



Vector Space

# 向量空间

用三原色给向量空间涂颜色



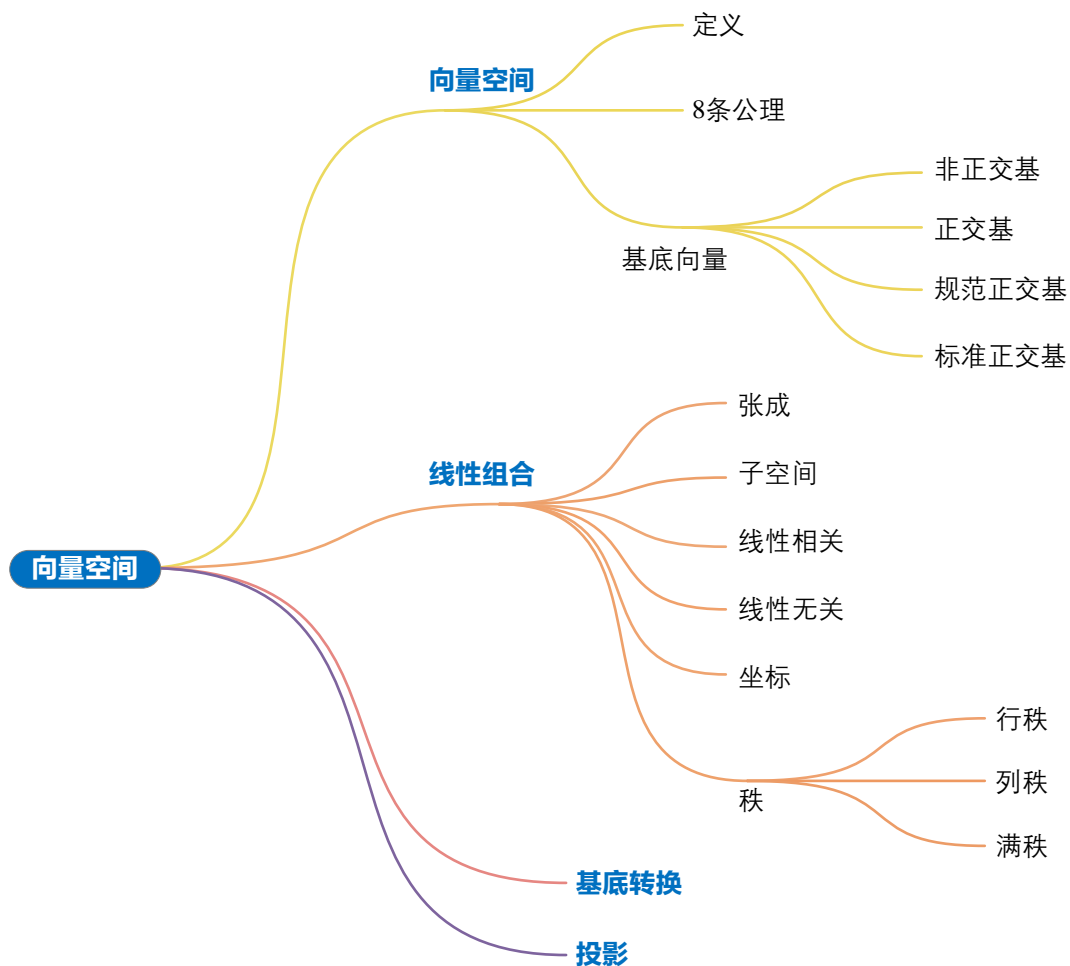
数学，是神灵创造宇宙的语言。

*Mathematics is the language in which God has written the universe.*

—— 伽利略·伽利莱 (Galilei Galileo) | 意大利物理学家、数学家及哲学家 | 1564 ~ 1642



← `numpy.linalg.matrix_rank()` 计算矩阵的秩



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 6.1 向量空间：从直角坐标系说起

▲ 注意，本节很长，可能有点枯燥！但是，请坚持看完这一节，色彩斑斓的内容在本节之后。

### 笛卡尔坐标系

**向量空间** (vector space) 是笛卡尔坐标系的自然延伸。图 1 给出二维和三维直角坐标系，在向量空间中，它俩就是最基本的欧几里得向量空间  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ )。

在这两个向量空间中，我们可以完成向量的加减、标量乘法等一系列运算。

在平面  $\mathbb{R}^2$  上，坐标点  $(x_1, x_2)$  无死角全面覆盖平面上所有点。这就是说，从向量角度来讲， $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$  代表平面  $\mathbb{R}^2$  上所有的向量。

类似地，在三维空间  $\mathbb{R}^3$  中， $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  代表三维空间中所有的向量。

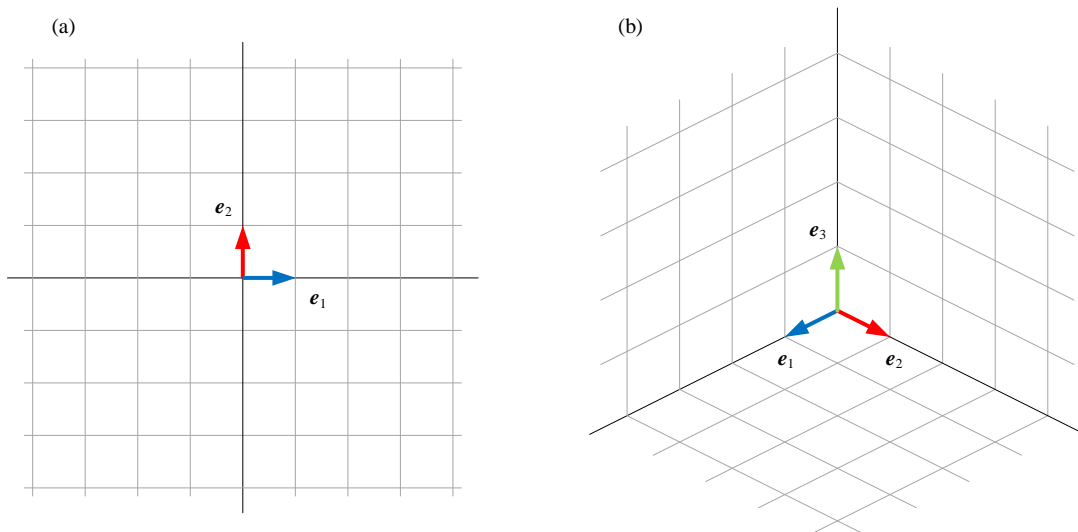


图 1. 二维和三维直角坐标系

### 向量空间

我们下面看一下向量空间的定义。

给定域  $F$ ， $F$  上的向量空间  $V$  是一个集合。集合  $V$  非空，且对于加法和标量乘法运算封闭。这意味着，对于  $V$  中的每一对元素  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ ，可以唯一对应  $V$  中的一个元素  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ；而且，对于  $V$  中的每一个元素  $\mathbf{v}$  和任意一个标量  $k$ ，可以唯一对应  $V$  中元素  $k\mathbf{v}$ 。

如果  $V$  连同上述加法运算和标量乘法运算满足如下公理，则称  $V$  为向量空间。

公理 1: **向量加法交换律** (commutativity of vector addition); 对于  $V$  中任何  $u$  和  $v$ ，满足：

$$u + v = v + u \quad (1)$$

公理 2: **向量加法结合律** (associativity of vector addition); 对于  $V$  中任何  $u$ 、 $v$  和  $w$ ，满足：

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (2)$$

公理 3: **向量加法恒等元** (additive identity);  $V$  中存在零向量的元素  $0$ ，使得对于任意  $V$  中元素  $v$ ，下式成立：

$$v + 0 = v \quad (3)$$

公理 4: **存在向量加法逆元素** (existence of additive inverse); 对于每一个  $V$  中元素  $v$ ，选在  $V$  中的另外一个元素  $-v$ ，满足：

$$v + (-v) = 0 \quad (4)$$

公理 5: **标量乘法对向量加法的分配率** (distributivity of vector sums); 对于任意标量  $k$ ， $V$  中元素  $u$  和  $v$  满足：

$$k(u + v) = ku + kv \quad (5)$$

公理 6: **标量乘法对域加法的分配率** (distributivity of scalar sum); 对于任意标量  $k$  和  $t$ ，以及  $V$  中任意元素  $v$ ，满足：

$$(k + t)v = kv + tv \quad (6)$$

公理 7: **标量乘法与标量的域乘法相容** (associativity of scalar multiplication); 对于任意标量  $k$  和  $t$ ，以及  $V$  中任意元素  $v$ ，满足：

$$(kt)v = k(tv) \quad (7)$$

公理 8: **标量乘法的单位元** (scalar multiplication identity);  $V$  中任意元素  $v$ ，满足：

$$1 \cdot v = v \quad (8)$$

注意，以上公理不需要大家格外记忆！

## 线性组合

令  $v_1, v_2 \dots v_D$  为向量空间  $V$  中的向量。下式被称作向量  $v_1, v_2 \dots v_D$  的**线性组合** (linear combination)。

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_D v_D \quad (9)$$

其中， $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_D$  均为实数。图 2 可视化 (9) 对应的线性组合过程。

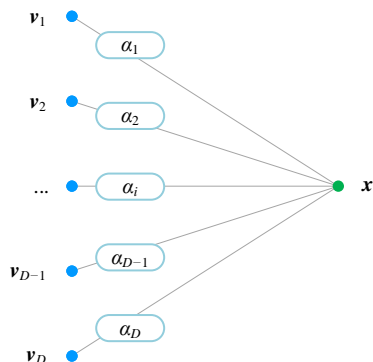


图 2. 线性组合

## 张成

$v_1, v_2, \dots, v_D$  所有线性组合的集合称作  $v_1, v_2, \dots, v_D$  的张成，记做  $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_D)$ 。

## 线性相关和线性无关

给定向量组  $V = [v_1, v_2, \dots, v_D]$ ，如果存在不全为零  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D$  使得下式成立。

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_D v_D = \mathbf{0} \quad (10)$$

则称向量组 **V 线性相关** (linear dependence, 形容词为 linearly dependent); 否则, **V 线性无关** (linear independence, 形容词为 linearly independent)。

图 3 在平面上解释了线性相关和线性无关。

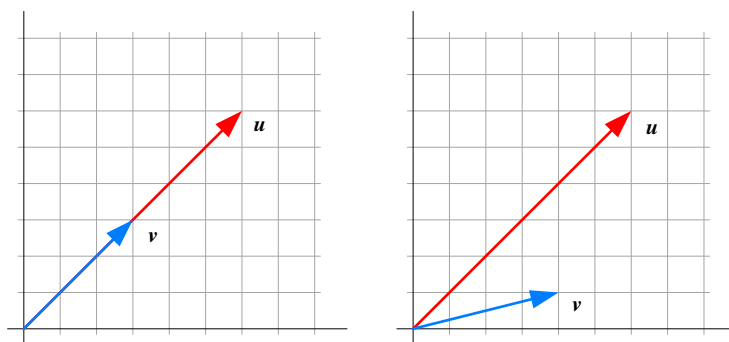


图 3. 平面上解释线性相关与线性无关

## 极大无关组、秩

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

一个矩阵  $X$  的**列秩** (column rank) 是  $X$  的线性无关的列向量数量最大值。类似地，**行秩** (row rank) 是  $X$  的线性无关的行向量数量最大值。

以列秩为例，矩阵  $X$  可以写成一系列列向量：

$$X_{n \times D} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_D] \quad (11)$$

对于  $F = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_D\}$ ，如果这些列向量线性相关，就总可以找出一个冗余向量，把它剔除。

如此往复，不断剔除冗余向量，直到不再有冗余向量为止，得到  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  线性无关。则称  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  为  $F = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_D\}$  的**极大线性无关组** (maximal linearly independent subset)。

⚠ 注意，极大线性无关组不唯一。

极大线性无关组的元素数量  $r$  为  $F = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_D\}$  的秩，也称为  $F$  的维数或维度。

矩阵的列秩和行秩总是相等的，因此它们可以简单地称作矩阵  $X$  的秩 (rank)，记做  $\text{rank}(X)$ 。图 4 所示为当  $\text{rank}(X)$  的秩取不同值时， $\text{span}(X)$  所代表的空间。矩阵  $X$  的列数为  $D$ ，当  $\text{rank}(X) = D$  时，矩阵  $X$  列满秩，列向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_D$  线性无关。

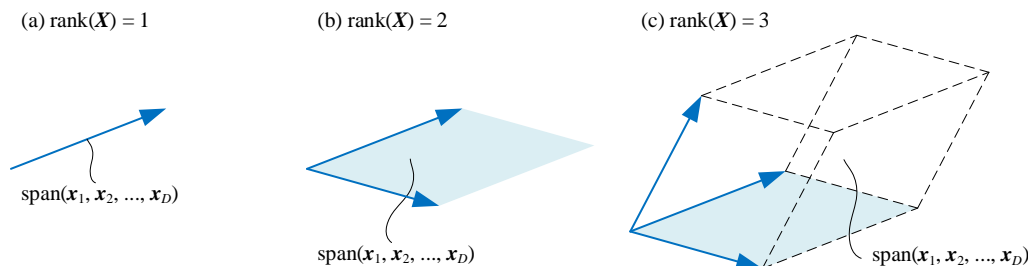


图 4.  $\text{rank}(X)$  的秩和  $\text{span}(X)$  的空间

⚠ 请读者注意，仅当方阵  $A_{D \times D}$  满秩，即  $\text{rank}(A) = D$ ， $A$  可逆。

如果乘积  $AB$  存在， $AB$  的秩满足：

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)) \quad (12)$$

对于实数矩阵  $X$ ，以下几个矩阵的秩相等：

$$\text{rank}(X^T X) = \text{rank}(X X^T) = \text{rank}(X) = \text{rank}(X^T) \quad (13)$$

`numpy.linalg.matrix_rank()` 计算矩阵的秩。

此外，不要被矩阵的形状迷惑，如下矩阵的秩都是 1。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{10 \times 1}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{10 \times 4}, [1 \ 2 \ 3 \ 4] \quad (14)$$

## 基底、基底向量

一个向量空间  $V$  的**基底向量** (basis vector) 指  $V$  中的子集  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_D$ , 它们**线性无关** (linearly independent), **张成** (span) 向量空间  $V$ 。而  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D]$  叫做  $V$  的**基底** (vector basis 或 basis)。向量空间  $V$  中的每一个向量都可以唯一地表示成基底  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D]$  中基底向量的线性组合。

白话说, 基底就像是地图上的经度和纬度, 起到的是定位作用。有了经纬度之后, 地面上的任意一点都有其唯一的经纬度坐标。

这就是本节最开始说的,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  就是平面  $\mathbb{R}^2$  一组基底, 平面  $\mathbb{R}^2$  上每一个向量都可以唯一地表达成  $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ 。而  $(x_1, x_2)$  就是在基底  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  下的坐标。

**⚠ 注意区别  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  和  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ 。** 本书会用  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  表达有序基, 也就是向量基底元素按“先  $\mathbf{e}_1$  后  $\mathbf{e}_2$ ”顺序排列。而  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  代表集合, 集合中基底向量不存在顺序。此外, 有序基  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  相当于由向量构造得到一个矩阵  $\mathbf{E}$ 。不做特殊说明, 本书中的向量基底都默认为有序基。

## 维数

向量空间的维数 (dimension) 是基底中基底向量的个数, 本书采用的维数记号为  $\dim()$ 。

图 1 (a) 中  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , 即  $\mathbb{R}^2$  维数  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , 而  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  的秩也是 2。

图 1 (b) 中  $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , 即  $\mathbb{R}^3$  维数  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ,  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  的秩为 3。

下面, 为了理解维数这个概念, 我们多看几组例子。

图 5 所示为 6 个维度为 1 的向量空间。从几何角度来看, 这些向量空间都是直线。

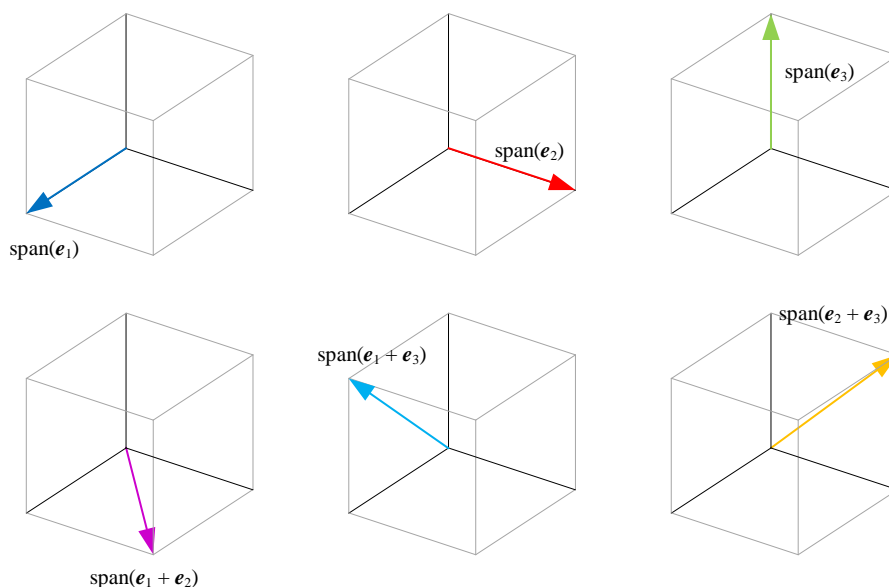


图 5. 维数为 1 的向量空间

图 6 所示为线性无关的向量张起的维数为 2 的空间。也就是说，图 6 每幅子图中的两个向量分别是该空间的基底向量。再次强调，基底中的向量必须线性无关。

从集合角度来看， $\text{span}(e_1) \subset \text{span}(e_1, e_2)$ ， $\text{span}(e_2) \subset \text{span}(e_1, e_2)$ 。

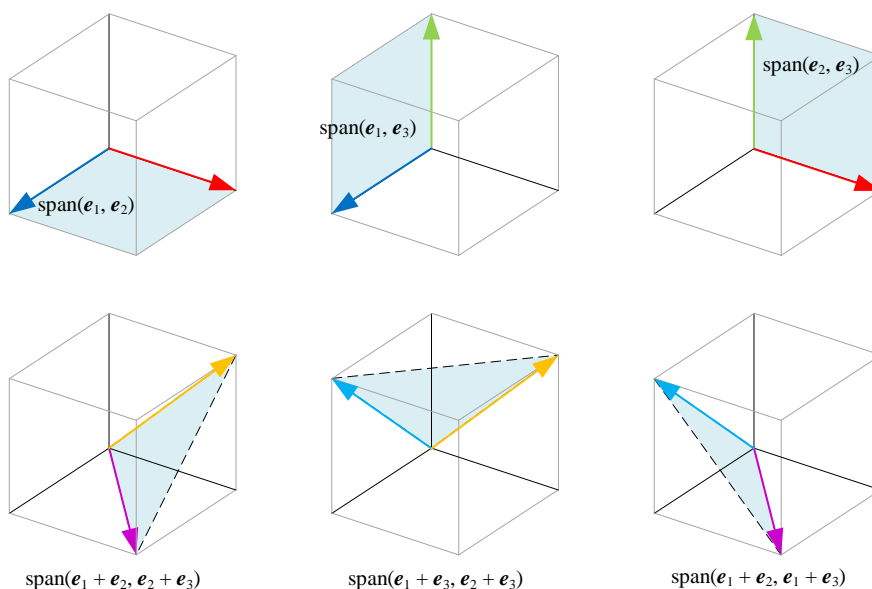


图 6. 维数为 2 的向量空间，张成空间的向量线性无关



图 7 所示为线性相关的向量张起的维数为 2 的空间。

举个例子， $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  张起的空间维度为 2，显然  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  中向量线性相关，因此  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  不能叫做基底。进一步分析可以知道  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  的秩为 2。

由于基底中的基底向量则必须线性无关，剔除掉其中冗余向量后， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  三组中的任意一组向量都线性无关，因此它们三者都可以选做  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  空间的基底。

不同的是， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  中基底向量正交，但是  $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$ 、 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]$  这两个基底中的向量并非正交。也就是构成向量空间的基底向量可以正交，也可以非正交，这是下文马上要探讨的内容。

相信大家已经很清楚，基底中的向量之间必须线性无关，而用  $\text{span}()$  张成空间的向量可以线性相关，比如  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ 。

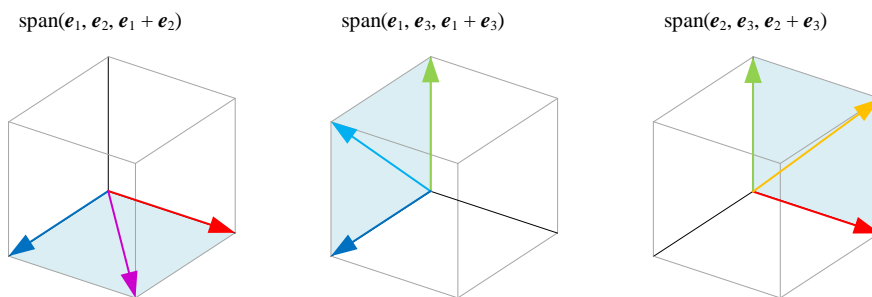


图 7. 维数为 2 的向量空间，张成空间的向量线性相关

图 8 所示为线性无关的向量张起维数为 3 的空间。注意这些空间都和  $\mathbb{R}^3$  等价。

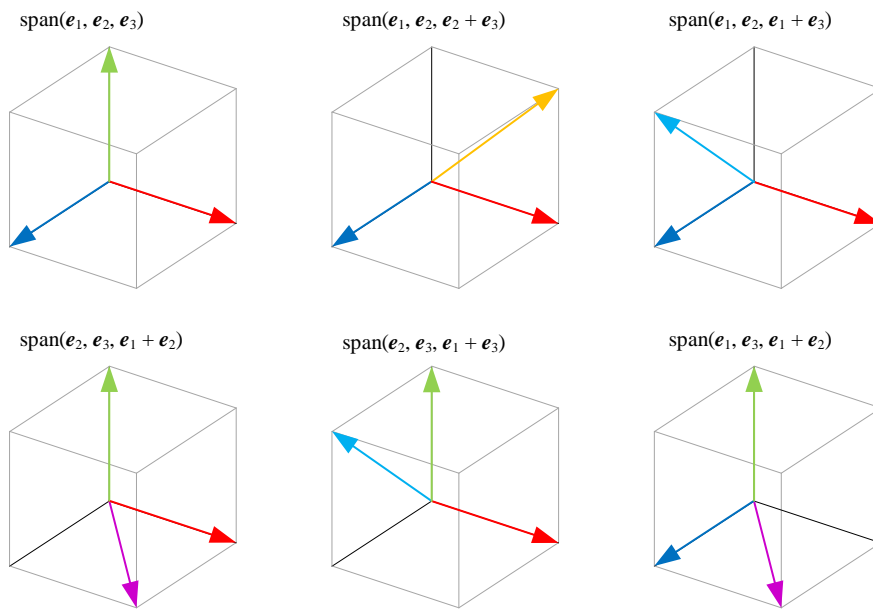


图 8. 维数为 3 的向量空间

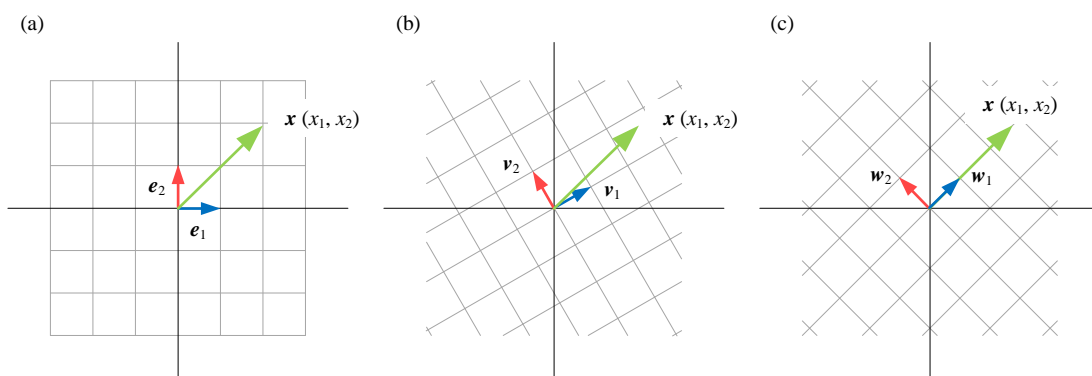
### 基底选择并不唯一

此外，我们之所以强调  $[e_1, e_2]$  是平面  $\mathbb{R}^2$  的基底，这是因为  $[e_1, e_2]$  不是平面  $\mathbb{R}^2$  唯一的基底。

大家还记得本书前文给出图 9 的这幅图吗？

$[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$  都是平面  $\mathbb{R}^2$  基底！也就是说  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(e_1, e_2) = \text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(w_1, w_2)$ 。

而平面  $\mathbb{R}^2$  上的向量  $x$  在  $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$  这三组基底中都有各自的唯一坐标。

图 9. 向量  $x$  在三个不同的正交直角坐标系中位置

## 正交基、规范正交基、标准正交基

大家可能早已注意到图 9 中， $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$  的每个基底向量都是单位向量， $\|e_1\| = \|e_2\| = \|v_1\| = \|v_2\| = \|w_1\| = \|w_2\| = 1$ 。

且每组基底向量本身相互正交，即  $e_1$  垂直  $e_2$ ， $v_1$  垂直  $v_2$ ， $w_1$  垂直  $w_2$ 。

本书中，基底中基底向量若两两正交，该基底叫**正交基** (orthogonal basis)。

如果正交基中每个基底向量的模都为 1，则称该基底为**规范正交基** (orthonormal basis)。图 9 中  $[e_1, e_2]$ 、 $[v_1, v_2]$ 、 $[w_1, w_2]$  三组基底都是规范正交基。

显然，张成平面  $\mathbb{R}^2$  的规范正交基有无数组。它们之间存在旋转关系，也就是说  $[e_1, e_2]$  绕原点旋转一定角度就可以得到  $[v_1, v_2]$  或  $[w_1, w_2]$ 。

更特殊的是， $[e_1, e_2]$  叫做平面  $\mathbb{R}^2$  的**标准正交基** (standard orthonormal basis)，或称**标准基** (standard basis)。“标准”这个字眼给了  $[e_1, e_2]$ ，是因为用这个基底表示平面  $\mathbb{R}^2$  最为自然。 $[e_1, e_2]$  也是平面直角坐标系最普遍的参考系。

显然， $[e_1, e_2, e_3]$  是  $\mathbb{R}^3$  的标准正交基， $[e_1, e_2, \dots, e_D]$  是  $\mathbb{R}^D$  的标准正交基。

## 非正交基

基底中的基底向量可以非正交，我们在图 8 中已经看到很多例子。

举个例子，平面  $\mathbb{R}^2$  上，任何两个不平行的向量都可以构成平面上的一个基底。如果基底中的基底向量之间两两不都是正交，这样的基底叫做**非正交基** (non-orthogonal basis)。

图 10 所示为两组非正交基底，它们也都张起  $\mathbb{R}^2$  平面，即  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(a_1, a_2) = \text{span}(b_1, b_2)$ 。

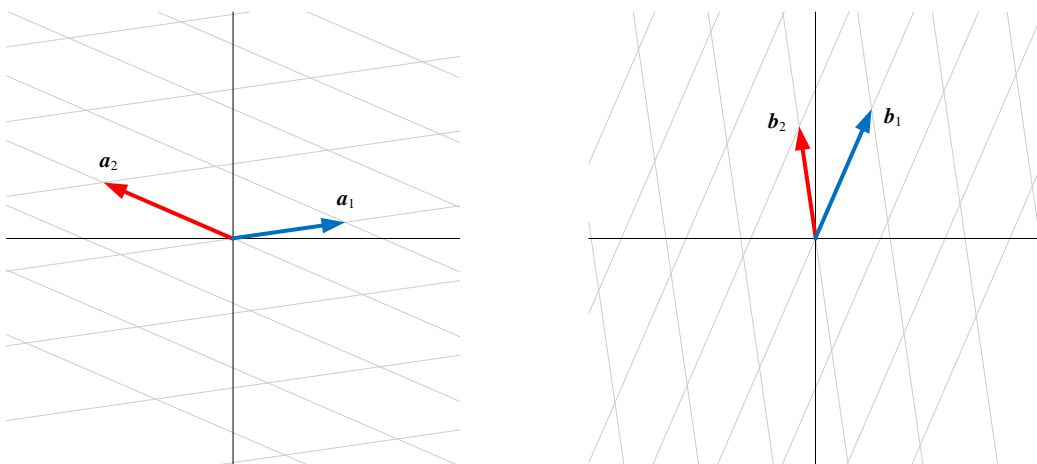


图 10. 二维平面的两个基底，非正交

图 11 总结了几种基底之间的关系。

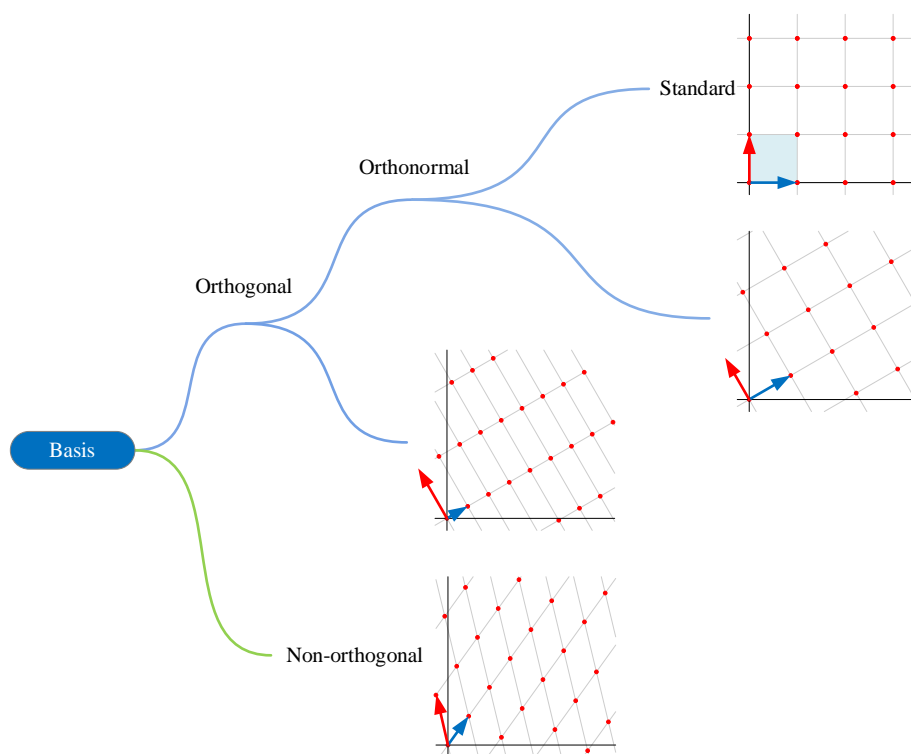


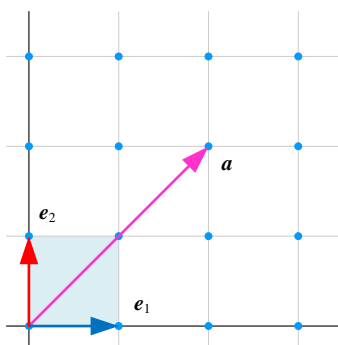
图 11. 几种基底之间的关系

## 基底转换

本节前文提到了各种基底，**基底转换** (change of basis) 可以完成不同基底之间变换，而标准正交基是常用的桥梁。

给定如下图 12 平面直角坐标系中的一个向量，将其写成  $e_1$  和  $e_2$  的线性组合：

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2e_1 + 2e_2 \quad (15)$$



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

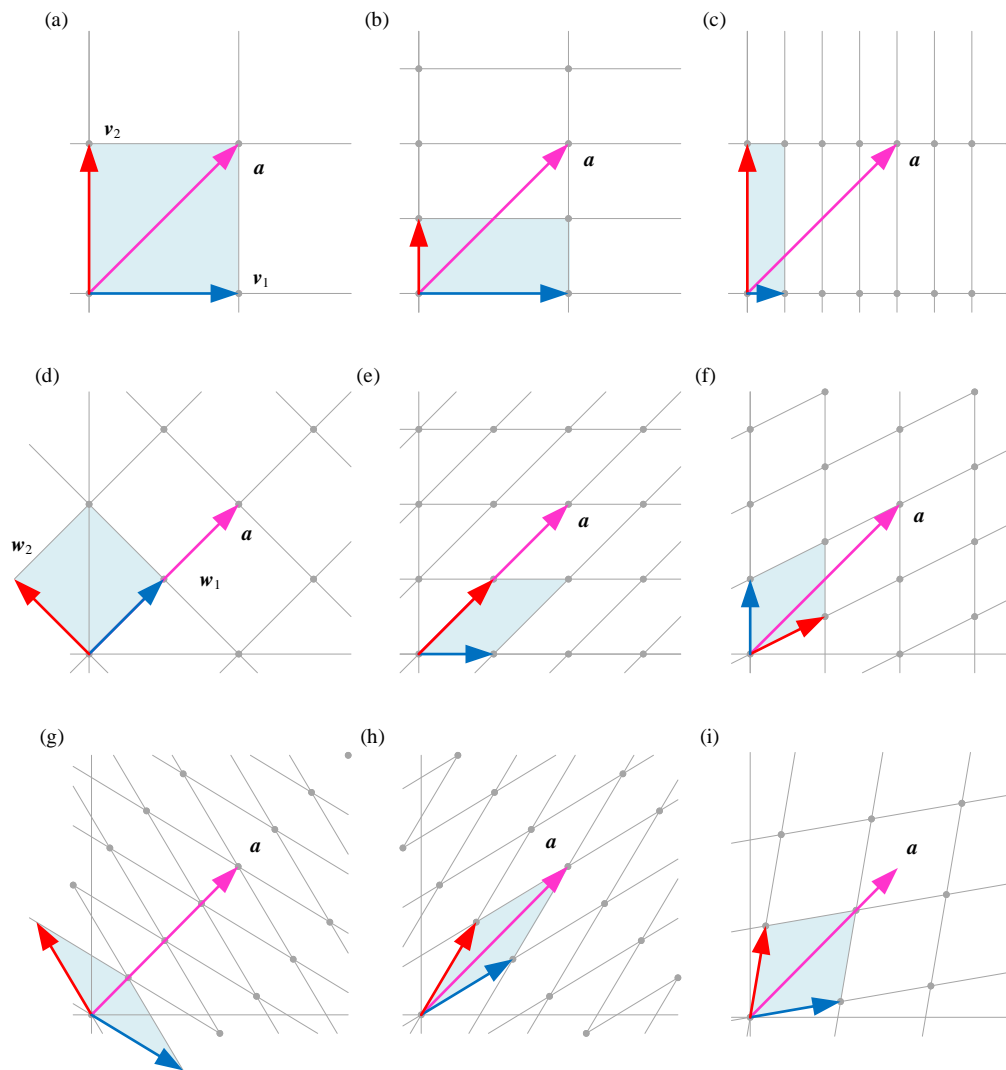
代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 12. 平面直角坐标系中的一个向量  $a$ 

图 13 给出的是不同基底中表达同一个向量  $a$ 。

图 13. 不同基底表达同一个向量  $a$ 

在图 12 这个正交标准坐标系中， $a$  可以写成列向量  $x$ ：

$$a = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ex = x \quad (16)$$

其中， $x_1$  和  $x_2$  代表坐标值。

假设在平面上，另外一组基底为  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ ，而在这个基底向量  $\mathbf{a}$  的坐标为  $[z_1, z_2]^T$ ， $\mathbf{a}$  可以写成  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  的线性组合：

$$\mathbf{a} = z_1 \mathbf{v}_1 + z_2 \mathbf{v}_2 = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

令，

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2], \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

(17) 可以写成：

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}\mathbf{z} \quad (19)$$

联立 (16) 和 (19)，得到：

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z} \quad (20)$$

$\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$  可以写成：

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \quad (21)$$

以图 13 (a) 为例， $\mathbf{V}$  为：

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

向量  $\mathbf{a}$  在图 13 (a)  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  这个基底下的坐标为：

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

再举个例子，图 13 (d) 中  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  具体数值为：

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{W}$ 、 $\mathbf{y}$  三者关系如下：

$$\mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{y} \quad (25)$$

其中， $\mathbf{y}$  代表向量  $\mathbf{a}$  在中  $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  坐标。

向量  $\mathbf{a}$  在图 13 (d) 这个  $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  这个基底下的坐标为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

联立 (19) 和 (25)，得到：

$$\mathbf{V}\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{y} \quad (27)$$

这样从坐标  $z$  到坐标  $y$  的转换，可以通过下式完成。

$$y = W^{-1}Vz \quad (28)$$

代入具体值，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$z$   $y$

## 投影

如图 14 (a) 所示，线性无关的两个向量  $v_1$  和  $v_2$  张成一个二维平面  $H = \text{span}(v_1, v_2)$ ， $[v_1, v_2]$  是  $H$  的基底。在二维平面  $H$  内， $\hat{a}$  为  $v_1$  和  $v_2$  的线性组合：

$$\hat{a} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad (30)$$

$\alpha_1$  和  $\alpha_2$  则是  $\hat{a}$  在基底  $[v_1, v_2]$  中的坐标。显然  $\hat{a}$ 、 $v_1$ 、 $v_2$  线性相关。

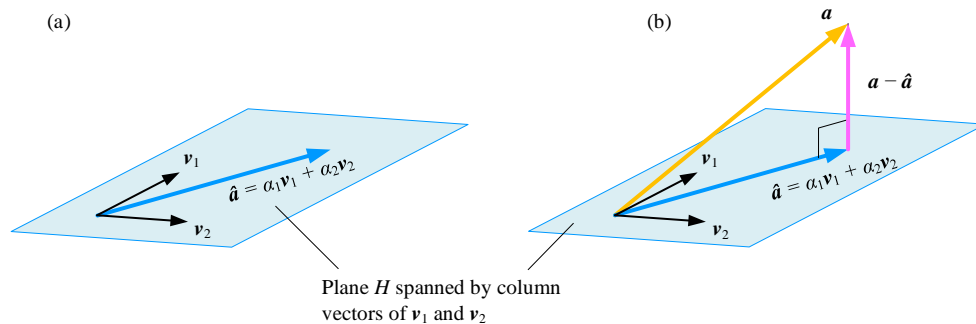


图 14. 线性相关与线性无关，三维空间

图 14 (b) 中， $a$  明显在平面  $H$  之外，因此不能用  $v_1$  和  $v_2$  线性组合表达，从而  $a$ 、 $v_1$ 、 $v_2$  线性无关。

如果  $\hat{a}$  是  $a$  在  $H$  平面内投影， $a$  中不能被  $v_1$  和  $v_2$  表达部分，即  $a - \hat{a}$ ，垂直于  $H$  平面。这一思路便是**最小二乘法** (ordinary least square, OLS) 线性回归。

大家也可以顺便回顾一下本系列丛书《数学要素》中鸡兔同笼三部曲中“平面升起的毛线兔耳朵”和“平面之外的 5 头猪”这两个例子。本书后文还会从几个不同角度讲解投影。

大家读完本节，如果对于向量空间的概念还是云里雾里，下面我们给这个空间涂个颜色，来进一步帮助大家理解！

## 6.2 给向量空间涂颜色：RGB 色卡

向量空间的“空间”二字赋予这个线性代数概念更多的可视化的潜力。本节开始就试图给向量空间涂“颜色”，让大家从色彩角度来讲解向量空间。

如图 15 所示，**三原色光模式** (RGB color mode) 将**红** (Red)、**绿** (Green)、**蓝** (Blue) 三原色的色光以不同的比例叠加合成产生各种色彩光。

强调一下，红、绿、蓝不是调色盘的涂料。RGB 中，红、绿、蓝均匀调色得到白色；而在调色盘中，红、绿、蓝三色颜料均匀调色得到黑色。

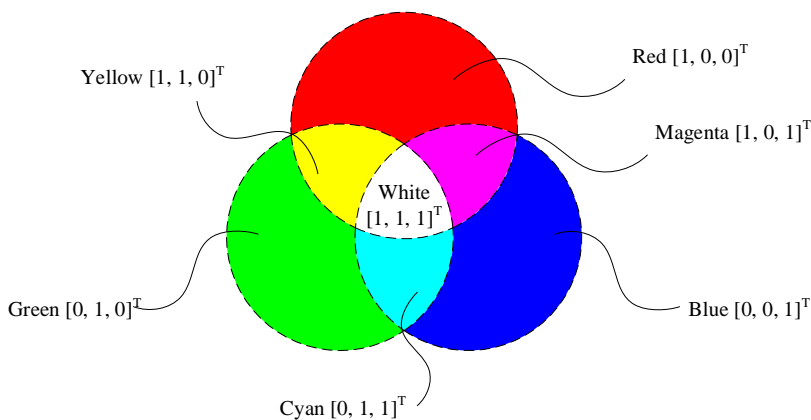


图 15. 三原色模型

如图 16 所示，三原色模型这个空间中，任意一个颜色看成是基底  $[e_1, e_2, e_3]$  中三个基底向量构成线性组合。其中， $e_1$  代表红色， $e_2$  代表绿色， $e_3$  代表蓝色：

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

注意，RGB 三原色可以用八进制表示，这时数值为 0 ~ 255 之间整数。也可以十六进制数来表达。



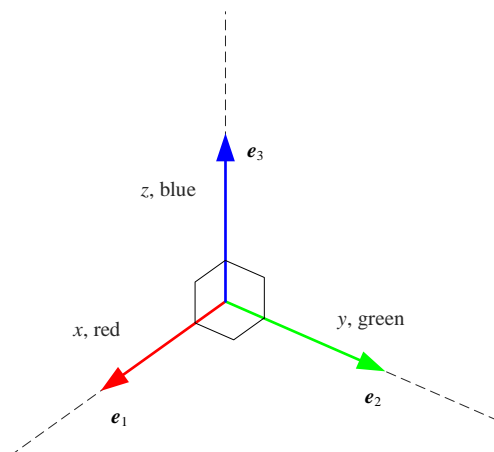


图 16. 三原色空间

也就是说，各种颜色可以写成如下线性组合：

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \quad (32)$$

其中， $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 取值范围都是  $[0, 1]$ 。

$\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$  这三个基底向量两两正交，因此它们两两内积为 0：

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

而且， $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$  均为单位向量：

$$\|\mathbf{e}_1\|_2 = 1, \quad \|\mathbf{e}_2\|_2 = 1, \quad \|\mathbf{e}_3\|_2 = 1 \quad (34)$$

因此，在三原色模型这个向量空间  $V$  中， $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  是  $V$  的标准正交基。利用  $\mathbf{e}_1$  ( $[1, 0, 0]^T$  red)、 $\mathbf{e}_2$  ( $[0, 1, 0]^T$  green) 和  $\mathbf{e}_3$  ( $[0, 0, 1]^T$  blue) 这三个基底向量，我们可以张成一个色彩斑斓的空间。下面我们就带大家揭秘这个彩色空间。

特别强调一点，准确来说，RGB 三原色空间并不是本书前文所述的向量空间，原因就是  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$  有取值范围限制。而向量空间不存在这样的取值限制。

## 6.3 张成空间：线性组合红、绿、蓝三原色

本节把“张成”这个概念用到 RGB 三原色上。

### 单色

首先，对  $e_1$ 、 $e_2$  和  $e_3$  对逐个研究。实数  $\alpha_1$  取值范围为  $[0, 1]$ ， $\alpha_1$  乘  $e_1$  得到向量  $a$ ：

$$a = \alpha_1 e_1 \quad (35)$$

大家试想，在这个 RGB 三原色空间，(35) 意味着什么？

图 17 已经给出答案。

标量  $\alpha_1$  乘向量  $e_1$ ，得到不同深度的红色。 $e_1$  张成的空间  $\text{span}(e_1)$  的维度为 1。向量空间  $\text{span}(e_1)$  是 RGB 三原色空间  $V$  子空间。

类似地，标量  $\alpha_2$  乘向量  $e_2$ ，得到不同深度的绿色。标量  $\alpha_3$  乘向量  $e_3$ ，得到不同深度的蓝色。

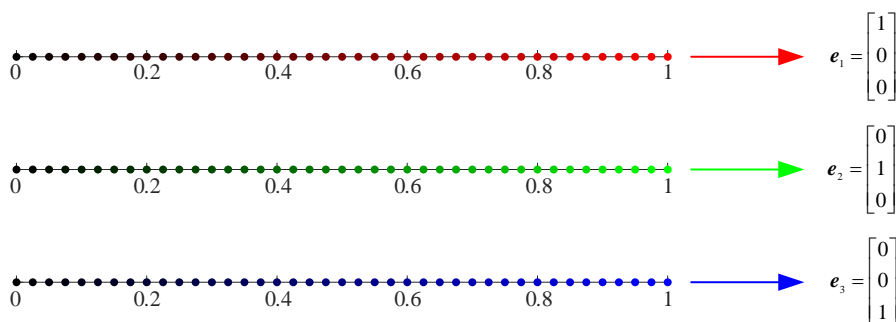


图 17. 三个基底向量和标量乘积

## 双色合成

再进一步，图 18 所示为  $e_1$  和  $e_2$  的张成空间  $\text{span}(e_1, e_2)$ 。图 18 平面上的颜色可以写成如下线性组合：

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad (36)$$

$\text{span}(e_1, e_2)$  的维数为 2。 $[e_1, e_2]$  的秩为 2。

如图 18 所示，这个  $\text{span}(e_1, e_2)$  平面上，颜色在绿色和红色之间渐变。特别地， $e_1 + e_2$  为黄色， $e_1 + e_2$  在空间  $\text{span}(e_1, e_2)$  中。 $\text{span}(e_1, e_2)$  也是 RGB 三原色空间  $V$  子空间。

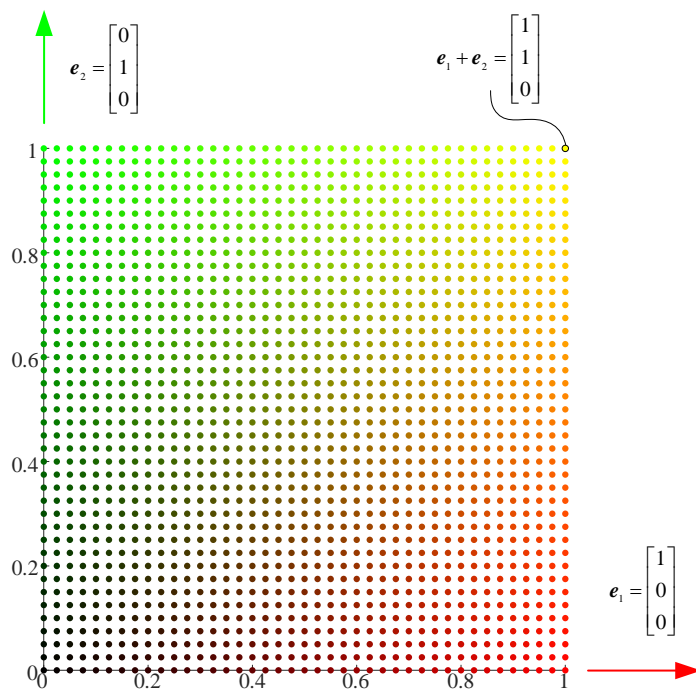
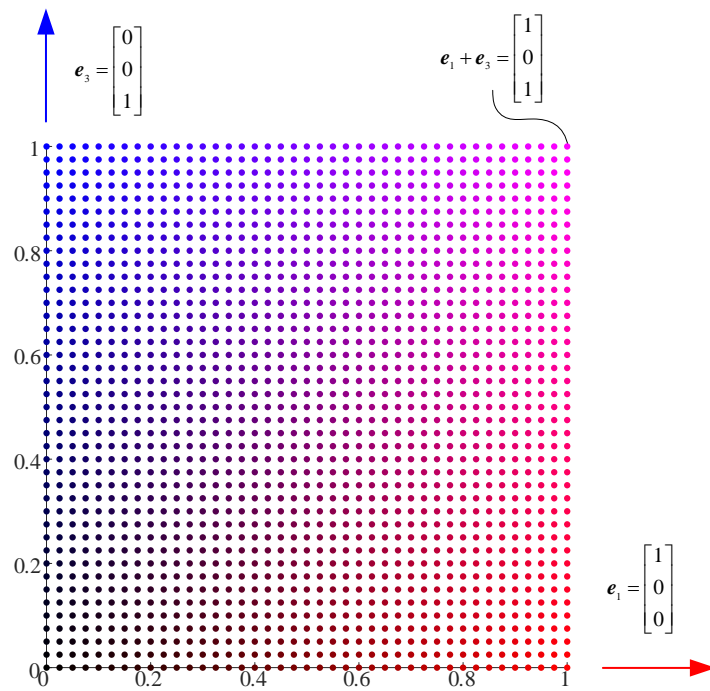
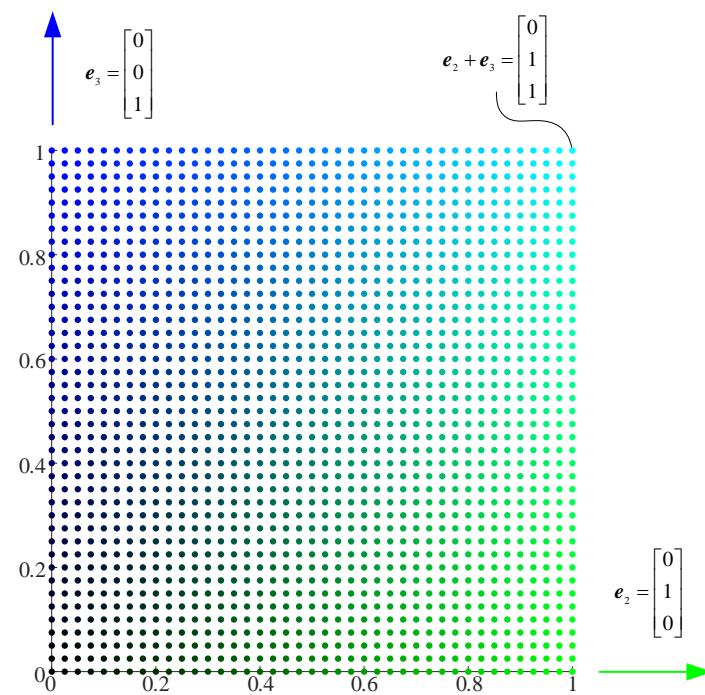
图 18. 基底向量  $e_1$  和  $e_2$  张成的空间

图 19 所示为  $e_1$  和  $e_3$  的张成  $\text{span}(e_1, e_3)$ ，颜色在蓝色和红色之间渐变。特别地， $e_1 + e_3$  为品红。

图 20 所示为  $e_2$  和  $e_3$  的张成  $\text{span}(e_2, e_3)$ ，颜色在绿色和蓝色之间渐变。注意  $e_2 + e_3$  为青色。

图 19. 基底向量  $e_1$  和  $e_3$  张成的空间图 20. 基底向量  $e_2$  和  $e_3$  张成的空间

## 三色合成

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$e_1$  ( $[1, 0, 0]^T$  red)、 $e_2$  ( $[0, 1, 0]^T$  green) 和  $e_3$  ( $[0, 0, 1]^T$  blue) 这三个基底向量张的空间  $\text{span}(e_1, e_2, e_3)$  如图 21 所示。这个空间的维数为 3。

▲ 注意，为了方便可视化，图 21 仅仅绘制了空间边缘上色彩最鲜艳的散点。实际上，空间内部还有无数散点，代表相对较深的颜色。

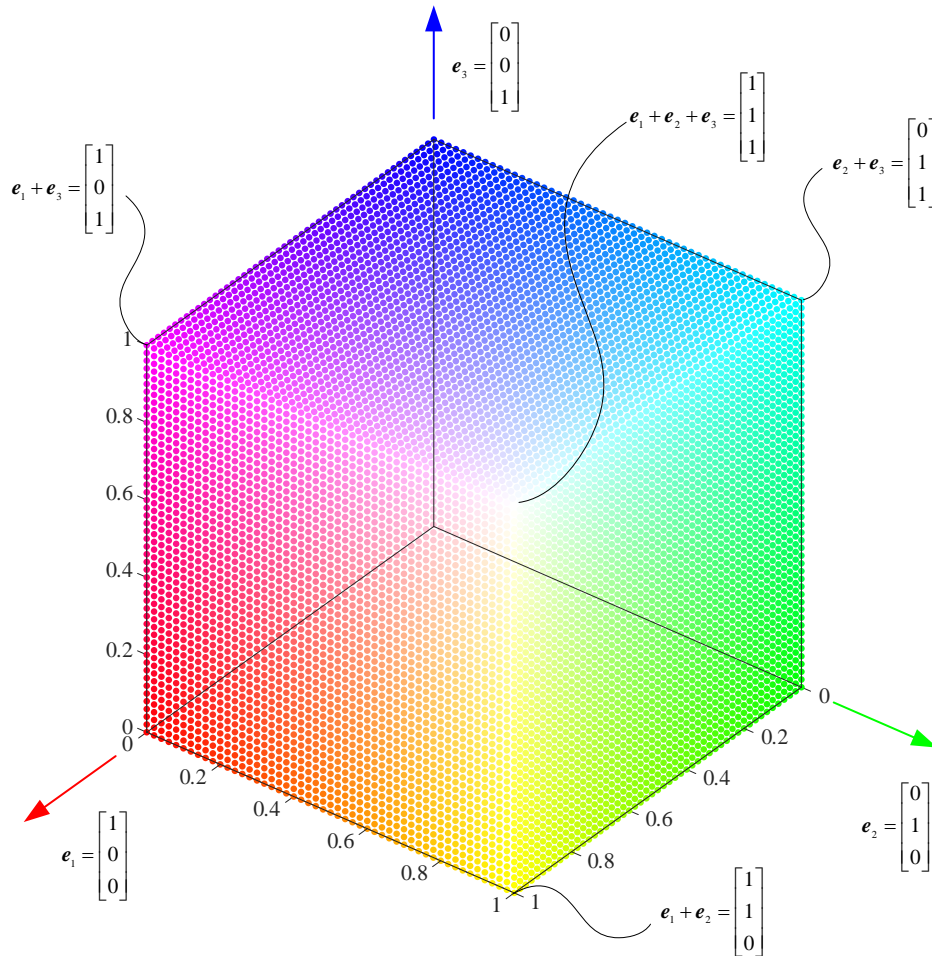


图 21. 三原色张成的彩色空间

### 三色均匀混合

一种特殊情况， $e_1$ 、 $e_2$  和  $e_3$  这三个基底向量以均匀方式混合，得到的便是灰度：

$$\alpha(e_1 + e_2 + e_3) \quad (37)$$

如图 22 所示。其中，白色和黑色分别对应如下向量：

$$1 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$



图 22. 灰度

## 6.4 线性无关：红色和绿色，调不出青色

下面，我们还是用三原色做例子来谈一下线性相关和线性无关。

如图 23 所示， $\mathbf{e}_1$  (红色) 和  $\mathbf{e}_2$  (绿色) 张成平面  $H_1 = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  内的向量  $\hat{\mathbf{a}}$  与  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  线性相关；因为， $\hat{\mathbf{a}}$  可以用  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  线性组合：

$$\hat{\mathbf{a}} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \quad (39)$$

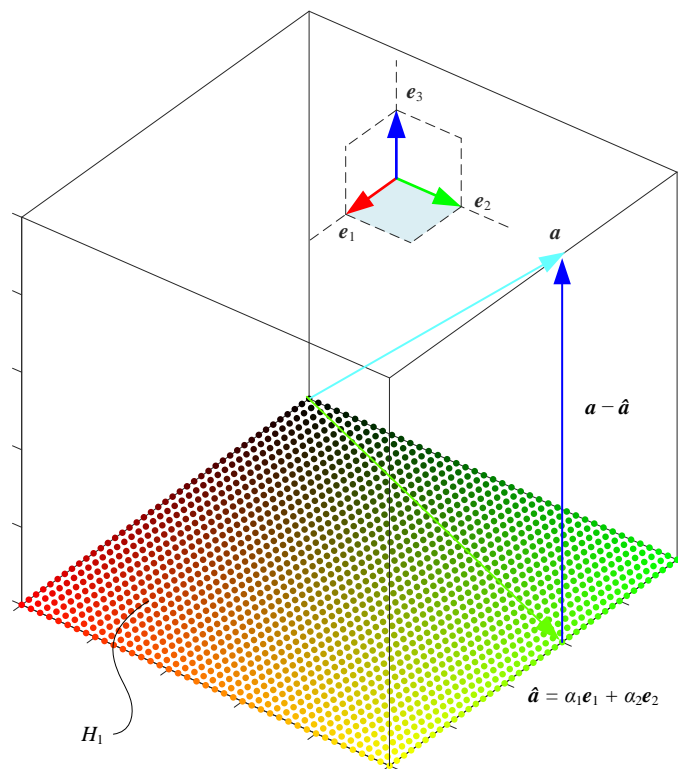
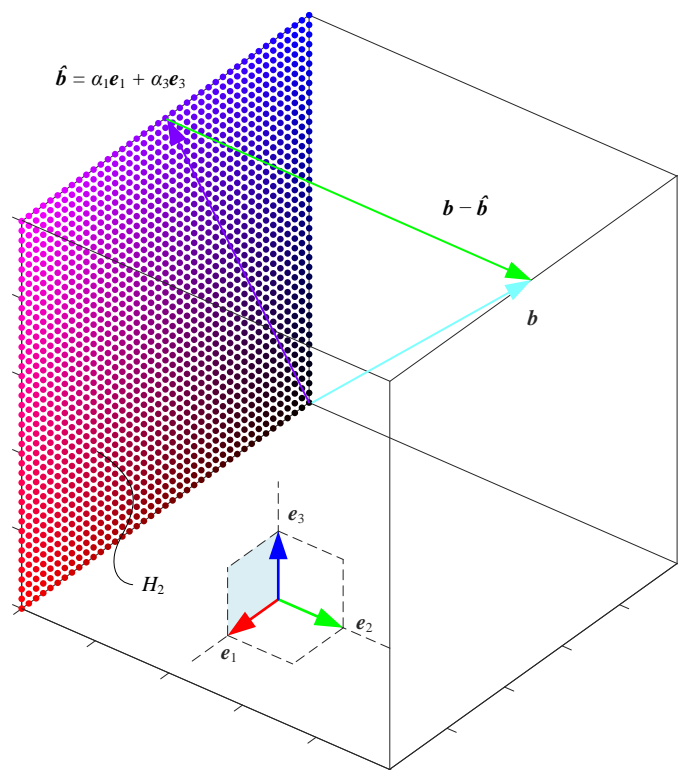
但是，图 23 中有一个跳出平面  $H_1$  的向量  $\mathbf{a}$ 。

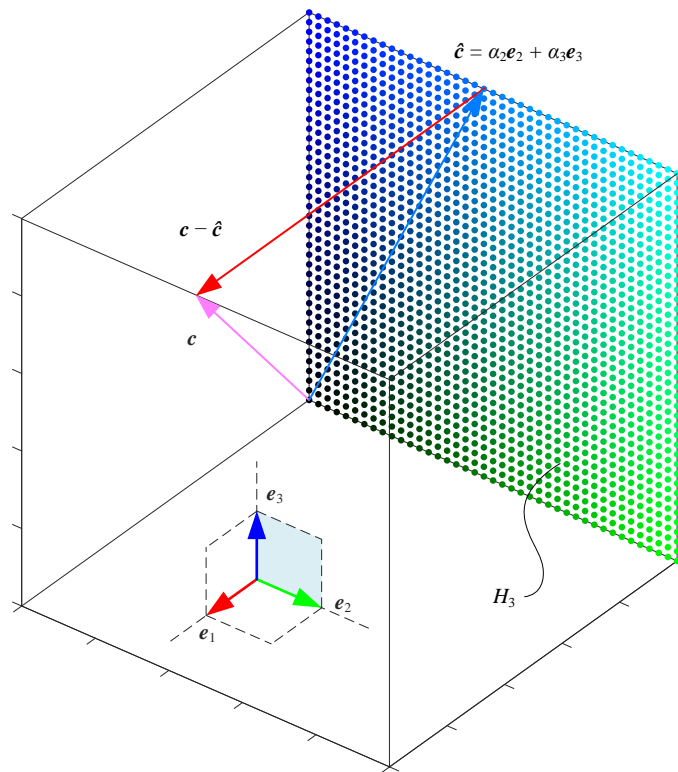
显然，向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  线性无关，因为  $\mathbf{a}$  不能用  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  线性组合构造。从色彩角度来看，红光和绿光，调不出青色光。

向量  $\mathbf{a}$  和  $\hat{\mathbf{a}}$  差在竖直方向的一束蓝光  $\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$ 。也就是，从光线合成角度来看， $\mathbf{a}$  比  $\hat{\mathbf{a}}$  多了一抹蓝光。

青色的向量  $\mathbf{a}$  在红绿色构成的平面  $H_1$  内的投影为  $\hat{\mathbf{a}}$ 。 $\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$  垂直  $H_1$ 。

图 24 所示为基底向量  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_3$  张成平面  $H_2$ ，向量  $\mathbf{b}$  向  $H_2$  投影。图 25 所示为基底向量  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$  张成平面  $H_3$ ，向量  $\mathbf{c}$  向  $H_3$  投影。

图 23. 基底向量  $e_1$  和  $e_2$  张成平面  $H_1$ , 向量  $a$  向  $H_1$  投影图 24. 基底向量  $e_1$  和  $e_3$  张成平面  $H_2$ , 向量  $b$  向  $H_2$  投影

图 25. 基底向量  $e_2$  和  $e_3$  张成平面  $H_3$ , 向量  $c$  向  $H_3$  投影

## 6.5 非正交基底：青色、品红、黄色

$e_1$  ( $[1, 0, 0]^T$  red)、 $e_2$  ( $[0, 1, 0]^T$  green) 和  $e_3$  ( $[0, 0, 1]^T$  blue) 这三个基底向量任意两个组合构造三个向量  $v_1$  ( $[0, 1, 1]^T$  cyan)、 $v_2$  ( $[1, 0, 1]^T$  magenta) 和  $v_3$  ( $[1, 1, 0]^T$  yellow):

$$v_1 = e_2 + e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = e_1 + e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  也可以是构造三维彩色空间基底向量。 $v_1$  相当于  $e_2$  和  $e_3$  的线性组合， $v_2$  相当于  $e_1$  和  $e_3$  的线性组合， $v_3$  相当于  $e_1$  和  $e_2$  的线性组合。

**印刷四分色模式** (CMYK color model) 就是基于基底  $[v_1, v_2, v_3]$ 。CMYK 四个字母分别指的是青色 (cyan)、品红 (magenta)、黄色 (yellow) 和黑色 (black)。本节，我们只考虑三个彩色，即青色、品红和黄色。



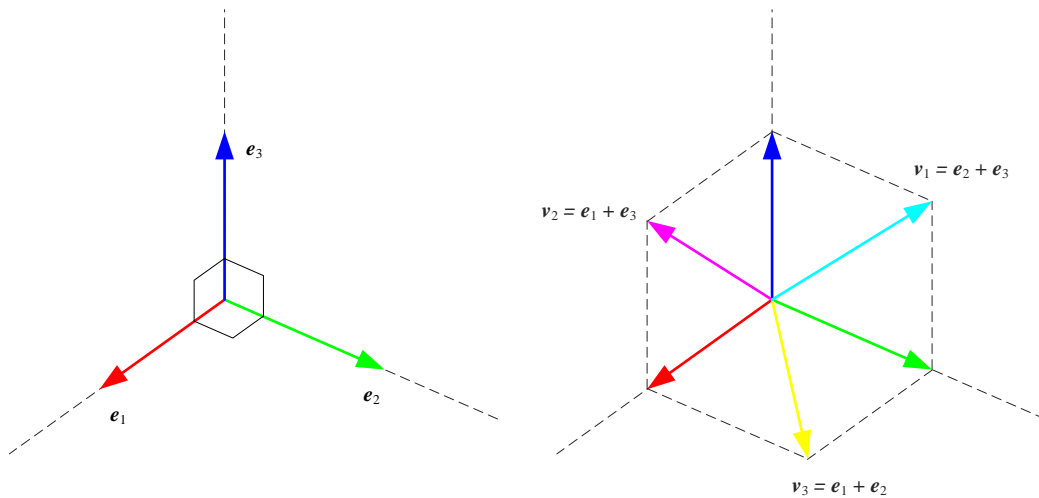


图 26. 正交基底到非正交基底

## 非正交基底

$v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  并非两两正交。经过计算可以发现  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  两两夹角均为  $60^\circ$ ：

$$\begin{aligned}\cos \theta_{v_1, v_2} &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{v_1, v_3} &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{v_2, v_3} &= \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (41)$$

也就是说， $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$  为非正交基底。

## 单色

图 27 所示为  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  各自张成的空间  $\text{span}(\mathbf{v}_1)$ 、 $\text{span}(\mathbf{v}_2)$ 、 $\text{span}(\mathbf{v}_3)$ 。这三个空间的维数均为 1。

观察图 27 颜色变化，可以发现  $\text{span}(\mathbf{v}_1)$ 、 $\text{span}(\mathbf{v}_2)$ 、 $\text{span}(\mathbf{v}_3)$  分别代表着青色、品红和黄色颜色深浅变化。

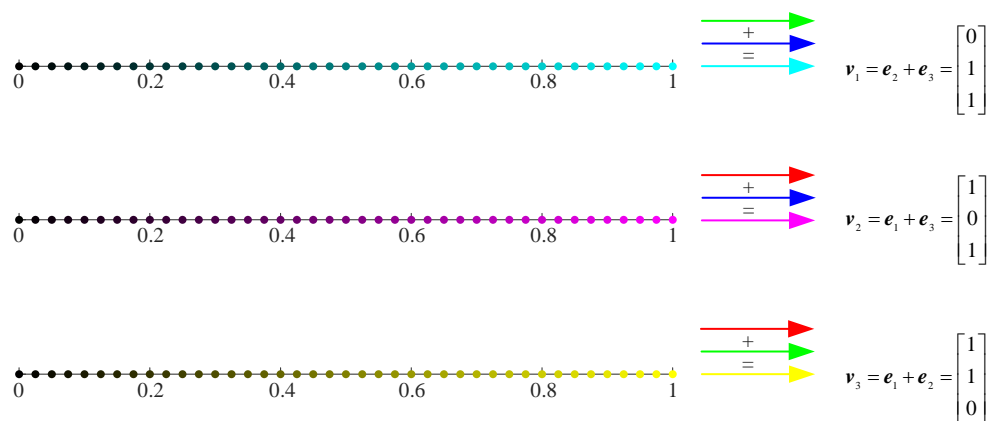
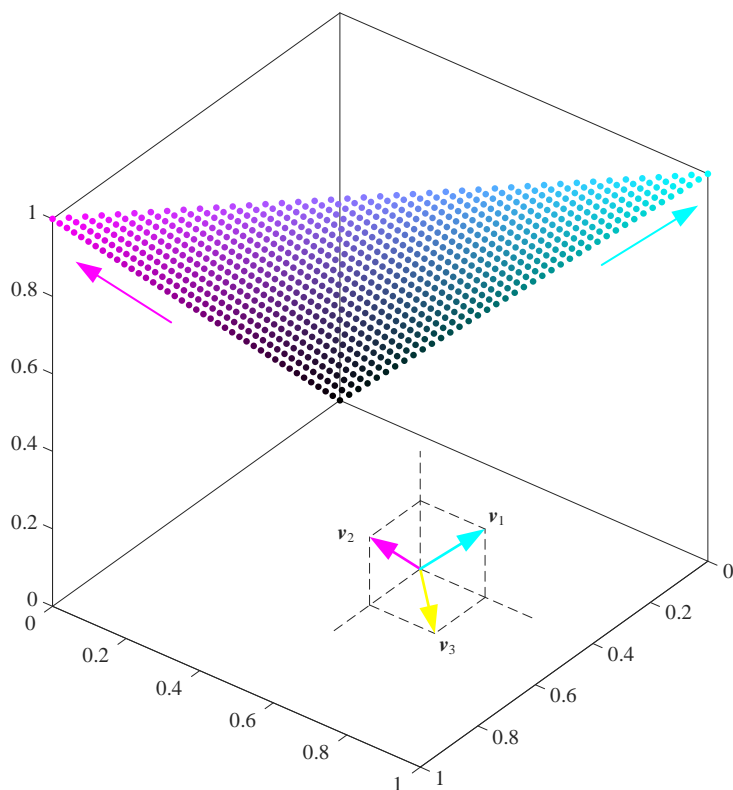
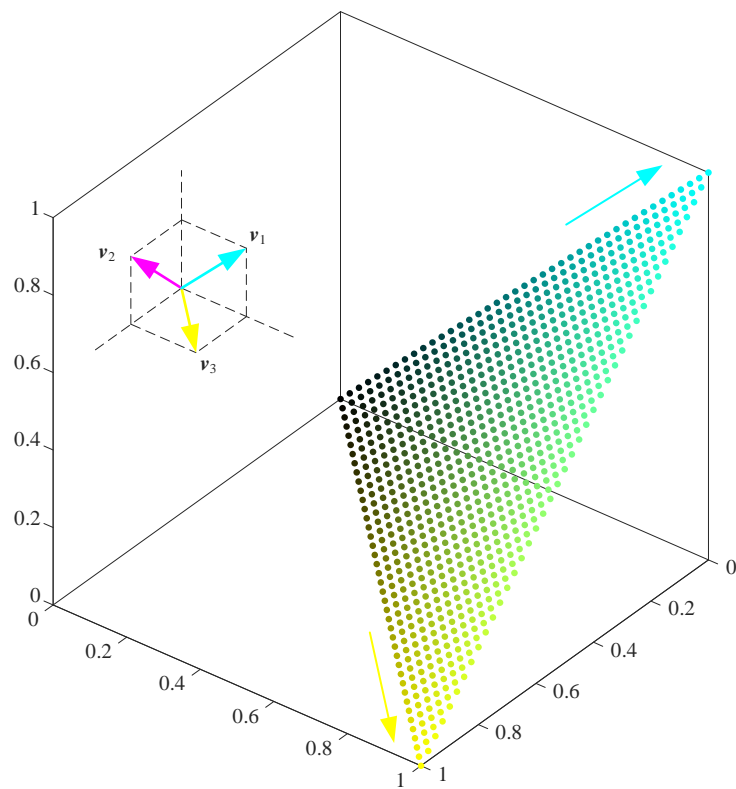
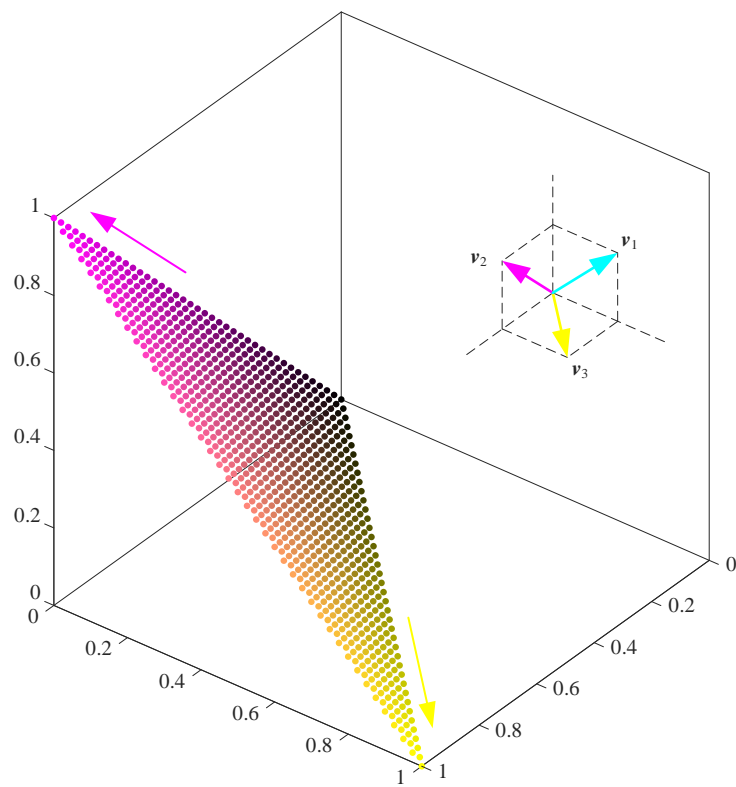


图 27. 单色子空间

## 双色合成

图 28 ~ 图 30 分别所示为  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  两两张成的三个空间  $\text{span}(v_1, v_2)$ 、 $\text{span}(v_1, v_3)$ 、 $\text{span}(v_2, v_3)$ 。这三个空间的维数都是 2，它们也都是三色空间的子空间。

图 28. 基底向量  $v_1$  和  $v_2$  张成的子空间

图 29. 基底向量  $v_1$  和  $v_3$  张成的子空间图 30. 基底向量  $v_2$  和  $v_3$  张成的子空间

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 6.6 基底转换：从红、绿、蓝，到青色、品红、黄色

RGB 色卡中， $[e_1, e_2, e_3]$  是色彩空间的基底。CMYK 色卡中， $[v_1, v_2, v_3]$  也是色彩空间的基底。RGB 模式向 CMYK 模式转换叫做**基底转换** (change of basis)。

下式中，通过矩阵  $A$ ，基底向量  $[e_1, e_2, e_3]$  转化为基底向量  $[v_1, v_2, v_3]$ ：

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] = A[e_1 \ e_2 \ e_3] \quad (42)$$

$A$  常被称作过渡矩阵，或转移矩阵 (transition matrix)。

将具体数值代入 (42)，得到：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

即矩阵  $A$  为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

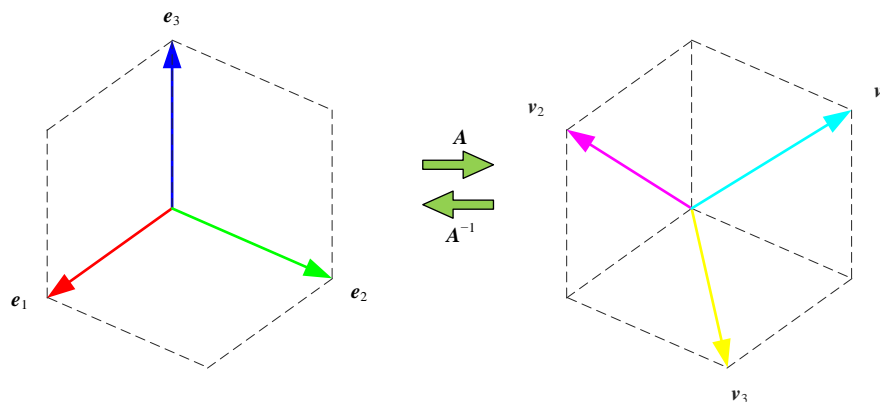
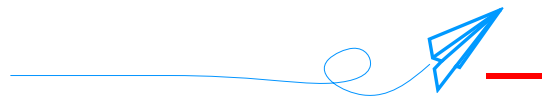
从基底  $[v_1, v_2, v_3]$  向基底  $[e_1, e_2, e_3]$  转换，可以通过  $A^{-1}$  完成：

$$A^{-1}[v_1 \ v_2 \ v_3] = [e_1 \ e_2 \ e_3] \quad (45)$$

通过计算可得到  $A^{-1}$ ：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (46)$$

图 31 所示为基底  $[e_1, e_2, e_3]$  和基底  $[v_1, v_2, v_3]$  之间相互转换关系。

图 31. 基底  $[e_1, e_2, e_3]$  和基底  $[v_1, v_2, v_3]$  相互转换

本章讲解的线性代数概念很多，必须承认它们都很难理解。为了帮助大家理解，我们用 RGB 三原色作为例子，给向量空间涂颜色！

选出以下四副图片总结本章主要内容。所有的基底向量中，标准正交基和规范正交基这两个概念最常用。在本书后的学习张红，请大家注意规范正交基、正交矩阵、旋转这三个概念的联系。平面上，线性相关和线性无关就是看向量是否重合。此外，正交投影是本书非常重要的几何概念，我们会在本书后续内容反复用到。

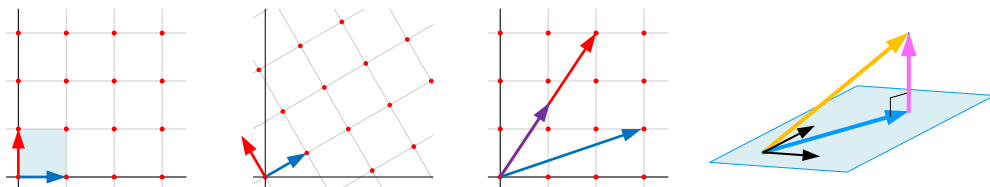


图 32. 总结本章重要内容的四副图