

8

Geometric Transformation

几何变换

线性变换的特征是原点不变、平行且等距的网格



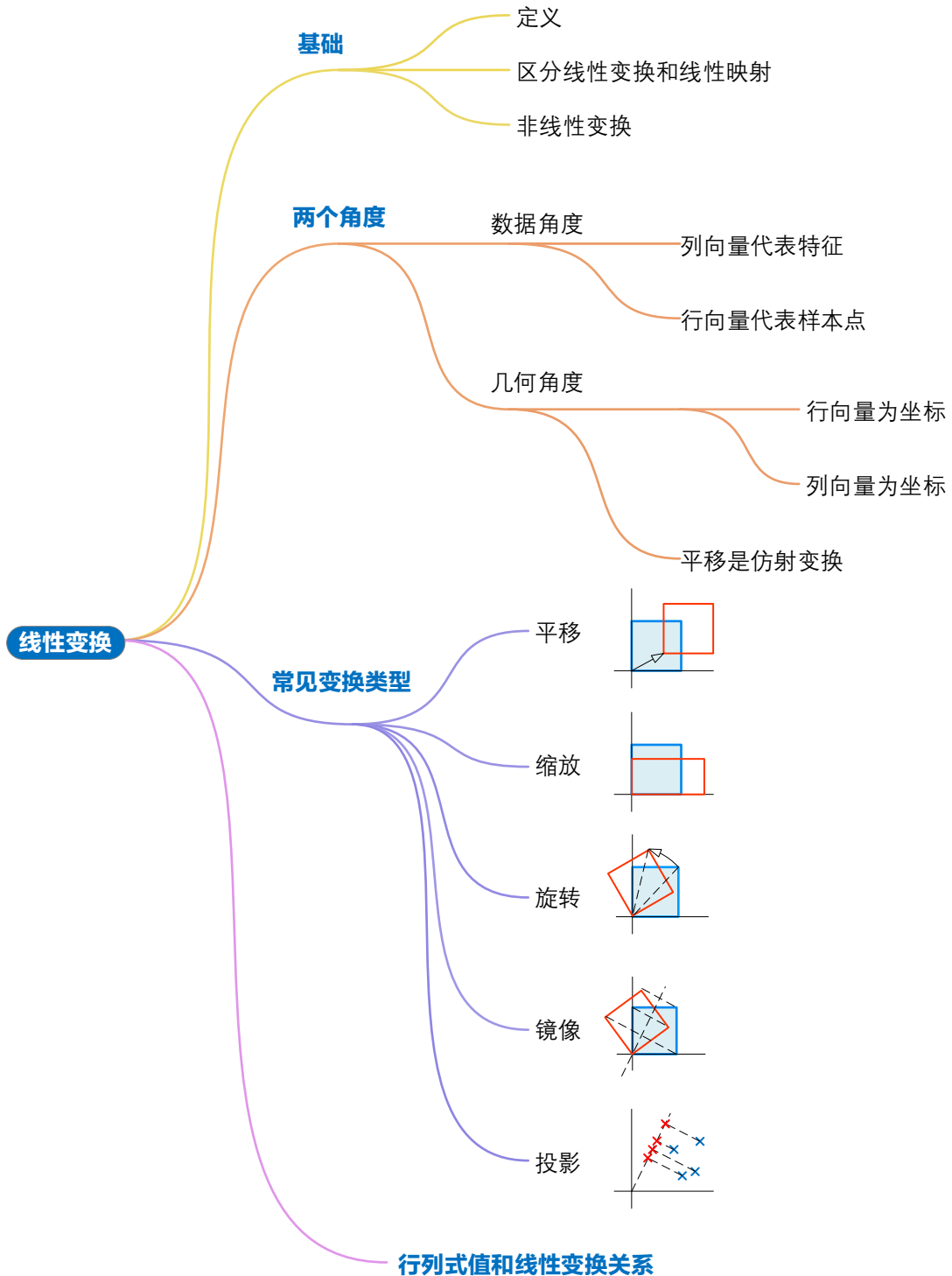
矩阵向来大有所为，矩阵从不游手好闲。

Matrices act. They don't just sit there.

—— 吉尔伯特·斯特朗 (Gilbert Strang) | MIT 数学教授 | 1934 ~



- ◀ `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- ◀ `numpy.linalg.inv()` 矩阵逆运算
- ◀ `numpy.matrix()` 构造二维矩阵
- ◀ `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- ◀ `tranpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

8.1 线性变换：线性空间到自身的线性映射

本章开始之前，我们先区分两个概念：**线性映射** (linear mapping) 和 **线性变换** (linear transformation)。

线性映射是指从一个空间到另外一个空间的映射，且保持加法和数量乘法运算。比如，映射 L 将向量空间 V 映射到向量空间 W ，对于所有的 $v_1, v_2 \in V$ 及所有的标量 α 和 β ，满足

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) \quad (1)$$

白话来说，线性映射把一个空间的点或几何形体映射到另外一个空间。比如图 1 所示的三维物体投影到一个平面上，得到这个杯子在平面上的映像。

图 1 所示的“降维”过程显然不可逆，也就是不能通过杯子在平面的“映像”获得杯子在三维空间所有的形体信息。

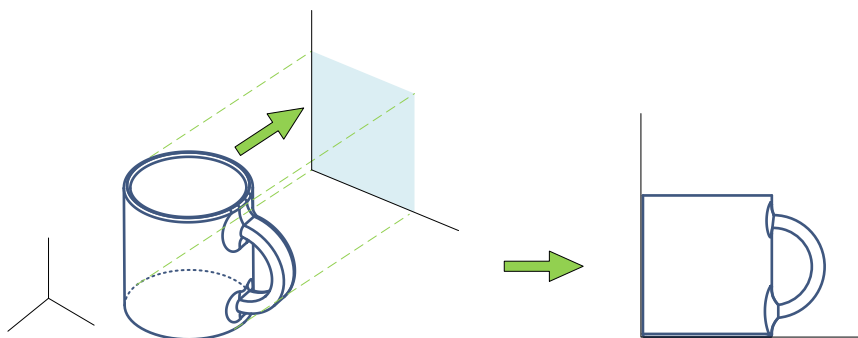


图 1. 线性映射

线性变换是线性空间到自身的线性映射，是一种特殊的线性映射。白话说，线性变换是在同一个坐标系中完成的图形变换。从几何角度来看，线性变换产生“平行且等距”的网格，并且原点保持固定，如图 2 所示。原点保持固定，这一性质很重要，因为大家马上就会看到“平移”不属于线性变换。

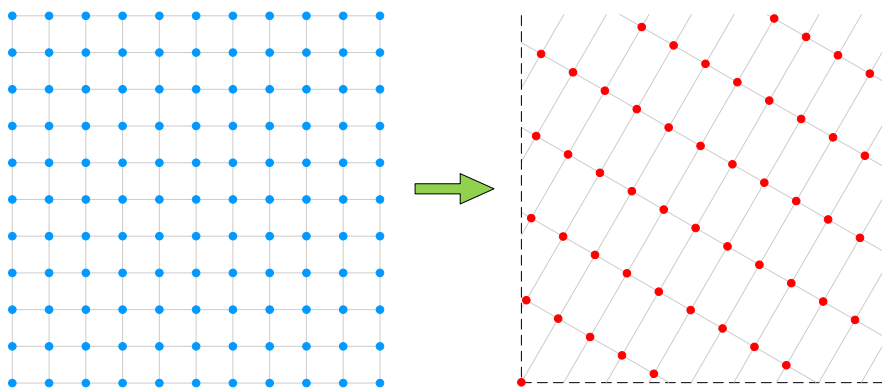


图 2. 线性变换产生平行且等距的网格

但是，请大家注意很多参考资料混用线性映射和线性变换。本书把正交投影也算作是线性变换。

非线性变换

与线性变换相对的就是**非线性变换** (nonlinear transformation)。

图 3 和图 4 给出两个非线性变换的例子。图 3 所示为通过非线性变换产生平行不等距网格。图 4 所示产生的网格甚至出现“扭曲”。

有了这两幅图做对比，相信读者能够更好地理解图 2 所展示的“平行且等距”的网格所代表的线性变换。

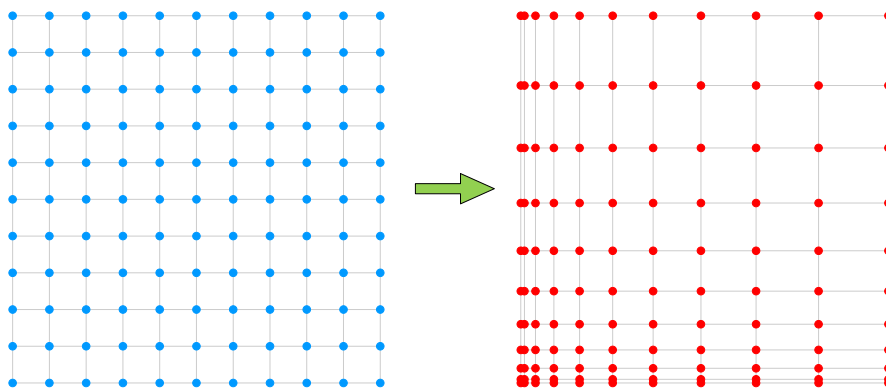


图 3. 非线性变换产生平行但不等距网格

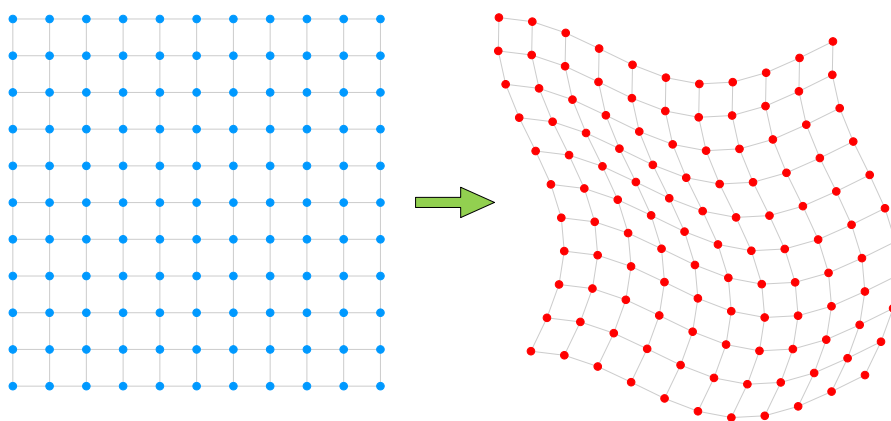


图 4. 非线性变换产生“扭曲”网格

常见平面几何变换

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

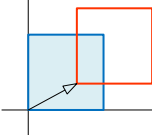
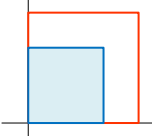
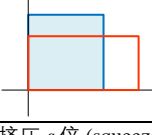
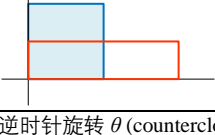
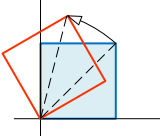
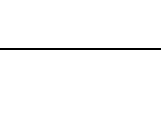
本章下一节开始就是要从线性代数运算视角讨论几何变换。表 1 总结本章将要介绍的常用二维几何变换。表 1 的第二列和第三列矩阵运算互为转置关系。

请读者注意，平移并不是线性变换，平移是**仿射变换** (affine transformation)。几何角度，仿射变换是一个向量空间进行线性变换并叠加平移，变换结果得到另一个向量空间。平移时，原点位置发生变化。

表 1 中所有操作统称几何变换，这便于将这些线性代数概念和本系列丛书《数学要素》中介绍的几何变换联系起来。这也正是本章题目叫“几何变换”的原因。

除了平移以外，表 1 中的几何变换都是从 \mathbb{R}^2 到自身。准确来说，正交投影相当于降维，结果在 \mathbb{R}^2 的子空间中。本章后续就一一展开讲解这些几何变换。

表 1. 常用几何变换总结

| 几何变换 | 列向量坐标 | 行向量坐标 |
|---|---|--|
| 平移 (translation)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ |
| 等比例缩放 s 倍 (scaling)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ |
| 非等比例缩放 (unequal scaling)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ |
| 挤压 s 倍 (squeeze)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$ |
| 逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ |
| 顺时针旋转 θ (clockwise rotation)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ |

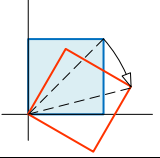
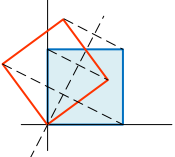
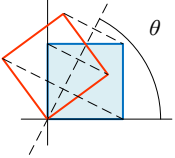
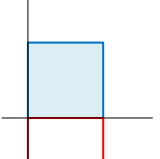
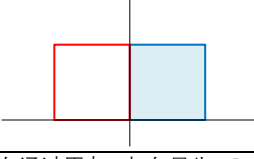
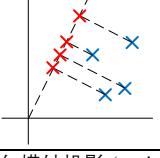
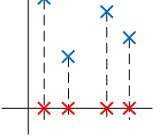

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

| | | |
|---|--|--|
|  | | $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ |
| 关于通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau} [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线镜像 (reflection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}$ |
| 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像; 等同于上例, 切向量相当于 $(\cos\theta, \sin\theta)$  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ |
| 关于横轴镜像对称 (reflection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| 关于纵轴镜像对称 (reflection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| 向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau} [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线投影 (projection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \frac{1}{\ \boldsymbol{\tau}\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}$ |
| 向横轴投影 (projection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 向纵轴投影 (projection)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

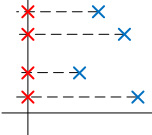
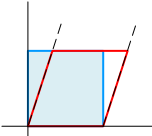
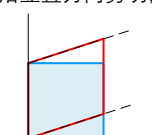
本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

| | | |
|---|---|--|
|  | | |
| 沿水平方向剪切, θ 为剪切角 (shear)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$ |
| 沿竖直方向剪切, θ 为剪切角 (shear)  | $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

8.2 平移：仿射变换

再次强调，平移并不是线性变换，平移是仿射变换，因为原点发生改变。

列向量

用列向量表达坐标时，平移可以写成：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{t} \quad (2)$$

其中， \mathbf{t} 为平移向量：

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(3) 代入 (2) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

行向量

用行向量表达坐标时，相当于对 (4) 左右转置：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 & x_2 + t_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

图 5 所示为平移的两个例子。

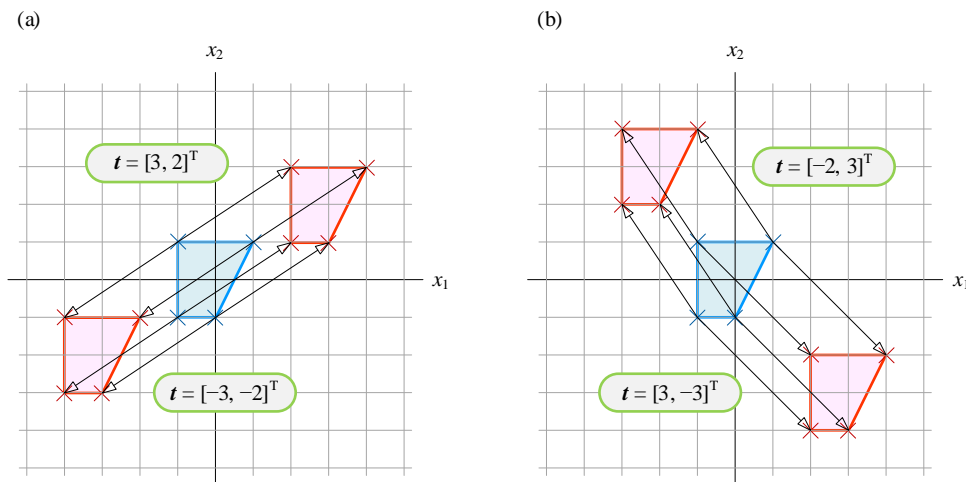


图 5. 平移



如图 6 所示，数据**中心化** (centralize)，也叫**去均值** (demean)，实际上就是一种平移。前文提到数据矩阵中一般用行向量表达坐标点。

对数据矩阵 \mathbf{X} 去均值处理，并得到 \mathbf{Y} ：

$$\mathbf{Y}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} - \mathbf{E}(\mathbf{X}_{n \times 2}) \quad (6)$$

注意，前文提到过行向量 $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ 叫做质心，它的每个元素是数据矩阵 \mathbf{X} 每一列数据的均值。显然， \mathbf{Y} 的质心位于原点，也就是说 $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = [0, 0]$ 。

利用广播原则，展开(6)得到：

$$[\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2] = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] - [\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}_2)] \quad (7)$$

(7) 对应的统计运算表达为：

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - \mathbf{E}(X_1) \\ Y_2 = X_2 - \mathbf{E}(X_2) \end{cases} \quad (8)$$

其中， X_1 、 X_2 、 Y_1 、 Y_2 为随机变量，注意字母大写斜体。从几何角度，平移运算将数据质心移动到原点，如图 6 所示。

大家应该已经注意到了图 6 中的椭圆，通过高斯二元分布可以建立数据和椭圆的联系。也就是说，从几何视角，椭圆可以用来代表散点数据。这是本系列丛书《概率统计》要重点讲解的内容。

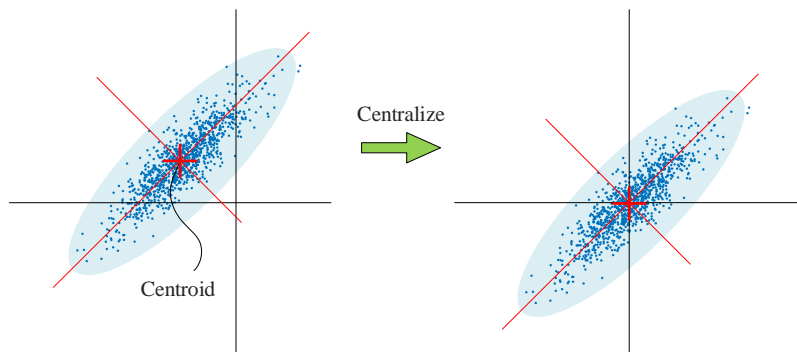
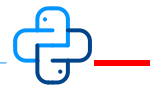


图 6. 数据中心化相当于平移



Bk4_Ch8_01.py 绘制图 5。

```
# Bk4_Ch8_01.py

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_shape(X, copy = False):
    if copy:
        fill_color = np.array([255, 236, 255])/255
        edge_color = np.array([255, 0, 0])/255
    else:
        fill_color = np.array([219, 238, 243])/255
        edge_color = np.array([0, 153, 255])/255

    plt.fill(X[:,0], X[:,1],
            color = fill_color,
            edgecolor = edge_color)

    plt.plot(X[:,0], X[:,1], marker = 'x',
            markeredgecolor = edge_color*0.5,
            linestyle = 'None')

X = np.array([[1,1],
              [0,-1],
              [-1,-1],
              [-1,1]])

# visualizations

fig, ax = plt.subplots()

plot_shape(X)      # plot original

# translation
t1 = np.array([3,2]);
Z = X + t1
plot_shape(Z, True) # plot copy

t2 = np.array([-3,-2]);
Z = X + t2
plot_shape(Z, True) # plot copy

t3 = np.array([-2,3]);
Z = X + t3
plot_shape(Z, True) # plot copy
```

```

t4 = np.array([3,-3]);
Z = X + t4
plot_shape(Z,True) # plot copy

# Decorations
ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
plt.axis('equal'); plt.axis('square')
plt.axhline(y=0, color='k', linewidth = 0.25)
plt.axvline(x=0, color='k', linewidth = 0.25)
plt.xticks(np.arange(-5, 6)); plt.yticks(np.arange(-5, 6))
ax.set_xlim(-5,5); ax.set_ylim(-5,5)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
plt.xlabel('$x_1$'); plt.ylabel('$x_2$')

```

8.3 缩放：对角阵

等比例缩放 (equal scaling) 是指在缩放时各个维度采用相同缩放比例。

举个例子，如图 7 所示，纵横坐标等比例放大 2 倍，等比例缩放得到的图形和原图形相似。

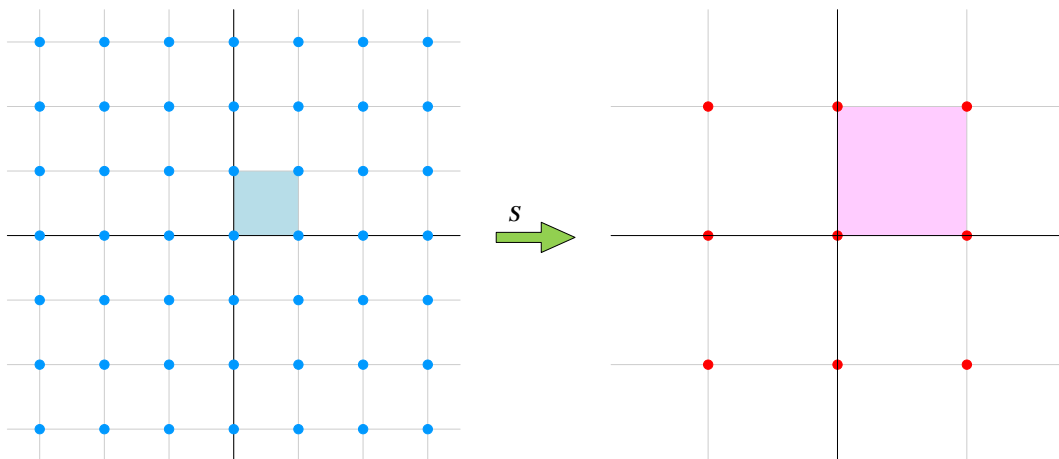


图 7. 等比例扩大 2 倍网格变化

列向量

等比例缩放对应的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

可以发现等比例缩放矩阵为对角阵，对角线元素相同。(9) 整理得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

等比例缩放矩阵和单位向量存在以下关系：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \mathbf{I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

行向量

数据坐标为行向量时：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (12)$$

对于数据矩阵，等比例缩放为：

$$\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (13)$$

行列式值

计算行列式值转化矩阵的行列式值：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2 \quad (14)$$

可以发现对于二维空间，等比例缩放对应图形面积变化 s^2 倍。

图 8 (a) 所示的缩放系数为 $s = 3$ ，图形放大，面积放大 9 倍。图 8 (b) 所示的缩放系数为 $s = 0.75$ ，图形缩小，面积缩小为原来 9/16。

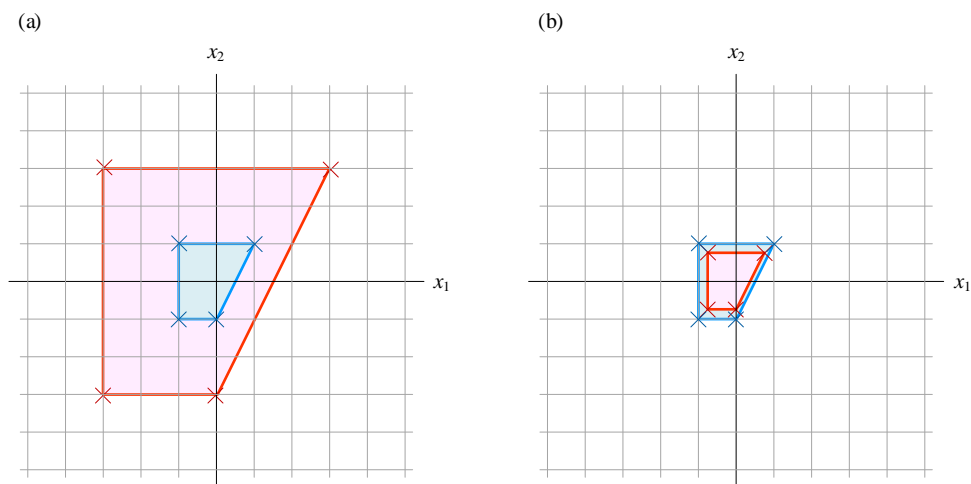


图 8. 等比例缩放两个例子

非等比例缩放

图 9 所示为**非等比例缩放** (unequal scaling) 的例子。

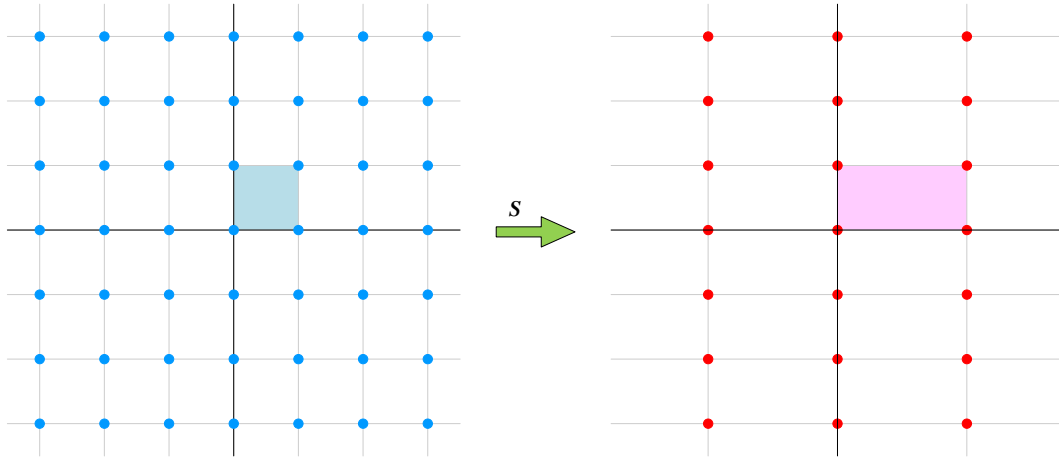


图 9. 非等比例缩放网格变化

非等比例缩放矩阵为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

数据点为列向量时，

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

数据点为行向量时，

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

请大家根据图 10 两幅子图中图形缩放前后横轴轴比例，来推断矩阵 \mathbf{S} 的值分别是多少。

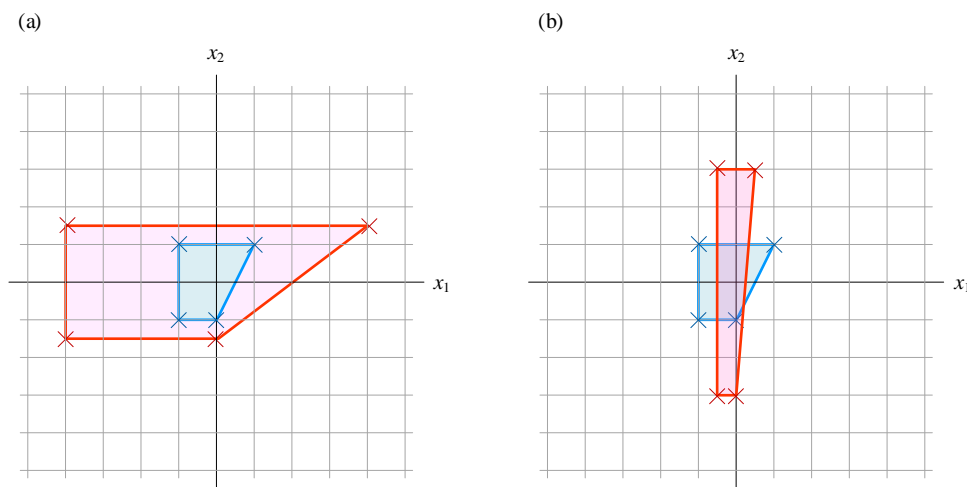


图 10. 非等比例缩放

逆矩阵

现在回过头来再看矩阵 S 的逆。

从线性变换角度，矩阵的逆 S^{-1} 无非就是矩阵 S 对应的几何变换“逆操作”。如图 11 所示，缩放操作的逆运算就是将缩放后图形再还原成原图形。

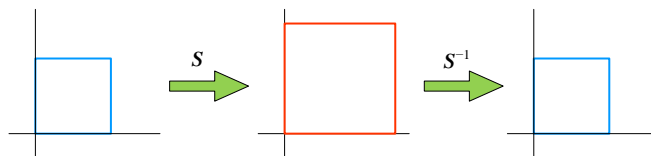


图 11. 缩放的逆运算

特别地，如果缩放时将图形完全压扁，比如：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18) 中矩阵 S 的行列式值为 0，也就是说变换矩阵不可逆。容易发现，(18) 造成的形变也是不可逆的。

这样，我们从几何图形变换角度，解释为什么只有行列式值不为 0 的方阵才存在逆矩阵。

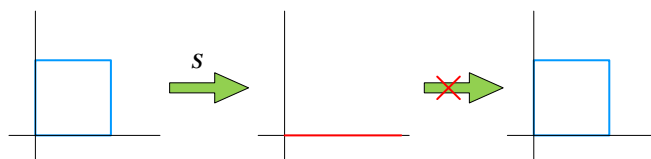


图 12. 不可逆缩放



联想到数据**标准化** (standardization) 这一概念。实际上，数据标准化就相当于是一种不同特征的数据先平移，然后再用标准差进行比例缩放。每个特征采用的缩放系数为均标准差的倒数。

数据矩阵 \mathbf{X} 标准化得到数据矩阵 \mathbf{Z} ，对应运算过程如下：

$$\mathbf{Z}_{n \times 2} = (\mathbf{X}_{n \times 2} - \mathbf{E}(\mathbf{X}_{n \times 2})) \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

展开得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - \mathbf{E}(x_1)}{\sigma_1} & \frac{x_2 - \mathbf{E}(x_2)}{\sigma_2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

对应的统计运算则是：

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{X_1 - \mathbf{E}(X_1)}{\sigma_1} \\ Z_2 = \frac{X_2 - \mathbf{E}(X_2)}{\sigma_2} \end{cases} \quad (21)$$

图 6 所示为数据标准化过程，值得注意的是旋转椭圆变成了正圆。此外，数据标准化并不改变相关性系数大小。

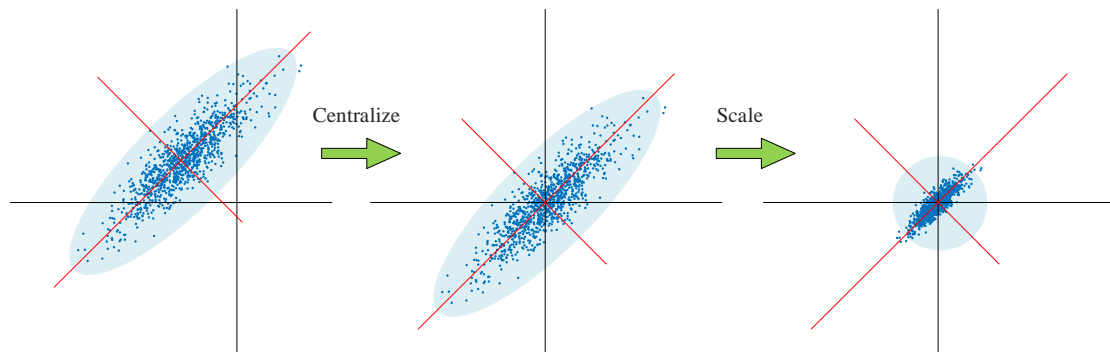


图 13. 数据标准化

挤压

还有一种特殊的缩放叫做**挤压** (squeeze)，比如竖直方向或水平方向压扁。图 14 所示为挤压对应的网格变化。

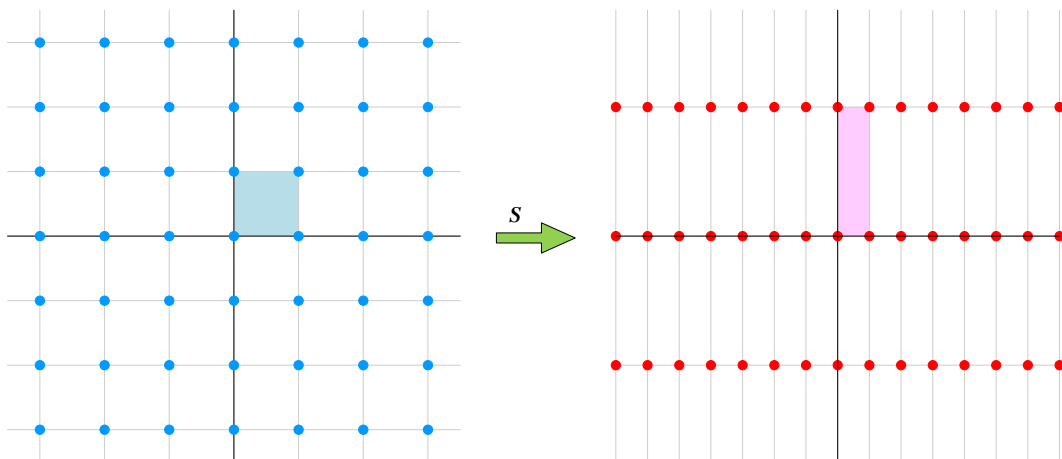


图 14. 挤压所对应的网格图变化

列向量

坐标为列向量时，挤压对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

计算上式方阵行列式值，发现结果为 1，这说明挤压前后面积没有变化：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} = 1 \quad (23)$$

图 15 所示为几何图形挤压的两个例子，也请大家根据图形自行推断完成几何变换矩阵的具体数值，并计算行列式值。

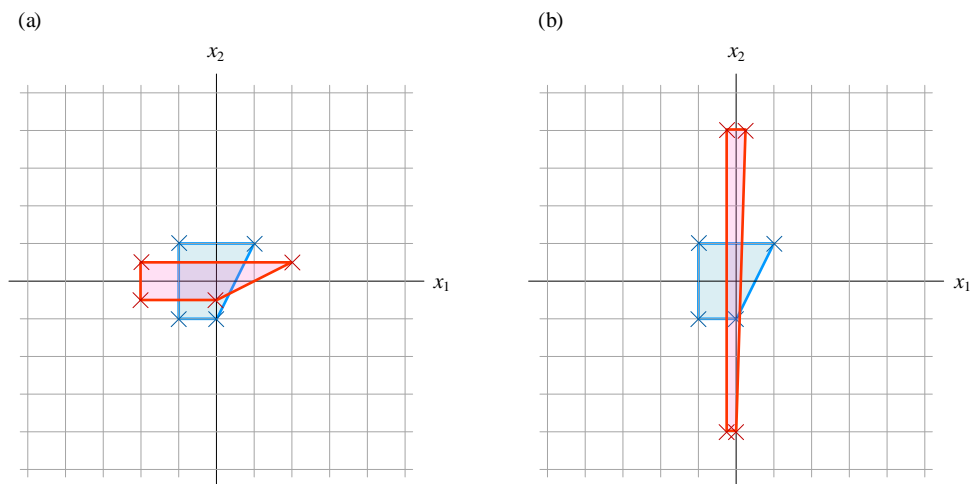


图 15. 挤压变换两个例子

8.4 旋转：行列式值为 1

本节介绍旋转，图 16 所示为经过旋转变化前后的网格。旋转是非常重要的几何变换，我们会在本书后续很多内容看到它。

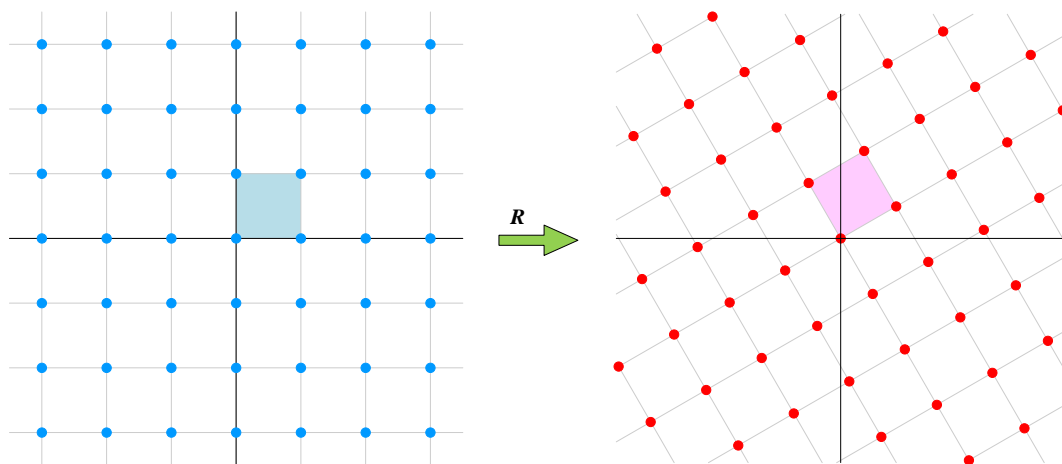


图 16. 旋转变换的网格

列向量坐标 x 逆时针旋转 θ 得到 z :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 R 为,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

(25) 代入 (24)，得到下式：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

R 的行列式值为 1，也就是说旋转之后的网格面积不变：

$$\det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = 1 \quad (27)$$

行向量

坐标点为行向量，逆时针旋转 θ 对应的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (28)$$

(25) 代入 (28) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (29)$$

(29) 相当于对 (26) 等式左右转置。

对于数据矩阵情况，逆时针旋转的运算规则如下：

$$\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \mathbf{R} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (30)$$

图 17 所示为几何形状旋转操作的两个例子。

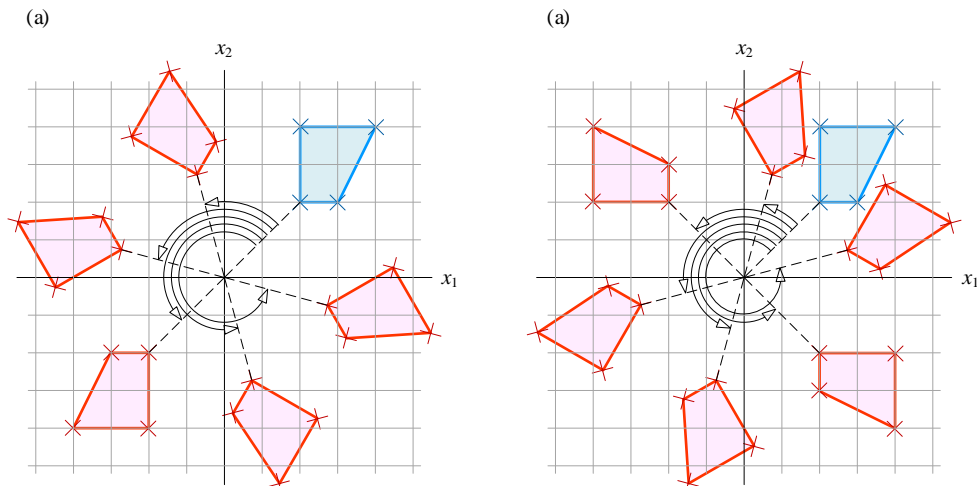


图 17. 旋转的两个例子

逆矩阵

旋转矩阵 \mathbf{R} 求逆得到 \mathbf{R}^{-1} ；如图 18 所示，几何角度， \mathbf{R}^{-1} 是朝着相反方向旋转。

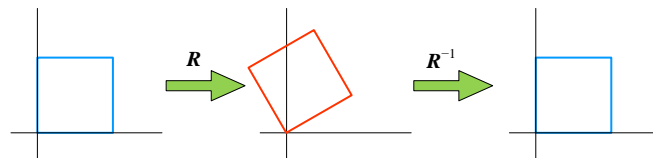


图 18. 旋转的逆运算



从数据角度看旋转操作，如图 19 所示。

数据按照特定的角度绕原点旋转后，让椭圆的长轴位于横轴。也就是说，旋转椭圆变成正椭圆。图 19 中，从左到右过程是主成分分析 (principal component analysis, PCA) 的思路。而从右到左的过程代表着，利用线性不相关随机数产生具有指定相关性系数的随机数。

这些内容，我们会在《概率统计》和《数据科学》两册书中深入讲解。

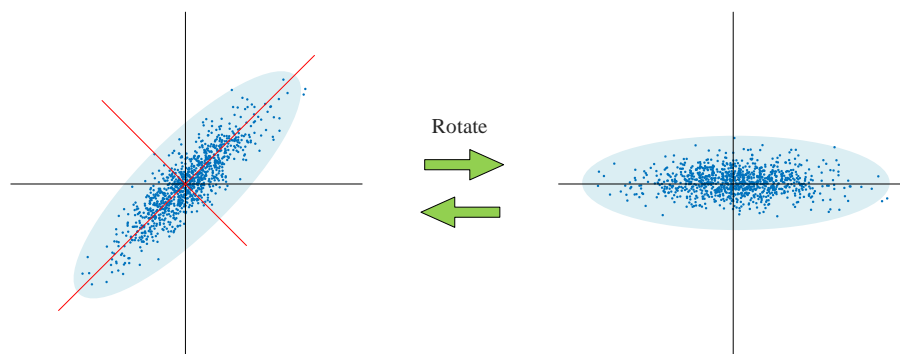


图 19. 数据视角下的旋转

矩阵乘法不满足交换律

前文讲过，一般来说，矩阵乘法不满足交换律，即，

$$AB \neq BA \quad (31)$$

现在我们用图形的线性变换来说明这一点。

图 20 所示左侧方格，先经过 S 缩放，再通过 R 旋转得到右侧红色网格。图 20 红色网格显然不同于图 21。因为图 21 红色网格是先通过 R 旋转再经过 S 缩放得到的。

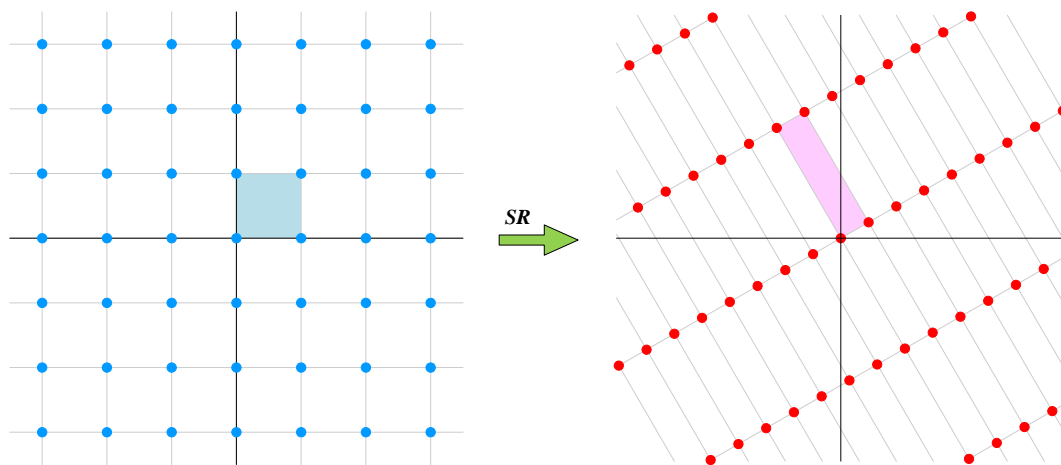


图 20. 先缩放再旋转

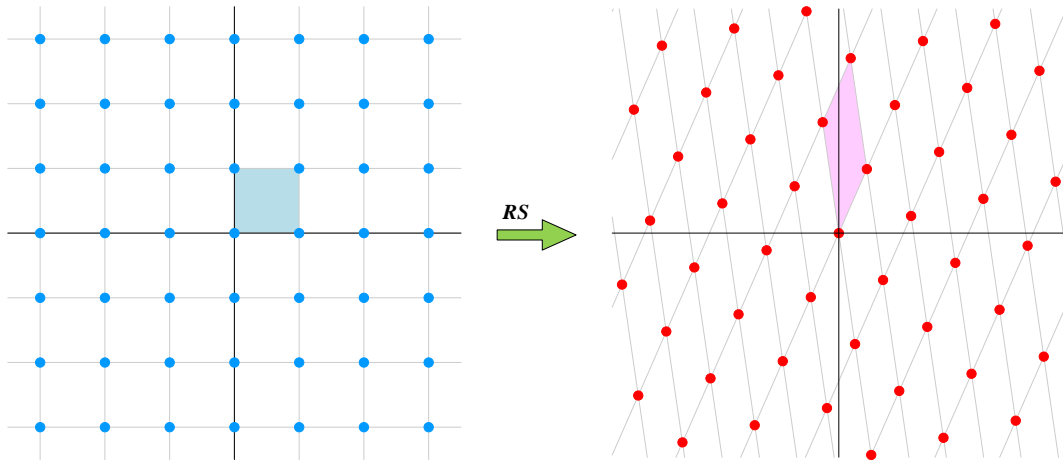
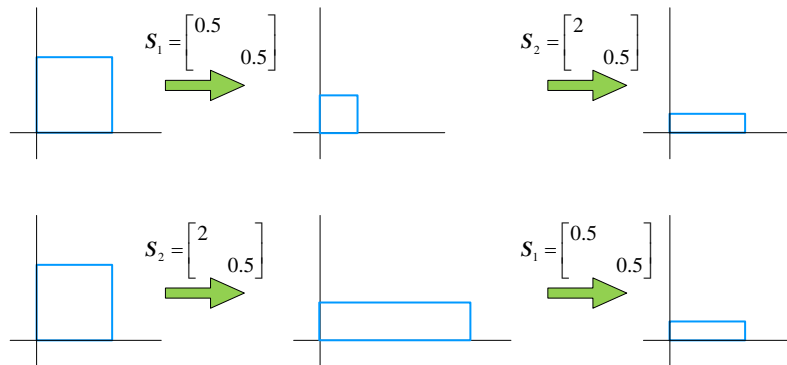


图 21. 先旋转再缩放

两个 2×2 缩放矩阵相乘满足交换律，因为它们都是对角阵。下式的 S_1 和 S_2 均为缩放矩阵，相乘时交换顺序不影响结果：

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 \quad (32)$$

图 22 给出一个例子。

图 22. 两个 2×2 缩放矩阵连乘满足交换律

此外，两个形状相同的旋转矩阵相乘也满足交换律。令 R_1 和 R_2 为：

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (33)$$

根据三角恒等式， R_1 和 R_2 的乘积可以整理为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{34}$$

同理， \mathbf{R}_2 和 \mathbf{R}_1 的乘积也可以整理为：

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{35}$$

图 23 给出一个例子从几何角度说明上述规律。

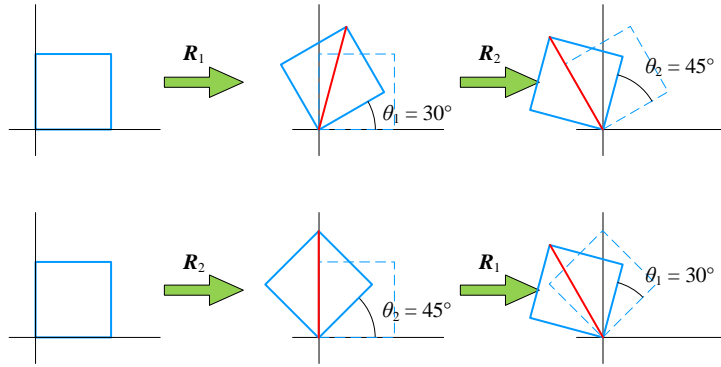


图 23. 两个 2×2 旋转矩阵连乘满足交换律



下面采用《数学要素》一册介绍的极坐标推导本节给出的旋转变换。

图 24 给出的是向量 \mathbf{a} 在极坐标系坐标为 (r, α) ，在正交系中向量 \mathbf{a} 的横纵坐标为：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} \tag{36}$$

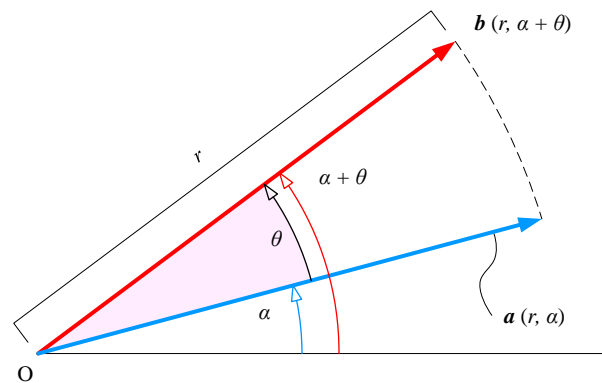


图 24. 极坐标中解释旋转

向量 a 逆时针旋转 θ 后, 得到向量 b 。 b 对应极坐标为 $(r, \alpha + \theta)$ 。向量 b 对应的横纵坐标为:

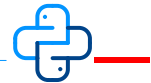
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} \quad (37)$$

(37) 展开得到:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{r \cos \alpha \cos \theta}_{x_1} - \underbrace{r \sin \alpha \sin \theta}_{x_2} \\ \underbrace{r \sin \alpha \cos \theta}_{x_2} + \underbrace{r \cos \alpha \sin \theta}_{x_1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

将 (36) 中 x_1 和 x_2 代入 (38), 得到:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2 \cos \theta + x_1 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$



Bk4_Ch8_02.py 绘制图 17。

```
# Bk4_Ch8_02.py

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_shape(X, copy = False):
    if copy:
        fill_color = np.array([255, 236, 255])/255
        edge_color = np.array([255, 0, 0])/255
    else:
        fill_color = np.array([219, 238, 243])/255
        edge_color = np.array([0, 153, 255])/255

    plt.fill(X[:,0], X[:,1],
            color = fill_color,
            edgecolor = edge_color)

    plt.plot(X[:,0], X[:,1], marker = 'x',
            markeredgecolor = edge_color*0.5,
            linestyle = 'None')

X = np.array([[1, 1],
              [0, -1],
```

```

        [-1,-1],
        [-1,1]] + np.array([3,3])

# visualizations
thetas = np.linspace(30, 330, num=11)

for theta in thetas:

    fig, ax = plt.subplots()

    theta = theta/180*np.pi;
    # rotation
    R = np.array([[np.cos(theta), np.sin(theta)],
                  [-np.sin(theta), np.cos(theta)]])

    Z = X@R;
    plot_shape(Z,True) # plot copy
    plot_shape(X)      # plot original

    # Decorations
    ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
    plt.axis('equal'); plt.axis('square')
    plt.axhline(y=0, color='k', linewidth = 0.25)
    plt.axvline(x=0, color='k', linewidth = 0.25)
    plt.xticks(np.arange(-5, 6)); plt.yticks(np.arange(-5, 6))
    ax.set_xlim(-5,5); ax.set_ylim(-5,5)
    ax.spines['top'].set_visible(False); ax.spines['bottom'].set_visible(False)
    ax.spines['left'].set_visible(False); ax.spines['right'].set_visible(False)
    plt.xlabel('$x_1$'); plt.ylabel('$x_2$')

```

8.5 镜像：行列式值为负

本节介绍两种表达镜像的方法。

切向量

第一种镜像用切向量来完成。切向量 τ 具体为：

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

关于通过原点、切向量为 τ 直线**镜像** (reflection) 的线性变换操作如下：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

对 T 求行列式值：

$$\det \left(\frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \right) = \frac{-(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 - 4\tau_1^2\tau_2^2}{\|\tau\|^4} = \frac{-(\tau_1^2 + \tau_2^2)^2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^2} = -1 \quad (42)$$

T 的行列式值为负数，这说明线性变换前后图形发生翻转。图 25 给出两个镜像的例子。

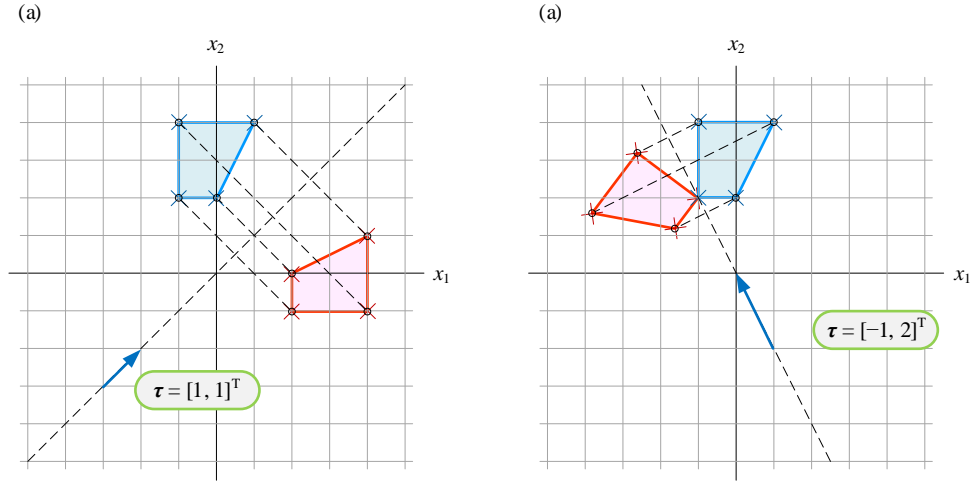


图 25. 两个镜像变换的例子

角度

第二种镜像通过角度定义。关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像，类比 (40)，直线的切向量相当于 $[\cos\theta, \sin\theta]^T$ ，因此完成镜像的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

关于横纵轴镜像

关于横轴镜像对称：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

关于纵轴镜像对称：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

图 26 所示为分别关于横轴和纵轴镜像的例子，请大家自行计算矩阵的行列式值。

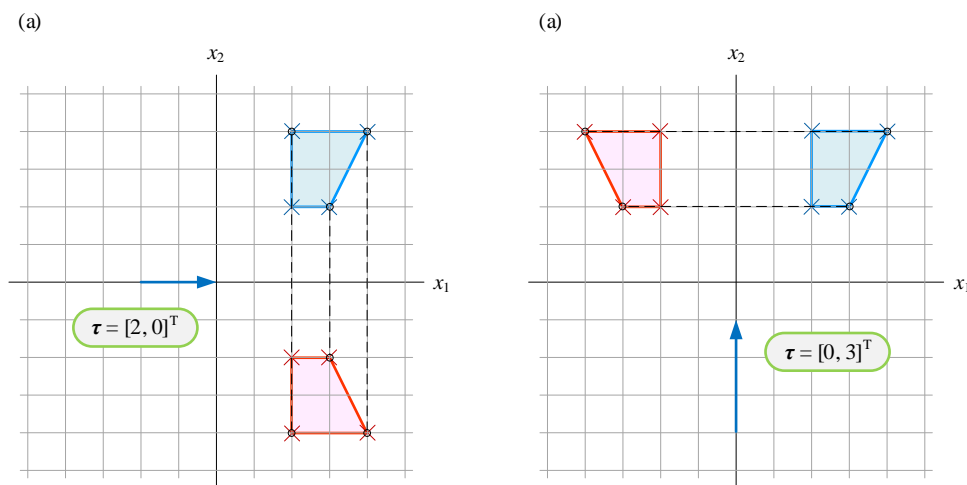


图 26. 分别关于横轴和纵轴镜像的例子

8.6 投影：降维操作

本节从几何角度简单介绍投影。不加特殊说明的话，本书中提到的投影都是正交投影 (orthogonal projection)。

切向量

假设原来某点的坐标为 (x_1, x_2) ，向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau} [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线方向投影 (projection)，投影点坐标 (z_1, z_2) 为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1 \tau_2 \\ \tau_1 \tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

正交投影的特点是， (x_1, x_2) 和 (z_1, z_2) 两点连线垂直于 $\boldsymbol{\tau}$ 。

行列式值

上式中矩阵 \boldsymbol{P} 的行列式值为 0：

$$\det \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1 \tau_2 \\ \tau_1 \tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (47)$$

如图 27 所示，投影是一个降维的过程，平面网格坍塌成一条直线。

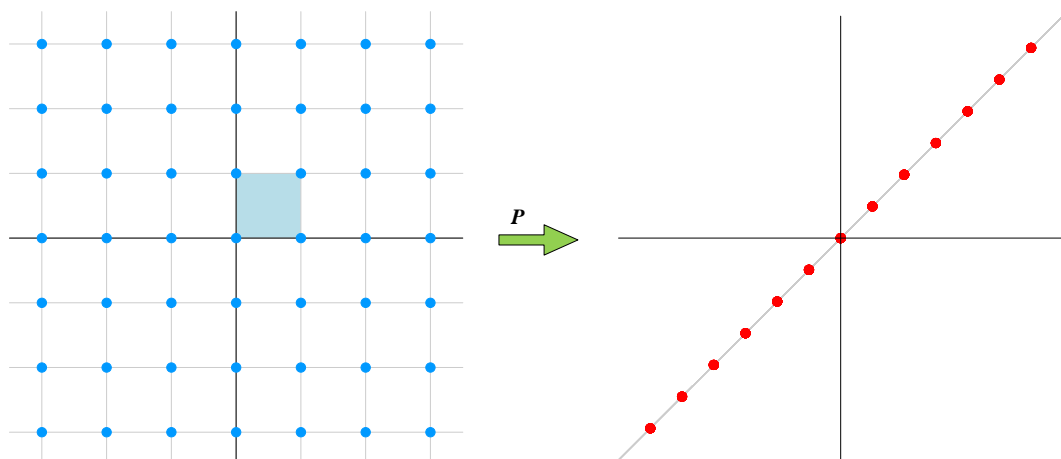


图 27. 投影网格

请大家自行计算图 28 中两个投影矩阵的具体值，并检验它们的行列式值是否为 0。

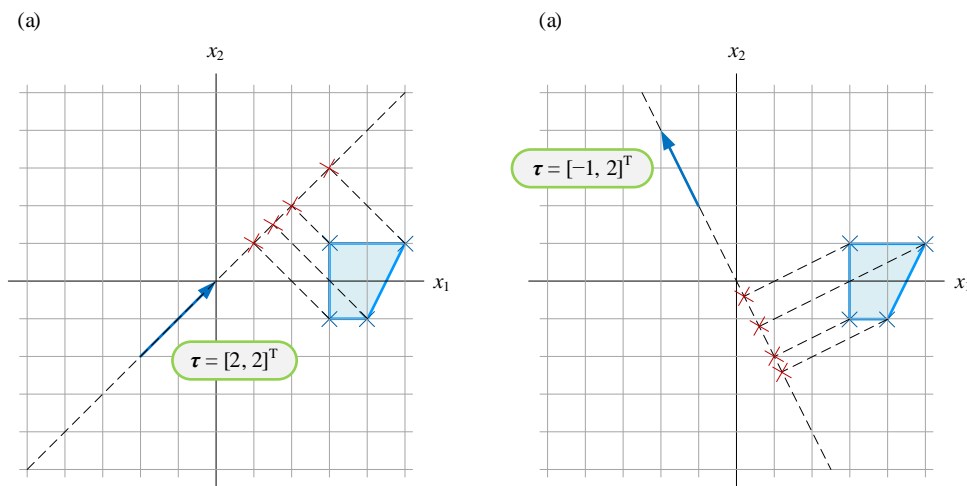


图 28. 两个投影例子

横纵轴

向横轴投影，相当于压扁到横轴：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

显然上式中矩阵的行列式值为 0。

向纵轴投影：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

秩

此外，大家自己可以计算一下矩阵 \mathbf{P} 的秩，可以发现 $\text{rank}(\mathbf{P}) = 1$ 。这说明， \mathbf{P} 的列向量线性相关。简单整理 \mathbf{P} 得到：

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (50)$$

的确， \mathbf{P} 的列向量之间存在倍数关系。大家自行计算 (48) 和 (49) 中矩阵的秩。

张量积

再进一步，我们发现 (50) 可以写成：

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} @ \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right)^T \quad (51)$$

容易发现，上式中存在本书前文讲过的向量单位化 (vector normalization)，也叫归一化。也就是说 $\boldsymbol{\tau}$ 单位化得到单位向量 (unit vector) $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ ：

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

(51) 可以进一步写成张量积的形式，具体如下：

$$\mathbf{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (53)$$

大家可能已经疑惑了，正交投影怎么和张量积联系起来了？卖个关子，我们把这个问题留给下两章回答。

8.7 再谈行列式值：几何视角

有了本章之前的内容，本节总结行列式值的几何意义。

对于一个 2×2 矩阵 \mathbf{A} ，它对应一定的线性变换，而 \mathbf{A} 的行列式值决定了面积缩放系数。

行列值为正

举个例子， \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 向量经过矩阵线性变换得到 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 ：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$e_1 \quad a_1 \quad e_2 \quad a_2$

如图 29 所示, e_1 和 e_2 向量构成的正方形面积为 1。而 a_1 和 a_2 向量构成的平行四边形面积为 11, 即对应 $|A| = 11$, 平面几何形状放大 11 倍。

反之, 如果矩阵 A 的行列式值小于 1 大于 0, 对应平面几何形状缩小。

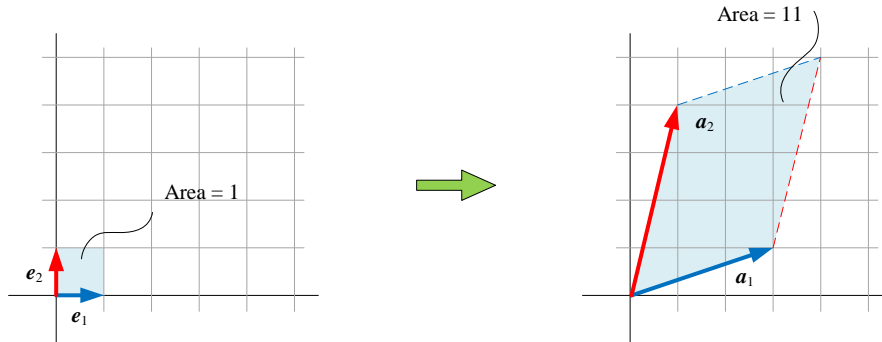


图 29. 行列式值为正

行列式值为 0

当然, 行列式值可以为 0, 也可以为负数。

如果矩阵 A 行列式值为 0 时, 从几何上来讲, A 起到降维效果。我们看这个例子, e_1 和 e_2 向量经过矩阵线性变换得到 a_1 和 a_2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$e_1 \quad a_1 \quad e_2 \quad a_2$

如图 30 所示, a_1 和 a_2 向量共线, 夹角为 0° , 这样它们构成图形的面积也为 0, 对应 $|A| = 0$ 。

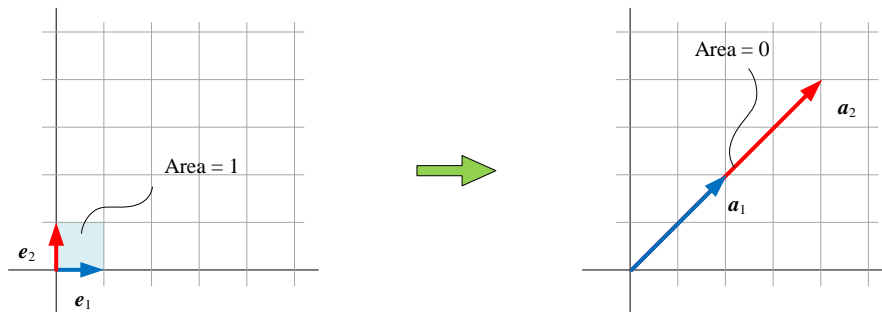


图 30. 行列式值为零

行列式值为负

如果矩阵 A 行列式值为负，几何上来看，几何图形翻转，如图 31 所示。图 31 中图形面积则放大了 10 倍 (行列式值的绝对值为 10)。请大家根据图 31 中 a_1 和 a_2 两个向量判断 A 的具体值。

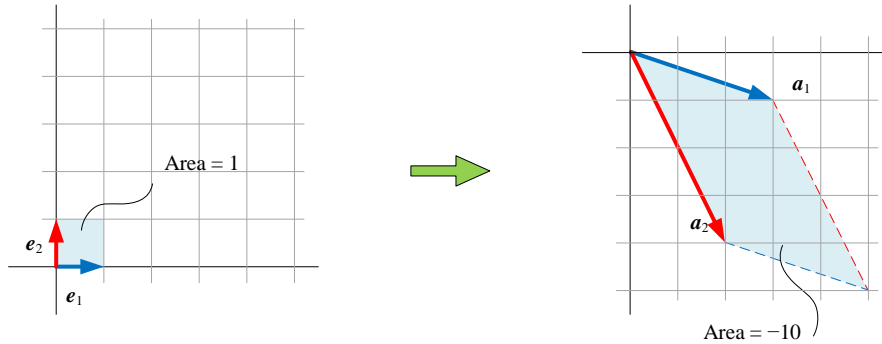


图 31. 行列式值为负

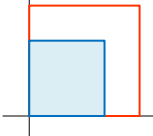
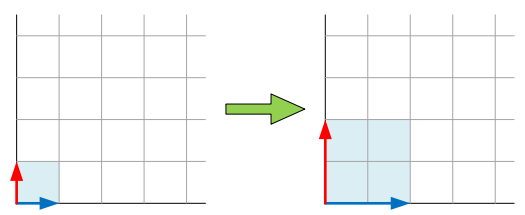

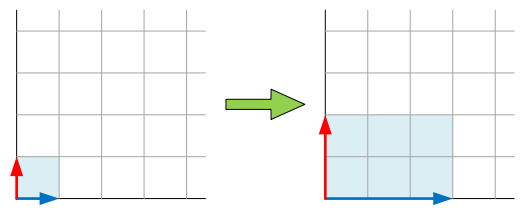
几何变换和行列式值

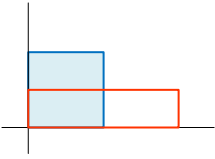
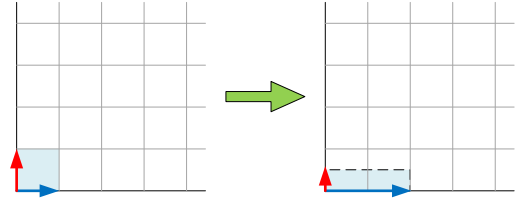
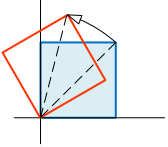
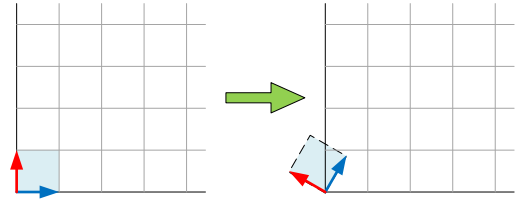
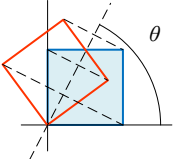
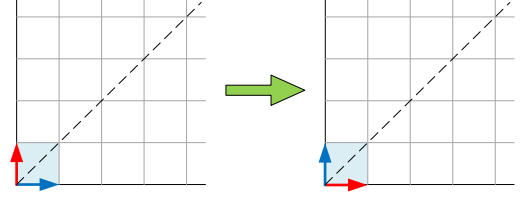
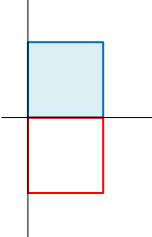
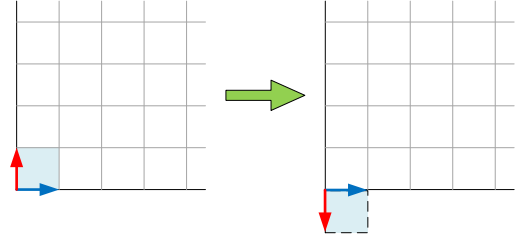
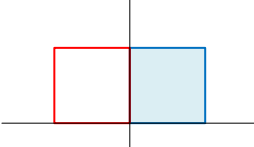
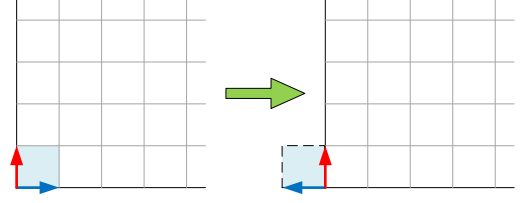
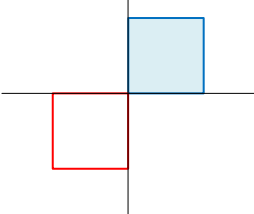
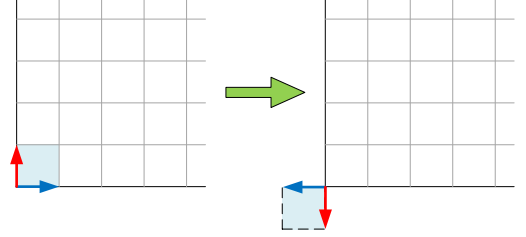
2×2 矩阵 A 写成 $[a_1, a_2]$ 。在 A 的作用下， e_1 和 e_2 单位向量变成 a_1 和 a_2 ：

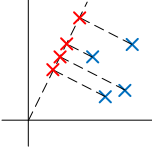
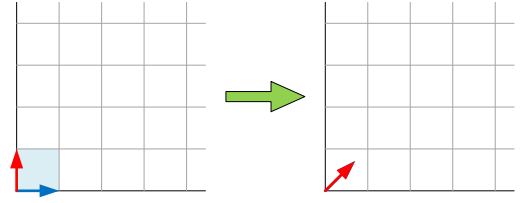
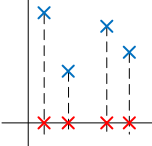
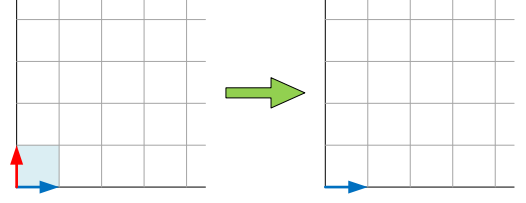
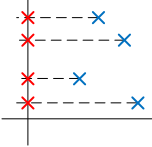
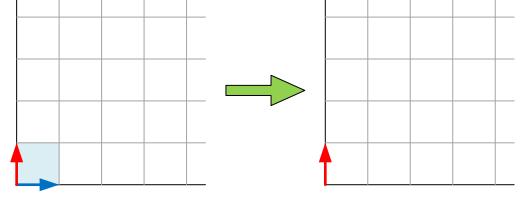
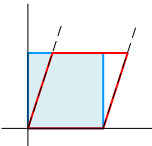
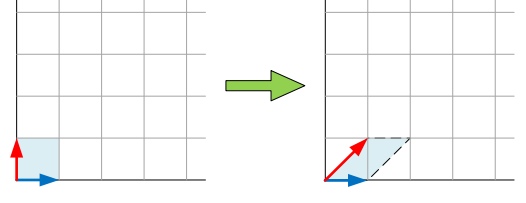
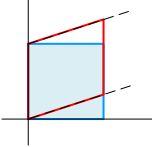
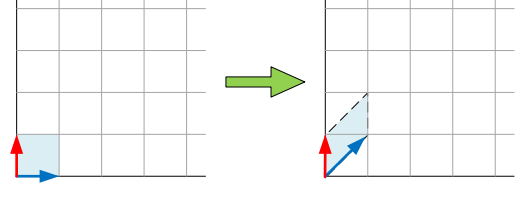
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} = a_1, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_2} = a_2 \quad (56)$$

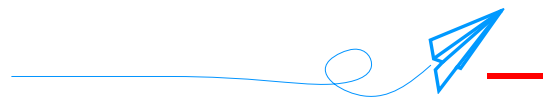
本书前文介绍过，以 e_1 和 e_2 为边构成的平行四边形为正方形，对应的面积为 1。以 a_1 和 a_2 为边构成的一个平行四边形对应的面积就是矩阵 A 的行列式值。表 2 总结本章主要几何变换，给出具体实例、计算行列式值，并比较几何变换前后，平行四边形的变化。

表 2. 本章主要几何变换示例

| 几何变换 | 例子和行列式值 | 面积变化 |
|---|--|--|
| 等比例缩放 s 倍 (scaling)  | $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $ A = 4, \text{ rank}(A) = 2$ |  |
| 非等比例缩放 (unequal scaling)  | $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $ A = 6, \text{ rank}(A) = 2$ |  |

| | | |
|--|--|--|
| <p>挤压 s 倍 (squeeze)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$ |  |
| <p>逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$ 逆时针旋转 60° |  |
| <p>关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像; 等同于上例, 切向量相当于 $(\cos\theta, \sin\theta)$</p>  | $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$ 夹角为 45° |  |
| <p>关于横轴镜像对称 (reflection)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$ |  |
| <p>关于纵轴镜像对称 (reflection)</p>  | $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$ |  |
| <p>关于原点对称</p>  | $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$ |  |

| | | |
|--|--|--|
| <p>向通过原点、切向量为 $\tau [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线投影 (projection)</p>  | $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{ rank}(A) = 1$ |  |
| <p>向横轴投影 (projection)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{ rank}(A) = 1$ |  |
| <p>向纵轴投影 (projection)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{ rank}(A) = 1$ |  |
| <p>沿水平方向剪切, θ 为剪切角 (shear)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{ rank}(A) = 2$ |  |
| <p>沿竖直方向剪切, θ 为剪切角 (shear)</p>  | $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{ rank}(A) = 2$ |  |



本章讲了很多种几何变换，请大家格外关注平移、缩放、旋转和投影。我们将会在接下来的内容中反复使用这四种几何变换。

此外，本章在讲解几何变换的同时，还和大家从几何角度回顾并探讨了矩阵可逆性、矩阵乘法不满足交换律、秩、行列式值等线性代数概念。请大家特别注意行列式值的几何视角，我们将在特征值分解中再进一步探讨。

用几何视角理解线性代数概念，是学习线性代数的唯一“捷径”。此外，数据视角会让大家看到线性代数的高度实用性，并直接和编程联结起来。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

有数据的地方，就有向量！

有向量的地方，就有几何！

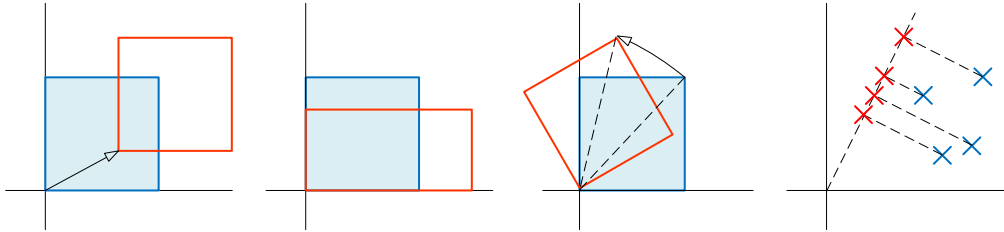


图 32. 总结本章重要内容的四副图

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com