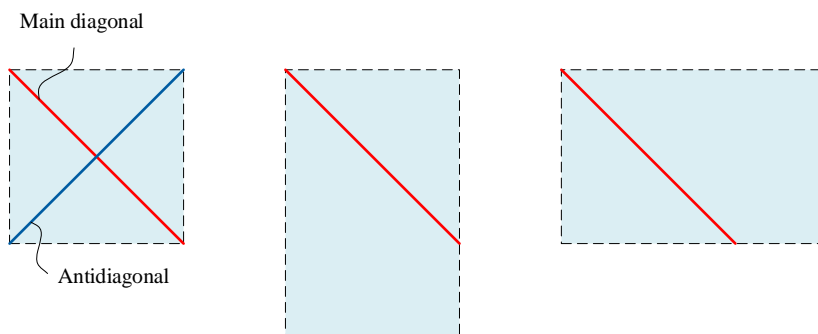


图 4. 主对角线和副对角线

## 对角矩阵

**对角矩阵** (diagonal matrix) 是主对角线之外的元素皆为 0 (its non-diagonal entries of a square matrix are all zero) 的矩阵，比如下例：

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

图 5 比较对称矩阵和对角矩阵。

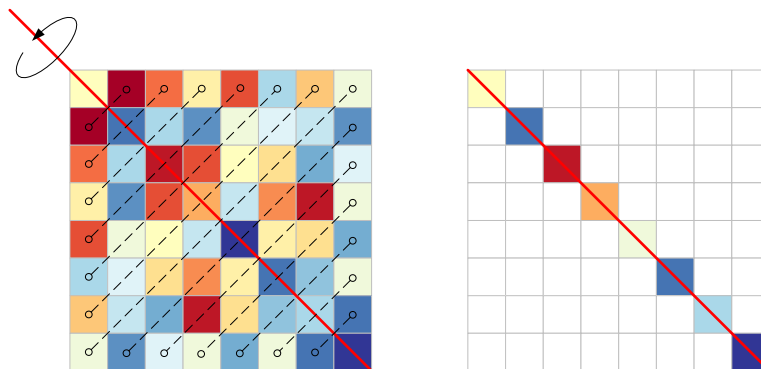


图 5. 对称矩阵和对角矩阵之间关系

但是，对角矩阵也可以是长方形矩阵，如图 6 所示。图 6 右侧两种对角矩阵可以叫做长方形对角矩阵 (rectangular diagonal matrix)。我们将在**奇异值分解** (Singular Value Decomposition, SVD) 中看到它们的应用。

**⚠ 请大家注意**，不加说明时，本书中的对角矩阵都是方阵。为了方便区分，本书一般管形状为方阵的对角矩阵叫“**对角方阵**”。

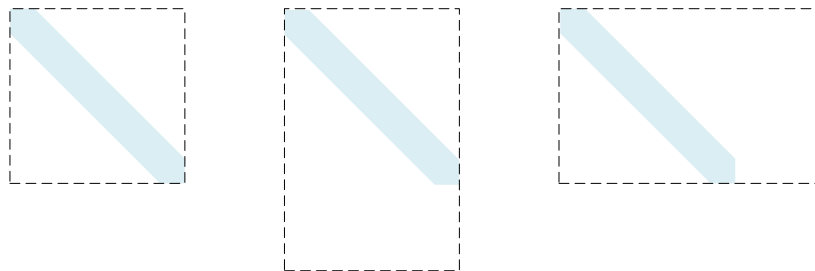
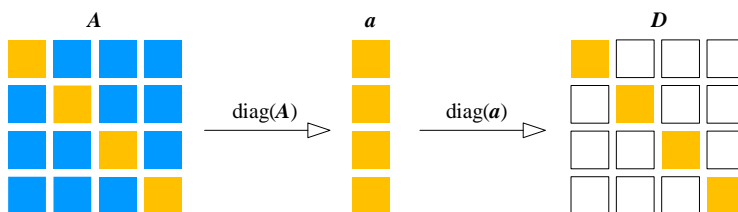


图 6. 三种对角矩阵

**副对角矩阵** (anti-diagonal matrix) 是副对角线之外元素皆为 0 的矩阵。

本书还常用 `diag()` 函数。如图 7 所示, `diag(A)` 提取矩阵  $A$  主对角线元素, 结果为列向量。此外, `diag(a)` 将向量  $a$  展成对角阵方  $D$ ,  $D$  主对角线元素依次为向量  $a$  元素。

Python 中, 完成 `diag()` 函数为 `numpy.diag()`。注意, `numpy.diag(A)` 提取矩阵  $A$  对角线元素, 结果为一维数组。结果虽然形似行向量, 但是严格来说它并不是行向量。

图 7. `diag()` 函数

Bk4\_Ch4\_02.py 展示如何使用 `numpy.diag()`。

## 单位矩阵

**单位矩阵** (identity matrix) 是一种特殊对角矩阵。 $n$  阶单位矩阵 ( $n$ -square identity matrix) 的特点是  $n \times n$  方阵对角线上的元素为 1, 其他为 0。本书中, 单位矩阵用  $I$  来表达:

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$



也有很多文献用  $E$  代表单位矩阵。本书的  $E$  专门用来代表**标准正交基** (standard orthonormal basis)。本书第 7 章会讲解标准正交基和其他类型基底。

## 三角矩阵

**三角矩阵** (triangular matrix) 也是特殊的方阵。如果方阵对角线以下元素均为零，这个矩阵被称作**上三角矩阵** (upper triangular matrix)：

$$\mathbf{U}_{n \times n} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果方阵对角线以上元素均为零，这个矩阵被称作**下三角矩阵** (lower triangular matrix)：

$$\mathbf{L}_{n \times n} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

提一嘴，如果矩阵  $A$  为**可逆矩阵** (invertible matrix, non-singular matrix)， $A$  可以通过 LU 分解变成一个下三角矩阵  $L$  与一个上三角矩阵  $U$  的乘积。



本书第 11 ~ 16 章将介绍包括 LU 分解在内的各种常见矩阵分解。

## 长方形矩阵

**长方形矩阵** (rectangular matrix) 是指行数和列数不相等的矩阵，可以是“细高”或“宽矮”。常见的数据矩阵几乎都是“细高”长方形矩阵，形状类似图 1。

计算时，长方形矩阵的形状并不“友好”。比如，很多矩阵分解都是针对方阵。图 8 所示为将细高数据矩阵  $X$  变成两个不同方阵的矩阵乘法运算过程。图 8 结果叫**格拉姆矩阵** (Gram matrix)， $X^T X$  可以理解为  $X$  的“平方”。 $X^T X$  还是对称矩阵，即满足  $X^T X = (X^T X)^T$ 。本书后文将会在，Cholesky 分解、特征值分解、空间等话题中见到格拉姆矩阵。

多说一嘴，处理长方形矩阵有一个利器，这就是宇宙无敌的奇异值分解 (Singular Value Decomposition)，即 SVD。SVD 分解可以说是最重要的矩阵分解，没有之一。请大家格外关注本书第 15、16 章。此外，本书最后三章“数据三部曲”，也离不开 SVD 分解。

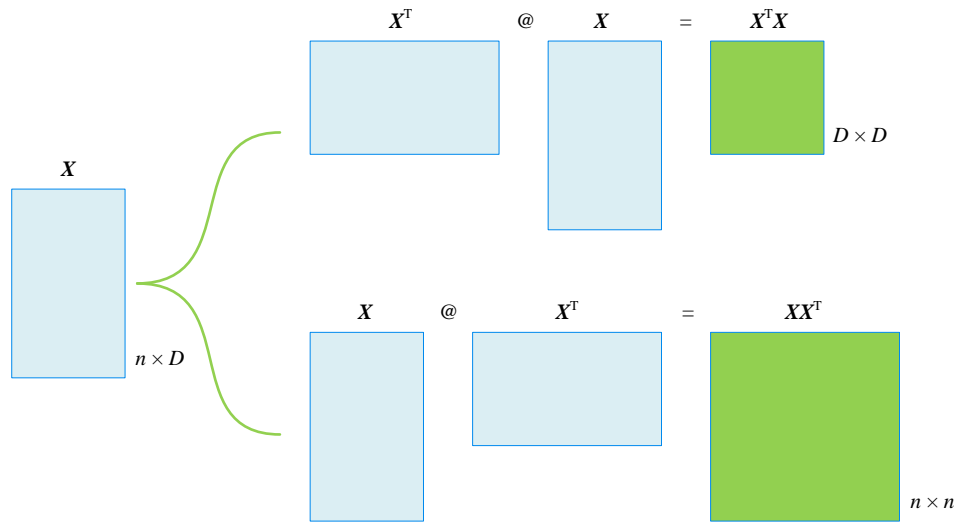


图 8. 将长方形矩阵变成方阵

## 4.3 基本运算：加减和标量乘法

### 矩阵加减

两个相同大小的矩阵  $A$  和  $B$  相加，指的是把这两个矩阵对应位置元素分别相加，具体如下：

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (11)$$

矩阵**加法交换律** (commutative property) 指的是：

$$A + B = B + A \quad (12)$$

矩阵**加法结合律** (associative property) 指的是：

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C \quad (13)$$

矩阵减法的运算规则和加法一致。

### 零矩阵

丛书用  $O$  表示元素全为 0 的矩阵，即**零矩阵** (zero matrix)。

零矩阵具有以下性质：

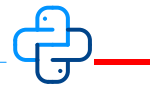
$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{O} &= \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A} - \mathbf{A} &= \mathbf{O} \end{aligned} \quad (14)$$

上式中， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{O}$  形状相同。

▲ 注意，零矩阵  $\mathbf{O}$  参与任何矩阵运算时，请格外考察  $\mathbf{O}$  的形状。

`numpy.zeros()` 用来生成零矩阵，输入为矩阵形状。`numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵。

类似地，`numpy.ones()` 可以生成全 1 矩阵，输入为矩阵形状。`numpy.ones_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵。



Bk4\_Ch4\_03.py 介绍如何完成矩阵加减法运算。

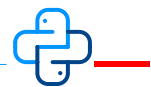
### 矩阵标量乘法

当矩阵乘以某一标量时，矩阵的每一个元素均乘以该标量，这种运算叫做**标量乘法** (scalar multiplication)。

标量  $k$  和矩阵  $\mathbf{X}$  的乘积 (the product of the matrix  $\mathbf{X}$  by a scalar  $k$ ) 记做  $k\mathbf{X}$ ：

$$k\mathbf{X} = \begin{bmatrix} k \cdot x_{1,1} & k \cdot x_{1,2} & \cdots & k \cdot x_{1,D} \\ k \cdot x_{2,1} & k \cdot x_{2,2} & \cdots & k \cdot x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot x_{n,1} & k \cdot x_{n,2} & \cdots & k \cdot x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (15)$$

注意，标量  $k$  字母为小写、斜体。当  $k = 0$  时，上式的结果为零矩阵  $\mathbf{O}$ ，形状为  $n \times D$ 。



Bk4\_Ch4\_04.py 展示如何完成矩阵标量乘法。

## 4.4 广播原则

NumPy 中的矩阵加减运算常使用**广播原则** (broadcasting)。当两个数组的形状并不相同的时候，可以通过广播原则扩展数组来实现相加、相减等操作。

## 矩阵和标量之和

图 9 所示为，一个矩阵  $A$  和标量  $k$  之和，相当于矩阵  $A$  的每一个元素加  $k$ 。比如，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 3+2 & 4+2 \\ 5+2 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (16)$$

上述运算规则也适用于减法。

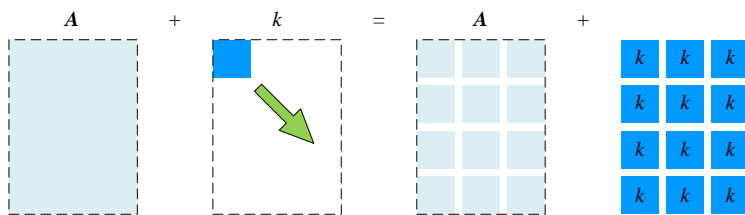


图 9. 广播原则，矩阵加标量

## 矩阵和列向量之和

当矩阵  $A$  行数和列向量  $c$  行数相同时， $A$  和  $c$  可以相加。

如图 10 所示，矩阵  $A$  和列向量  $c$  相加，相当于  $A$  的每一列和  $c$  相加。另外一个视角，列向量  $c$  首先自我复制，左右排列得到和  $A$  形状相同的矩阵，再和  $A$  相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+3 \\ 3+2 & 4+2 \\ 5+1 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (17)$$

上述规则也同样适用于减法。

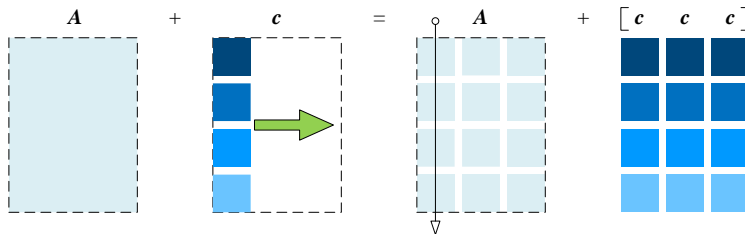


图 10. 广播原则，矩阵加列向量

## 矩阵和行向量之和

同理，当矩阵  $A$  列数和行向量  $r$  列数相同时， $A$  和  $r$  可以利用广播原则相加减。如图 11 所示，矩阵  $A$  和行向量  $r$  相加，相当于  $A$  的每一行和  $r$  分别相加。

另外一个视角，行向量  $r$  首先自我复制，上下叠加得到和  $A$  形状相同的矩阵，再和  $A$  相加：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + [2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+2 & 4+1 \\ 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (18)$$

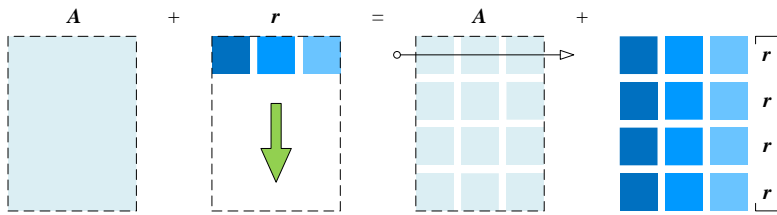


图 11. 广播原则，矩阵加行向量

### 列向量和行向量之和

利用广播原则，列向量可以和行向量相加。

如图 12 所示，列向量  $c$  自我复制，左右排列得到矩阵的列数和  $r$  列数一致。行向量  $r$  自我复制，上下叠加得到矩阵和  $c$  的行数一致。然后完成加法运算，比如：

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + [2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 3+1 \\ 2+2 & 2+1 \\ 1+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上式中，调转行、列向量顺序，不影响结果。

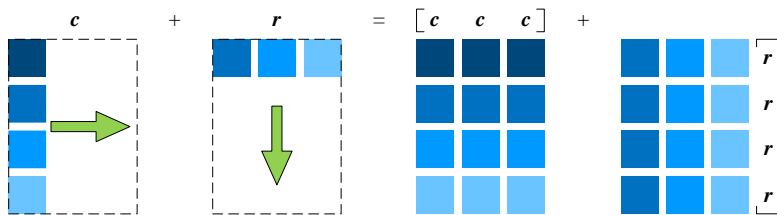


图 12. 广播原则，列向量加行向量



Bk4\_Ch4\_05.py 完成上述所示广播原则计算。此外，请大家把加号改成减号，验证广播原则在减法上的运算。

## 4.5 矩阵乘法：线性代数的运算核心

法国数学家，**雅克·菲利普·玛丽·比奈** (Jacques Philippe Marie Binet) 在 1812 年首先提出矩阵乘法运算规则。

毫不夸张地说，**矩阵乘法** (matrix multiplication) 在各种矩阵运算中居于核心地位，规则本身就是人类一项伟大创造！

大家记住，矩阵两大主要功能：1) 表格；2) 线性映射。

线性映射就体现在矩阵乘法中。比如  $Ax = b$  就是  $x \rightarrow b$  的线性映射；反之，如果  $A$  可逆，可以完成  $b \rightarrow x$  的线性映射。

$$x \xrightleftharpoons[x=A^{-1}b]{Ax=b} b \quad (20)$$

### 规则

矩阵  $A$  的列数等于矩阵  $B$  的行数， $A$  和  $B$  两个矩阵可以相乘。如果，矩阵  $A$  的形状是  $n \times D$ ，矩阵  $B$  的形状是  $D \times m$ ，两个矩阵的乘积结果  $C = AB$  的形状是  $n \times m$ ：

$$C_{n \times m} = A_{n \times D} B_{D \times m} = A_{n \times D} @ B_{D \times m} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,m} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中，

$$A_{n \times D} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix}, \quad B_{D \times m} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{D,1} & b_{D,2} & \cdots & b_{D,m} \end{bmatrix} \quad (22)$$

矩阵乘法是一种“矩阵  $\rightarrow$  矩阵”的运算规则。注意，向量也是特殊的矩阵。为了配合 NumPy 计算，丛书也用 @ 代表矩阵乘法运算符。

### 矩阵乘法规则

图 13 所示为矩阵乘法规则示意图。 $A$  第  $i$  行元素分别和  $B$  的第  $j$  列元素相乘，再求和，得到  $C$  的  $(i, j)$  元素：

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,D}b_{D,j} \quad (23)$$

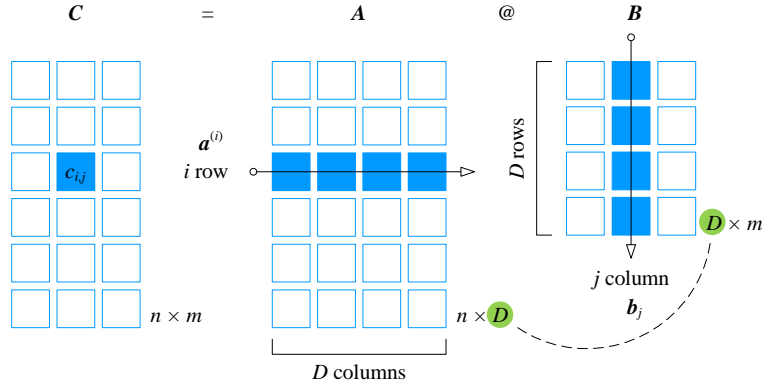


图 13. 矩阵乘法规则

用矩阵乘法来表达 (23)，即，

$$c_{i,j} = \mathbf{a}^{(i)} \mathbf{b}_j \quad (24)$$

其中， $\mathbf{a}^{(i)}$  是  $A$  第  $i$  行元素构成的行向量， $\mathbf{b}_j$  是  $B$  的第  $j$  列元素构成的列向量。 $\mathbf{a}^{(i)}$  和  $\mathbf{b}_j$  元素个数都是  $D$  个。(24) 也可以写成两个列向量的向量内积，即，

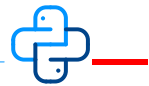
$$c_{i,j} = \mathbf{a}^{(i)\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}_j = \langle \mathbf{a}^{(i)\mathrm{T}}, \mathbf{b}_j \rangle \quad (25)$$

$\mathbf{a}^{(i)}$  为行向量，转置后  $\mathbf{a}^{(i)\mathrm{T}}$  为列向量。

这是理解矩阵乘法的“第一视角”，下一节我们会从两个不同视角来看矩阵乘法。



此外，本书在第 6 章讲解分块矩阵时会介绍更多矩阵乘法视角。



Bk4\_Ch4\_06.py 介绍如何借助 Numpy 完成矩阵乘法运算。值得注意的是，对于两个由 `numpy.array()` 产生的数据，使用 `*` 相乘，得到的乘积是对应元素分别相乘，广播法则有效；而两个由 `numpy.matrix()` 产生的 2 维矩阵，使用 `*` 相乘，则得到结果等同于 `@`。如果，分别由 `numpy.array()` 和 `numpy.matrix()` 产生的数据，使用 `*` 相乘，则等同于 `@`。请大家运行 Bk4\_Ch4\_07.py 给出的三个乘法例子，自行比较结果。

## 规则

一般情况，矩阵乘法不满足交换律：

$$AB \neq BA \quad (26)$$

另外，请大家注意以下矩阵乘法规则：

$$\begin{aligned} AO &= O \\ ABC &= A(BC) = (AB)C \\ k(AB) &= (kA)B = A(kB) = (AB)k \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned} \quad (27)$$

矩阵和单位矩阵的乘法：

$$\begin{aligned} A_{m \times n} I_{n \times n} &= A_{m \times n} \\ I_{m \times m} A_{m \times n} &= A_{m \times n} \end{aligned} \quad (28)$$

注意，上式中两个单位矩阵的形状不同。

下一章最后部分将探讨矩阵乘法常见的“雷区”，请大家留意。

## 矩阵的幂

$n$  阶方阵 ( $n$ -square matrix)  $A$  的**矩阵的幂** (powers of matrices) 为：

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^1 &= A \\ A^2 &= AA \\ A^{n+1} &= A^n A \end{aligned} \quad (29)$$



Bk4\_Ch4\_08.py 展示如何计算矩阵幂。乘幂运算符\*\*对 `numpy.array()` 和 `numpy.matrix()` 生成的数据有不同的运算规则。`numpy.matrix()` 生成矩阵  $A$ ， $A^{**2}$ ，是矩阵乘幂；`numpy.array()` 生成的矩阵  $B$ ， $B^{**2}$  是对矩阵  $B$  元素分别平方。请大家比较 Bk4\_Ch4\_09.py 给出的两个例子。

## 4.6 两个视角解剖矩阵乘法

为了更好地理解矩阵乘法，我们用两个  $2 \times 2$  矩阵相乘来讲解，具体如下：



$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \mathbf{A} @ \mathbf{B} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{30}$$

图 14 所示为两个  $2 \times 2$  矩阵相乘如何得到结果的每一个元素。这部分内容虽然在本系列丛书《数学要素》一册已经讲过一遍，为了加强大家对矩阵乘法理解，请学过的大家也耐心把本节内容扫读一遍。

下面，我们从两个视角来剖析矩阵乘法。

The figure illustrates the calculation of each element in the resulting matrix  $C$  from the product of two  $2 \times 2$  matrices  $A$  and  $B$ .

**Top: Full Matrix Multiplication**

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

**Middle: Row-by-Column Calculation**

Row 1 of  $A$  ( $a^{(1)}$ ) multiplied by Column 1 of  $B$  ( $b_1$ ) gives  $c_{1,1}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} \end{bmatrix}$$

Row 1 of  $A$  ( $a^{(1)}$ ) multiplied by Column 2 of  $B$  ( $b_2$ ) gives  $c_{1,2}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

**Bottom: Column-by-Row Calculation**

Row 2 of  $A$  ( $a^{(2)}$ ) multiplied by Column 1 of  $B$  ( $b_1$ ) gives  $c_{2,1}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} \end{bmatrix}$$

Row 2 of  $A$  ( $a^{(2)}$ ) multiplied by Column 2 of  $B$  ( $b_2$ ) gives  $c_{2,2}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

图 14. 矩阵乘法规则，两个  $2 \times 2$  矩阵相乘为例

## 第一视角

第一视角是矩阵运算的常规视角，也叫做标量积展开。

如图 14 所示，矩阵乘法  $\mathbf{AB}$  中，位于左侧的  $\mathbf{A}$  写成一组行向量；位于右侧的  $\mathbf{B}$  写成一组列向量。

$\mathbf{A}$  的第  $i$  行  $a^{(i)}$  乘以  $\mathbf{B}$  的第  $j$  列  $b_j$ ，得到乘积  $\mathbf{C}$  的  $(i, j)$  元素  $c_{ij}$ ：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} = \mathbf{A} @ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{bmatrix}_{2 \times 1} [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^{(1)} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}^{(2)} \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^{(2)} \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{31}$$

## 第二视角

矩阵乘法的第二视角叫做外积展开。

将矩阵乘法  $\mathbf{AB}$  中，位于左侧的  $\mathbf{A}$  写成一组列向量；位于右侧的  $\mathbf{B}$  写成一组行向量。如下所示，我们把  $\mathbf{AB}$  展开写成矩阵加法：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} = \mathbf{A} @ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \\
 &= [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} @ [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]_{1 \times 2} + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} @ [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]_{1 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{32}$$



矩阵乘法极其重要，本书第 5、6 章还将深入探讨矩阵乘法，并介绍更多视角。

## 4.7 转置：绕主对角线镜像

矩阵的行列互换得到的新矩阵的操作为**矩阵转置** (matrix transpose)。转置是一种“矩阵  $\rightarrow$  矩阵”运算。

如图 15 所示，一个  $n \times D$  矩阵  $\mathbf{A}$  转置得到  $D \times n$  矩阵  $\mathbf{B}$ ，整个过程相当于矩阵  $\mathbf{A}$  绕主对角线镜像。矩阵  $\mathbf{A}$  的转置 (the transpose of a matrix  $\mathbf{A}$ ) 记作  $\mathbf{A}^T$  或  $\mathbf{A}'$ 。为了和求导记号区分，本书仅采用  $\mathbf{A}^T$  记法。

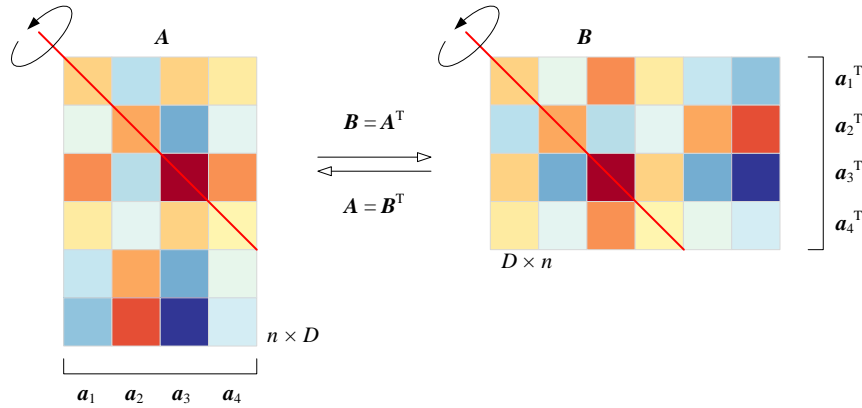


图 15. 矩阵转置

如图 15 所示，将矩阵  $A$  写成一组列向量：

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \quad (33)$$

矩阵  $A$  转置  $A^T$  可以展开写成：

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \\ a_4^T \end{bmatrix} \quad (34)$$

如上文所述，一个  $n \times D$  矩阵  $A$  转置结果为自身，则称  $A$  对称 (symmetric)：

$$A = A^T \quad (35)$$

列向量和自身的张量积，比如  $a \otimes a$ ，就是对称矩阵。

矩阵转置如下几个重要性质值得大家重视：

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (kA)^T &= kA^T \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (ABC)^T &= C^T B^T A^T \\ (A_1 A_2 A_3 \cdots A_k)^T &= A_k^T \cdots A_3^T A_2^T A_1^T \end{aligned} \quad (36)$$

等长列向量  $a$  和  $b$  的标量积等价于  $a$  的转置乘  $b$ ，或  $b$  的转置乘  $a$ ：

$$a \cdot b = b \cdot a = \langle a, b \rangle = a^T b = b^T a = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad (37)$$

$a$  的模 ( $L^2$  范数) 也可以写成  $a$  转置乘自身，再开方：

$$\|a\|_2^2 = a \cdot a = \langle a, a \rangle = \sqrt{a^T a} \Rightarrow \|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a^T a} \quad (38)$$

如果  $A$  和  $B$  不是方阵，但是形状相同，下两式“相当于” $A$ 、 $B$  和的平方：

$$\begin{aligned} (A+B)^T(A+B) &= (A^T+B^T)(A+B) = A^T A + A^T B + B^T A + B^T B \\ (A+B)(A+B)^T &= (A+B)(A^T+B^T) = AA^T + AB^T + BA^T + BB^T \end{aligned} \quad (39)$$



Bk4\_Ch4\_10.py 计算矩阵转置。

## 4.8 矩阵逆：“相当于”除法运算

方阵  $A$  如果可逆 (invertible)，仅当存在矩阵  $B$  使得：

$$AB = BA = I \quad (40)$$

$B$  叫做矩阵  $A$  的逆 (inverse)，一般记做  $A^{-1}$ 。

矩阵可逆 (invertible) 也称非奇异 (non-singular)；否则就称矩阵不可逆 (non-invertible)，或称奇异 (singular)。如果  $A$  的逆存在， $A$  的逆唯一。矩阵求逆是一种“矩阵  $\rightarrow$  矩阵”运算。



本书的 8 章将从几何视角介绍如何理解矩阵求逆。

强调一下，矩阵求逆“相当于”除法运算，但是两者有本质上的区别。矩阵的逆本质上还是矩阵乘法。

请大家注意以下和矩阵逆有关的运算规则：

$$\begin{aligned} (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (ABC)^{-1} &= C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ (kA)^{-1} &= \frac{1}{k}A^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

其中，假设  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $AB$  和  $ABC$  逆存在， $k \neq 0$ 。下一章最后会介绍几种矩阵乘法的雷区，其中就包括使用矩阵逆这个数学工具时要注意的事项。

如果  $A$  的逆存在，如下等式成立：

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \\
 \mathbf{A}^{-n} &= (\mathbf{A}^{-1})^n = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\cdots\mathbf{A}^{-1}}_n \\
 (\mathbf{A}^n)^{-1} &= \mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n
 \end{aligned} \tag{42}$$

一般情况,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \tag{43}$$

特别地, 对于给定  $2 \times 2$  矩阵  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{44}$$

矩阵  $\mathbf{A}$  的逆  $\mathbf{A}^{-1}$  可以通过下式获得,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{45}$$

其中


$$|\mathbf{A}| = ad - bc \tag{46}$$

$|\mathbf{A}|$  被称作矩阵  $\mathbf{A}$  **行列式** (determinant)。

**▲** 注意, 观察 (45), 我们容易发现行列式值  $|\mathbf{A}|$  不为 0 时, 矩阵  $\mathbf{A}$  才存在逆。本章后续将详细讲解行列式值计算。

若下式成立, 方阵  $\mathbf{A}$  是**正交矩阵** (orthogonal matrix):

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \tag{47}$$

 正交矩阵在本书有很重的戏份。本书第 9、10 章将深入探讨正交矩阵的性质和应用, 本节不做展开。



Bk4\_Ch4\_11.py 展示用 Numpy 库函数 `numpy.linalg.inv()` 计算矩阵逆。注意, 对于 `numpy.matrix()` 产生的矩阵  $\mathbf{A}$ , 可以通过 `A.I` 计算矩阵  $\mathbf{A}$  的逆, 比如 Bk4\_Ch4\_12.py 给出的例子。但是, 这一方法不能使用在 `numpy.array()` 生成的矩阵。`numpy.array()` 生成的矩阵求逆, 一般用 `numpy.linalg.inv()`。

## 4.9 迹：主对角元素之和

$n \times n$  矩阵  $A$  的迹 (trace) 为其主对角线元素之和：

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} \quad (48)$$

矩阵迹是一种“矩阵  $\rightarrow$  标量”运算。

举个例子，

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6 \quad (49)$$

▲ 注意，“迹”这个运算是针对“方阵”定义的。



Bk4\_Ch4\_13.py 介绍如何计算矩阵的迹。

请大家注意以下有关矩阵迹的性质：

$$\begin{aligned} \text{tr}(A+B) &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \\ \text{tr}(kA) &= k \cdot \text{tr}(A) \\ \text{tr}(A^T) &= \text{tr}(A) \\ \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA) \end{aligned} \quad (50)$$

注意，上式假设  $AB$  和  $BA$  两个乘法都存在。

如果  $x$  和  $y$  为等长列向量，则如几个运算等价：

$$x^T y = y^T x = x \cdot y = y \cdot x = \langle x, y \rangle = \text{tr}(xy^T) = \text{tr}(yx^T) = \text{tr}(x \otimes y) \quad (51)$$



本书后续会介绍椭圆可以用来表达协方差矩阵 (covariance matrix)。举个例子，给定一个协方差矩阵为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (52)$$

图 16 左图就是代表上述协方差矩阵的旋转椭圆。

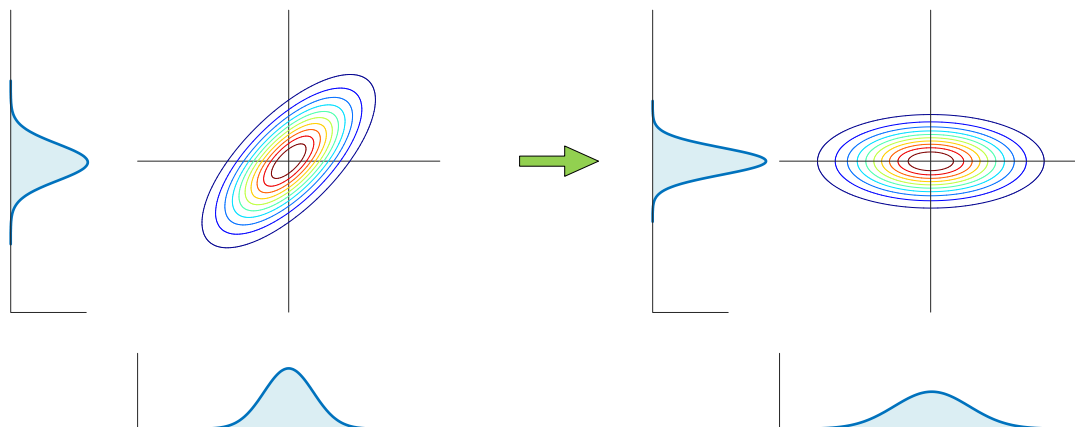


图 16. 协方差矩阵和椭圆关系

经过旋转操作，椭圆的长轴和横轴重合，得到图 16 右图正椭圆，对应的协方差矩阵为：

$$\Sigma_{\text{rotated}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

相信大家已经注意到，两个协方差矩阵的迹相同，都是 5，即：

$$\text{tr}(\Sigma) = 2.5 + 2.5 = \text{tr}(\Sigma_{\text{rotated}}) = 4 + 1 \quad (54)$$

这一点非常重要，本系列丛书后续会在不同板块中探讨。

大家可能会问，(52) 和 (53) 两个协方差矩阵之间有怎样的联系？或者说，如何从 (52) 计算得到 (53)？椭圆之间的旋转角度怎么确定？本书第 13、14 章介绍的特征值分解将回答这些疑问。

## 4.10 逐项积：对应元素相乘

在讲解向量运算时，我们介绍过**元素乘积** (element-wise multiplication)，也称为**阿达玛乘积** (Hadamard product) 或**逐项积** (piecewise product)。

逐项积也可以用在矩阵上。两个形状相同的矩阵的逐项积是矩阵对应元素相乘，结果形状不变：

$$\mathbf{A}_{n \times D} \odot \mathbf{B}_{n \times D} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \cdots & a_{1,D}b_{1,D} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & a_{2,D}b_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{n,1} & a_{n,2}b_{n,2} & \cdots & a_{n,D}b_{n,D} \end{bmatrix}_{n \times D} \quad (55)$$

图 17 所示为矩阵逐项积运算法则示意图。逐项积是一种“矩阵  $\rightarrow$  矩阵”运算。

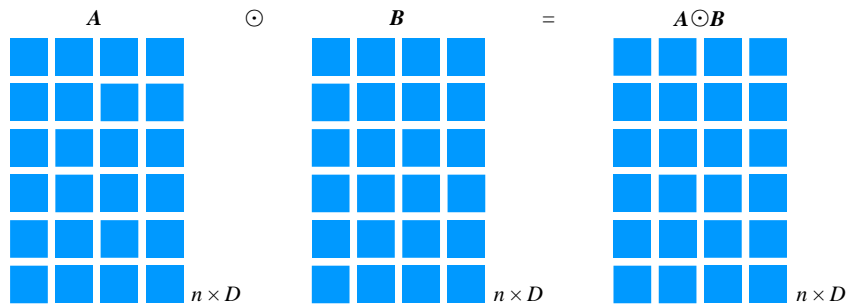
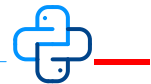


图 17. 矩阵逐项积



Bk4\_Ch4\_14.py 介绍如何计算逐项积。

## 4.11 行列式：将矩阵映射到标量值

每个“方阵”都有自己的**行列式** (determinant)，方阵  $\mathbf{A}$  的行列式值可以表达为  $|\mathbf{A}|$  或  $\det(\mathbf{A})$ 。如果方阵的行列式值非零，方阵则称可逆或非奇异。

白话说，行列式是将一个方阵  $\mathbf{A}$  根据一定的规则映射到一个标量。因此，行列式是一种“矩阵  $\rightarrow$  标量”运算。

一阶方阵的行列式值：

$$|a_{11}| = a_{11} \quad (56)$$

二阶方阵的行列式值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (57)$$

三阶方阵的行列式值：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (58)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

根据以上规律，可以发现  $n \times n$  矩阵  $A$  的行列式值可以通过递归计算得到。

## 更多性质

特别地，对角阵的行列式值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \quad (59)$$

三角阵的行列式值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \quad (60)$$

上述规则也适用于计算下三角矩阵的行列式值。

请大家注意以下行列式性质：

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\
\det(c\mathbf{A}_{n \times n}) &= c^n \det(\mathbf{A}) \\
\det(\mathbf{A}^T) &= \det(\mathbf{A}) \\
\det(\mathbf{A}^n) &= \det(\mathbf{A})^n \\
\det(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}
\end{aligned} \quad (61)$$

一般情况，

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) \quad (62)$$

## 向量积

本书前文介绍的向量积也可以通过行列式计算得到，比如：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{63}$$

还用上一章的例子，给定  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  向量：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\
 \mathbf{b} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{64}$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  结果如下：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
 &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{65}$$

## 几何视角

给定  $2 \times 2$  方阵  $\mathbf{A}$ ，具体为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{66}$$

图 18 给出的是二阶矩阵行列式的几何意义。

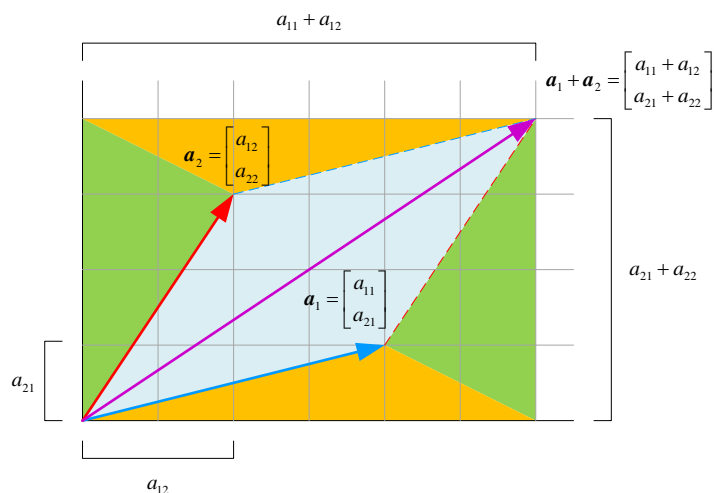


图 18. 二阶矩阵的行列式的几何意义

$A$  写成左右排列的两个列向量：

$$A = [a_1 \ a_2] \quad (67)$$

即：

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

如图 18 所示，以  $a_1$  和  $a_2$  为两条边构造得到一个平行四边形。这个平行四边形的面积就是  $A$  的行列式值。下面我们推导一下。

如图 19 所示，矩形和三角形的面积很容易计算。

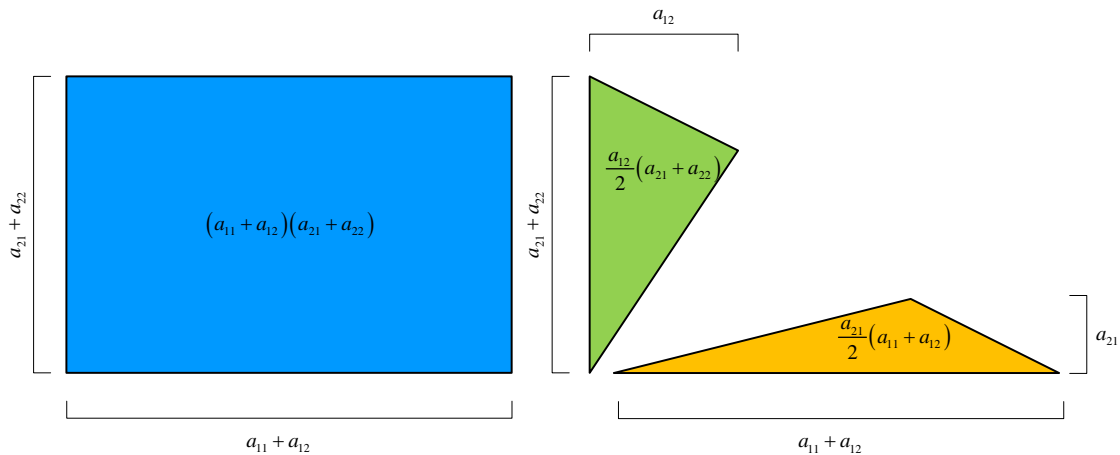


图 19. 三个几何形状的面积

如图 20 所示，平行四边形的面积，就是矩形面积减去两倍的绿色三角形面积，再减去两倍的橙色三角形面积，即：

$$\begin{aligned} \text{Area} &= (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) - a_{12}(a_{21} + a_{22}) - a_{21}(a_{11} + a_{12}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (69)$$

这和 (57) 行列式结果一致。

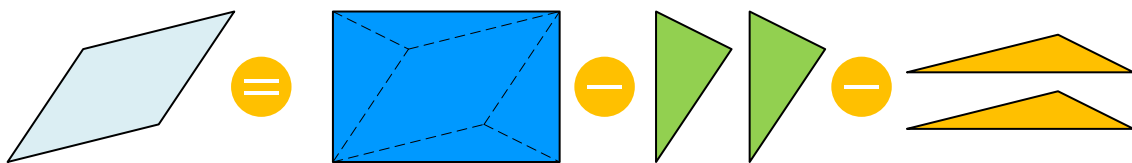


图 20. 求平行四边形面积

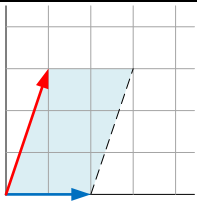
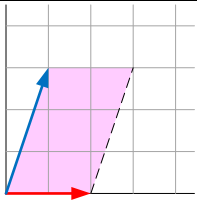
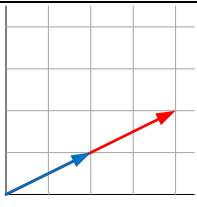


Bk4\_Ch4\_15.py 介绍计算行列式值。

表 1 给出了几个特殊  $2 \times 2$  方阵的行列式值和对应的平面形状。希望大家仔细对比表中几幅图中向量  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  逆时针方向先后次序，很容易发现这种次序和行列式值正、负、零之间的关系。

表 1. 几个特殊  $2 \times 2$  方阵的行列式值

行列式值	向量	图形
$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$	$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$	$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	

## 从面积到体积

本节前文讲解行列式值用的例子中矩阵都是  $2 \times 2$ ，现在聊一聊  $3 \times 3$  方阵的行列式值的几何意义。

我们先看一个最简单例子，给定如下  $3 \times 3$  对角方阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad (70)$$

如图 21 所示，上式代表三维空间中边长分别为 1、2、3 的立方体，而行列式值为 6 则说明立方体的体积为 6。

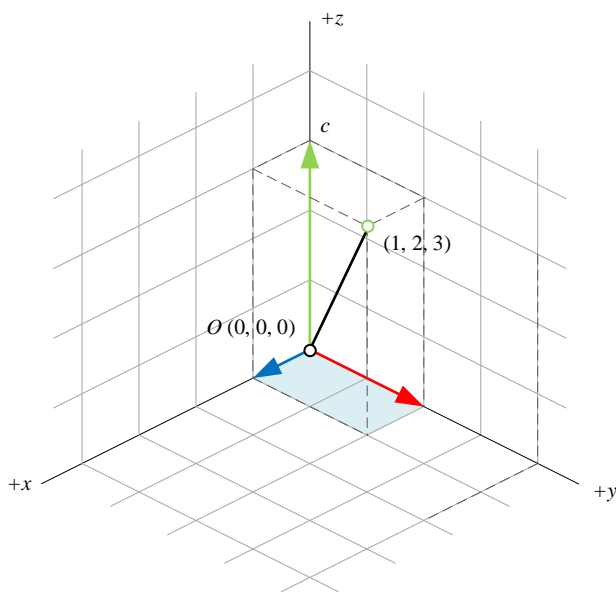


图 21. 立方体的体积为 6

对 (70) 稍作修改，将三个对角元素值改为 0，得到矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

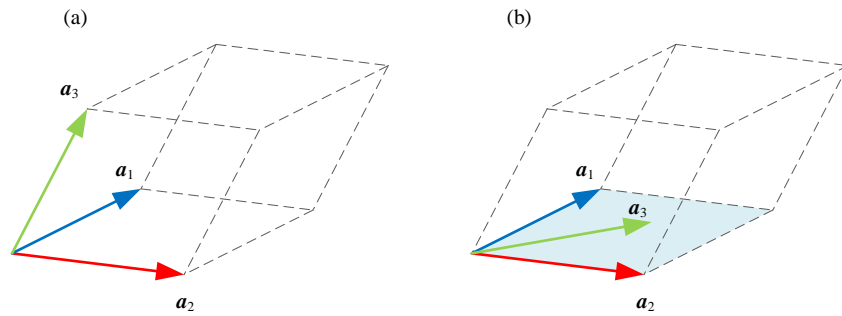
这时，矩阵的行列式值为 0。从图 21 上来看，这个立方体“趴”在  $xy$  平面上，对应浅蓝色阴影，显然它的体积为 0。

如图 22 (a) 所示，而对于任意  $3 \times 3$  方阵  $A$ ，它的行列式值的几何含义就是由其三个列向量  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  构造的平行六面体的体积。注意，这个体积值也有正负。特别地，如果  $\mathbf{a}_3$  在  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$  构造的平面中，也就是  $\mathbf{a}_3$  躺在图 22 (b) 中浅蓝色平面上，平行六面体体积为 0，即方阵  $A$  行列式值为 0。

行列式中某行或某列全为 0，行列式值为 0。从几何角度很容易理解，因为这个平行体的某条边长为 0，因此它的体积就是 0。



图 22 (b) 这种情况下， $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  线性相关， $A$  的秩为 2，这是本书第 7 章要介绍的内容。此外，在线性变换中，变换矩阵的行列式值代表面积或体积缩放比例。本书第 8 章将展开讲解。

图 22.  $3 \times 3$  方阵  $A$  行列式值的几何含义

## 多维

再进一步，给定如下  $D \times D$  对角方阵：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_D \end{bmatrix}_{D \times D} \quad (72)$$

上式说明，在  $D$  维空间中，这个“长方体”的边长分别为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、...  $\lambda_D$ 。而这个长方体的体积就是这些值连乘。

举个例子，在多元高斯分布的概率密度函数中，我们可以在分母上看到矩阵的行列式值  $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ ， $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$  起到的作用就是体积缩放：

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \quad (73)$$

本书第 20 章会使用各种线性代数工具解剖多元高斯分布概率密度函数。

## 几何变换：平行四边形 $\rightarrow$ 矩形

大家会逐渐发现，我们遇到的方阵大部分不是对角方阵，计算其面积或体积显然不容易。有没有一种办法能够将这些矩阵，还原成其原本面貌？也就是将方阵转化成对角方阵？

答案是肯定的，用到的方法就是本书后续要讲解的特征值分解 (eigen decomposition)。注意，并不是所有的方阵都可以转化为对角方阵，能够完成对角化的矩阵叫可对角化矩阵 (diagonalizable matrix)。这实际上告诉我们特征值分解的前提——矩阵可对角化。

举个例子，如图 23 所示，通过“特征值分解”，我们把平行四边形变成一个长方形。显然两个矩阵的行列式值相同，即两个几何形状具有相同面积。大家很快就会发现，长方形的边长——2

和 5——叫做特征值 (eigen value)。2 和 5 是对角方阵的对角线元素。此外，值得注意的是图 23 中两个矩形的迹相同，即  $3 + 4 = 2 + 5$ 。

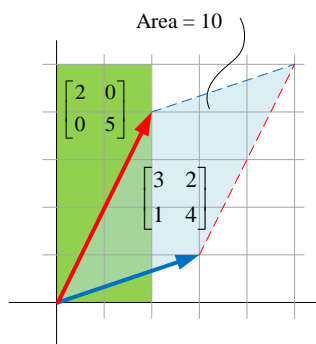


图 23. 把平行四边形变成长方形

类似地，如图 24 所示，通过神奇的“特征值分解”，我们可以把平行六面体变成长方体。特征值的奇妙用途还不止这些，请大家关注本书第 13、14 章。

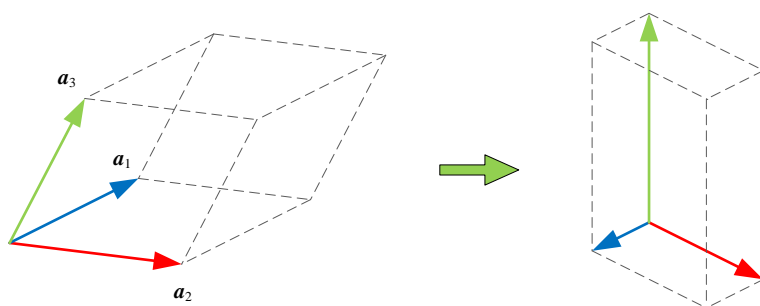


图 24. 把平行六面体变成长方体

本章走马观花地介绍几种常见矩阵运算。必须强调的是，每一种矩阵运算规则都是重要的数学工具，都有自己的应用场景。而在所有线性代数的运算法则中，矩阵乘法居于核心地位。

就像儿时背诵九九乘法表一样，矩阵乘法规则就是我们的“成人乘法表”——必须要熟练掌握！随着本书对线性代数知识抽丝剥茧，大家会由浅入深认识到矩阵乘法的伟力。

强烈推荐大家参考 *Immersive Linear Algebra*。这本书配套大量可交互动画展示线性代数概念。全册免费阅读，网址如下：

<http://immersivemath.com/ila/index.html>