5 Block Matrix 分块矩阵

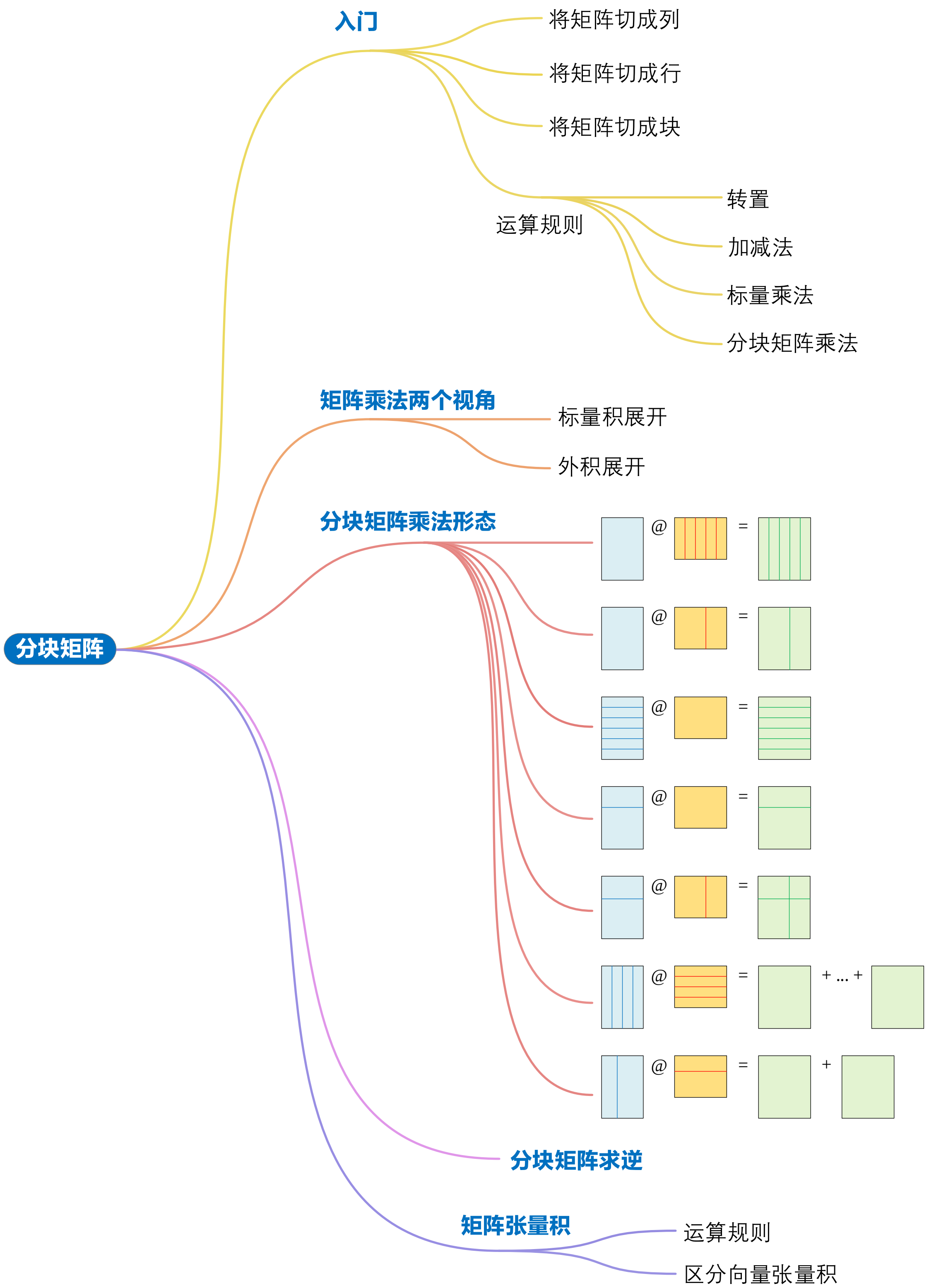
将大矩阵切成小块，简化运算

数学的精髓在于自由。

The essence of mathematics is in its freedom.

—— 格奥尔格·康托尔 (Georg Cantor) | 德国数学家 | 1845 ~ 1918

- ◄ `numpy.kron()` 计算矩阵张量积
- ◄ `numpy.random.random_integers()` 生成随机整数
- ◄ `numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ◄ `seaborn.heatmap()` 绘制热图


分块矩阵
入门
将矩阵切成列
将矩阵切成行
将矩阵切成块
运算规则
转置
加减法
标量乘法
分块矩阵乘法
矩阵乘法两个视角
标量积展开
外积展开
分块矩阵乘法形态
@
=
+ ... +
+
分块矩阵求逆
矩阵张量积
运算规则
区分向量张量积

1.1 分块矩阵：横平竖直切豆腐

分块矩阵 (block matrix 或 partitioned matrix) 将一个矩阵用若干条横线和竖线分割成多个**子块矩阵** (submatrices)。这样可以简化运算，同时也会让运算过程变得更加清晰。

白话讲，分块矩阵好比横平竖直切豆腐；但是下刀的手法很有讲究，这是本章后文要着重探讨的内容。

切丝切条

实际上，本书一开始就已经不知不觉地使用了分块矩阵这一重要思路。

大家已经清楚知道，如图 1 所示，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 可以看做是由行向量或列向量按照一定规则构造而成。

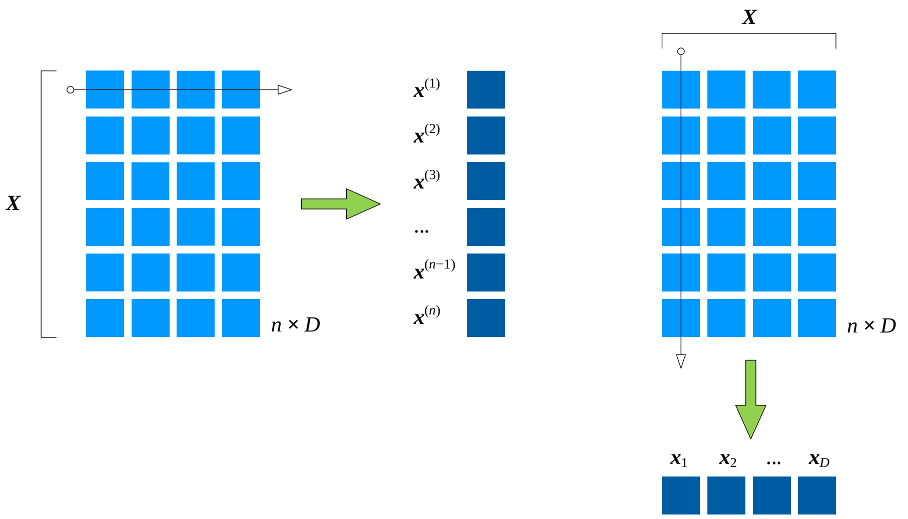


图 1. 矩阵可以写成一系列行向量或列向量

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 每行之间切一刀，得到一组行向量：

$$
\boldsymbol{X}_{n\times D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{(n)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D}\\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D}\end{bmatrix} \tag{1}
$$

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 在每列之间切一刀，将 $\boldsymbol{X}$ 切成一组列向量：

$$X_{n\times D}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \tag{2}$$

切块

下面介绍分块矩阵其他切法。给出如下矩阵 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

我们把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 横竖都切一刀，得到四个子矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4}$$

给每个子矩阵起个名字，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记做:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2} \\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

也就是,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{1,1}&=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{1,2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{A}_{2,1}&=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{2,2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Numpy 中矩阵分块可以用行列序数就做到。而 `numpy.block()` 函数可以用子块矩阵结合得到原矩阵。请大家参考 `Bk4_Ch5_01.py`。

```
# Bk4_Ch5_01.py

import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3, 0,  0],
              [4, 5, 6, 0,  0],
              [0, 0, 0, -1, 0],
              [0, 0 ,0, 0,  1]])

# NumPy array slicing
```

```
A_1_1 = A[0:2,0:3]

A_1_2 = A[0:2,3:]
# A_1_2 = A[0:2,-2:]
A_2_1 = A[2:,0:3]
# A_2_1 = A[-2:,0:3]
A_2_2 = A[2:,3:]
# A_2_2 = A[-2:,-2:]

# Assemble a matrix from nested lists of blocks

A_ = np.block([[A_1_1, A_1_2],
               [A_2_1, A_2_2]])
```

转置

一般情况，$\boldsymbol{A}_{i,j}$ 的行数记做 n_i，列数 D_j；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 $n \times D$，按 (5) 分割得到的子块矩阵的行、列数满足：

$$n_1 + n_2 = n, \quad D_1 + D_2 = D \tag{7}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 求转置，得到：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1}{}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2,1}{}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{1,2}{}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2,2}{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

代入具体值，得到：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{9}$$

请大家仔细对比 (4) 和 (9)，分析转置前后子块矩阵的变化。

标量乘法

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标量乘法：

$$k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k\boldsymbol{A}_{1,1} & k\boldsymbol{A}_{1,2} \\ k\boldsymbol{A}_{2,1} & k\boldsymbol{A}_{2,2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

加减法

给定矩阵 $\boldsymbol{B}$，它的形状和 $\boldsymbol{A}$ 相同，采用相同的分块法分割 $\boldsymbol{B}$，得到：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2}\\ \boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix} \tag{11}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相同位置的子块矩阵形状相同，两者相加为对应位置子块分别相加：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2}\\ \boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}+\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2}+\boldsymbol{B}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,1}+\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2}+\boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix} \tag{12}$$

上述规则也适用于减法。

矩阵乘法

分块矩阵乘法规则也是基于矩阵乘法规则。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相乘时，首先保证 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数；$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分块时，保证 $\boldsymbol{A}$ 的每一个子块矩阵的列数分别等于 $\boldsymbol{B}$ 的每个子块的行数。这样 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相乘可以展开写成：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2}\\ \boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,1}+\boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,2}+\boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,1}+\boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,2}+\boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix} \tag{13}$$

上式中分块矩阵的乘法有两层运算。第一层矩阵乘法将子块视作元素，第二层是子块矩阵之间矩阵乘法。本章后文会深入讲解不同形态的分块矩阵乘法。

1.1 矩阵乘法第一视角：标量积展开

本书前文以两个 2 × 2 矩阵相乘为例，讲解过观察矩阵乘法的两个视角。本节和下一节回顾这两个视角的同时，进一步从分块矩阵视角深入讲解矩阵乘法规则。

本节讨论矩阵乘法的常规视角——**标量积展开** (scalar product expansion)。

首先回顾矩阵乘法规则。

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘。比如下例中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 n 行 D 列，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的形状为 D 行 m 列。$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘时，相当于 D 被消掉。

矩阵相乘得到的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数，即 n 行 m 列：

$$\boldsymbol{C}_{n\times m}=\boldsymbol{A}_{n\times D}\boldsymbol{B}_{D\times m}=\boldsymbol{A}_{n\times D}@\boldsymbol{B}_{D\times m}=\begin{bmatrix}c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m}\\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,m}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中，

$$A_{n\times D}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix},\quad B_{D\times m}=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{D,1} & b_{D,2} & \cdots & b_{D,m} \end{bmatrix} \tag{15}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成一组行向量：

$$\boldsymbol{A}_{n\times D}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix}_{n\times D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(n)} \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{16}$$

将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 写成一组列向量：

$$\boldsymbol{B}_{D\times m}=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{D,1} & b_{D,2} & \cdots & b_{D,m} \end{bmatrix}_{D\times m}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}_{1\times m} \tag{17}$$

利用 (16) 和 (17)，矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 可以写作：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(n)} \end{bmatrix}_{n\times 1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}_{1\times m}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{b}_m \\ \boldsymbol{a}^{(2)}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^{(2)}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^{(2)}\boldsymbol{b}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} \tag{18}$$

上式便是矩阵乘法的常规视角，规则如图 2 所示。

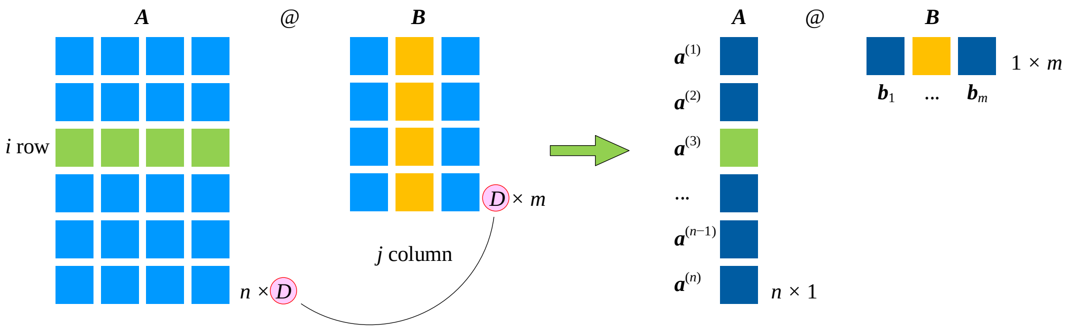


图 2. 矩阵乘法的常规视角

如图 3 所示，矩阵乘积 $\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元素 $c_{i,j}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行行向量 $\boldsymbol{a}^{(i)}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列列向量 $\boldsymbol{b}_j$ 的乘积：

$$c_{i,j}=\boldsymbol{a}^{(i)}\boldsymbol{b}_j \tag{19}$$

白话说，矩阵乘法的常规视角是，左侧矩阵的每个行向量，按规则分别乘右侧矩阵每个列向量。

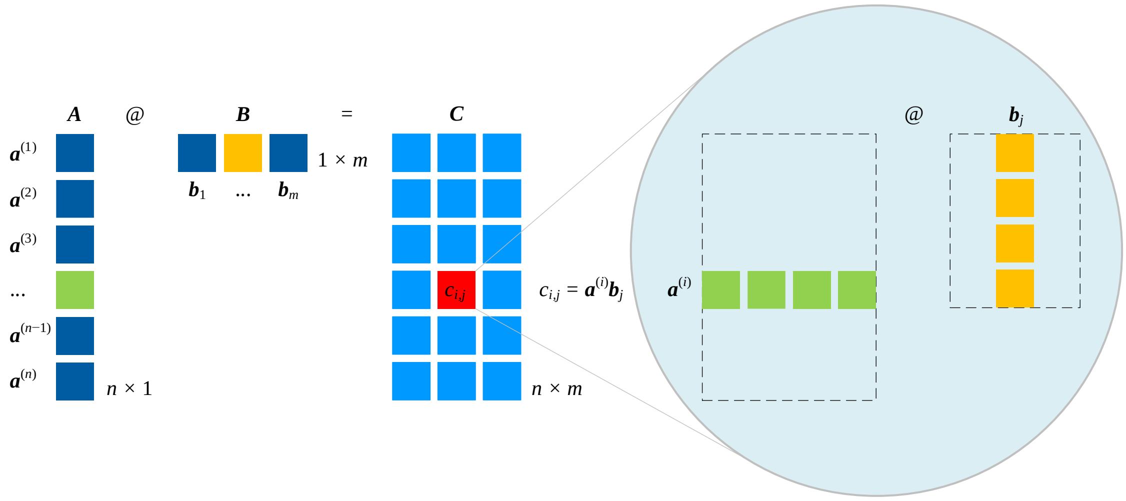


图 3. 矩阵乘法的常规视角中，矩阵乘积 C 的 (i,j) 元素

1.1 矩阵乘法第二视角：外积展开

本节回顾矩阵乘法规则的第二视角——外积展开 (outer product expansion)。

与矩阵乘法常规视角不同，我们将矩阵 A 写成一排列向量：

$$
A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_D \end{bmatrix} \tag{20}
$$

矩阵 B 则写成一排行向量：

$$
B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{D,1} & b_{D,2} & \cdots & b_{D,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ \vdots \\ b^{(D)} \end{bmatrix} \tag{21}
$$

这样，在计算矩阵乘积 AB 时，我们便使用如图 4 所示这个全新的视角。

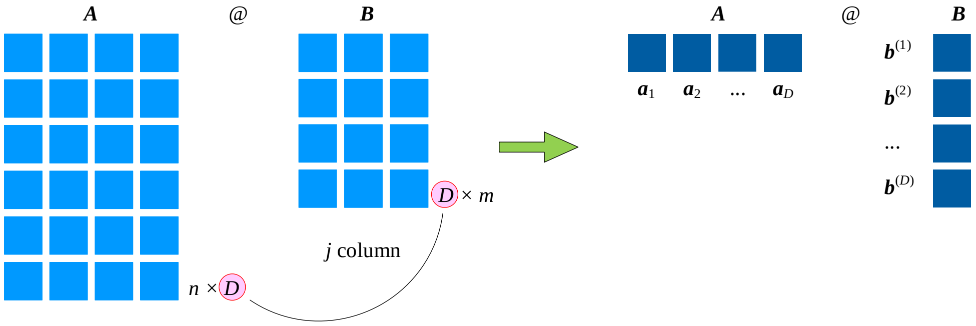


图 4. 矩阵乘法的第二视角

利用 (20) 和 (21)，矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 展开写成：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_D \end{bmatrix}_{1\times D} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^{(1)} \\ \boldsymbol{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}^{(D)} \end{bmatrix}_{D\times 1} \\
&= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}^{(1)} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{a}_D\boldsymbol{b}^{(D)} \\
&= \sum_{i=1}^{D} \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}^{(i)}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

这样，我们将矩阵乘法运算转化成求和运算。

令，

$$
\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}^{(i)} \tag{23}
$$

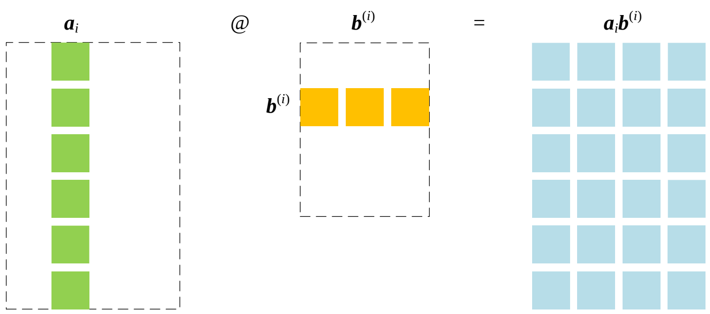


图 5. 列向量 $\boldsymbol{a}_i$ 和行向量 $\boldsymbol{b}^{(i)}$ 乘积的结果

如图 5 所示，列向量 $\boldsymbol{a}_i$ 和行向量 $\boldsymbol{b}^{(i)}$ 乘积的结果的形状为 $n \times m$，即乘积 $\boldsymbol{C}$ 矩阵的形状。通过观察 (22)，可以发现乘积 $\boldsymbol{C}$ 矩阵相当于 D 个矩阵 $\boldsymbol{C}_i$ 叠加得到的结果：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \cdots + \boldsymbol{C}_D = \sum_{i=1}^{D} \boldsymbol{C}_i \tag{24}$$

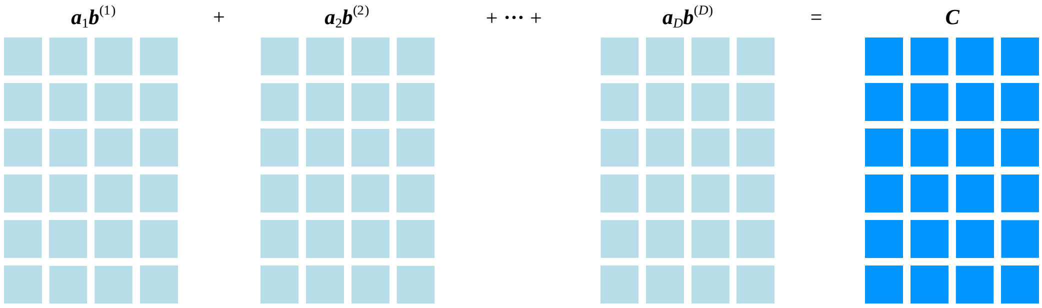


图 6. 乘积 $\boldsymbol{C}$ 矩阵相当于 D 个矩阵叠加得到的结果

张量积

用张量积运算规则，把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 写成一系列张量积之和：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{a}_1 \otimes \left(\boldsymbol{b}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{a}_2 \otimes \left(\boldsymbol{b}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{a}_D \otimes \left(\boldsymbol{b}^{(D)}\right)^{\mathrm{T}} \\ &= \sum_{i=1}^{D} \boldsymbol{a}_i \otimes \left(\boldsymbol{b}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{25}$$

请大家格外注意上式中的转置。

这是一个非常重要的矩阵乘法视角，它不仅仅是上一节常规视角的补充。在很多数据科学和机器学习算法中，这一视角扮演至关重要的角色。

热图示例

下面我们用具体数字和热图可视化矩阵乘法外积展开。图 7 所示为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵乘法热图。

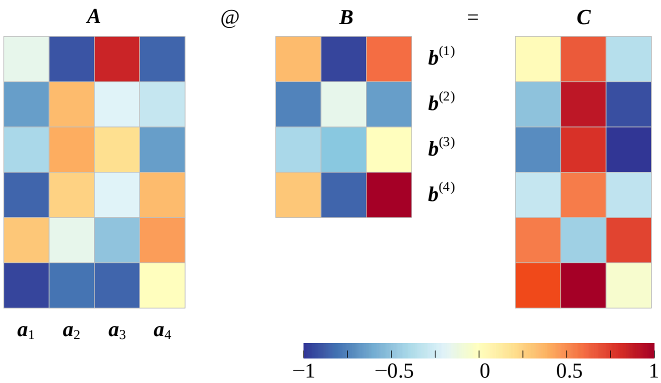


图 7. 矩阵乘法热图

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 拆解为一组列向量，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 拆解为一组行向量。按照 (22) 计算矩阵乘法，得到如图 8 所示 4 幅热图。

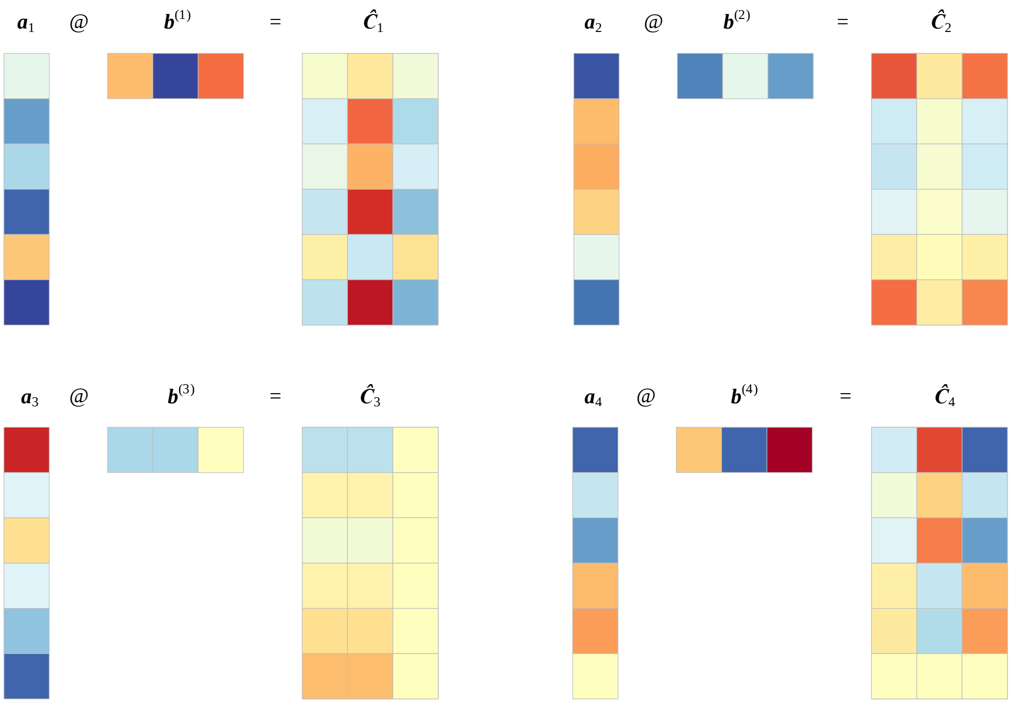


图 8. 列向量乘行向量结果热图

同样，也可以用张量积来计算得到这 4 幅热图，如图 9 所示。如图 10 所示，将这 4 幅热图叠加，我们可以得到乘积结果矩阵 $\boldsymbol{C}$。这个思路对于奇异值分解和主成分分析非常重要。

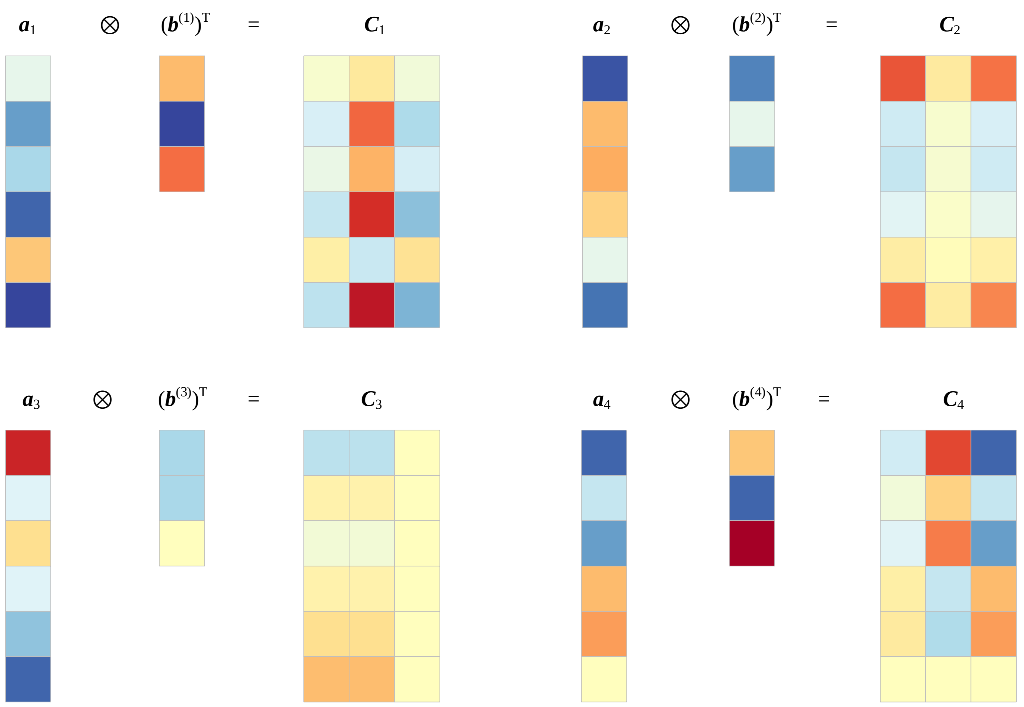


图 9. 张量积热图

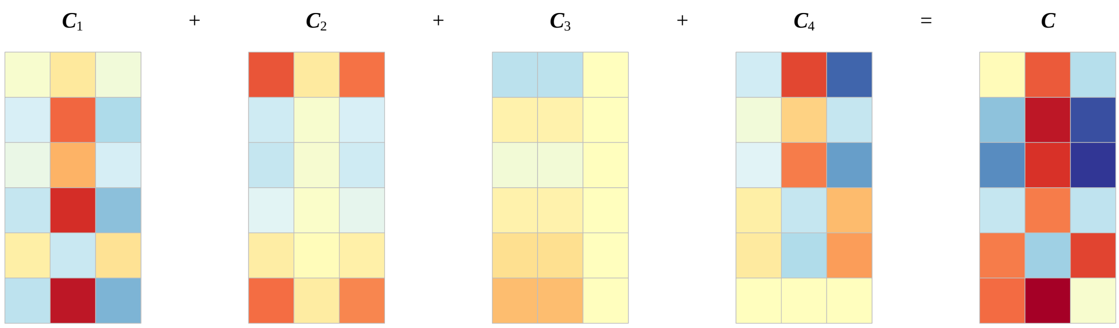


图 10. 四幅热图叠加

Bk4_Ch5_02.py 绘制图 10 的每幅热图。

```
# Bk4_Ch5_02.py

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns

def plot_heatmap(x,title):

    fig, ax = plt.subplots()
    ax = sns.heatmap(x,
                     cmap='RdYlBu_r',
                     cbar_kws={"orientation": "horizontal"}, vmin=-1, vmax=1)
    ax.set_aspect("equal")
    plt.title(title)

# Generate matrices A and B
A = np.random.random_integers(0,40,size=(6,4))
A = A/20 - 1

B = np.random.random_integers(0,40,size=(4,3))
B = B/20 - 1

# visualize matrix A and B
plot_heatmap(A,'A')

plot_heatmap(B,'B')

# visualize A@B
C = A@B
plot_heatmap(C,'C = AB')

C_rep = np.zeros_like(C)

# reproduce C

for i in np.arange(4):
    C_i = A[:,[i]]@B[[i],:];
    title = 'C' + str(i + 1)
    plot_heatmap(C_i,title)
```

```
    C_rep = C_rep + C_i

# Visualize reproduced C
plot_heatmap(C_rep,'C reproduced')
```

1.1 矩阵乘法更多视角：分块多样化

本节介绍常见几种分块矩阵乘法形态，它们都可以视作观察矩阵乘法的不同视角。

B 切成列向量

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵相乘时，将 $\boldsymbol{B}$ 分割成列向量，这样 $\boldsymbol{AB}$ 结果为：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Ab}_1 & \boldsymbol{Ab}_2 & \cdots & \boldsymbol{Ab}_m \end{bmatrix} \tag{26}$$

图 11 所示为上述运算示意图。请大家格外注意这个视角，我们将会在之后的投影运算中经常见到这种展开方法。

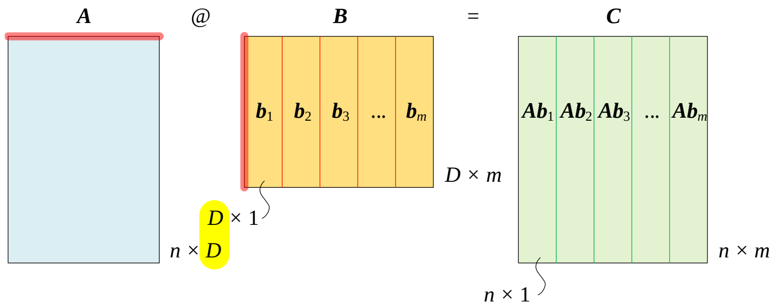


图 11. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵相乘时，将 $\boldsymbol{B}$ 写成一排列向量

反向来看，如果存在以下一系列矩阵乘法运算：

$$\boldsymbol{Ab}_1 = \boldsymbol{c}_1, \quad \boldsymbol{Ab}_2 = \boldsymbol{c}_2, \quad \cdots \quad \boldsymbol{Ab}_m = \boldsymbol{c}_m \tag{27}$$

且列向量 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ … $\boldsymbol{b}_m$ 的形状相同，则可以合成得到：

$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \tag{28}$$

B 左右切一刀

$\boldsymbol{B}$ 先左右切一刀后，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 再左乘 $\boldsymbol{B}$，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 展开写成：

$$
\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}_1 & \boldsymbol{AB}_2\end{bmatrix} \tag{29}
$$

图 12 所示为上述运算示意图。

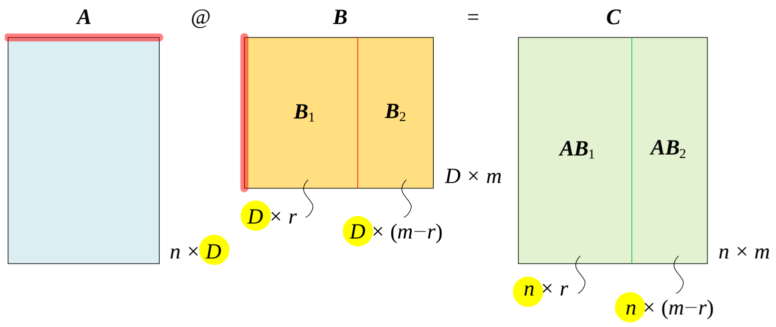


图 12. 将 $\boldsymbol{B}$ 左右切一刀再右乘 $\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}$ 切成一排行向量

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵相乘，将 $\boldsymbol{A}$ 分割成一排行向量，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果为：

$$
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(n)}\end{bmatrix}_{n\times 1} @\, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{a}^{(2)}\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{30}
$$

图 13 所示为上述运算示意图。此外，请大家也试着从矩阵乘法“合成”角度，逆向来看上述运算。

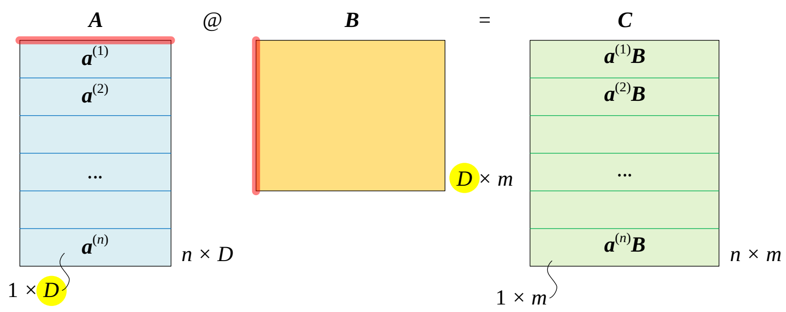


图 13. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 矩阵相乘，将 $\boldsymbol{A}$ 分割成一排行向量

$\boldsymbol{A}$ 上下切一刀

将 $\boldsymbol{A}$ 先上下切一刀，$\boldsymbol{A}$ 再左乘 $\boldsymbol{B}$，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果为：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \tag{31}$$

图 14 所示为上述运算示意图。

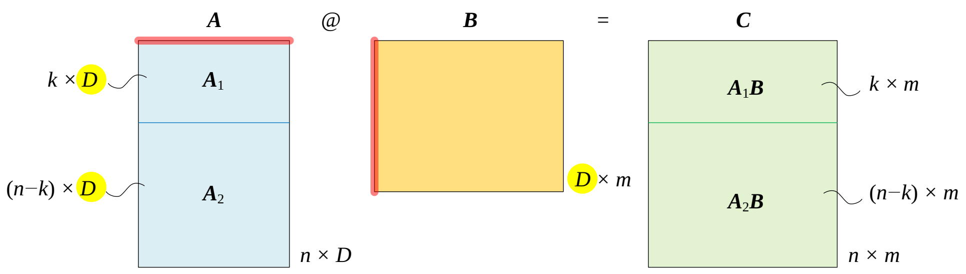


图 14. $\boldsymbol{A}$ 上下切一刀，再左乘 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}$ 上下切，$\boldsymbol{B}$ 左右切

上下分块的 $\boldsymbol{A}$ 乘左右分块的 $\boldsymbol{B}$，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果展开为：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix} \tag{32}$$

如图 15 所示，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的列数还是 D，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 的行数也是 D。这个视角类似矩阵乘法的第一视角。我们可以把 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 视作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个元素，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 看成矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的两个元素。

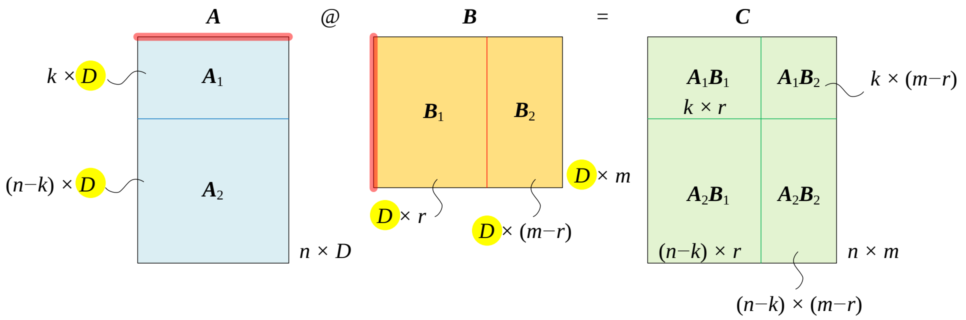


图 15. 上下分块的 $\boldsymbol{A}$ 乘左右分块的 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}$ 左右切，$\boldsymbol{B}$ 上下切

左右分块的 $\boldsymbol{A}$ 乘上下分块的 $\boldsymbol{B}$，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果展开为：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \tag{33}$$

注意，如图 16 所示，$\boldsymbol{A}_1$ 列数等于 $\boldsymbol{B}_1$ 行数，$\boldsymbol{A}_2$ 列数等于 $\boldsymbol{B}_2$ 行数。这类似前面讲到的矩阵乘法的第二视角。

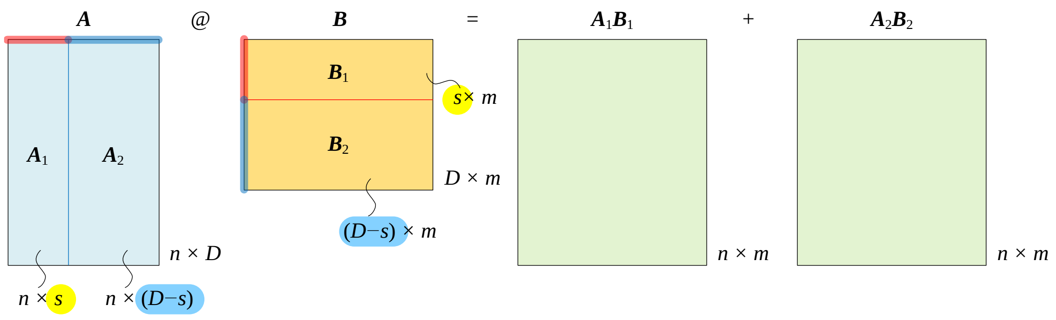


图 16. 左右分块的 $\boldsymbol{A}$ 乘以上下分块的 $\boldsymbol{B}$

A 和 B 都大卸四块

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都上下左右分块，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果为：

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2} \\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2} \\ \boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,1} + \boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,2} + \boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,2} \\ \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,1} + \boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,2} + \boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

注意分块的规则，如图 17 所示，$\boldsymbol{A}_{1,1}$、$\boldsymbol{A}_{1,2}$、$\boldsymbol{A}_{2,1}$、$\boldsymbol{A}_{2,2}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1,1}$、$\boldsymbol{B}_{2,1}$、$\boldsymbol{B}_{1,2}$、$\boldsymbol{B}_{2,2}$ 的行数。图 17 中给出的矩阵乘法相当于两个 2 × 2 矩阵相乘，结果 $\boldsymbol{C}$ 还是 2 × 2。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的四个元素分别为 $\boldsymbol{C}_{1,1}$、$\boldsymbol{C}_{1,2}$、$\boldsymbol{C}_{2,1}$、$\boldsymbol{C}_{2,2}$。这也相当于矩阵乘法的第一视角。

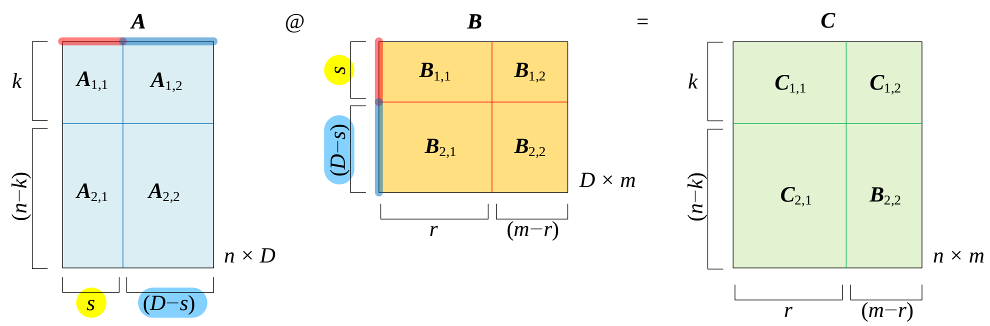


图 17. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都上下左右分块

图 18 到图 21 分别展示如何计算 $\boldsymbol{C}_{1,1}$、$\boldsymbol{C}_{1,2}$、$\boldsymbol{C}_{2,1}$、$\boldsymbol{C}_{2,2}$。以 $\boldsymbol{C}_{1,1}$ 为例，$\boldsymbol{C}_{1,1}$ 的行数为 $\boldsymbol{A}_{1,1}$ 的行数，$\boldsymbol{C}_{1,1}$ 的列数为 $\boldsymbol{B}_{1,1}$ 的列数。

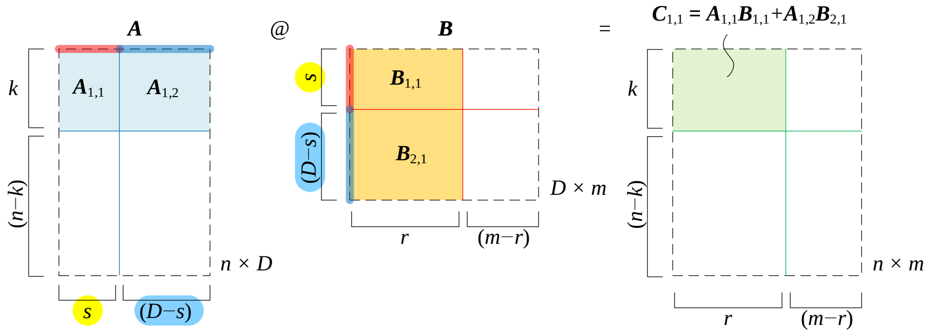


图 18. 计算 $\boldsymbol{C}_{1,1}$

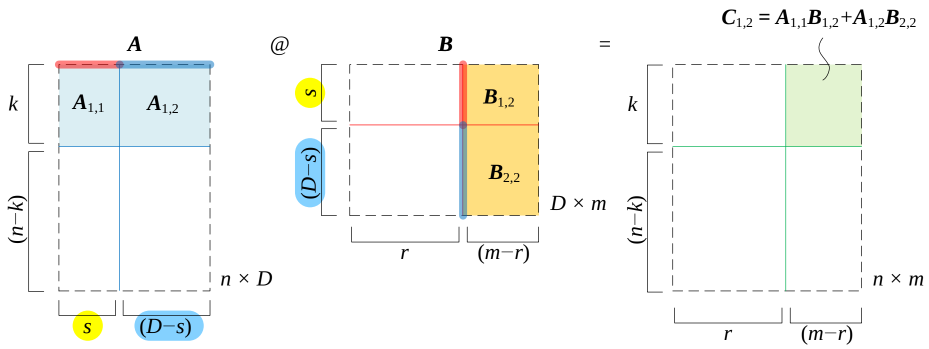


图 19. 计算 $\boldsymbol{C}_{1,2}$

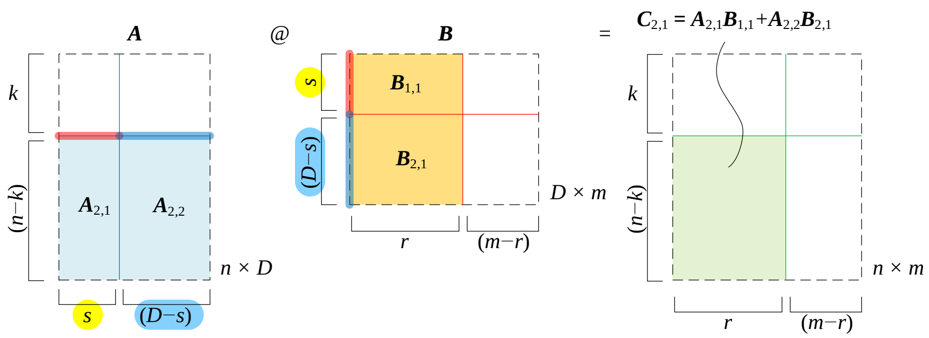


图 20. 计算 $\boldsymbol{C}_{2,1}$

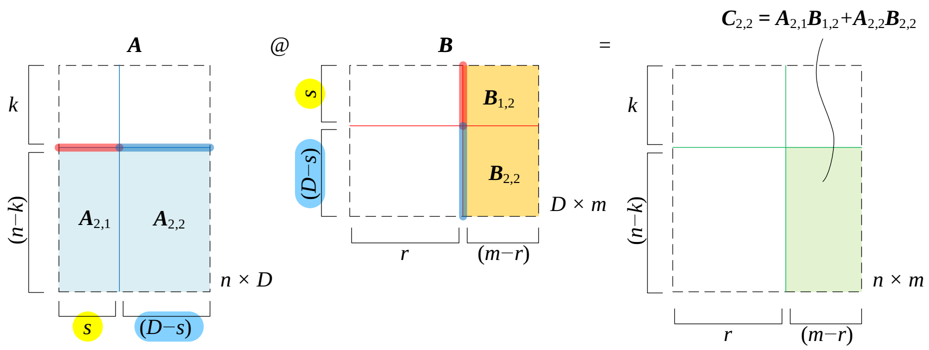


图 21. 计算 $\boldsymbol{C}_{2,2}$

逐步分块

还有一个办法解释图 17 分块矩阵乘法——逐步分块。

首先将 $\boldsymbol{A}$ 左右分块，$\boldsymbol{B}$ 上下分块，$\boldsymbol{AB}$ 乘积的结果如 (33)，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 结果写成 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$ 相加，具体如图 22 所示。

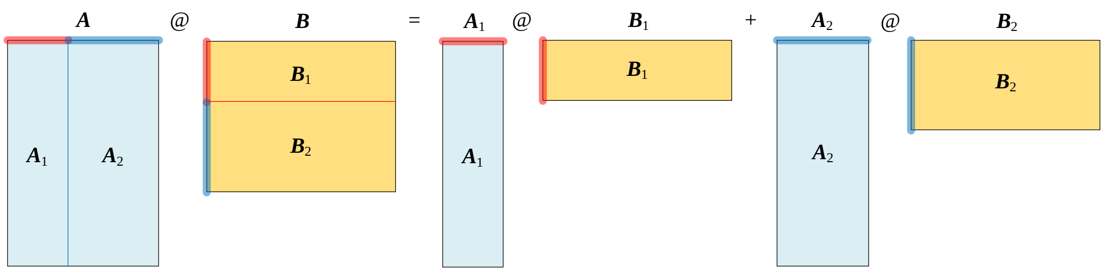


图 22. 首先将 $\boldsymbol{A}$ 左右分块，$\boldsymbol{B}$ 上下分块

然后再对 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 上下分块，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 左右分块：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}\\ \boldsymbol{A}_{2,1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix} \tag{35}$$

如图 23 所示，$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 按如下方式计算得到：

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}\\ \boldsymbol{A}_{2,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{B}_{1,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,1}\boldsymbol{B}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{2,1}\boldsymbol{B}_{1,2}\end{bmatrix} \tag{36}$$

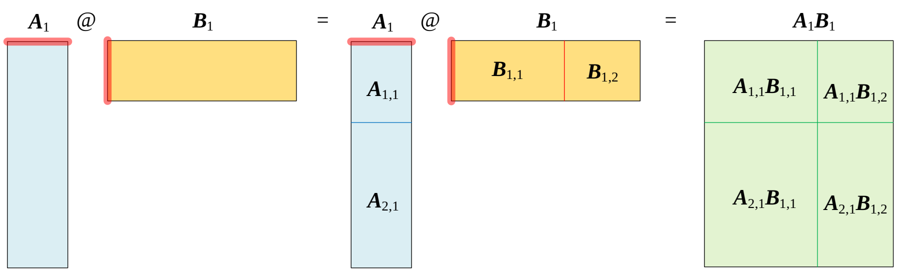


图 23. 计算 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$

同理，如图 24 所示，计算 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$：

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{1,2}\boldsymbol{B}_{2,2}\\ \boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2}\boldsymbol{B}_{2,2}\end{bmatrix} \tag{37}$$

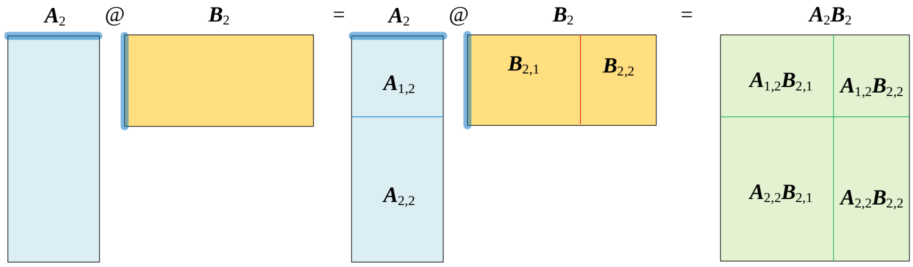


图 24. 计算 A_2B_2

(36) 和 (37) 相加就可以获得 (34) 结果：

$$\begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} & A_{1,1}B_{1,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} & A_{2,1}B_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix} \tag{38}$$

实际上，这个思路便是矩阵乘法第二视角。

这也足见矩阵乘法的灵活性，以及矩阵乘法两个视角的重要性。本书会在不同场合反复提到矩阵乘法的两个视角，以便强化认知。

1.1 分块矩阵的逆

如图 25 所示，将一个方阵分割成四个子块矩阵 A、B、C 和 D，其中 A 和 D 为方阵。当原矩阵可逆时，原矩阵的逆可以通过子块矩阵运算得到：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} \end{bmatrix} \tag{39}$$

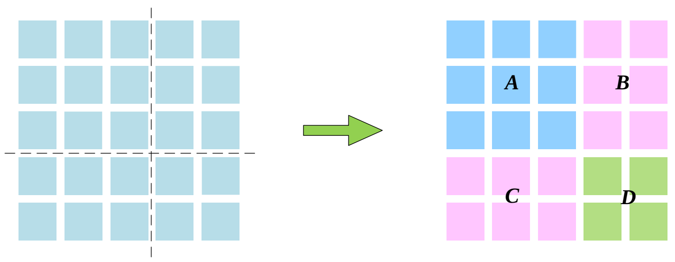


图 25. 分块矩阵求逆

令，

$$H = \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} \tag{40}$$

(39) 分块矩阵的逆可以写成：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{D}^{-1} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

当然，这个分块矩阵的逆还有其他表达方式，我们这里不一一赘述。分块矩阵的逆将会用在协方差矩阵，特别是求解条件概率相关运算。

1.1 克罗内克积：矩阵张量积

克罗内克积 (Kronecker product)，也叫矩阵张量积，是两个任意大小矩阵之间的运算，运算符为 $\otimes$。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 $n \times D$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的形状为 $p \times q$，那么 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的形状为 $np \times Dq$，结果为：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\boldsymbol{B} & a_{1,2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1,D}\boldsymbol{B} \\ a_{2,1}\boldsymbol{B} & a_{2,2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2,D}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}\boldsymbol{B} & a_{n,2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{n,D}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{42}$$

上式中每个 $a_{i,j}$ 可以看成是缩放系数。

克罗内克积讲究顺序，一般情况 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$。

请读者注意以下有关克罗内克积性质：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C} \\ (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A} \\ (k\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}\otimes(k\boldsymbol{B}) = k(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) \\ (\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{0}\otimes\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{43}$$

举个例子

比如两个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的张量积为 4×4 矩阵：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\boldsymbol{B} & a_{1,2}\boldsymbol{B} \\ a_{2,1}\boldsymbol{B} & a_{2,2}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1}\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{1,2}\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\ a_{2,1}\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{2,2}\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{44}$$

`numpy.kron()` 可以用来计算矩阵张量积。

和向量张量积的关系

克罗内克积相当于向量张量积的推广；反过来，向量张量积也可以看做克罗内克积的特例。

但两者稍有不同，为了方便计算，两个列向量的张量积定义为 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，也就是：

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ a_2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{45}$$

请读者注意上式中的转置运算。而 (42) 中不存在转置。

举个例子，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的张量积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1\times\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} & 1\times\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \\ 0.7\times\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} & -0.4\times\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{47}$$

图 26 所示为上述计算的热图。

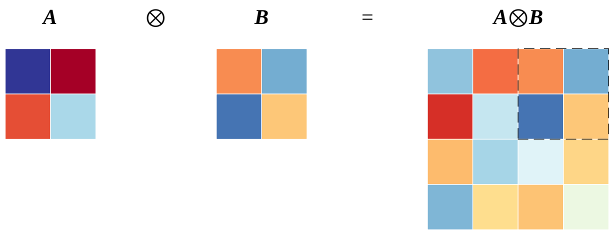


图 26. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的张量积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$

再给出第三个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix} \tag{48}$$

在 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$ 的张量积的运算如图 27 所示。

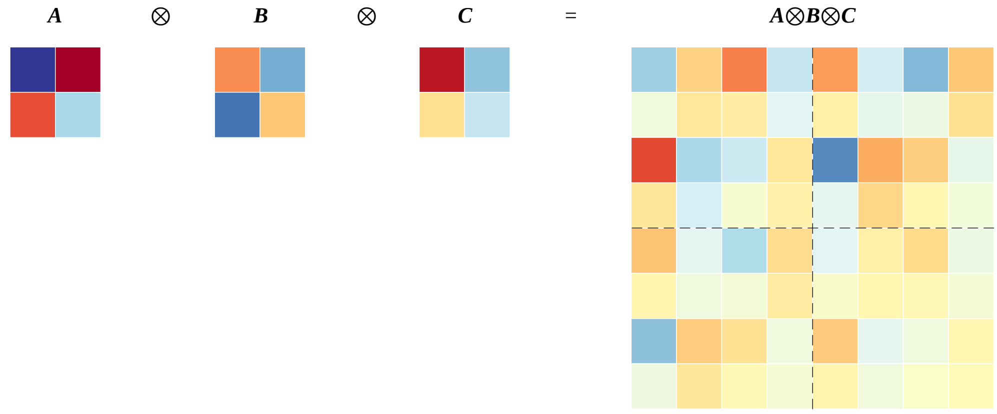


图 27. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的张量积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$

Bk4_Ch5_03.py 绘制图 26。请读者自行绘制图 27。

```
# Bk4_Ch5_03.py

import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
import seaborn as sns

A = np.array([[-1,  1],
              [0.7, -0.4]])

B = np.array([[0.5, -0.6],
             [-0.8, 0.3]])

A_kron_B = np.kron(A, B)

fig, axs = plt.subplots(1, 5, figsize=(12, 5))

plt.sca(axs[0])
ax = sns.heatmap(A,cmap='RdYlBu_r',vmax = 1,vmin = -1,
                 cbar_kws={"orientation": "horizontal"})
ax.set_aspect("equal")
plt.title('A')

plt.sca(axs[1])
plt.title('$\otimes$')
plt.axis('off')

plt.sca(axs[2])
ax = sns.heatmap(B,cmap='RdYlBu_r',vmax = 1,vmin = -1,
                 cbar_kws={"orientation": "horizontal"})
ax.set_aspect("equal")
plt.title('B')

plt.sca(axs[3])
plt.title('=')
plt.axis('off')

plt.sca(axs[4])
ax = sns.heatmap(A_kron_B,cmap='RdYlBu_r',vmax = 1,vmin = -1,
                 cbar_kws={"orientation": "horizontal"})
ax.set_aspect("equal")
```

```
plt.title('C')
```

本章介绍的几种矩阵分块运算都很重要，找出四幅图去总结主要内容，也很难。

虽然分块矩阵运算，特别是乘法运算，让人看的眼花缭乱；但是，万变不离其宗，大家首先要把握的是矩阵乘法规则，这是根本。其次，同等重要的就是，我们在本书中反复强调的——矩阵乘法两个视角。

此外，大家注意矩阵乘法的“合成”，也就是分块矩阵乘法的逆向运算。掌握这个逆向思维方式有助于理解和简化很多运算，大家将会在本书后文数据投影映射中看到大量实例。