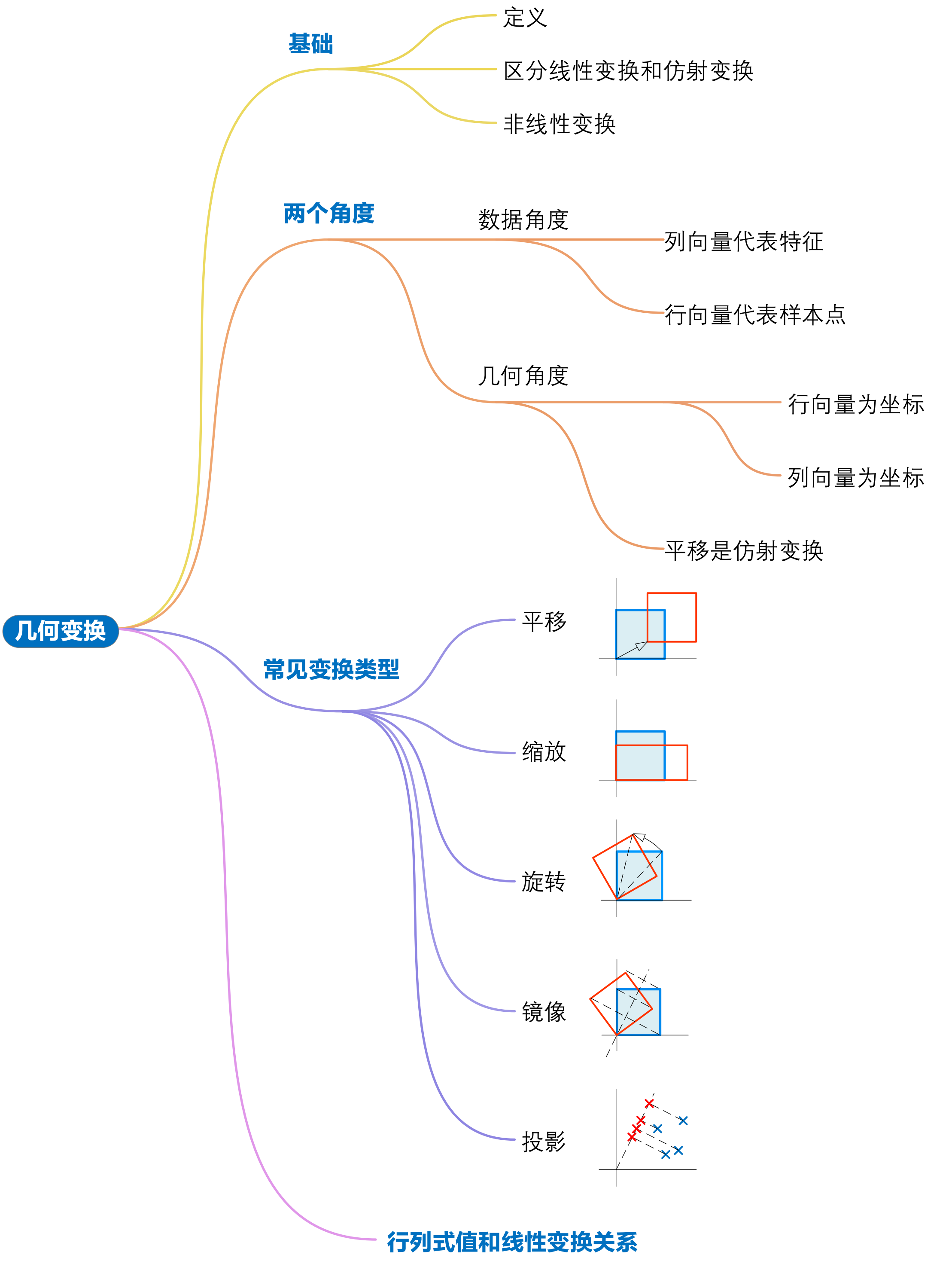
8 几何变换
Geometric Transformations

线性变换的特征是原点不变、平行且等距的网格

> 矩阵向来大有所为，它们从不游手好闲。
>
> ***Matrices act. They don't just sit there.***
>
> —— 吉尔伯特·斯特朗 (Gilbert Strang) | MIT 数学教授 | 1934 ~

- ◄ `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- ◄ `numpy.linalg.inv()` 矩阵逆运算
- ◄ `numpy.matrix()` 构造二维矩阵
- ◄ `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- ◄ `tranpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`


几何变换
基础
定义
区分线性变换和仿射变换
非线性变换
两个角度
数据角度
列向量代表特征
行向量代表样本点
几何角度
行向量为坐标
列向量为坐标
平移是仿射变换
常见变换类型
平移
缩放
旋转
镜像
投影
行列式值和线性变换关系

8.1 线性变换：线性空间到自身的线性映射

本章开始之前，我们先区分两个概念：**线性映射** (linear mapping) 和**线性变换** (linear transformation)。

线性映射是指从一个空间到另外一个空间的映射，且保持加法和数量乘法运算。比如，映射 L 将向量空间 V 映射到向量空间 W，对于所有的 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2 \in V$ 及所有的标量 α 和 β，满足：

$$L(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) = \alpha L(\boldsymbol{v}_1) + \beta L(\boldsymbol{v}_2) \tag{1}$$

白话来说，线性映射把一个空间的点或几何形体映射到另外一个空间。比如图 1 所示的三维物体投影到一个平面上，得到这个杯子在平面上的映像。

图 1 所示的“降维”过程显然不可逆，降维过程中信息被压缩。也就是说，不能通过杯子在平面的“映像”获得杯子在三维空间形状的所有信息。

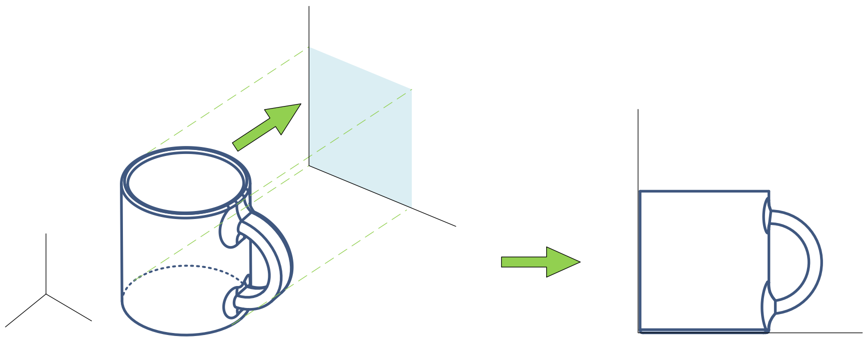


图 1. 线性映射

线性变换是线性空间到自身的线性映射，是一种特殊的线性映射。白话说，线性变换是在同一个坐标系中完成的图形变换。从几何角度来看，线性变换产生“平行且等距”的网格，并且原点保持固定，如图 2 所示。原点保持固定，这一性质很重要，因为大家马上就会看到“平移”不属于线性变换。

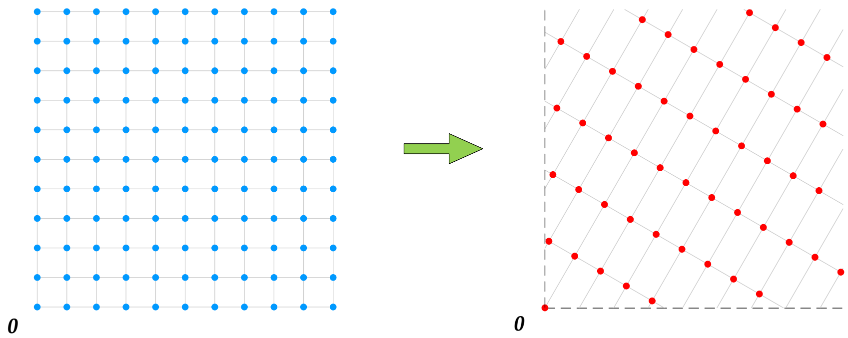


图 2. 线性变换产生平行且等距的网格

⚠ 请大家注意很多参考资料混用线性映射和线性变换。此外，本书把正交投影也算作是线性变换，虽然正交投影后维度降低，空间发生“压缩”。

非线性变换

与线性变换相对的是**非线性变换** (nonlinear transformation)。

图 3 和图 4 给出两个非线性变换的例子。图 3 所示为通过非线性变换产生平行但不等距网格。图 4 所示产生的网格甚至出现“扭曲”。

有了这两幅图做对比，相信读者能够更好地理解图 2 所展示的“平行且等距、原点保持固定”的网格所代表的线性变换。

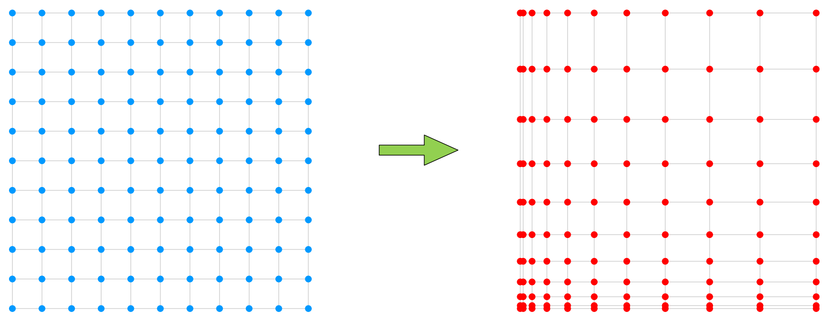


图 3. 非线性变换产生平行但不等距网格

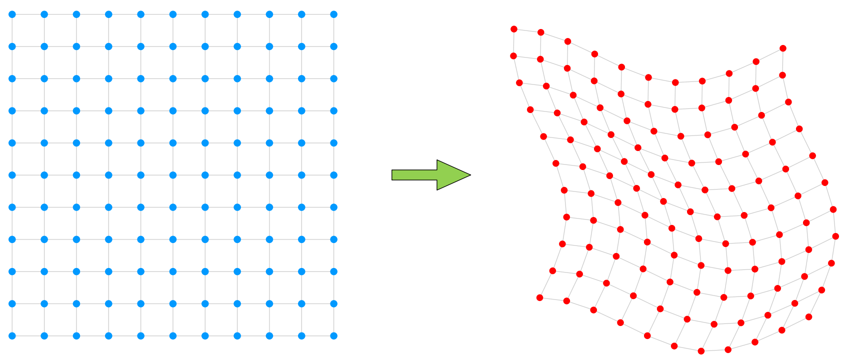


图 4. 非线性变换产生“扭曲”网格

常见平面几何变换

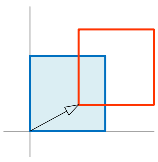
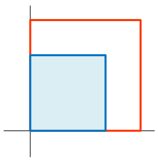
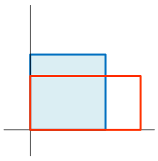
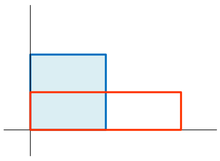
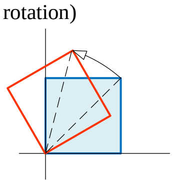
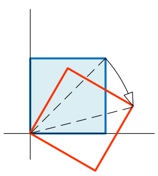
本章下一节开始就是要从线性代数运算视角讨论几何变换。表 1 总结本章将要介绍的常用二维几何变换。表中第二列以列向量形式表达坐标点，第三列以行向量形式表达坐标点。表 1 的第二列和第三列矩阵乘法互为转置关系。

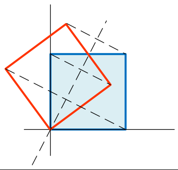
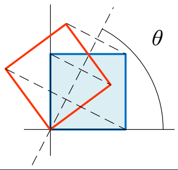
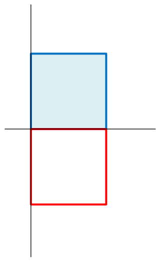
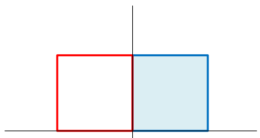
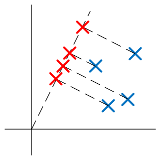
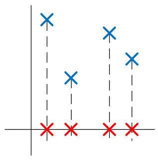
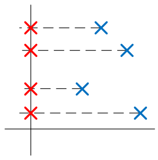
除了平移以外，表 1 中的几何变换都是从 $\mathbb{R}^2$ 到自身。准确来说，正交投影相当于降维，结果在 $\mathbb{R}^2$ 的子空间中。本章后续将展开讲解这些几何变换。

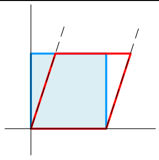
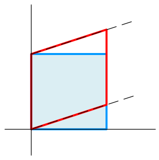
表 1 中所有操作统称几何变换，以便于将这些线性代数概念和本系列丛书《数学要素》中介绍的几何变换联系起来。这也正是本章题目叫“几何变换”的原因。

请大家注意，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换 (affine transformation)，对应的运算为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$。几何角度来看，仿射变换是一个向量空间的线性映射 ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$) 叠加平移 ($\boldsymbol{b}$)，变换结果在另外一个仿射空间。$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，平移导致原点位置发生变化。因此，线性变换可以看做是特殊的仿射变换。

表 1. 常用几何变换总结

几何变换	列向量坐标	行向量坐标
平移 (translation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$
等比例缩放 s 倍 (scaling) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$
非等比例缩放 (unequal scaling) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$
挤压 s 倍 (squeeze) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$
逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
顺时针旋转 θ (clockwise rotation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

关于通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}\,[\tau_1, \tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线镜像 (reflection) 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}$
关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像；等同于上例，切向量相当于 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$
关于横轴镜像对称 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
关于纵轴镜像对称 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}\,[\tau_1, \tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线投影 (projection) 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}$
向横轴投影 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
向纵轴投影 	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
沿水平方向剪切 (shear)，θ 为剪切角	$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \cot(\theta)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cot(\theta) & 1\end{bmatrix}$

		$\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cot(\theta) & 1\end{bmatrix}$
沿竖直方向剪切，θ 为剪切角 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cot(\theta) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \cot(\theta)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & \cot(\theta)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

8.2 平移：仿射变换，原点变动

用列向量表达坐标时，平移可以写成：

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\boldsymbol{t} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{t}$ 为平移向量：

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

(3) 代入 (2) 得到：

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+t_1\\ x_2+t_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

⚠ 再次强调，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换，因为原点发生改变。

图 5 所示为几个平移的例子。

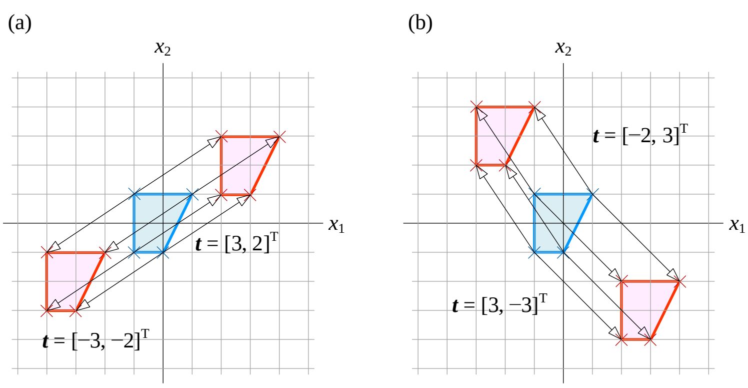


图 5. 平移

Bk4_Ch8_01.py 绘制图 5。

如图 6 所示，数据**中心化** (centralize)，也叫**去均值** (demean)，实际上就是一种平移。

对数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 去均值处理得到 $\boldsymbol{Y}$：

$$\boldsymbol{Y}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{X}_{n\times 2}\right) \tag{5}$$

数据矩阵中一般用行向量表达坐标点，上式用到了广播原则。行向量 $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$ 叫做 $\boldsymbol{X}$ 的质心 (centroid)，它的每个元素是数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 每一列数据的均值。去均值后，$\boldsymbol{Y}$ 的质心位于原点，也就是说 $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = [0, 0]$。

将 $\boldsymbol{Y}$ 写成 $[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]$，展开(5) 得到：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{E}\left(\boldsymbol{x}_1\right) & \mathrm{E}\left(\boldsymbol{x}_2\right) \end{bmatrix} \tag{6}$$

(6) 对应的统计运算表达为：

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - \mathrm{E}\left(X_1\right) \\ Y_2 = X_2 - \mathrm{E}\left(X_2\right) \end{cases} \tag{7}$$

其中，X_1、X_2、Y_1、Y_2 为随机变量。注意，随机变量字母大写、斜体。从几何角度来看，平移运算将数据质心移动到原点，如图 6 所示。

大家应该已经注意到了图 6 中的椭圆，通过高斯二元分布可以建立随机数和椭圆的联系。从几何视角来看，椭圆/椭球可以用来代表服从多元高斯分布的随机数。这是本系列丛书《概率统计》要重点讲解的内容。

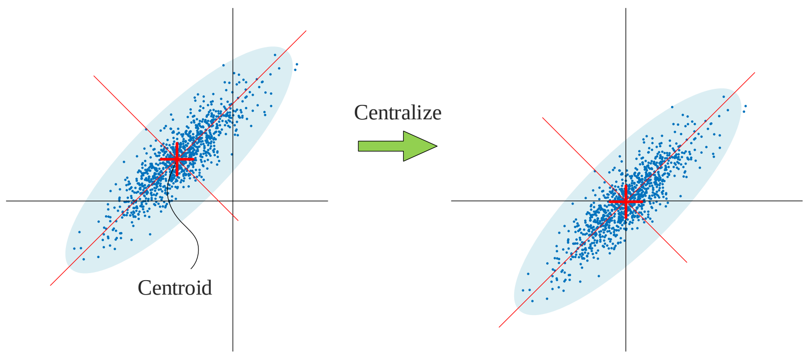


图 6. 数据中心化相当于平移

8.3 缩放：对角阵

等比例缩放 (equal scaling) 是指在缩放时各个维度采用相同缩放比例。举个例子，如图 7 所示，横、纵坐标等比例放大 2 倍，等比例缩放得到的图形和原图形相似。

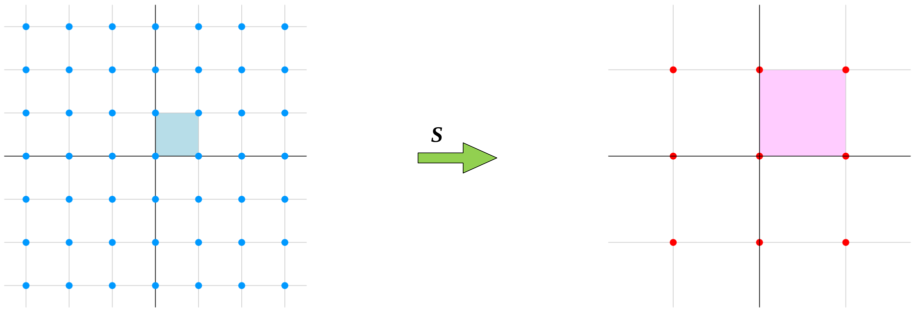


图 7. 等比例扩大 2 倍网格变化

等比例缩放对应的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

上式中，等比例缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为对角方阵，对角线元素相同。(8) 整理得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s x_1 \\ s x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

行列式值

计算 (8) 中转化矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的行列式值：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2 \tag{10}$$

可以发现对于二维空间，等比例缩放对应图形面积变化 s^2 倍。

非等比例缩放

图 8 所示为**非等比例缩放** (unequal scaling) 的例子。

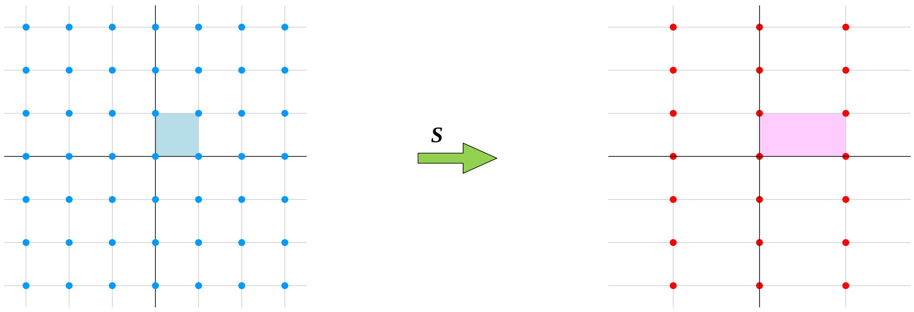


图 8. 非等比例缩放网格变化

非等比例缩放矩阵为：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

数据点为列向量时，非等比例缩放运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{S}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

数据点为行向量时，对 (12) 等式左右转置得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

请大家根据图 9 两幅子图中图形缩放前后横、纵轴坐标比例变化，来推断矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的值分别是多少。

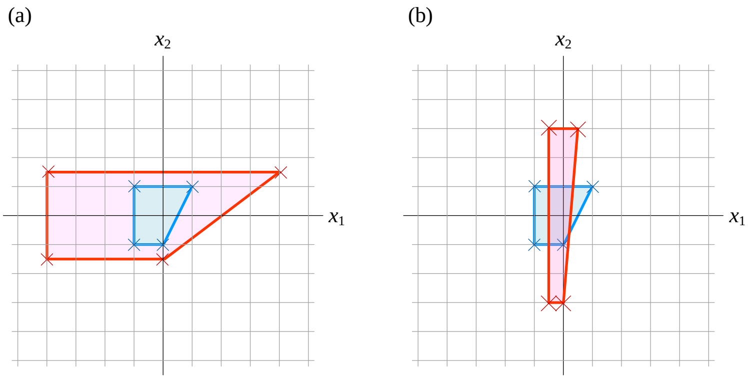


图 9. 非等比例缩放

逆矩阵

现在回过头来从几何变换角度再思考什么是矩阵的逆。

从线性变换角度，缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的逆 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 无非就是 $\boldsymbol{S}$ 对应的几何变换“逆操作”。如图 10 所示，缩放操作的逆运算就是将缩放后图形再还原成原图形。

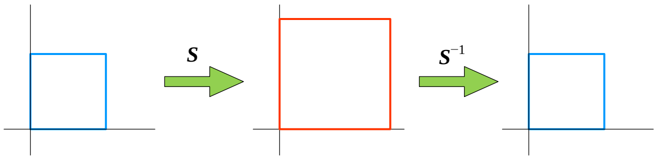


图 10. 缩放的逆运算

特别地，如果缩放时将图形“完全压扁”，比如：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

(14) 中矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的行列式值为 0，也就是说变换矩阵不可逆。如图 11 所示，(14) 造成的形变也是不可逆的。

这样，我们从几何图形变换角度，解释为什么只有行列式值不为 0 的方阵才存在逆矩阵。本章后文还会继续介绍哪些几何操作“可逆”。

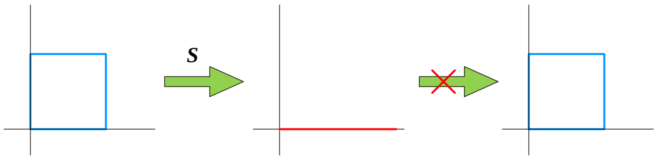


图 11. 不可逆地“压扁”

本节内容让我们联想到数据**标准化** (standardization) 这一概念。数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 标准化得到数据矩阵 $\boldsymbol{Z}$，对应运算如下：

$$\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \left(\boldsymbol{X}_{n\times 2} - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{X}_{n\times 2}\right)\right)\begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

实际上，数据标准化就相当于先平移，然后再用标准差进行比例缩放。每个特征采用的缩放系数为标准差的倒数。

将 $\boldsymbol{Z}$ 写成 $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]$，展开 (15) 得到：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{x}_1 - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_1)}{\sigma_1} & \dfrac{\boldsymbol{x}_2 - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_2)}{\sigma_2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

上式对应的统计运算则是：

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{X_1 - \mathrm{E}(X_1)}{\sigma_1} \\ Z_2 = \dfrac{X_2 - \mathrm{E}(X_2)}{\sigma_2} \end{cases} \tag{17}$$

图 6 所示为数据标准化过程。数据标准化并不改变相关性系数大小。

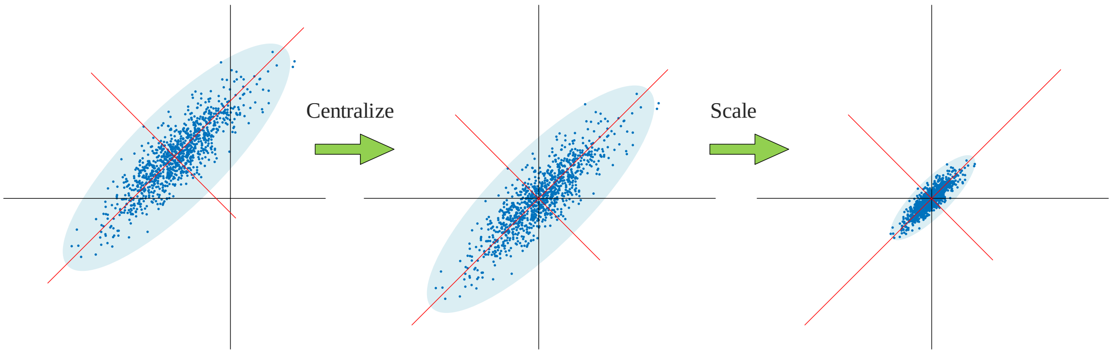


图 12. 数据标准化

挤压

还有一种特殊的缩放叫做**挤压** (squeeze)，比如竖直方向或水平方向压扁，但是面积保持不变。图 13 所示为挤压对应的网格变化。

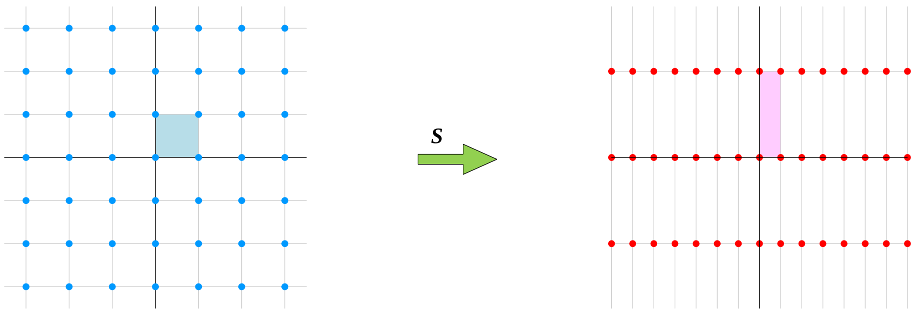


图 13. 挤压所对应的网格图变化

坐标为列向量时，挤压对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中，s 不为 0。计算上式方阵 $\boldsymbol{S}$ 行列式值，发现结果为 1，这说明挤压前后面积没有变化：

$$\det\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} = 1 \tag{19}$$

8.4 旋转：行列式值为 1

本节介绍旋转，如图 14 所示。旋转是非常重要的几何变换，我们会在本书后续特征值分解、奇异值分解等内容中看到旋转。

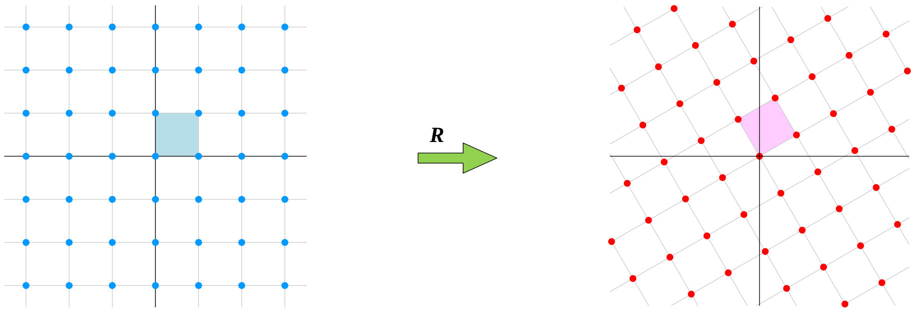


图 14. 旋转变换的网格

列向量坐标 $\boldsymbol{x}$ 逆时针旋转 θ 得到 $\boldsymbol{z}$：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{21}$$

(21) 代入 (20)，得到下式：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

记住上式并不难，下面介绍一个小技巧。用 $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ 分别乘 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 得到 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

几何变换过程如图 15 所示，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 逆时针旋转 θ 分别得到 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。图 15 告诉了我们 $\boldsymbol{R}$ 中哪些元素是 cos()、还是 sin()。此外，$\boldsymbol{R}$ 中唯一一个带负号的元素就是 $\boldsymbol{r}_2$ 的第一个元素，对应 $\boldsymbol{r}_2$ 横轴坐标。

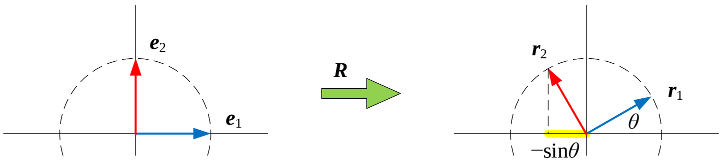


图 15. $\boldsymbol{R}$ 作用于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{R}$ 的行列式值为 1，也就是说旋转前后面积不变：

$$\det\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \tag{24}$$

对于数据矩阵情况，逆时针旋转 θ 的矩阵乘法如下：

$$\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{25}$$

(22) 和 (25) 两个等式的联系就是转置运算。图 16 所示为几何形状旋转操作的几个例子。

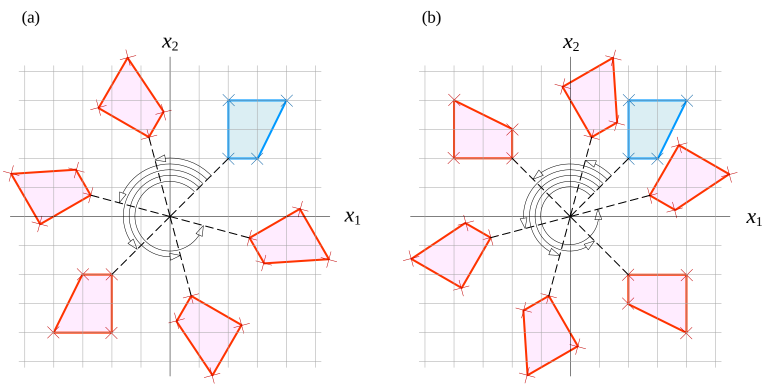


图 16. 旋转的两个例子

Bk4_Ch8_02.py 绘制图 16。

下面采用《数学要素》一册介绍的极坐标推导本节给出的旋转变换矩阵 $\boldsymbol{R}$。

图 17 给出的是向量 $\boldsymbol{a}$ 在极坐标系坐标为 (r, α)，在正交系中向量 $\boldsymbol{a}$ 的横纵坐标为：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{26}$$

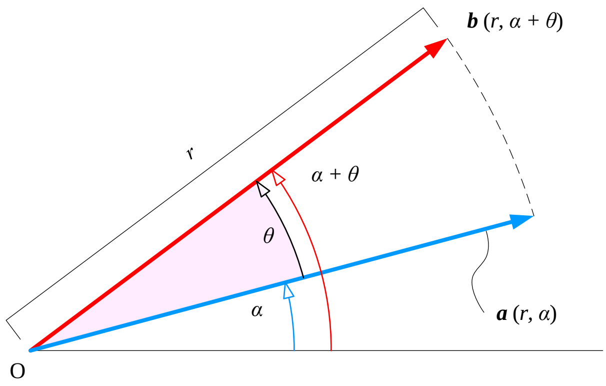


图 17. 极坐标中解释旋转

向量 $\boldsymbol{a}$ 逆时针旋转 θ 后，得到向量 $\boldsymbol{b}$。$\boldsymbol{b}$ 对应极坐标为 $(r, \alpha + \theta)$。向量 $\boldsymbol{b}$ 对应的横纵坐标为：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix} \tag{27}$$

(27) 展开得到：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{r\cos\alpha}_{x_1}\cos\theta - \underbrace{r\sin\alpha}_{x_2}\sin\theta \\ \underbrace{r\sin\alpha}_{x_2}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x_1}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{28}$$

将 (26) 中 x_1 和 x_2 代入 (28)，得到：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

逆矩阵

旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 求逆得到 $\boldsymbol{R}^{-1}$:

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \tag{30}$$

如图 18 所示，几何角度来看，$\boldsymbol{R}^{-1}$ 代表朝着相反方向旋转。

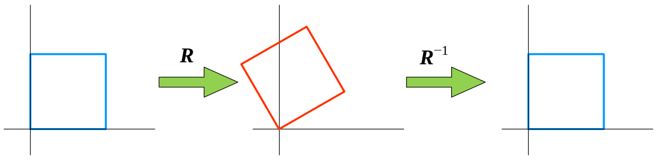


图 18. 旋转的逆运算

图 19 所示为从数据角度看旋转操作。数据完成中心化 (平移) 后，质心位于原点，即椭圆中心位于原点。然后，中心化数据按照特定的角度绕原点旋转后，让椭圆的长轴位于横轴。也就是说，旋转椭圆变成正椭圆。图 19 中正椭圆经过缩放后可以得到单位圆。单位圆意味着随机变量满足二元高斯分布 $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2\times 2})$。

图 19 中，“旋转 → 缩放”过程是**主成分分析** (principal component analysis, PCA) 的思路。反向来看，“缩放 → 旋转”将单位圆变成旋转椭圆的过程，代表利用满足 IID $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2\times 2})$ 二元随机数产生具有指定相关性系数、指定均方差的随机数。IID 指的是独立同分布 (Independent and Identically Distributed)。

这些内容，我们会在《概率统计》和《数据科学》两册书中深入讲解。

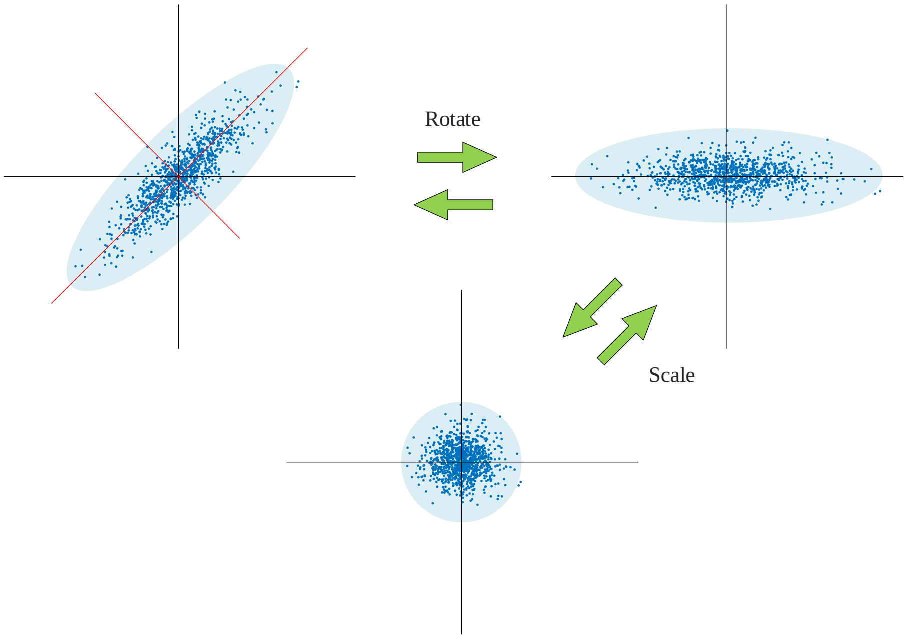


图 19. 数据视角下的旋转和缩放

矩阵乘法不满足交换律

本书第 4 章讲过，一般来说，矩阵乘法不满足交换律，即，

$$AB \neq BA \tag{31}$$

现在我们用图形的几何变换来说明这一点。

图 20 所示左侧方格，先经过 S 缩放，再通过 R 旋转得到右侧红色网格。图 20 红色网格显然不同于图 21。因为图 21 红色网格是先通过 R 旋转、再经过 S 缩放得到的。

再次强调，如果用列向量 $x = [x_1, x_2]^T$ 代表坐标点时，矩阵乘法 RSx 代表先缩放 (S)、后旋转 (R)；而矩阵乘法 SRx 代表先旋转 (R)、后缩放 (S)。

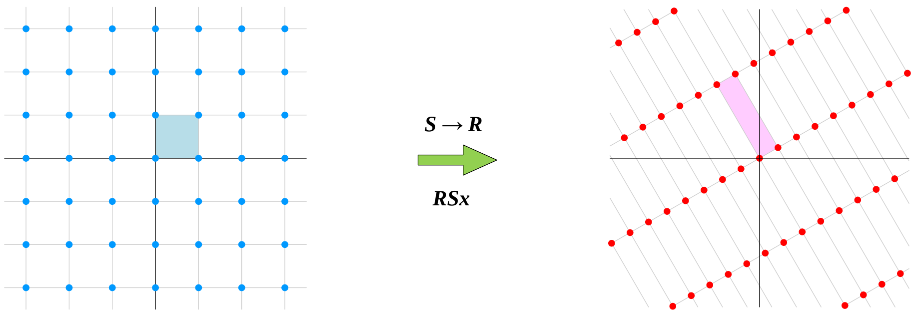


图 20. 先缩放再旋转

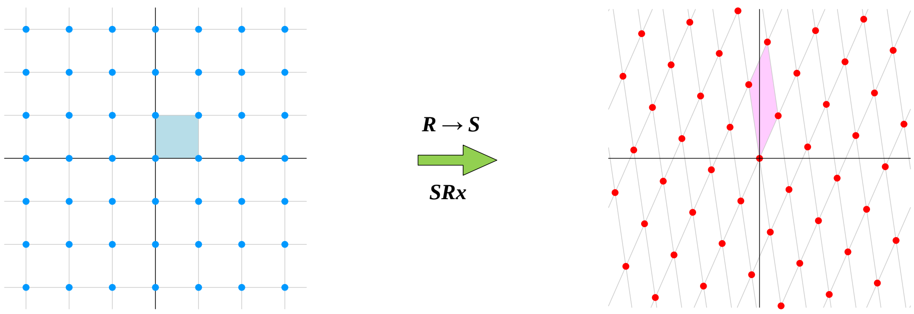


图 21. 先旋转再缩放

两个 2 × 2 缩放矩阵相乘满足交换律，因为它们都是对角阵。下式的 S_1 和 S_2 均为缩放矩阵，相乘时交换顺序不影响结果：

$$S_1S_2 = S_2S_1 \tag{32}$$

其中，缩放比例都不为 0。图 22 所示为，按不同顺序先后缩放最终结果相同。

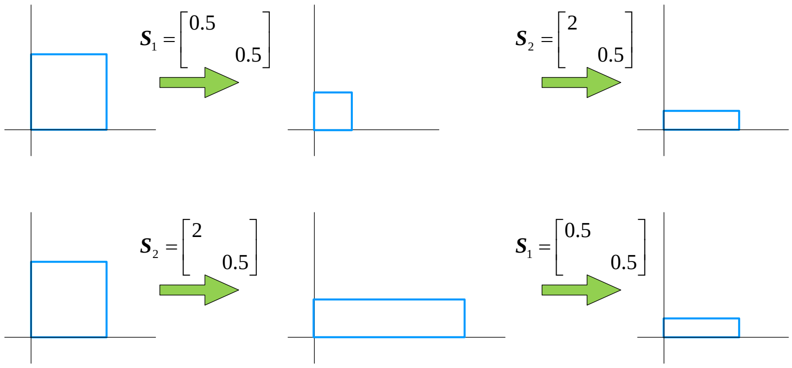


图 22. 两个 2 × 2 缩放矩阵连乘满足交换律

此外，两个形状相同的旋转矩阵相乘也满足交换律。令 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 分别为：

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{33}$$

根据三角恒等式，$\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 的乘积可以整理为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

同理，$\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_1$ 的乘积也可以整理为：

$$\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \tag{35}$$

图 23 给出的例子从几何角度说明上述规律。此外，请大家注意图中原点位置不变。

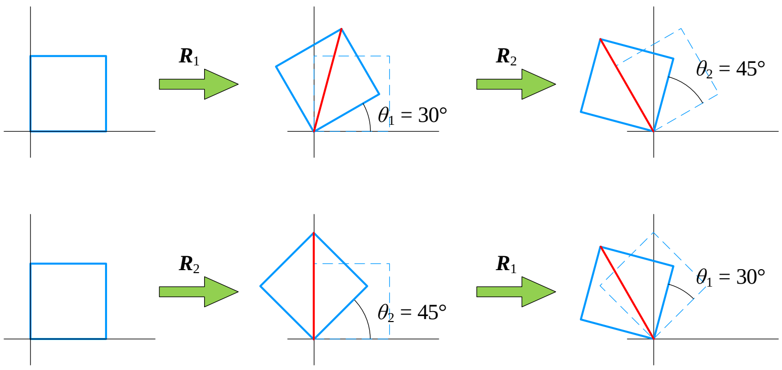


图 23. 两个 2 × 2 旋转矩阵连乘满足交换律

8.5 镜像：行列式值为负

本节介绍两种方式完成镜像计算的方法。

切向量

第一种镜像用切向量来完成。切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 具体为：

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

关于通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ 直线**镜像** (reflection) 的线性变换操作如下：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

对 $\boldsymbol{T}$ 求行列式值：

$$\det\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \right) = \frac{-\left(\tau_1^2 - \tau_2^2\right)^2 - 4\tau_1^2\tau_2^2}{\|\boldsymbol{\tau}\|^4} = \frac{-\left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^2}{\left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^2} = -1 \tag{38}$$

$\boldsymbol{T}$ 的行列式值为负数，这说明线性变换前后图形发生翻转。图 24 给出两个镜像的例子。

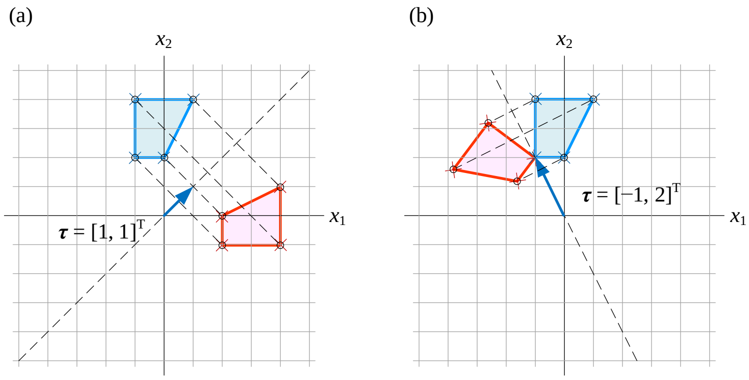


图 24. 两个镜像变换的例子

角度

第二种镜像通过角度定义。关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像，类比 (36)，直线的切向量相当于 $[\cos\theta, \sin\theta]^T$，完成镜像的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

实质上，(38) 和 (39) 完全等价。下一章将利用正交投影这个工具推导 (39)。

关于横纵轴镜像

关于横轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

关于纵轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

请大家自行计算以上两个转化矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式值。

8.6 投影：降维操作

本节从几何角度简单介绍投影。不做特殊说明的话，本书中提到的投影都是**正交投影** (orthogonal projection)。

切向量

给定某点的坐标为 (x_1, x_2)，向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ $[\tau_1, \tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线方向**投影** (projection)，投影点坐标 (z_1, z_2) 为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

正交投影的特点是，(x_1, x_2) 和 (z_1, z_2) 两点连线垂直于 $\boldsymbol{\tau}$。如图 25 所示，投影是一个降维的过程，平面网格“坍塌”成一条直线。

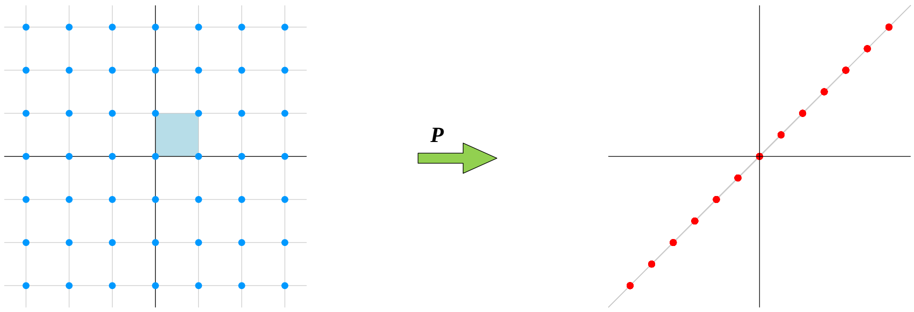


图 25. 投影网格

(42) 中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的行列式值为 0：

$$\det\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}\right)=0 \tag{43}$$

横、纵轴

向横轴投影，相当于将图形压扁到横轴：

$$\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \tag{44}$$

向纵轴投影对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \tag{45}$$

显然 (44) 和 (45) 中两个不同矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的行列式值都为 0。

秩

简单整理 $\boldsymbol{P}$ 得到：

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix}\tau_1\begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix} & \tau_2\begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix}\end{bmatrix} \tag{46}$$

我们发现，$\boldsymbol{P}$ 的列向量之间存在倍数关系，即 $\boldsymbol{P}$ 的列向量线性相关。也就是说，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 1，即 $\text{rank}(\boldsymbol{P}) = 1$。也请大家自行计算 (44) 和 (45) 中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的秩。

张量积

再进一步，我们发现 (46) 可以写成：

$$
\boldsymbol{P} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} & \tau_2\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}\right)@\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \tag{47}
$$

容易发现，上式中存在本书第 2 章讲过的向量**单位化** (vector normalization)。$\boldsymbol{\tau}$ 单位化得到单位向量 (unit vector) $\hat{\boldsymbol{\tau}}$：

$$
\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} \tag{48}
$$

(47) 可以进一步写成张量积的形式，具体如下：

$$
\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{49}
$$

大家可能已经疑惑了，正交投影怎么和张量积联系起来了？卖个关子，我们把这个问题留给下两章回答。

8.7 再谈行列式值：几何视角

有了本章之前的内容，本节总结行列式值的几何意义。

对于一个 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 代表某种线性变换，而 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值决定了变换前后面积缩放比例。

2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$。在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 单位向量变成 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$：

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_1} = \boldsymbol{a}_1, \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_2} = \boldsymbol{a}_2 \tag{50}
$$

本节前文提过以 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 为边构成的平行四边形为正方形，对应的面积为 1。以 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 为边构成的一个平行四边形对应的面积就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值。

行列值为正

举个例子，给定矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix} \tag{51}
$$

把 $\boldsymbol{A}$ 写成 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$，其中：

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} \tag{52}
$$

$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 向量经过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 线性变换分别得到 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{a_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{a_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}} \tag{53}$$

如图 26 所示，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 向量构成的正方形面积为 1。而 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 向量构成的平行四边形面积为 11，即对应 $|\boldsymbol{A}| = 11$，平面几何形状放大 11 倍。

反之，如果 $0 < |\boldsymbol{A}| < 1$，变换之后平面几何形状面积缩小。当然，行列式值可以为 0，也可以为负数。

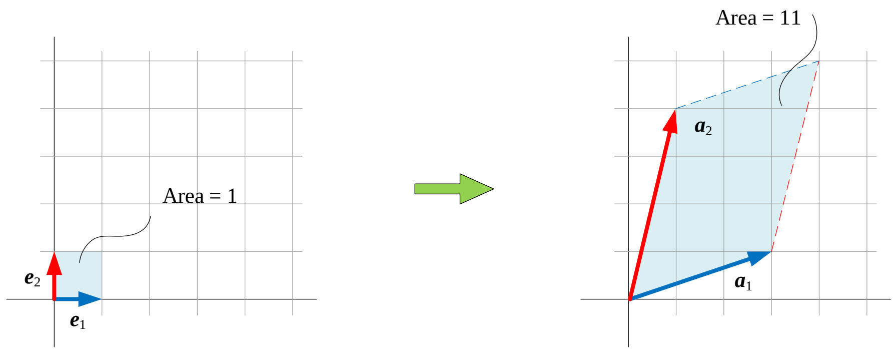


图 26. 行列式值为正

行列式值为 0

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行列式值为 0，从几何上来讲，$\boldsymbol{A}$ 中肯定含有“降维”变换成分。我们看下面这个例子，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 向量经过矩阵线性变换得到 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{a_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{a_2}{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}} \tag{54}$$

如图 27 所示，$\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 向量共线，夹角为 0°。$\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 构成图形的面积为 0，对应 $|\boldsymbol{A}| = 0$。

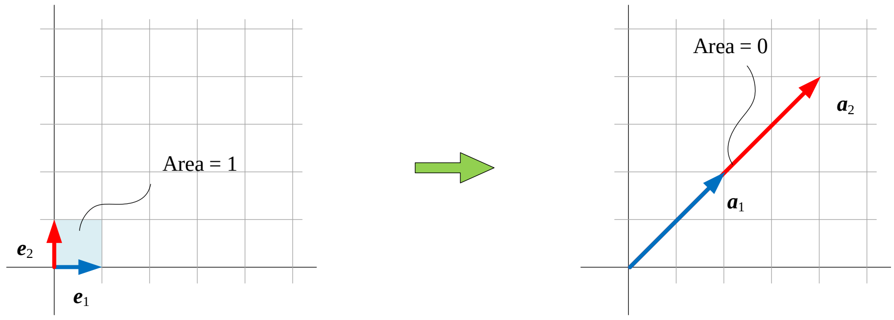


图 27. 行列式值为零

行列式值为负

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行列式值为负，几何上来看，图形翻转。如图 28 所示，几何变换前后，逆时针来看，蓝色箭头和红色箭头“先后次序”发生调转。图 28 中图形几何变换后面积则放大了 10 倍 (行列式值的绝对值为 10)。请大家根据图 28 中 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 两个向量确定 $\boldsymbol{A}$ 的具体值。

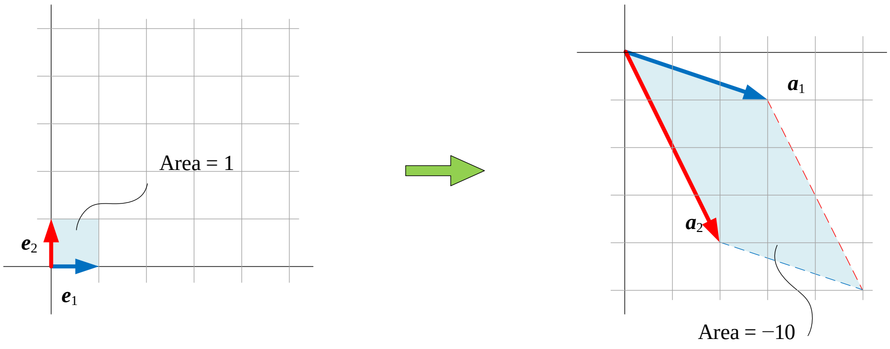
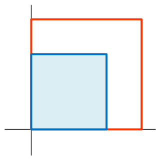
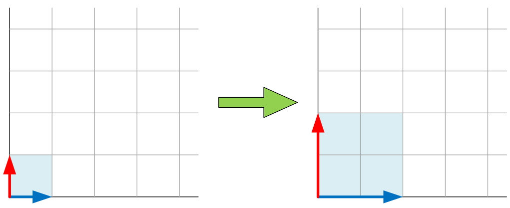
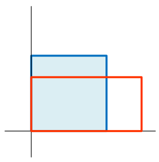
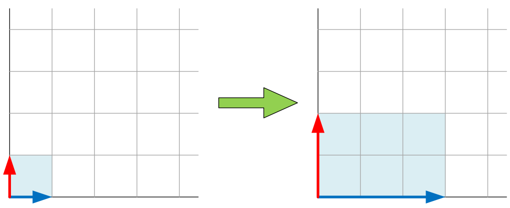
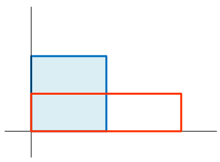
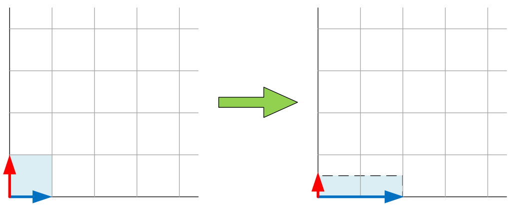
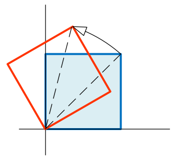
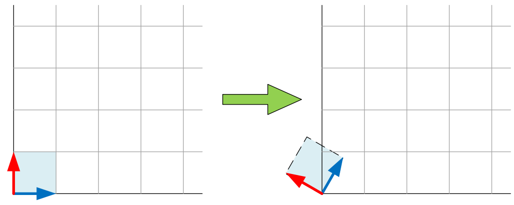
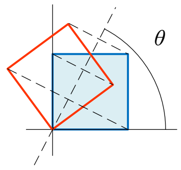
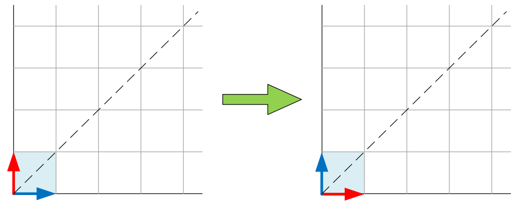
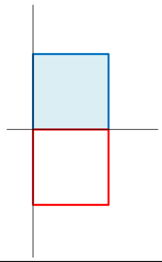
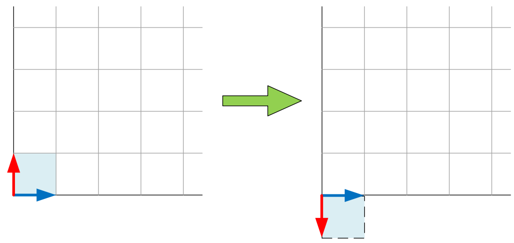
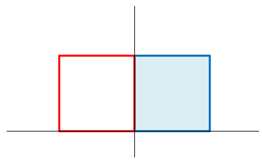
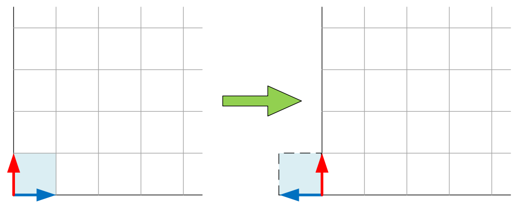
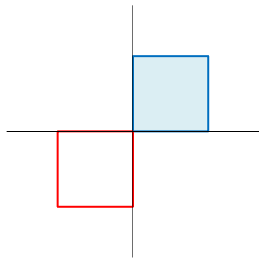
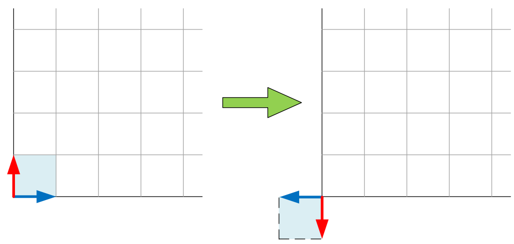
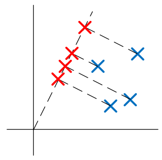
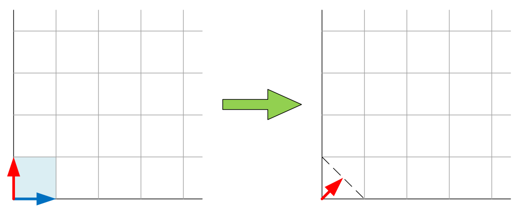


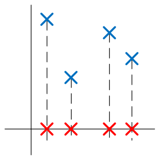
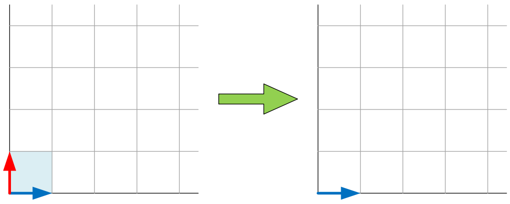
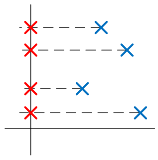
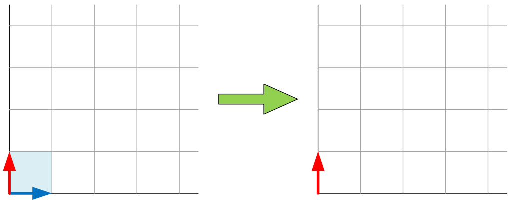
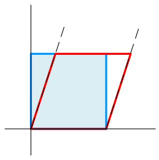
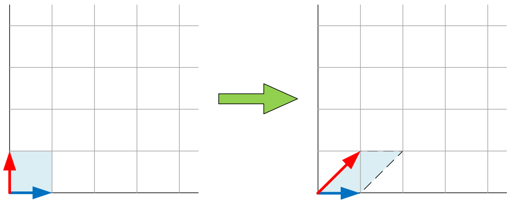
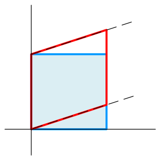
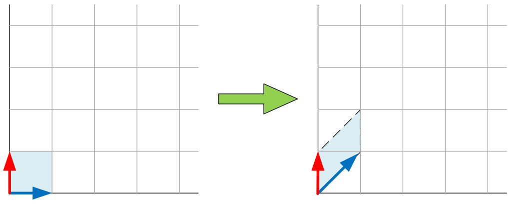
图 28. 行列式值为负

表 2 总结本章主要几何变换。表中还给出具体示例、行列式值、秩，并比较几何变换前后图形变化。

表 2. 本章主要几何变换示例

几何变换	示例、行列式值、秩	图形变化
等比例缩放 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=4,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	
非等比例缩放 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=6,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	
挤压 s 倍 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0.5\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=1,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	

逆时针旋转 θ 	$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 1, \quad \text{rank}(A) = 2$ 逆时针旋转 60°	
关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = -1, \quad \text{rank}(A) = 2$ 夹角为 45°	
关于横轴镜像对称 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = -1, \quad \text{rank}(A) = 2$	
关于纵轴镜像对称 	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = -1, \quad \text{rank}(A) = 2$	
关于原点对称 	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 1, \quad \text{rank}(A) = 2$	
向通过原点、切向量为 $\tau\,[\tau_1, \tau_2]^T$ 直线投影 	$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 0, \quad \text{rank}(A) = 1$	

向横轴投影 	$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=0,\quad \operatorname{rank}(A)=1$	
向纵轴投影 	$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=0,\quad \operatorname{rank}(A)=1$	
沿水平方向剪切 	$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=1,\quad \operatorname{rank}(A)=2$	
沿竖直方向剪切 	$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=1,\quad \operatorname{rank}(A)=2$	

本章讲了很多种几何变换，请大家格外关注平移、缩放、旋转和投影。我们将会在接下来的内容中反复使用这四种几何变换。

此外，本章在讲解几何变换的同时，还和大家从几何角度回顾并探讨了矩阵可逆性、矩阵乘法不满足交换律、秩、行列式值等线性代数概念。请大家特别注意行列式值的几何视角，我们将在特征值分解中再进一步探讨。

用几何视角理解线性代数概念，是学习线性代数的唯一“捷径”。此外，数据视角会让大家看到线性代数的实用性，并直接和编程联结起来。

希望大家记住：

有数据的地方，就有向量！

有向量的地方，就有几何！

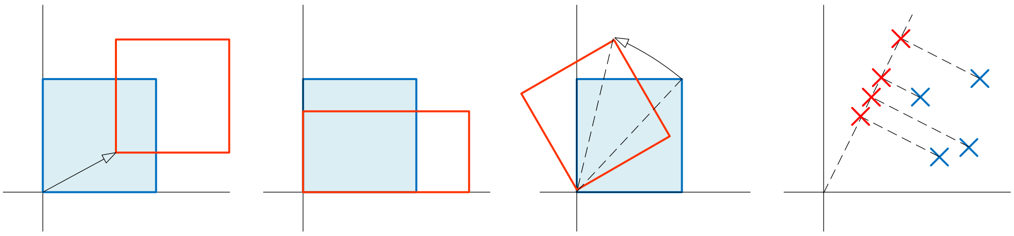


图 29. 总结本章重要内容的四副图