7 Vector Space 向量空间

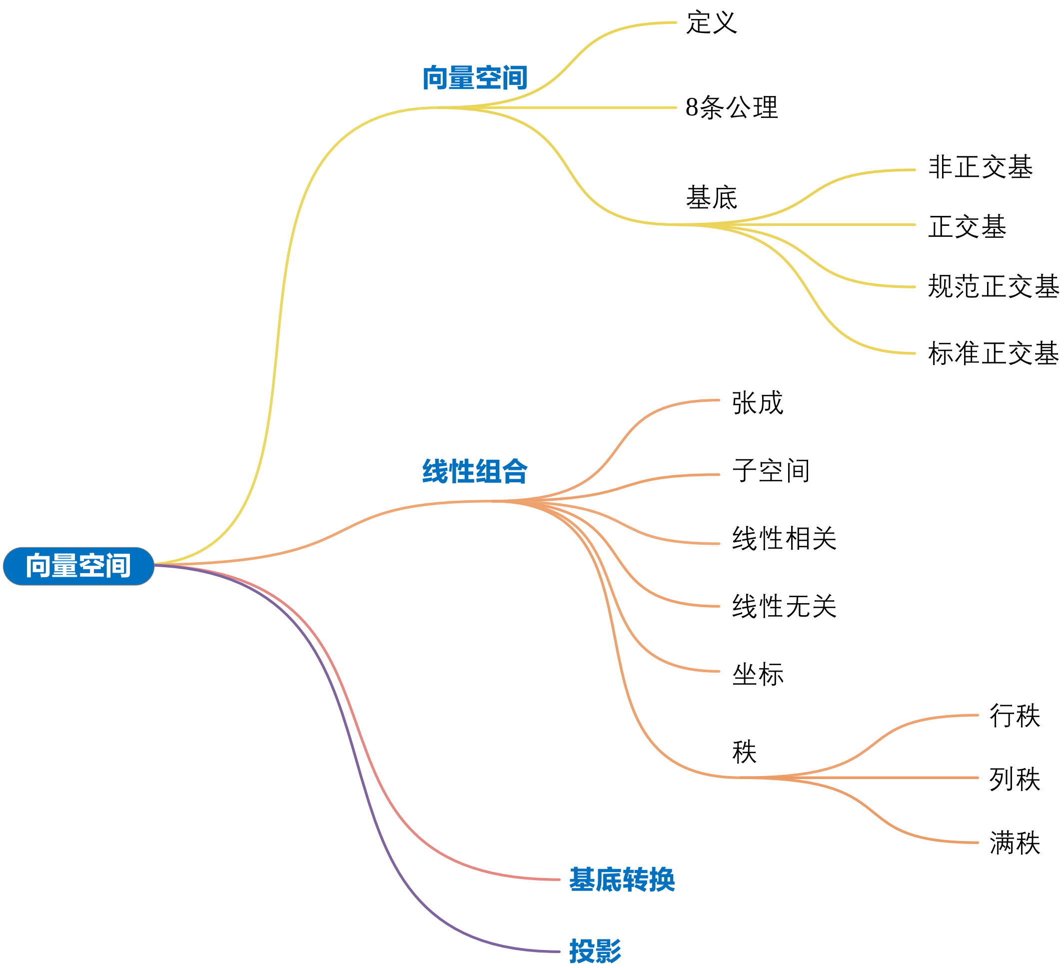
用三原色给向量空间涂颜色

数学，是神灵创造宇宙的语言。

Mathematics is the language in which God has written the universe.

—— 伽利略·伽利莱 (Galilei Galileo) | 意大利物理学家、数学家及哲学家 | 1564 ~ 1642

◄ numpy.linalg.matrix_rank() 计算矩阵的秩


向量空间
向量空间
定义
8条公理
基底
非正交基
正交基
规范正交基
标准正交基
线性组合
张成
子空间
线性相关
线性无关
坐标
秩
行秩
列秩
满秩
基底转换
投影

7.1 向量空间：从直角坐标系说起

从笛卡尔坐标系说起

向量空间 (vector space) 是笛卡尔坐标系的自然延伸。图 1 给出二维和三维直角坐标系，在向量空间中，它俩就是最基本的欧几里得向量空间 $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$)。

⚠ 注意，本节很长，可能有点枯燥！但是，请坚持看完这一节，色彩斑斓的内容在本节之后。

在这两个向量空间中，我们可以完成向量加减、标量乘法等一系列运算。

在平面 $\mathbb{R}^2$ 上，坐标点 (x_1, x_2) 无死角全面覆盖平面上所有点。这就是说，从向量角度来讲，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ 代表平面 $\mathbb{R}^2$ 上所有的向量。

类似地，在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ 代表三维空间中所有的向量。

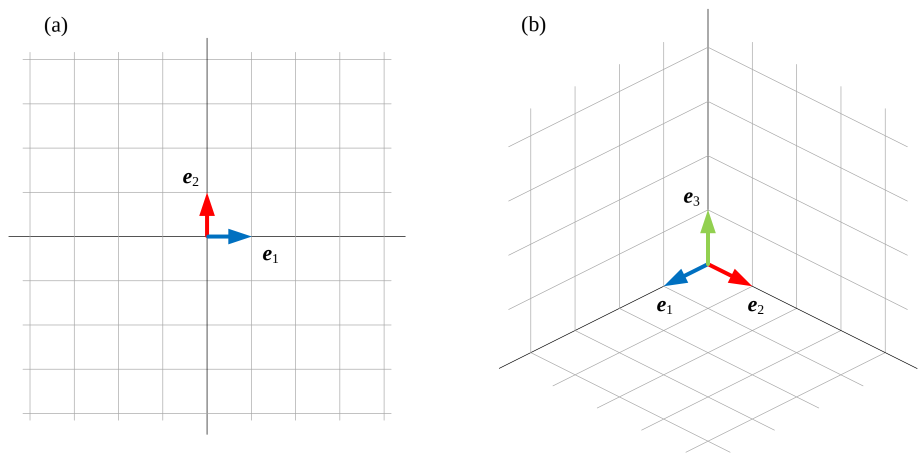


图 1. 二维和三维直角坐标系

向量空间

我们下面看一下向量空间的确切定义。

给定域 F，F 上的向量空间 V 是一个集合。集合 V 非空，且对于加法和标量乘法运算封闭。这意味着，对于 V 中的每一对元素 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，可以唯一对应 V 中的一个元素 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$；而且，对于 V 中的每一个元素 $\boldsymbol{v}$ 和任意一个标量 k，可以唯一对应 V 中元素 $k\boldsymbol{v}$。

如果 V 连同上述加法运算和标量乘法运算满足如下公理，则称 V 为向量空间。

公理 1：**向量加法交换律** (commutativity of vector addition)；对于 V 中任何 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，满足：

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1}$$

公理 2：**向量加法结合律** (associativity of vector addition)；对于 V 中任何 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，满足：

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \tag{2}$$

公理 3：**向量加法恒等元** (addictive identity)；V 中存在零向量 $\boldsymbol{0}$，使得对于任意 V 中元素 $\boldsymbol{v}$，下式成立：

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \tag{3}$$

公理 4：**存在向量加法逆元素** (existence of additive inverse)；对于每一个 V 中元素 $\boldsymbol{v}$，选在 V 中的另外一个元素$-\boldsymbol{v}$，满足：

$$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

公理 5：**标量乘法对向量加法的分配率** (distributivity of vector sums)；对于任意标量 k，V 中元素 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 满足：

$$k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v} \tag{5}$$

公理 6：**标量乘法对域加法的分配率** (distributivity of scalar sum)；对于任意标量 k 和 t，以及 V 中任意元素 $\boldsymbol{v}$，满足：

$$(k+t)\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{v} \tag{6}$$

公理 7：**标量乘法与标量的域乘法相容** (associativity of scalar multiplication)；对于任意标量 k 和 t，以及 V 中任意元素 $\boldsymbol{v}$，满足：

$$(kt)\boldsymbol{v}=k(t\boldsymbol{v}) \tag{7}$$

公理 8：**标量乘法的单位元** (scalar multiplication identity)；V 中任意元素 $\boldsymbol{v}$，满足：

$$1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v} \tag{8}$$

注意，以上公理不需要大家格外记忆！

线性组合

令 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ … $\boldsymbol{v}_D$ 为向量空间 V 中的向量。下式被称作向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ … $\boldsymbol{v}_D$ 的**线性组合** (linear combination)。

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\alpha_D\boldsymbol{v}_D \tag{9}$$

其中，α_1、α_2 … α_D 均为实数。图 2 可视化 (9) 对应的线性组合过程。

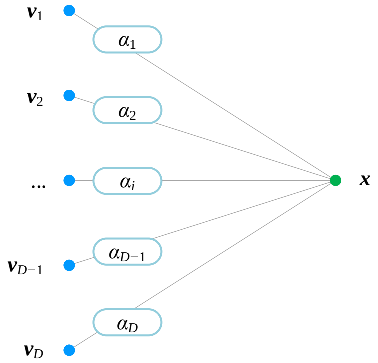


图 2. 线性组合

张成

v_1、v_2 … v_D 所有线性组合的集合称作 v_1、v_2 … v_D 的**张成** (span)，记做 span(v_1, v_2 … v_D)。

线性相关和线性无关

给定向量组 $V = [v_1, v_2, \dots, v_D]$，如果存在不全为零 α_1、α_2、…、α_D 使得下式成立。

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_D v_D = \mathbf{0} \tag{10}$$

则称向量组 V **线性相关** (linear dependence，形容词组为 linearly dependent)；否则，V **线性无关** (linear independence，形容词为 linearly independent)。

图 3 在平面上解释了线性相关和线性无关。

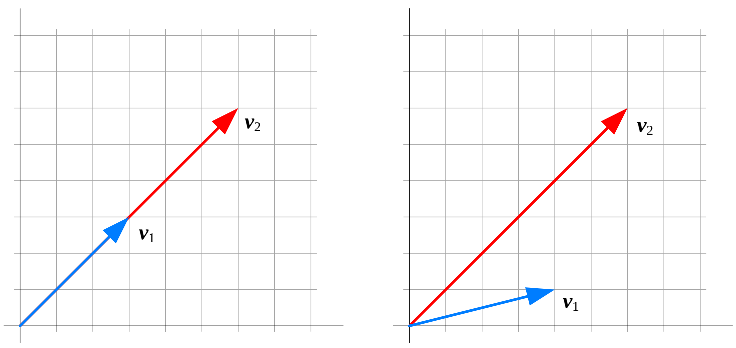


图 3. 平面上解释线性相关与线性无关

极大无关组、秩

一个矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的**列秩** (column rank) 是 $\boldsymbol{X}$ 的线性无关的列向量数量最大值。类似地，**行秩** (row rank) 是 $\boldsymbol{X}$ 的线性无关的行向量数量最大值。

以列秩为例，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 可以写成一组列向量：

$$\boldsymbol{X}_{n\times D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_D \end{bmatrix} \tag{11}$$

对于 $V = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_D\}$，如果这些列向量线性相关，就总可以找出一个冗余向量，把它剔除。如此往复，不断剔除冗余向量，直到不再有冗余向量为止，得到 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ 线性无关。则称 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ 为 $F = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_D\}$ 的**极大线性无关组** (maximal linearly independent subset)。

⚠ 注意，极大线性无关组不唯一。

极大线性无关组的元素数量 r 为 $V = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_D\}$ 的秩，也称为 V 的维数或维度。

矩阵的列秩和行秩总是相等的，因此就叫它们为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩 (rank)，记做 $\text{rank}(\boldsymbol{X})$。$\text{rank}(\boldsymbol{X})$ 小于等于 $\min(D, n)$，即 $\text{rank}(\boldsymbol{X}) \leq \min(D, n)$；对于“细高型”数据矩阵，$\text{rank}(\boldsymbol{X}) \leq D$。

图 4 所示为当 $\text{rank}(\boldsymbol{X})$ 的秩取不同值时，$\text{span}(\boldsymbol{X})$ 所代表的空间。当然，向量空间沿着子图中给定的直线、平面、空间无限延伸。

特别地，若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的列数为 D，当 $\text{rank}(\boldsymbol{X}) = D$ 时，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 列满秩，列向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_D$ 线性无关。

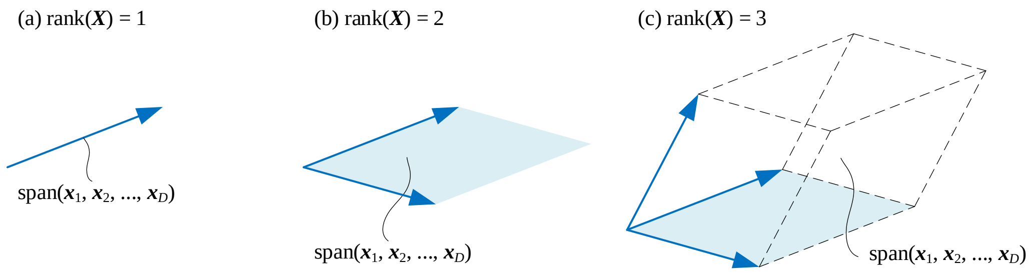


图 4. $\text{rank}(\boldsymbol{X})$ 的秩和 $\text{span}(\boldsymbol{X})$ 的空间

此外，不要被矩阵的形状迷惑，如下四个矩阵的秩都是 1：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{10\times 1}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{10\times 4}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

`numpy.linalg.matrix_rank()` 计算矩阵的秩。

如果乘积 $\boldsymbol{AB}$ 存在，$\boldsymbol{AB}$ 的秩满足：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \min\left(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\right) \tag{13}$$

⚠ 请大家注意，仅当方阵 $\boldsymbol{A}_{D\times D}$ 满秩，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = D$，$\boldsymbol{A}$ 可逆。

对于实数矩阵 $\boldsymbol{X}$，以下几个矩阵的秩相等：

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T\right) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{X}^T\right) \tag{14}$$

基底、基底向量

一个向量空间 V 的**基底向量** (basis vector) 指 V 中线性无关的 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ ... $\boldsymbol{v}_D$，它们**张成** (span) 向量空间 V，即 $V = \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_D)$。

而 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_D]$ 叫做 $\boldsymbol{V}$ 的**基底** (vector basis 或 basis)。向量空间 V 中的每一个向量都可以唯一地表示成基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_D]$ 中基底向量的线性组合。

白话说，基底就像是地图上的经度和纬度，起到定位作用。有了经纬度之后，地面上的任意一点都有唯一坐标。

这就是本节最开始说的，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 就是平面 $\mathbb{R}^2$ 一组基底，平面 $\mathbb{R}^2$ 上每一个向量都可以唯一地表达成 $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$。而 (x_1, x_2) 就是在基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 下的坐标。

⚠ 注意区别$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 和 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$。本书会用 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 表达有序基，也就是向量基底元素按“先 $\boldsymbol{e}_1$ 后 $\boldsymbol{e}_2$”顺序排列。而 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 代表集合，集合中基底向量不存在顺序。此外，有序基 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 构造得到矩阵 $\boldsymbol{E}$。不做特殊说明，本书中基底都默认是有序基。

维数

向量空间的**维数** (dimension) 是基底中基底向量的个数，本书采用的维数记号为 dim()。

显然，零向量 $\boldsymbol{0}$ 的张成的空间 $\operatorname{span}(\boldsymbol{0})$ 维数为 0。

图 1 (a) 中 $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$，即 $\mathbb{R}^2$ 维数 $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$，而 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 的秩也是 2。

图 1 (b) 中 $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$，即 $\mathbb{R}^3$ 维数 $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 的秩为 3。

下面，为了理解维数这个概念，我们多看几组例子。

图 5 所示为 6 个维数为 1 的向量空间。从几何角度来看，这些向量空间都是直线。请大家特别注意，这些直线都经过原点 $\boldsymbol{0}$。也就是说 $\boldsymbol{0}$ 分别在这些向量空间中。

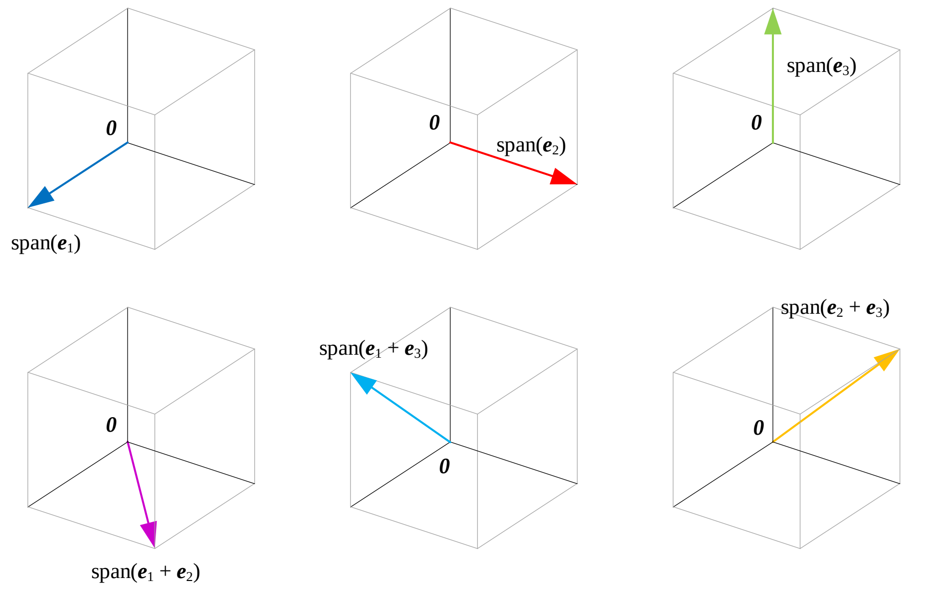


图 5. 维数为 1 的向量空间

图 6 所示为线性无关的向量张起的维数为 2 的向量空间。也就是说，图 6 每幅子图中的两个向量分别是该空间的基底向量。再次强调，基底中的基底向量必须线性无关。

从集合角度来看，$\text{span}(\boldsymbol{e}_1) \subset \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$，$\text{span}(\boldsymbol{e}_2) \subset \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$。

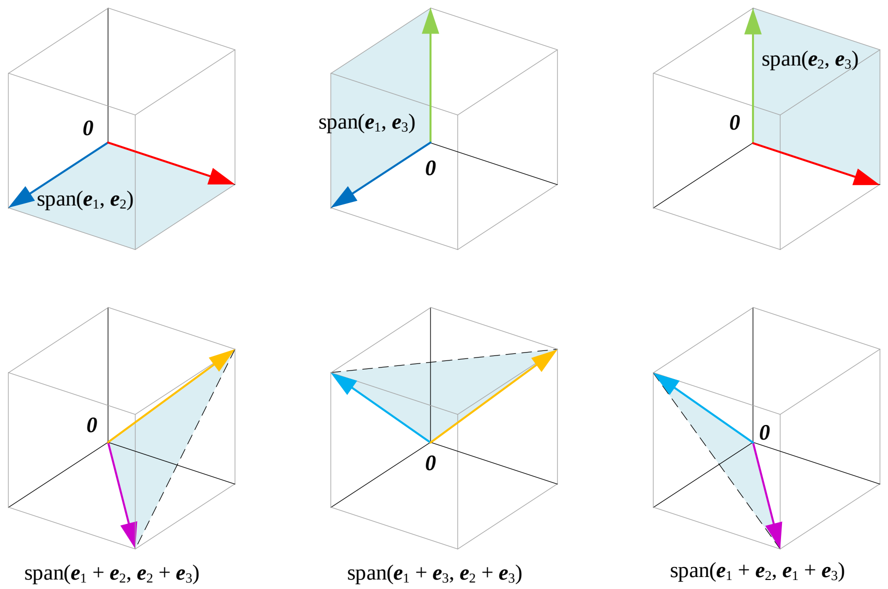


图 6. 维数为 2 的向量空间，张成空间的基底向量线性无关

图 7 所示为线性相关的向量张起的维数为 2 的空间。

举个例子，$\text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ 张起的空间维数为 2，显然 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ 中向量线性相关，因此 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ 不能叫做基底。进一步分析可以知道 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ 的秩为 2。

基底中的基底向量必须线性无关。剔除掉冗余向量后，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ 三组中的任意一组向量都线性无关，因此它们三者都可以选做 $\text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ 空间的基底。

不同的是，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 中基底向量正交，但是 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ 这两个基底中的向量并非正交。也就是构成向量空间的基底向量可以正交，也可以非正交，这是下文马上要探讨的内容。

相信大家已经很清楚，基底中的向量之间必须线性无关，而用 span() 张成空间的向量可以线性相关，比如 $\text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$。在基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 中，任意一点的坐标唯一。但是，在 $\text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ 中，任意一点的坐标不定。

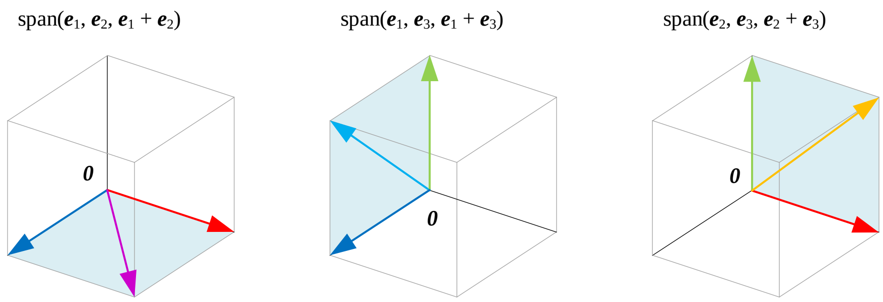


图 7. 维数为 2 的向量空间，张成空间的向量线性相关

图 8 所示为线性无关的向量张起维数为 3 的空间。注意这些空间都和 $\mathbb{R}^3$ 等价。

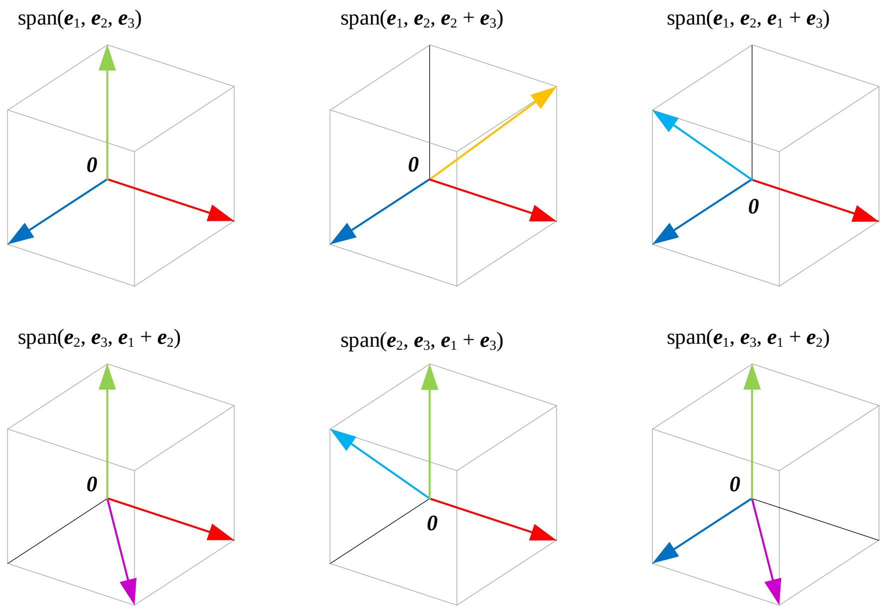


图 8. 维数为 3 的向量空间

过原点、仿射空间

“过原点”这一点对于向量空间极为重要。图 5 所示的几个一维空间 (直线) 显然过原点；也就是说，原点 $\boldsymbol{0}$ 在向量空间中。几何角度来看，图 6、图 7 所示的维数为 2 的空间是平面，这些平面都过原点。原点 $\boldsymbol{0}$ 也在图 8 所示的维数为 3 的空间中。

向量空间平移后得到的空间叫做**仿射空间** (affine space)，如图 9 所示的三个例子。图 9 所示的三个仿射空间显然都不过原点。下一章，我们将介绍几何变换，大家会接触到**仿射变换** (affine transformation)。

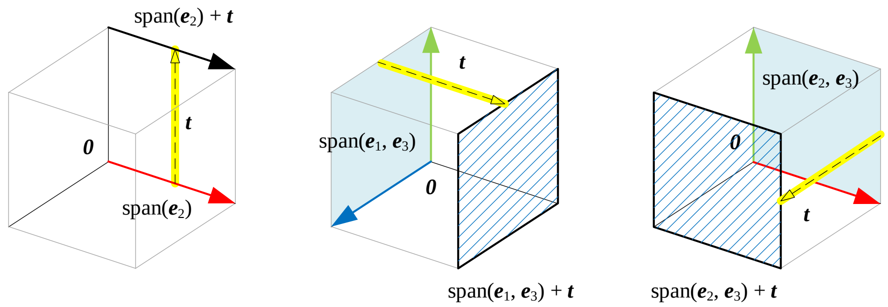


图 9. 向量空间平移得到仿射空间

基底选择并不唯一

$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 只是平面 $\mathbb{R}^2$ 无数基底中的一个。大家还记得本书前文给出图 10 的这幅图吗？

$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$、$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 都是平面 $\mathbb{R}^2$ 基底！也就是说 $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \text{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \text{span}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$。

如图 10 所示，平面 $\mathbb{R}^2$ 上的向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$、$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 这三组基底中都有各自的唯一坐标。

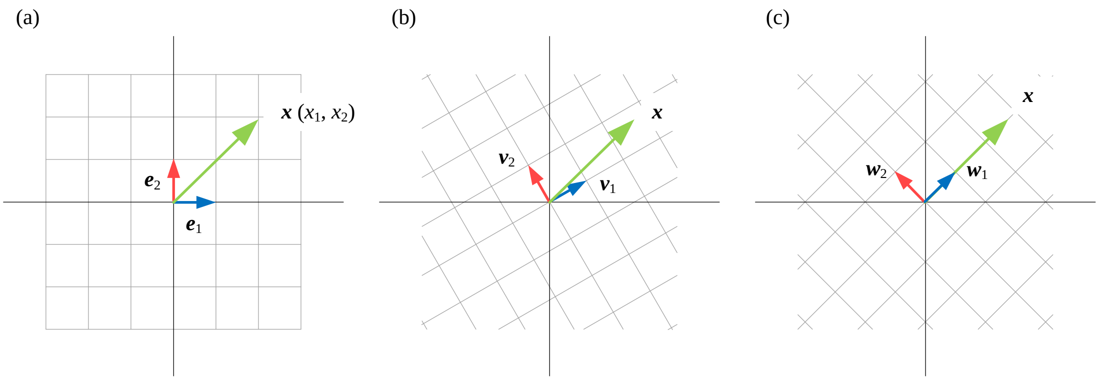


图 10. 向量 $\boldsymbol{x}$ 在三个不同的正交直角坐标系中位置

正交基、规范正交基、标准正交基

大家可能早已注意到图 10 中，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$、$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 的每个基底向量都是单位向量，即 $\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = \|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{w}_1\| = \|\boldsymbol{w}_2\| = 1$。

且每组基底内基底向量相互正交，即 $\boldsymbol{e}_1$ 垂直 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{v}_1$ 垂直 $\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{w}_1$ 垂直 $\boldsymbol{w}_2$。本书中，基底中基底向量若两两正交，该基底叫**正交基** (orthogonal basis)。

如果正交基中每个基底向量的模都为 1，则称该基底为**规范正交基** (orthonormal basis)。图 10 中 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$、$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$、$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 三组基底都是规范正交基。

张成平面 $\mathbb{R}^2$ 的规范正交基有无数组。它们之间存在旋转关系，也就是说 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 绕原点旋转一定角度就可以得到 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 或 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$。

更特殊的是，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 叫做平面 $\mathbb{R}^2$ 的**标准正交基** (standard orthonormal basis)，或称**标准基** (standard basis)。“标准”这个字眼给了 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$，是因为用这个基底表示平面 $\mathbb{R}^2$ 最为自然。$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 也是平面直角坐标系最普遍的参考系。

显然，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_D]$ 是 $\mathbb{R}^D$ 的标准正交基。

非正交基

平面 $\mathbb{R}^2$ 上，任何两个不平行的非零向量都可以构成平面上的一个基底。如果基底中的基底向量之间两两并非都正交，这样的基底叫做**非正交基** (non-orthogonal basis)。

图 11 所示为两组非正交基底，它们也都张起 $\mathbb{R}^2$ 平面，即 $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \text{span}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$。

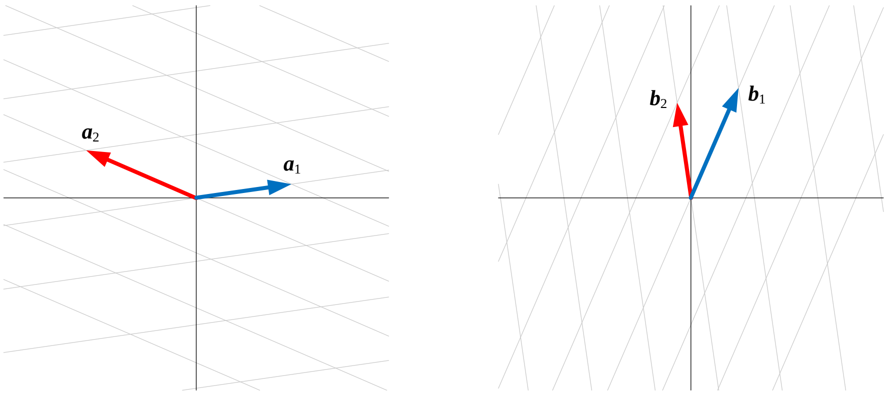


图 11. 二维平面的两个基底，非正交

图 12 总结了几种基底之间的关系。

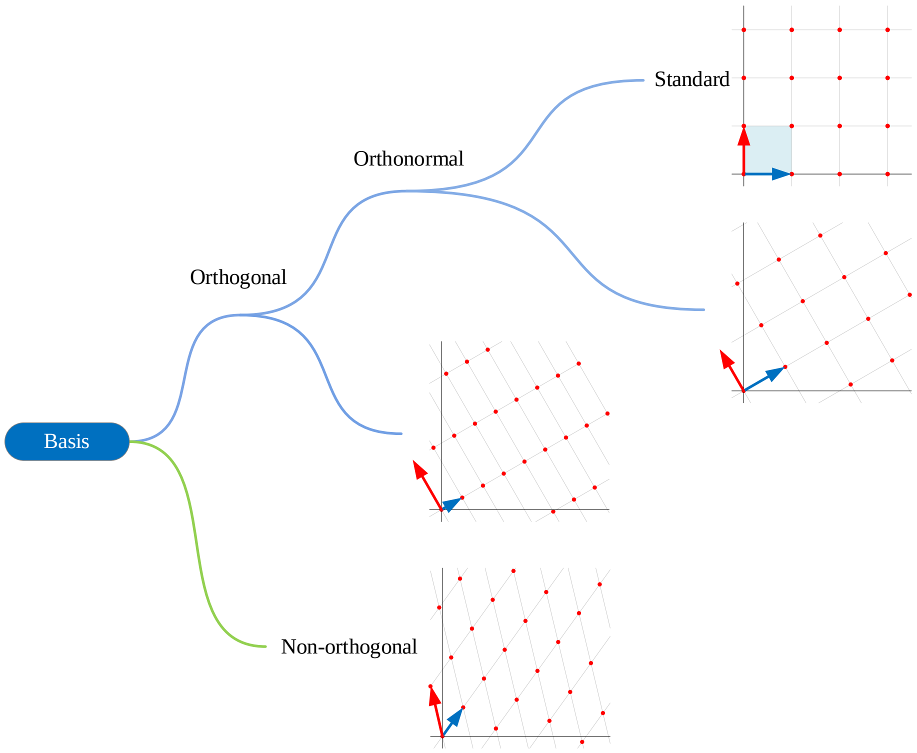


图 12. 几种基底之间的关系

基底转换

基底转换 (change of basis) 完成不同基底之间变换，而标准正交基是常用的桥梁。

举个例子，如图 13 所示，给定如下平面直角坐标系中的一个向量 $\boldsymbol{a}$，将其写成 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \tag{15}$$

(2, 2) 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 中的坐标。

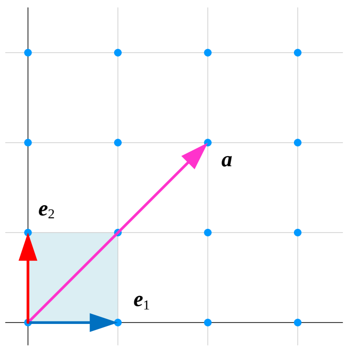


图 13. 平面直角坐标系中的一个向量 $\boldsymbol{a}$

图 14 给出的是不同基底中表达的同一个向量 $\boldsymbol{a}$。

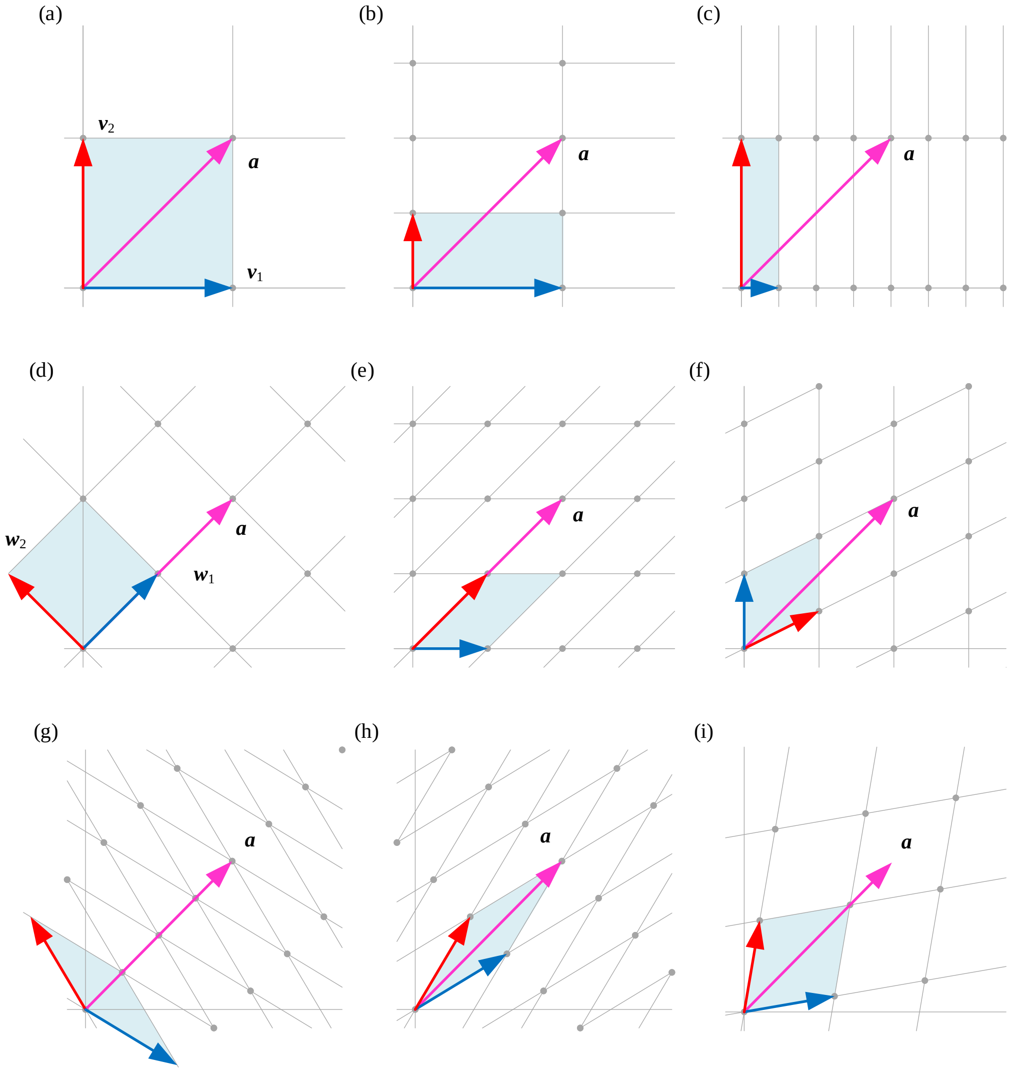


图 14. 不同基底表达同一个向量 $\boldsymbol{a}$

在图 13 这个正交标准坐标系中，任意一个向量 $\boldsymbol{x}$ 可以写成：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \boldsymbol{E}x \tag{16}$$

其中，(x_1, x_2) 代表向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 中的坐标值。

假设在平面上，另外一组基底为 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$，而在这个基底中向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标为 (z_1, z_2)，$\boldsymbol{x}$ 可以写成 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{x} = z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

令，

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(17) 可以写成：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{z} \tag{19}$$

$\boldsymbol{z} = [z_1, z_2]^{\mathrm{T}}$ 可以写成：

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{20}$$

上式中，2×2 矩阵 $\boldsymbol{V}$ 满秩，因此 $\boldsymbol{V}$ 可逆。

以图 14 (a) 为例，$\boldsymbol{V}$ 为：

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在图 14 (a) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 这个基底下的坐标为：

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

再举个例子，图 14 (d) 中 $\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 具体数值为：

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 可以写成：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \tag{24}$$

其中，$\boldsymbol{y}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 中坐标。

矩阵 $\boldsymbol{W}$ 也可逆，通过下式计算得到向量 $\boldsymbol{x}$ 在图 14 (d) $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 基底中的坐标：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

联立 (19) 和 (24)，得到：

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \tag{26}$$

因此，从坐标 $\boldsymbol{z}$ 到坐标 $\boldsymbol{y}$ 的转换，可以通过下式完成：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{z} \tag{27}$$

代入具体值，得到：

$$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\-0.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} \tag{28}$$

我们用 Streamlit 制作了一个应用，绘制图 14 不同“平行且等距网格”。大家可以改变矩阵 $\boldsymbol{A}$ 元素值，并让 $\boldsymbol{A}$ 作用于 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$。$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 构造的是“方格”，而 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 构造的就是“平行且等距网格”。请大家参考 Streamlit_Bk4_Ch7_01.py。

回顾“猪引发的投影问题”

本系列丛书《数学要素》鸡兔同笼三步曲讲过向量向一个平面投影的例子。

如图 15 所示，农夫的需求 $\boldsymbol{y}$ 是 10 只兔、10 只鸡、5 只猪。$\boldsymbol{w}_1$ 代表套餐 A —— 3 鸡 1 兔；$\boldsymbol{w}_2$ 代表套餐 B —— 1 鸡 2 兔。$\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 张起 A-B 套餐”平面为 $H = \text{span}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$。而 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 便是 H 的基底。请大家自行验证基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 为非正交基。

图 15 中，$\boldsymbol{y}$ 向 H 投影结果为向量 $\boldsymbol{a}$。

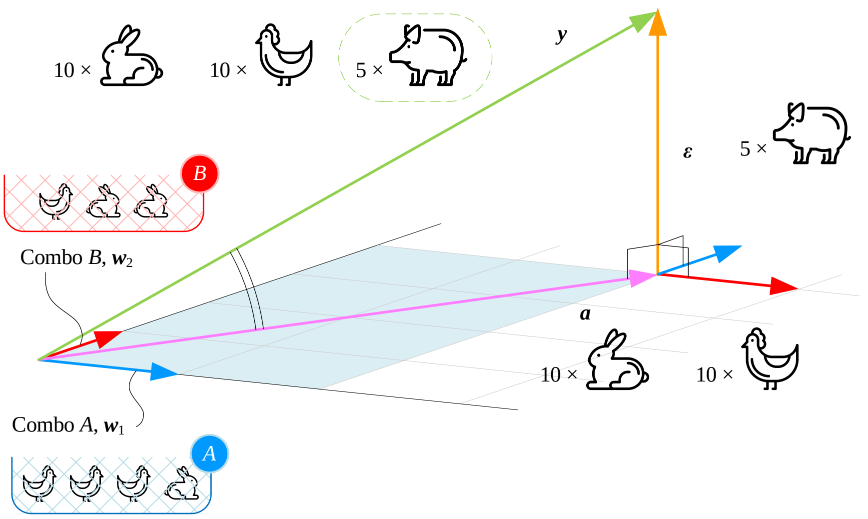


图 15. 农夫的需求和小贩提供的“A-B 套餐”平面存在 5 只猪的距离，来自本系列丛书《数学要素》

在二维平面 H 内，$\boldsymbol{a}$ 可以写成 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 \tag{29}$$

(α_1, α_2) 则是 $\boldsymbol{a}$ 在基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 中的坐标。显然，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ 线性相关。

$\boldsymbol{y}$ 明显在平面 H 之外，不能用 $\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ 线性组合表达，从而 $\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ 线性无关。

$\boldsymbol{y}$ 中不能被 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 表达成分为 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}$ 垂直于 H 平面。这一思路可以用来解释线性回归**最小二乘法** (ordinary least square, OLS)。

读完这个“巨长无比”的一节后，如果大家对于向量空间的相关概念还是云里雾里，不要怕。下面我们给这个空间涂个颜色，来进一步帮助大家理解！

7.2 给向量空间涂颜色：RGB 色卡

向量空间的“空间”二字赋予这个线性代数概念更多的可视化的潜力。本节开始就试图给向量空间涂“颜色”，让大家从色彩角度来理解向量空间。

如图 16 所示，**三原色光模式** (RGB color mode) 将**红** (Red)、**绿** (Green)、**蓝** (Blue) 三原色的色光以不同的比例叠加合成产生各种色彩光。

强调一下，红、绿、蓝不是调色盘的涂料。RGB 中，红、绿、蓝均匀调色得到白色；而在调色盘中，红、绿、蓝三色颜料均匀调色得到黑色。

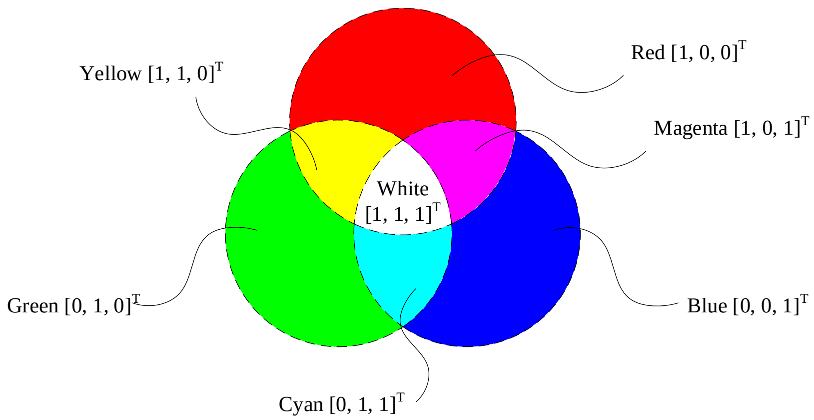


图 16. 三原色模型

如图 17 所示，在三原色模型这个空间中，任意一个颜色可以视作基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 中三个基底向量构成线性组合：

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \tag{30}$$

其中，α_1、α_2、α_3 取值范围都是 [0, 1]。

$\boldsymbol{e}_1$代表红色，$\boldsymbol{e}_2$代表绿色，$\boldsymbol{e}_3$代表蓝色：

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

注意，RGB 三原色可以用 8 进制表示，每个颜色分量为 0 ~ 255 之间整数。此外，RGB 也可以十六进制数来表达，比如如上公式背景色用的浅蓝色对应的 16 进制数为#DEEAF6。

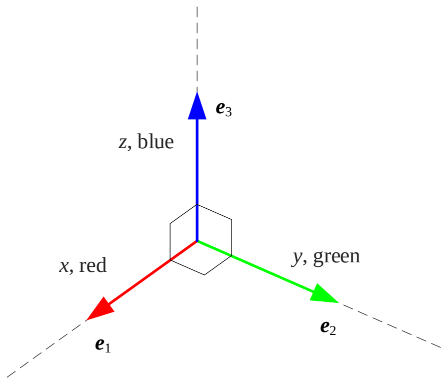


图 17. 三原色空间

$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$这三个基底向量两两正交，因此它们两两内积为 0：

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{32}$$

而且，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$均为单位向量：

$$\|\boldsymbol{e}_1\|_2 = 1, \quad \|\boldsymbol{e}_2\|_2 = 1, \quad \|\boldsymbol{e}_3\|_2 = 1 \tag{33}$$

因此，在三原色模型这个向量空间 V 中，$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 是 V 的标准正交基。

特别强调一点，准确来说，RGB 三原色空间并不是本书前文所述的向量空间，原因就是 α_1、α_2、α_3有取值范围限制。而向量空间不存在这样的取值限制。除了零向量 $\boldsymbol{0}$ 以外，真正的向量空间都是无限延伸。

利用 $\boldsymbol{e}_1$ ($[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ red)、$\boldsymbol{e}_2$ ($[0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ green) 和 $\boldsymbol{e}_3$ ($[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ blue) 这三个基底向量，我们可以张成一个色彩斑斓的空间。下面我们就带大家揭秘这个彩色空间。

7.3 张成空间：线性组合红、绿、蓝三原色

本节把“张成”这个概念用到 RGB 三原色上。

单色

首先，对 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 对逐个研究。实数 α_1 取值范围为 [0, 1]，α_1 乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得到向量 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 \tag{34}$$

大家试想，在这个 RGB 三原色空间，(34) 意味着什么？

图 18 已经给出答案。标量 α_1 乘向量 $\boldsymbol{e}_1$，得到不同深度的红色。$\boldsymbol{e}_1$ 张成的空间 span($\boldsymbol{e}_1$) 的维数为 1。向量空间 span($\boldsymbol{e}_1$) 是 RGB 三原色空间 V 的一个子空间。

类似地，标量 α_2 乘向量 $\boldsymbol{e}_2$，得到不同深浅的绿色。标量 α_3 乘向量 $\boldsymbol{e}_3$，得到不同深浅的蓝色。图 18 的三个空间的维数都是 1 维。

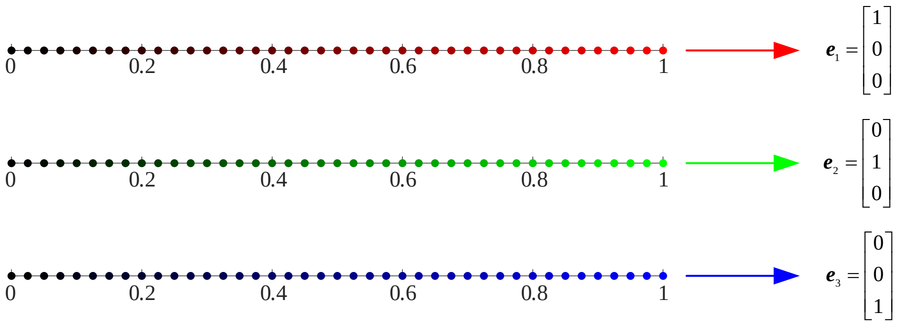


图 18. 三个基底向量和标量乘积

双色合成

再进一步，图 19 所示为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的张成空间 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$)。图 19 平面上的颜色可以写成如下线性组合：

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \tag{35}$$

span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) 的维数为 2。基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$] 的秩为 2。

如图 19 所示，这个 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) 平面上，颜色在绿色和红色之间渐变。特别地，$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ 为黄色，$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ 在空间 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) 中。span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) 也是 RGB 三原色空间 V 子空间。

虽然 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ 这三个向量线性相关，这三个向量也可张成图 19 这个二维空间。也就是说，span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) = span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$)。

集合 {$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$} 中剔除 $\boldsymbol{e}_2$ 后 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$] 线性无关。因此，[$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$] 也可以选做图 19 这个空间的基底。也就是说，图 19 中任意颜色可以写成绿色 ($\boldsymbol{e}_1$) 和黄色 ($\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$) 唯一的线性组合。

图 20 所示为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的张成 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$)，颜色在蓝色和红色之间渐变。[$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$] 是 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$) 这个“红蓝”空间的基底。特别地，$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ 为品红。

图 21 所示为 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的张成 span($\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$)，颜色在绿色和蓝色之间渐变。[$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 是 span($\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) 这个“蓝绿”空间的基底。注意 $\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ 为青色。

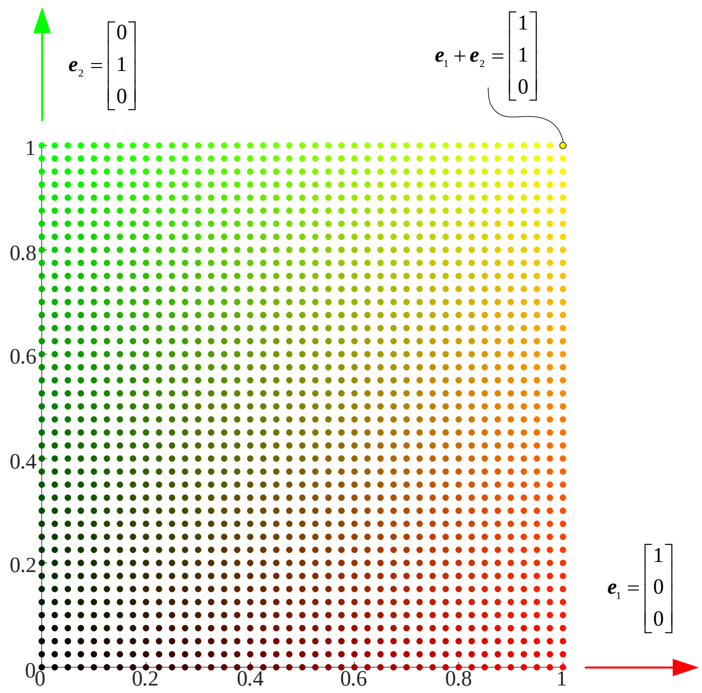


图 19. 基底向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 张成的空间

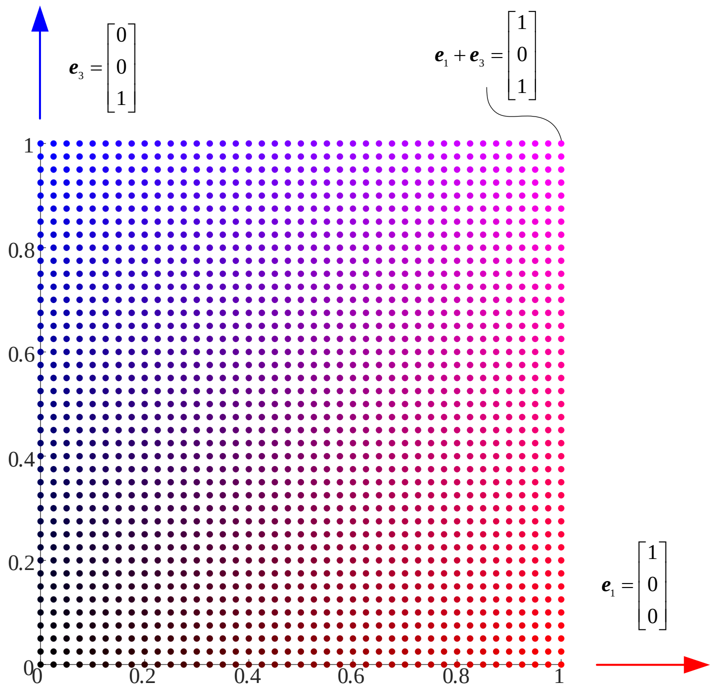


图 20. 基底向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成的空间

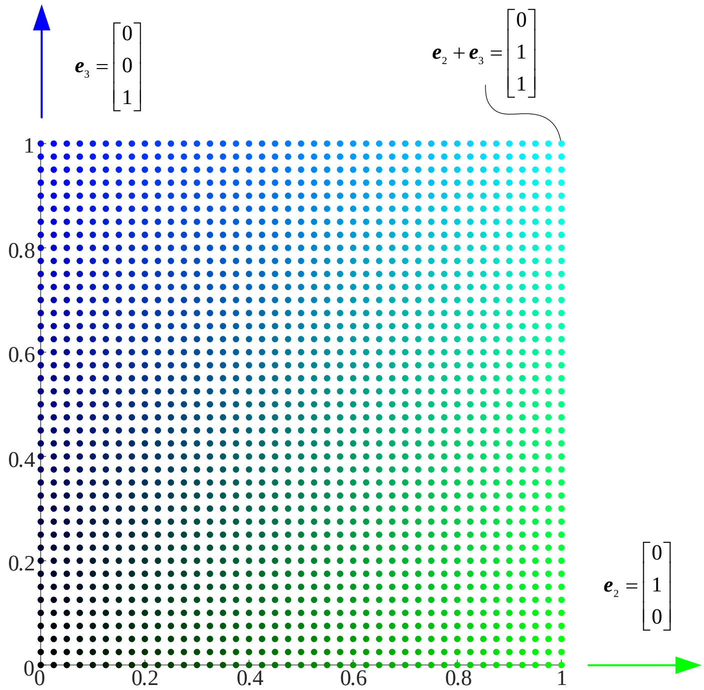


图 21. 基底向量 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成的空间

三色合成

$\boldsymbol{e}_1$ ([1, 0, 0]^T red)、$\boldsymbol{e}_2$ ([0, 1, 0]^T green) 和 $\boldsymbol{e}_3$ ([0, 0, 1]^T blue) 这三个基底向量张的空间 span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) 如图 22 所示。span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) 这个空间的维数为 3。基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 中每个向量都是单位向量，且两两正交，因此基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 是标准正交基。

⚠ 注意，为了方便可视化，图 22 仅仅绘制了空间边缘上色彩最鲜艳的散点。实际上，空间内部还有无数散点，代表相对较深的颜色。

一种特殊情况，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 这三个基底向量以均匀方式混合，得到的便是灰度：

$$\alpha\left(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\right) \tag{36}$$

在图 22 中，这些灰度颜色在原点 (0, 0, 0) 和 (1, 1, 1) 两点构成的线段上。

如图 23 所示，白色和黑色分别对应如下向量：

$$1\times\left(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 0\times\left(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

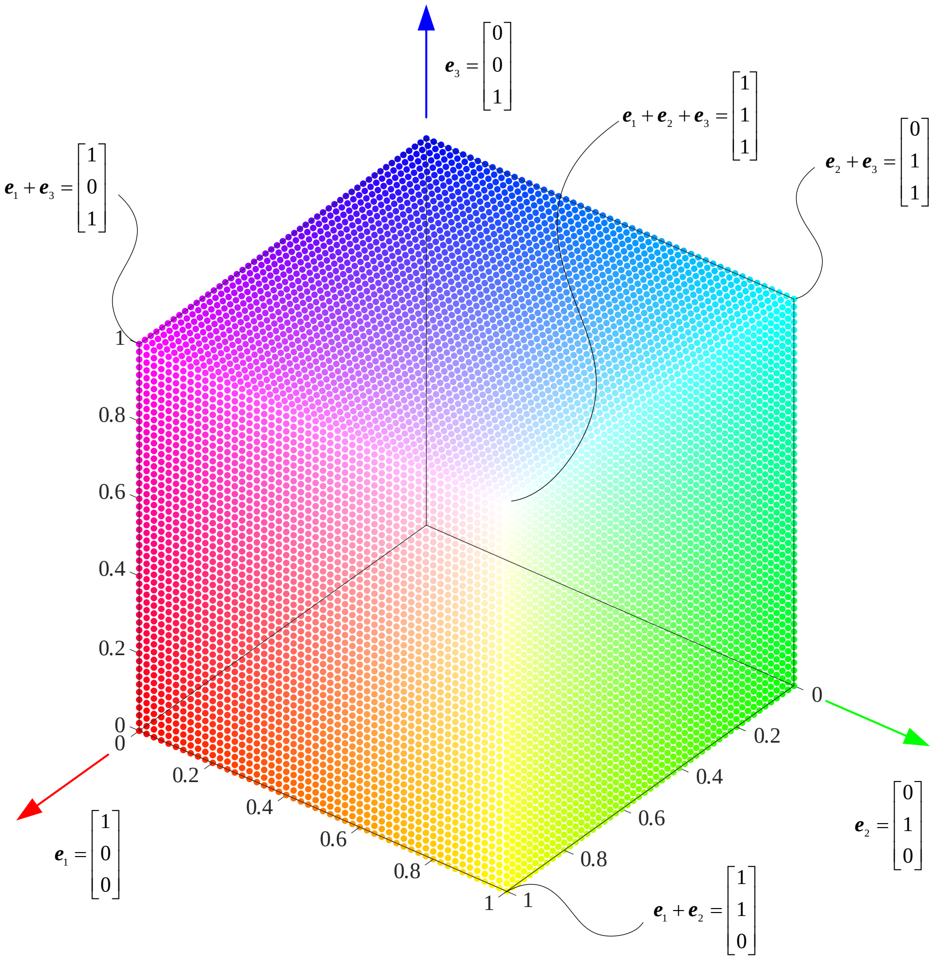


图 22. 三原色张成的彩色空间

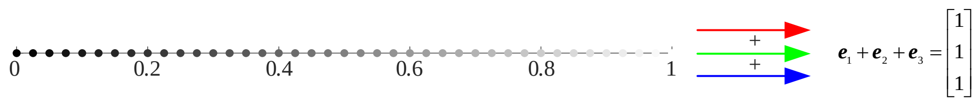


图 23. 灰度

> 我们用 Streamlit 制作了一个应用，其中用 Plotly 绘制类似图 22 可交互三维散点图。请大家参考 Streamlit_Bk4_Ch7_02.py。

7.4 线性无关：红色和绿色，调不出青色

下面，我们还是用三原色做例子来谈一下线性相关和线性无关。

如图 24 所示，$\boldsymbol{e}_1$ (红色) 和 $\boldsymbol{e}_2$ (绿色) 张成平面 $H_1 = \text{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$。在 H_1 中，向量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 线性相关；因为，$\hat{\boldsymbol{a}}$ 可以用 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 线性组合来表达：

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \tag{38}$$

$\boldsymbol{e}_3$ 显然垂直 H_1，因此 $\boldsymbol{e}_3$ 和 H_1 互为**正交补** (orthogonal complement)。本书第 9 章还会深入介绍正交补这个概念。

图 24 中有一个不速之客——向量 $\boldsymbol{a}$。向量 $\boldsymbol{a}$ 跳出平面 H_1。向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 线性无关，因为 $\boldsymbol{a}$ 不能用 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 线性组合构造。从色彩角度来看，红光和绿光，调不出青色光。

代表青色的向量 $\boldsymbol{a}$ 在红绿色构成的平面 H_1 内的投影为 $\hat{\boldsymbol{a}}$。$\boldsymbol{a} - \hat{\boldsymbol{a}}$ 垂直 H_1。向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 差在一束蓝光 $\boldsymbol{a} - \hat{\boldsymbol{a}}$。也就是，从光线合成角度来看，$\boldsymbol{a}$ 比 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 多了一抹蓝光。

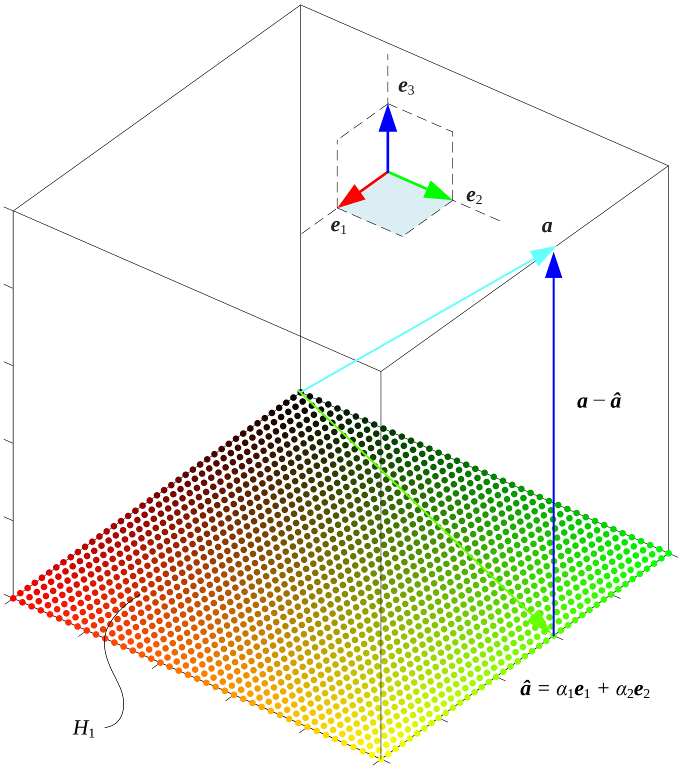


图 24. 基底向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 张成平面 H_1，向量 $\boldsymbol{a}$ 向 H_1 投影

图 25 所示为基底向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成平面 H_2，向量 $\boldsymbol{b}$ 向 H_2 投影得到 $\hat{\boldsymbol{b}}$。图 26 所示为基底向量 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成平面 H_3，向量 $\boldsymbol{c}$ 向 H_3 投影结果为 $\hat{\boldsymbol{c}}$。请大家自行分析这两幅图。

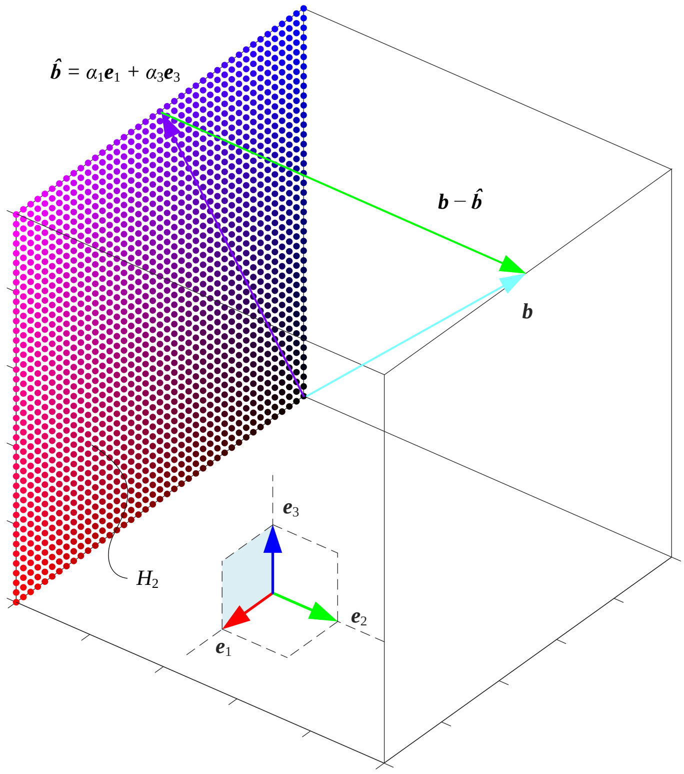


图 25. 基底向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成平面 H_2

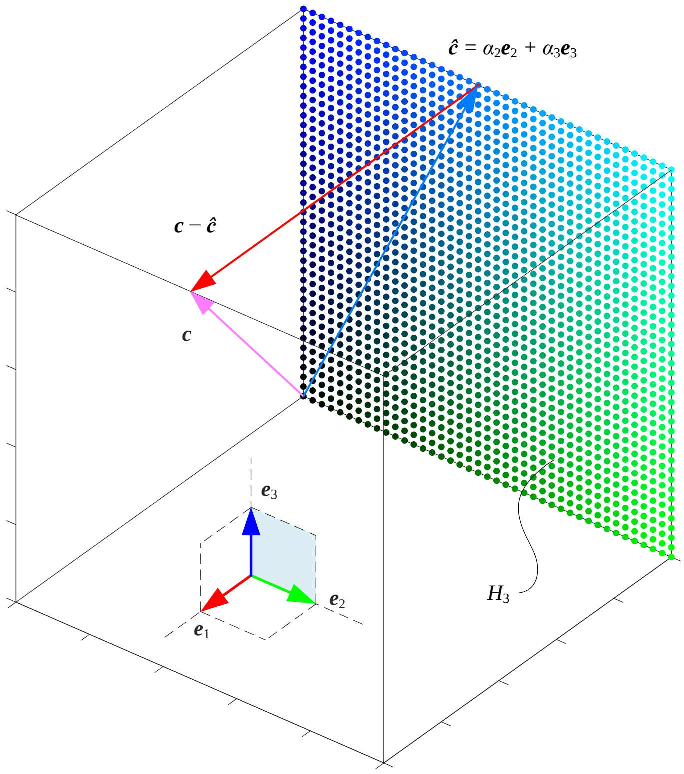


图 26. 基底向量 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 张成平面 H_3

7.5 非正交基底：青色、品红、黄色

$\boldsymbol{e}_1$ ($[1, 0, 0]^T$ red)、$\boldsymbol{e}_2$ ($[0, 1, 0]^T$ green) 和 $\boldsymbol{e}_3$ ($[0, 0, 1]^T$ blue) 这三个基底向量任意两个组合构造三个向量 $\boldsymbol{v}_1$ ($[0, 1, 1]^T$ cyan)、$\boldsymbol{v}_2$ ($[1, 0, 1]^T$ magenta) 和 $\boldsymbol{v}_3$ ($[1, 1, 0]^T$ yellow)：

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

如图 27 所示，$\boldsymbol{v}_1$ 相当于 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，$\boldsymbol{v}_2$ 相当于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，$\boldsymbol{v}_3$ 相当于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合。

$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 线性无关，因此 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ 也可以是构造三维彩色空间的基底！

印刷四分色模式 (CMYK color model) 就是基于基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$。CMYK 四个字母分别指的是**青色** (cyan)、**品红** (magenta)、**黄色** (yellow) 和**黑色** (black)。本节，我们只考虑三个彩色，即青色、品红和黄色。

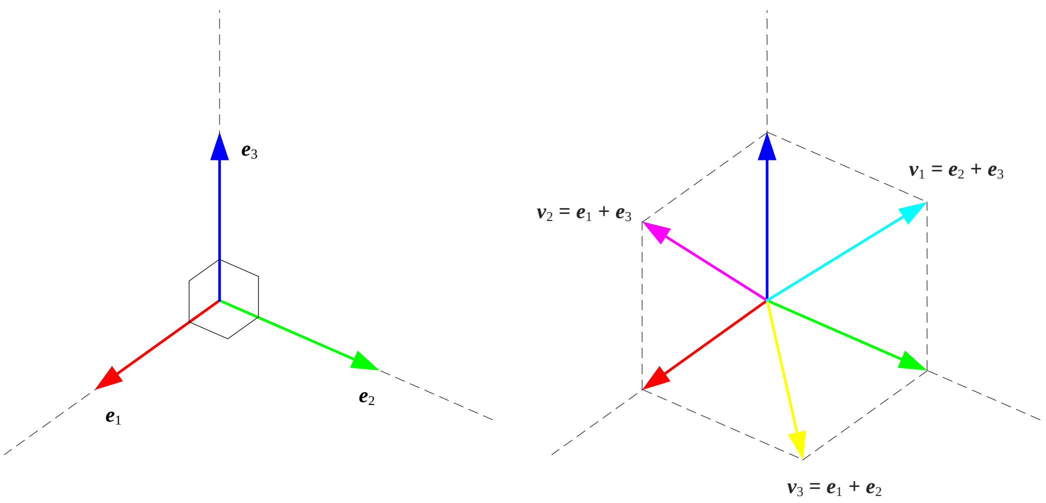


图 27. 正交基底到非正交基底

非正交基底

$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 并非两两正交。经过计算可以发现 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 两两夹角均为 60°：

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_{v_1,v_2} &= \frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\
\cos\theta_{v_1,v_3} &= \frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_1\|\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\
\cos\theta_{v_2,v_3} &= \frac{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_2\|\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

也就是说，[$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 为非正交基底。

单色

图 28 所示为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 各自张成的空间 span($\boldsymbol{v}_1$)、span($\boldsymbol{v}_2$)、span($\boldsymbol{v}_3$)。这三个空间的维数均为 1。

观察图 28 颜色变化，可以发现 span($\boldsymbol{v}_1$)、span($\boldsymbol{v}_2$)、span($\boldsymbol{v}_3$) 分别代表着青色、品红和黄色颜色深浅变化。

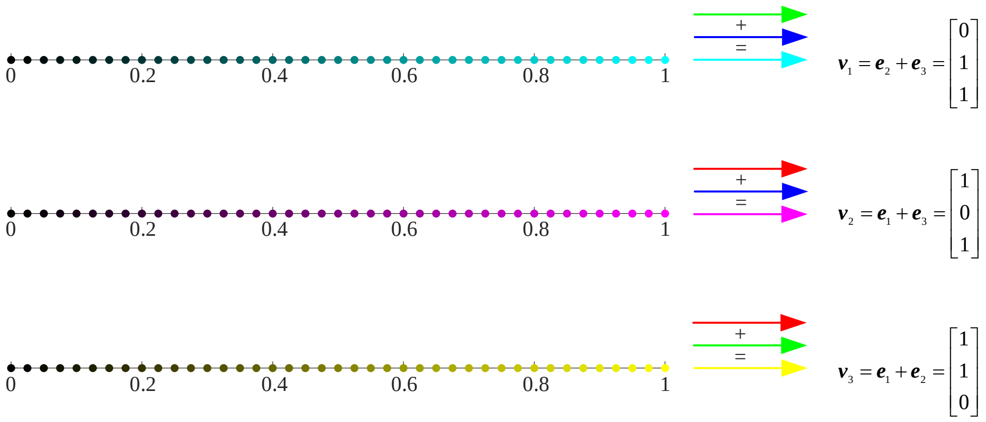


图 28. 单色子空间

双色合成

图 29 ~ 图 31 分别所示为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 两两张成的三个空间 span($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$)、span($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$)、span($\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2$)。这三个空间的维数都是 2，它们也都是三色空间的子空间。

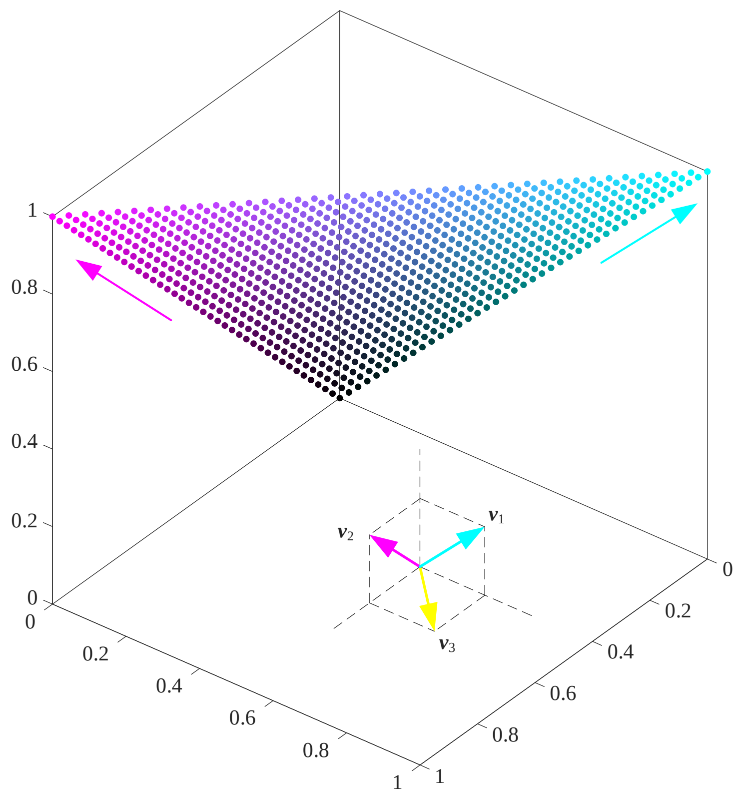


图 29. 基底向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 张成的子空间

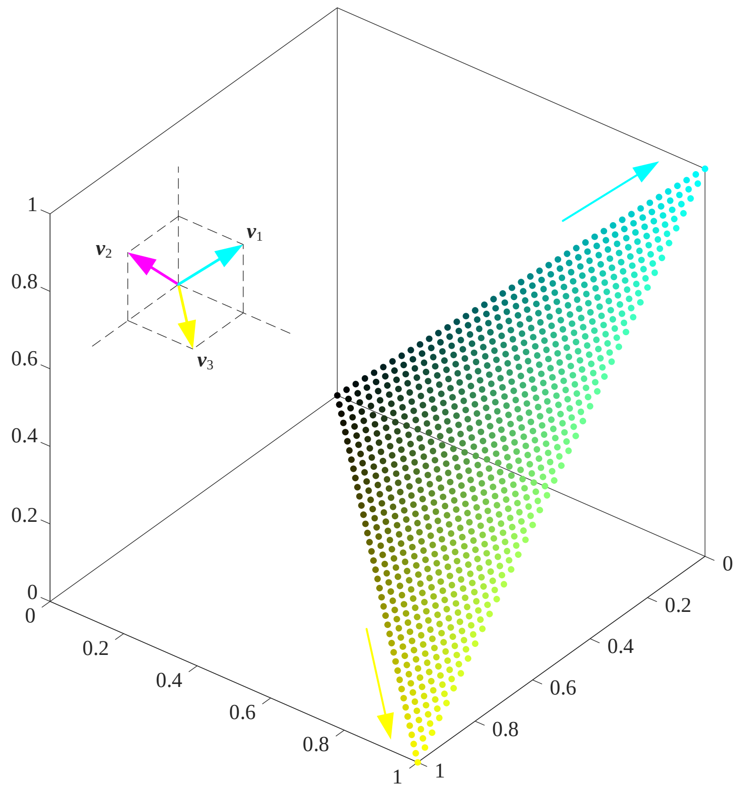


图 30. 基底向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 张成的子空间

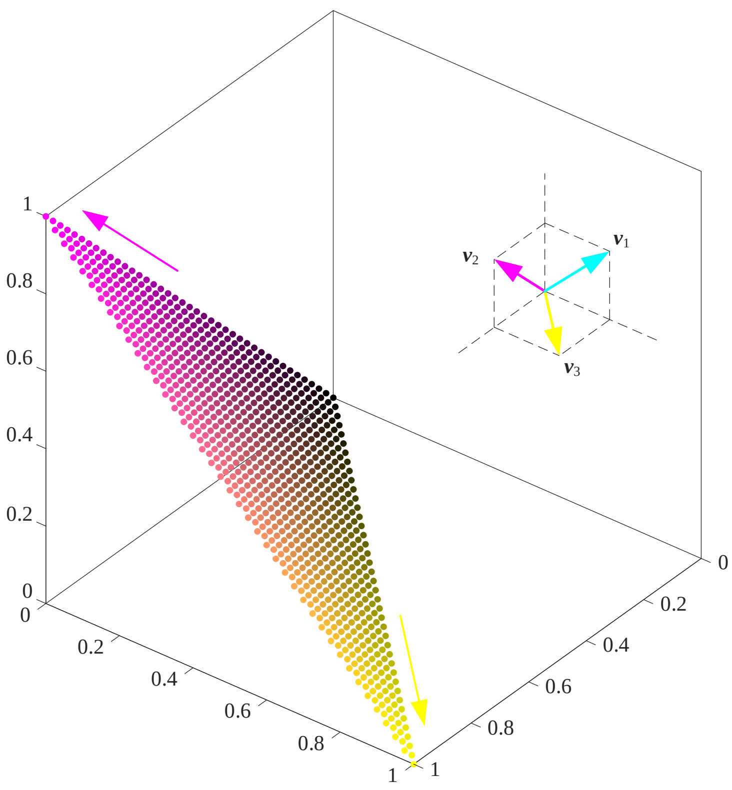


图 31. 基底向量 v_2 和 v_3 张成的子空间

7.6 基底转换：从红、绿、蓝，到青色、品红、黄色

RGB 色卡中，$[e_1, e_2, e_3]$ 是色彩空间的标准正交基。CMYK 色卡中，$[v_1, v_2, v_3]$ 是色彩空间的非正交基。我们可以用**基底转换** (change of basis) 完成 RGB 模式向 CMYK 模式转换。

下式中，通过矩阵 A，基底向量 $[e_1, e_2, e_3]$ 转化为基底向量 $[v_1, v_2, v_3]$：

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \tag{41}$$

A 常被称作过渡矩阵，或**转移矩阵** (transition matrix)。

将具体数值代入 (41)，得到：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

即矩阵 A 为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

从基底 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 向基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 转换，可以通过 A^{-1} 完成：

$$A^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \tag{44}$$

通过计算可得到 A^{-1}：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{45}$$

图 32 所示为基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 和基底 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 之间相互转换关系。

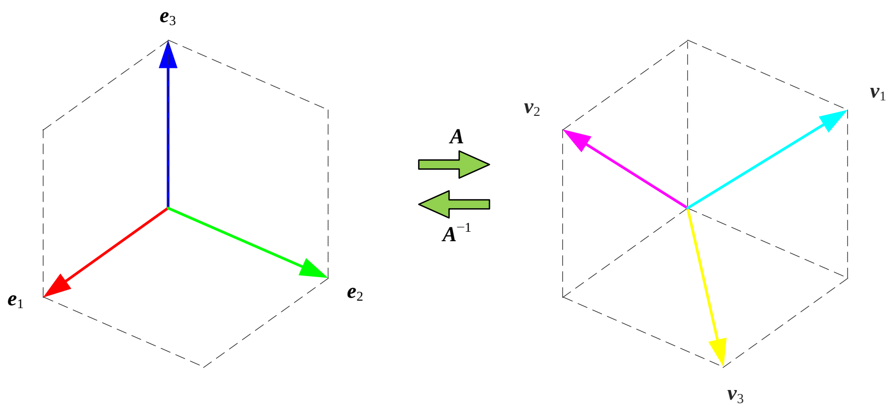


图 32. 基底 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$] 和基底 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 相互转换

线性方程组

“纯红色”在基底 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 的坐标可以通过求解下列线性方程组得到：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

而这线性方程组本身就是一个线性组合：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{b} \tag{47}$$

请大家自己计算“纯绿色”、“纯蓝色”在基底 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$] 中的坐标。

本章讲解的线性代数概念很多，必须承认它们都很难理解。为了帮助大家理清思路，我们用 RGB 三原色作例子，给向量空间涂颜色！

选出以下四幅图片总结本章主要内容。所有的基底向量中，标准正交基和规范正交基这两个概念最常用。在后续章节学习时，请大家注意规范正交基、正交矩阵、旋转这三个概念的联系。平面上，线性相关和线性无关就是看向量是否重合。此外，正交投影是本书非常重要的几何概念，我们会在本书后续内容反复用到。

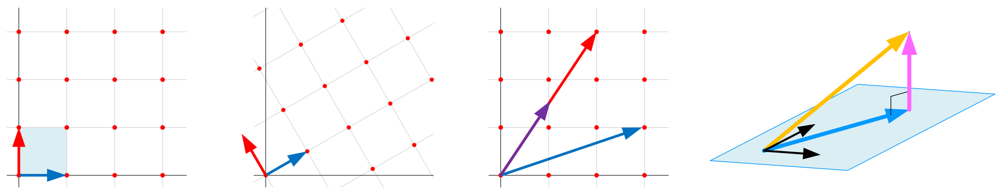


图 33. 总结本章重要内容的四幅图