8 Geometric Transformation 几何变换

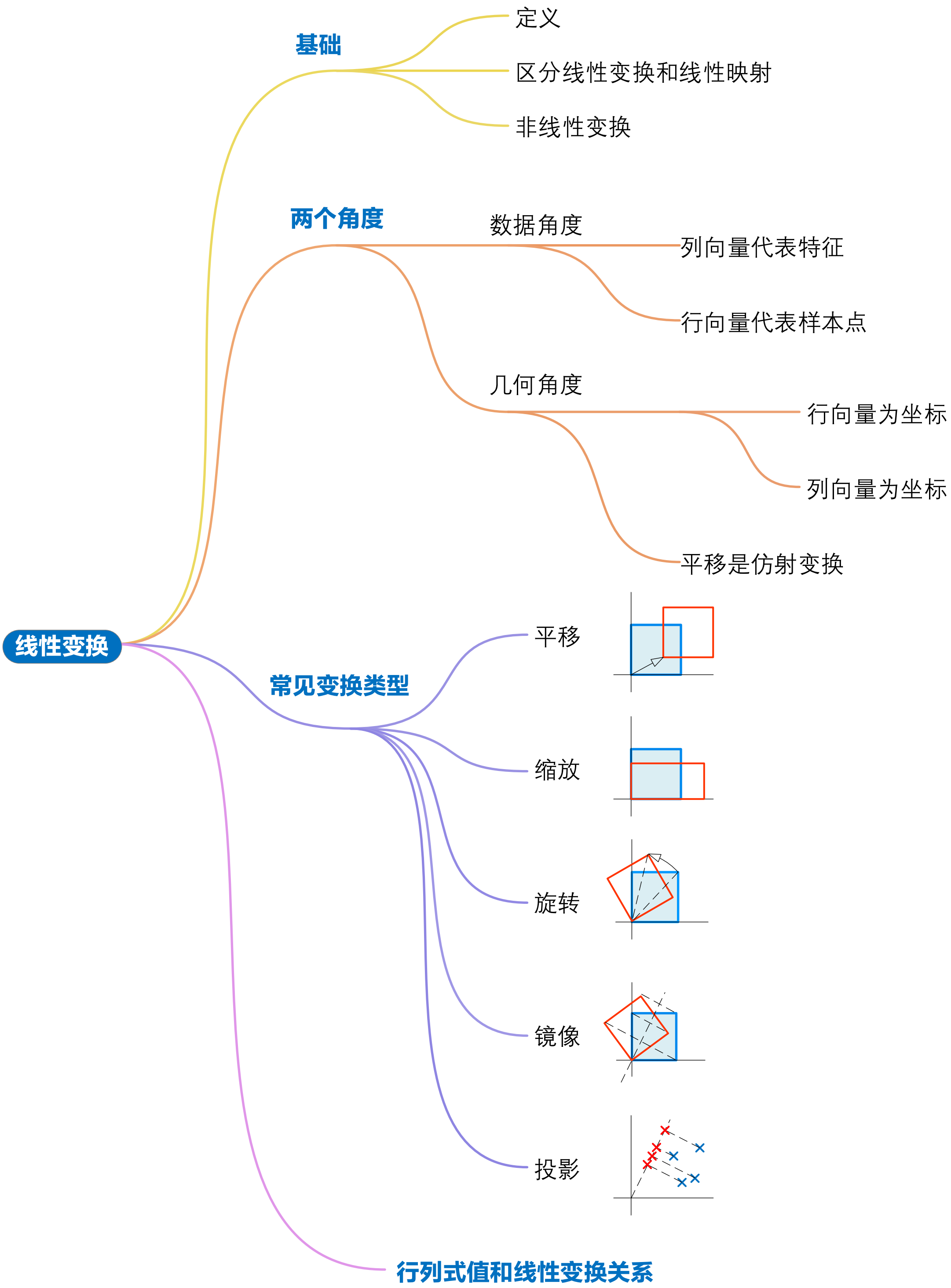
线性变换的特征是原点不变、平行且等距的网格

矩阵向来大有所为，它们从不游手好闲。

Matrices act. They don't just sit there.

—— 吉尔伯特·斯特朗 (Gilbert Strang) | MIT 数学教授 | 1934 ~

- `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- `numpy.linalg.inv()` 矩阵逆运算
- `numpy.matrix()` 构造二维矩阵
- `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- `tranpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`


线性变换
基础
定义
区分线性变换和线性映射
非线性变换
两个角度
数据角度
列向量代表特征
行向量代表样本点
几何角度
行向量为坐标
列向量为坐标
平移是仿射变换
常见变换类型
平移
缩放
旋转
镜像
投影
行列式值和线性变换关系

8.1 线性变换：线性空间到自身的线性映射

本章开始之前，我们先区分两个概念：**线性映射** (linear mapping) 和**线性变换** (linear transformation)。

线性映射是指从一个空间到另外一个空间的映射，且保持加法和数量乘法运算。比如，映射 L 将向量空间 V 映射到向量空间 W，对于所有的 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2 \in V$ 及所有的标量 α 和 β，满足

$$L(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) = \alpha L(\boldsymbol{v}_1) + \beta L(\boldsymbol{v}_2) \tag{1}$$

白话来说，线性映射把一个空间的点或几何形体映射到另外一个空间。比如图 1 所示的三维物体投影到一个平面上，得到这个杯子在平面上的映像。

图 1 所示的“降维”过程显然不可逆，也就是不能通过杯子在平面的“映像”获得杯子在三维空间形状的所有信息。

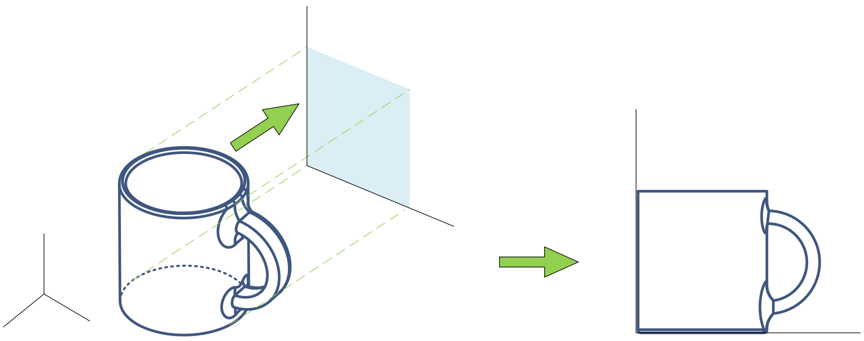


图 1. 线性映射

线性变换是线性空间到自身的线性映射，是一种特殊的线性映射。白话说，线性变换是在同一个坐标系中完成的图形变换。从几何角度来看，线性变换产生“平行且等距”的网格，并且原点保持固定，如图 2 所示。原点保持固定，这一性质很重要，因为大家马上就会看到“平移”不属于线性变换。

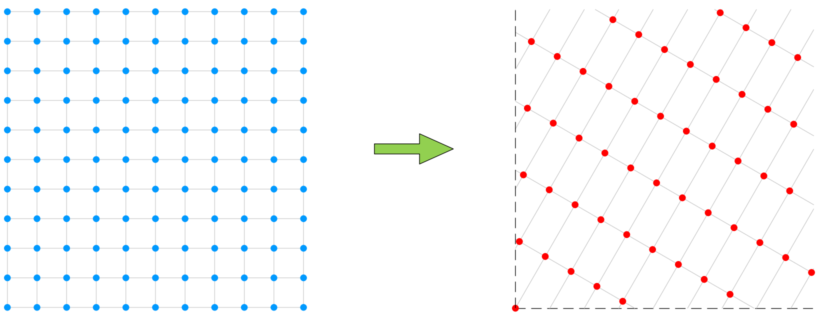


图 2. 线性变换产生平行且等距的网格

⚠ 请大家注意很多参考资料混用线性映射和线性变换。此外，本书把正交投影也算作是线性变换，虽然正交投影后维度降低，空间发生“压缩”。

非线性变换

与线性变换相对的就是**非线性变换** (nonlinear transformation)。

图 3 和图 4 给出两个非线性变换的例子。图 3 所示为通过非线性变换产生平行但不等距网格。图 4 所示产生的网格甚至出现“扭曲”。

有了这两幅图做对比，相信读者能够更好地理解图 2 所展示的“平行且等距、原点保持固定”的网格所代表的线性变换。

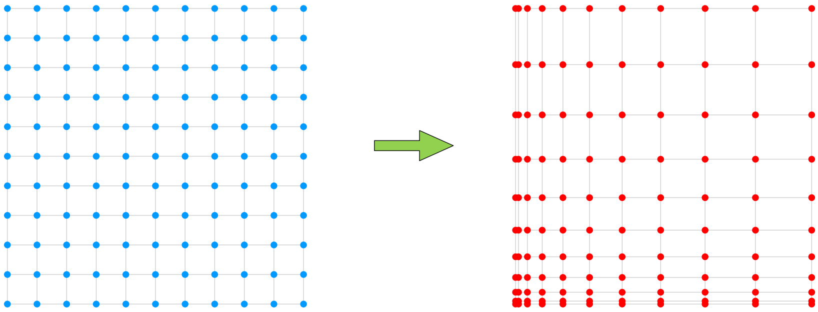


图 3. 非线性变换产生平行但不等距网格

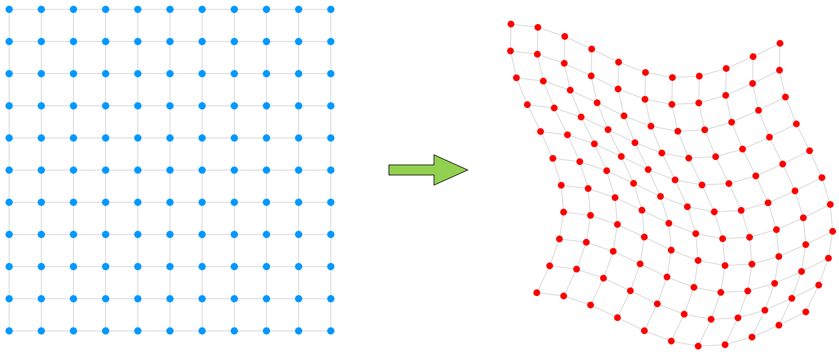


图 4. 非线性变换产生“扭曲”网格

常见平面几何变换

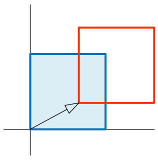
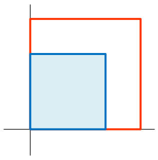
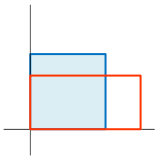
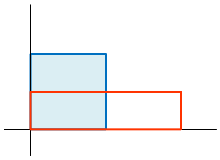
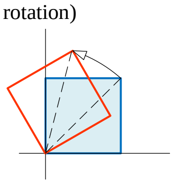
本章下一节开始就是要从线性代数运算视角讨论几何变换。表 1 总结本章将要介绍的常用二维几何变换。表中第二列以列向量形式表达坐标点，第三列以行向量形式表达坐标点。表 1 的第二列和第三列矩阵运算互为转置关系。

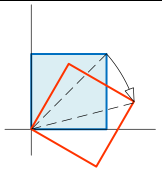
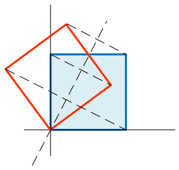
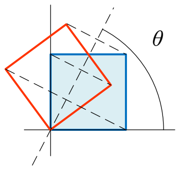
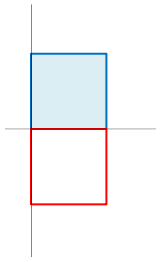
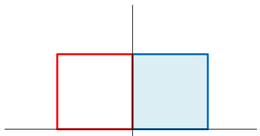
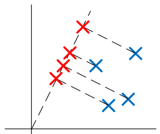
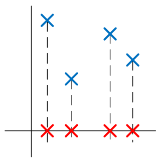
除了平移以外，表 1 中的几何变换都是从 $\mathbb{R}^2$ 到自身。准确来说，正交投影相当于降维，结果在 $\mathbb{R}^2$ 的子空间中。本章后续就一一展开讲解这些几何变换。

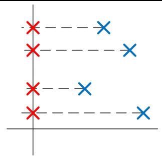
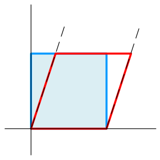
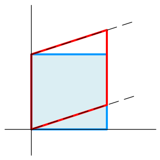
⚠ 请读者注意，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换 (affine transformation)。几何角度来看，仿射变换是一个向量空间的线性变换叠加平移，变换结果在另外一个向量空间。平移时，原点位置发生变化。

➜ 表 1 中所有操作统称几何变换，以便于将这些线性代数概念和本系列丛书《数学要素》中介绍的几何变换联系起来。这也正是本章题目叫“几何变换”的原因。

表 1. 常用几何变换总结

几何变换	列向量坐标	行向量坐标
平移 (translation) 	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_1 & t_2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}+\begin{bmatrix}t_1 & t_2\end{bmatrix}$
等比例缩放 s 倍 (scaling) 	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}$
非等比例缩放 (unequal scaling) 	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1 & 0\\0 & s_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1 & 0\\0 & s_2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}s_1 & 0\\0 & s_2\end{bmatrix}$
挤压 s 倍 (squeeze) 	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\0 & 1/s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\0 & 1/s\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}s & 0\\0 & 1/s\end{bmatrix}$
逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation) 	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\-\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\-\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$
顺时针旋转 θ (clockwise rotation)	$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\-\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$

		$\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$
关于通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}\,[\tau_1,\tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线镜像 (reflection) 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2\\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2\end{bmatrix}$
关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像；等同于上例，切向量相当于 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$
关于横轴镜像对称 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
关于纵轴镜像对称 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}\,[\tau_1,\tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线投影 (projection) 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\frac{1}{\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert^2}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_1\tau_2\\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2\end{bmatrix}$
向横轴投影 	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
向纵轴投影	$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2}=\boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

		
沿水平方向剪切 (shear)，θ 为剪切角 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$
沿竖直方向剪切，θ 为剪切角 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.2 平移：仿射变换

列向量

用列向量表达坐标时，平移可以写成：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{t} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{t}$ 为平移向量：

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

(3) 代入 (2) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

⚠ 再次强调，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换，因为原点发生改变。

行向量

用行向量表达坐标时，相当于对 (4) 左右转置：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 & x_2 + t_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

图 5 所示为几个平移的例子。

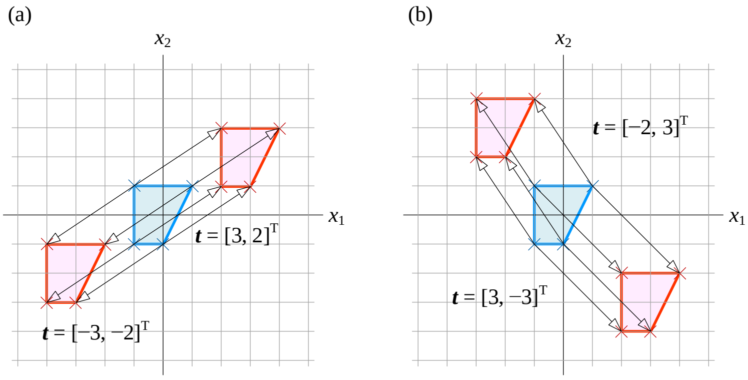


图 5. 平移

Bk4_Ch8_01.py 绘制图 5。

如图 6 所示，数据**中心化** (centralize)，也叫**去均值** (demean)，实际上就是一种平移。前文提到数据矩阵中一般用行向量表达坐标点。

对数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 去均值处理，并得到 $\boldsymbol{Y}$：

$$\boldsymbol{Y}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{X}_{n\times 2}\right) \tag{6}$$

注意，前文提到过行向量 $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$ 叫做质心，它的每个元素是数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 每一列数据的均值。显然，$\boldsymbol{Y}$ 的质心位于原点，也就是说 $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = [0, 0]$。

将 $\boldsymbol{Y}$ 写成 $[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]$，利用广播原则，展开(6) 得到：

$$\left[\boldsymbol{y}_1 \quad \boldsymbol{y}_2\right] = \left[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2\right] - \left[\mathrm{E}\left(\boldsymbol{x}_1\right) \quad \mathrm{E}\left(\boldsymbol{x}_2\right)\right] \tag{7}$$

(7) 对应的统计运算表达为：

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - \mathrm{E}\left(X_1\right) \\ Y_2 = X_2 - \mathrm{E}\left(X_2\right) \end{cases} \tag{8}$$

其中，X_1、X_2、Y_1、Y_2 为随机变量，注意字母大写斜体。从几何角度来看，平移运算将数据质心移动到原点，如图 6 所示。

大家应该已经注意到了图 6 中的椭圆，通过高斯二元分布可以建立数据和椭圆的联系。也就是说，从几何视角来看，椭圆可以用来代表服从多元高斯分布的散点数据。这是本系列丛书《概率统计》要重点讲解的内容。

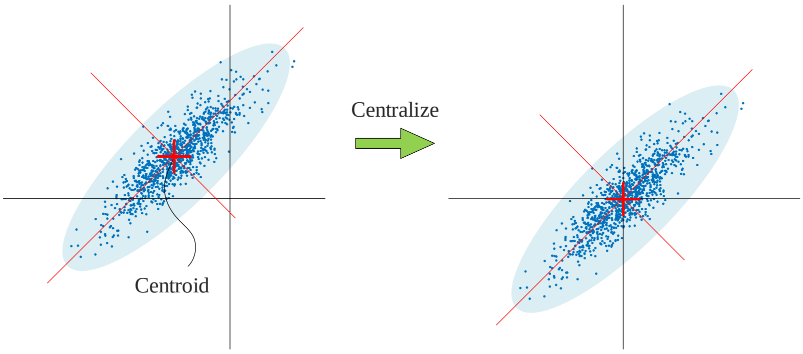


图 6. 数据中心化相当于平移

8.3 缩放：对角阵

等比例缩放 (equal scaling) 是指在缩放时各个维度采用相同缩放比例。举个例子，如图 7 所示，横纵坐标等比例放大 2 倍，等比例缩放得到的图形和原图形相似。

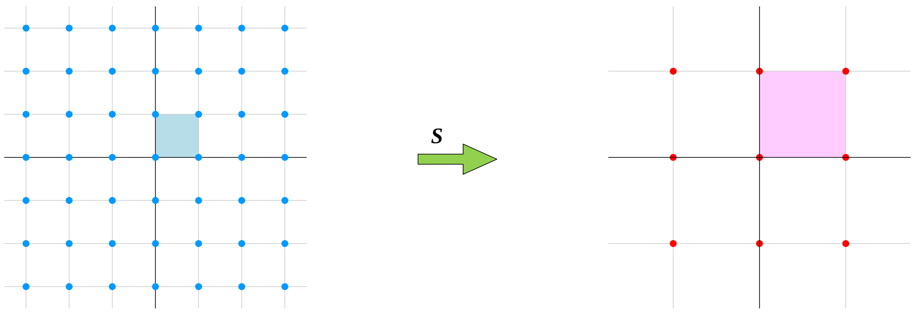


图 7. 等比例扩大 2 倍网格变化

列向量

等比例缩放对应的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

上式中，等比例缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为对角阵，对角线元素相同。(9) 整理得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

此外，等比例缩放矩阵和单位向量存在以下关系：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s\boldsymbol{I}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

行向量

数据坐标为行向量时，对 (9) 转置得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{S} \tag{12}$$

对于数据矩阵，等比例缩放运算为：

$$\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \tag{13}$$

行列式值

计算转化矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的行列式值：

$$\det\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2 \tag{14}$$

可以发现对于二维空间，等比例缩放对应图形面积变化 s^2 倍。

图 8 (a) 所示的缩放系数为 $s = 3$，图形放大 3 倍，面积放大 9 倍。图 8 (b) 所示的缩放系数为 $s = 0.75$，图形缩小至原来 3/4，面积为原来 9/16。

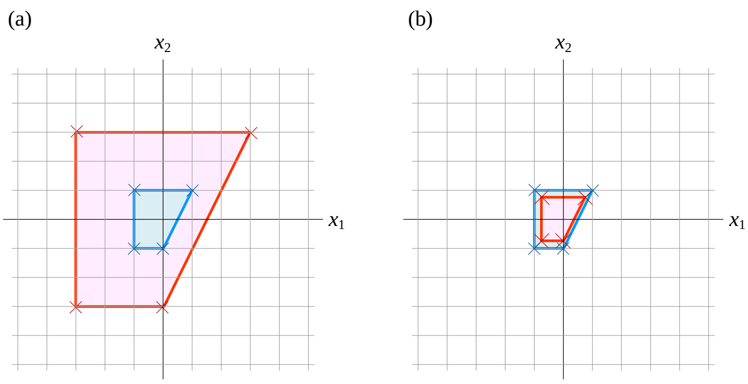


图 8. 等比例缩放两个例子

非等比例缩放

图 9 所示为**非等比例缩放** (unequal scaling) 的例子。

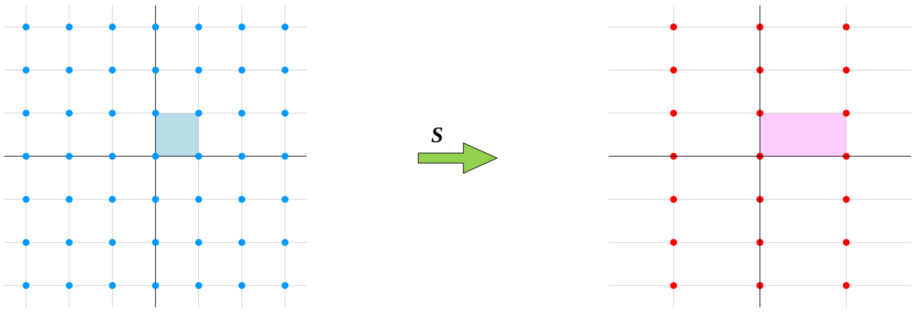


图 9. 非等比例缩放网格变化

非等比例缩放矩阵为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

数据点为列向量时，非等比例缩放运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

数据点为行向量时，对 (16) 等式左右转置得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

请大家根据图 10 两幅子图中图形缩放前后横、纵轴尺度比例变化，来推断矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的值分别是多少。

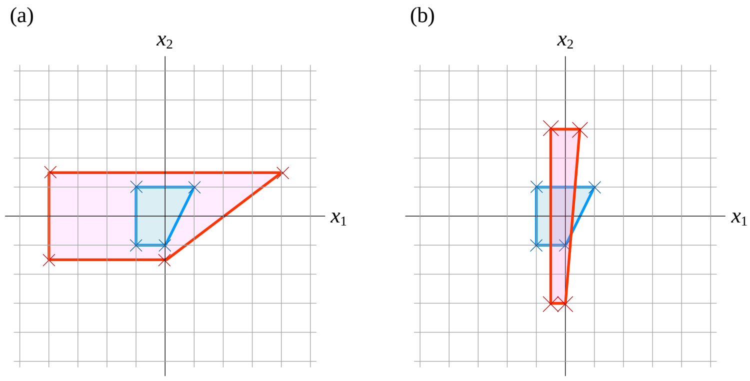


图 10. 非等比例缩放

逆矩阵

现在回过头来再思考什么是矩阵的逆。

从线性变换角度，缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的逆 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 无非就是 $\boldsymbol{S}$ 对应的几何变换“逆操作”。如图 11 所示，缩放操作的逆运算就是将缩放后图形再还原成原图形。

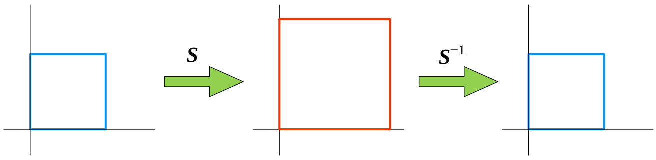


图 11. 缩放的逆运算

特别地，如果缩放时将图形“完全压扁”，比如：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(18) 中矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的行列式值为 0，也就是说变换矩阵不可逆。容易发现，(18) 造成的形变也是不可逆的。

这样，我们从几何图形变换角度，解释为什么只有行列式值不为 0 的方阵才存在逆矩阵。本章后文还会继续介绍不同几何操作对应矩阵存在怎样的“逆运算”。

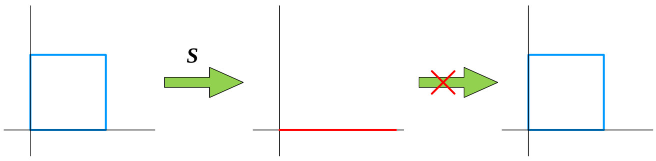


图 12. 不可逆缩放

本节内容让我们联想到数据**标准化** (standardization) 这一概念。实际上，数据标准化就相当于是一种不同特征的数据先平移，然后再用标准差进行比例缩放。每个特征采用的缩放系数为均标准差的倒数。

数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 标准化得到数据矩阵 $\boldsymbol{Z}$，对应运算过程如下：

$$\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \left(\boldsymbol{X}_{n\times 2} - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{X}_{n\times 2}\right)\right)\begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

将 $\boldsymbol{Z}$ 写成 $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]$，展开 (19) 得到：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{x}_1 - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_1)}{\sigma_1} & \dfrac{\boldsymbol{x}_2 - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_2)}{\sigma_2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

上式对应的统计运算则是：

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{X_1 - \mathrm{E}(X_1)}{\sigma_1} \\ Z_2 = \dfrac{X_2 - \mathrm{E}(X_2)}{\sigma_2} \end{cases} \tag{21}$$

图 6 所示为数据标准化过程。数据标准化并不改变相关性系数大小。

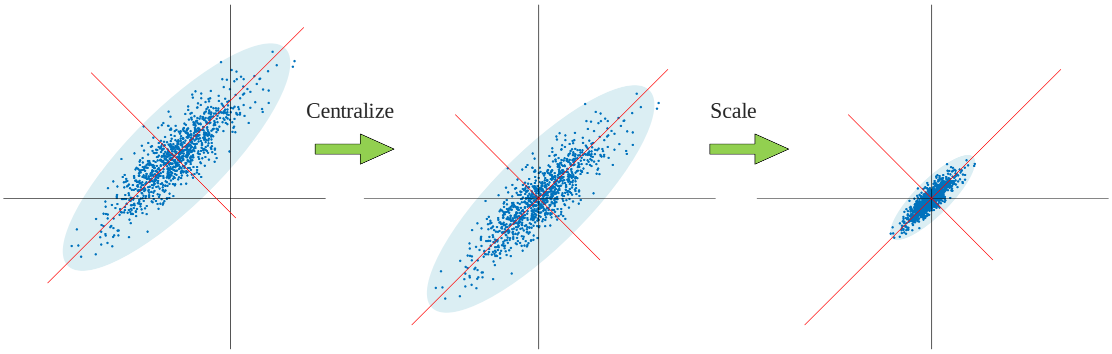


图 13. 数据标准化

挤压

还有一种特殊的缩放叫做**挤压** (squeeze)，比如竖直方向或水平方向压扁，但是面积保持不变。图 14 所示为挤压对应的网格变化。

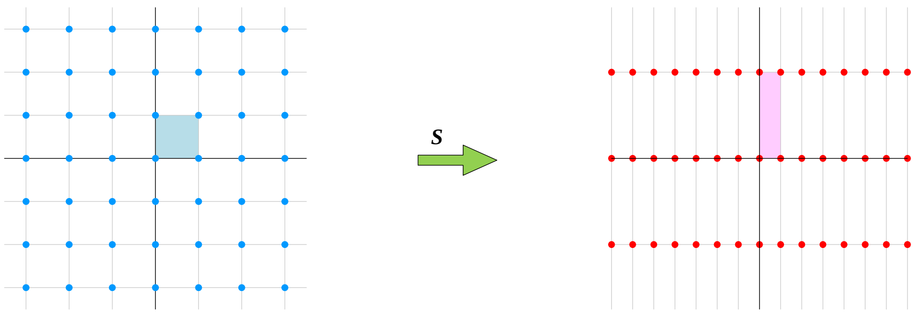


图 14. 挤压所对应的网格图变化

列向量

坐标为列向量时，挤压对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

其中，s 不为 0。计算上式方阵 $\boldsymbol{S}$ 行列式值，发现结果为 1，这说明挤压前后面积没有变化：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} = 1 \tag{23}$$

图 15 所示为几何图形挤压的两个例子。也请大家根据图形变化前后特点自行推断完成几何变换矩阵的具体数值，并计算行列式值。

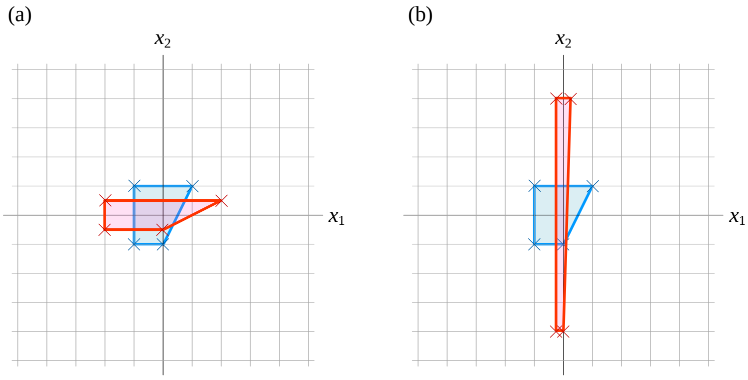


图 15. 挤压变换两个例子

8.4 旋转：行列式值为 1

本节介绍旋转，图 16 对比原点保持不变 (也就是说，以原点为中心)、旋转变化前后的网格。旋转是非常重要的几何变换，我们会在本书后续很多内容看到旋转。

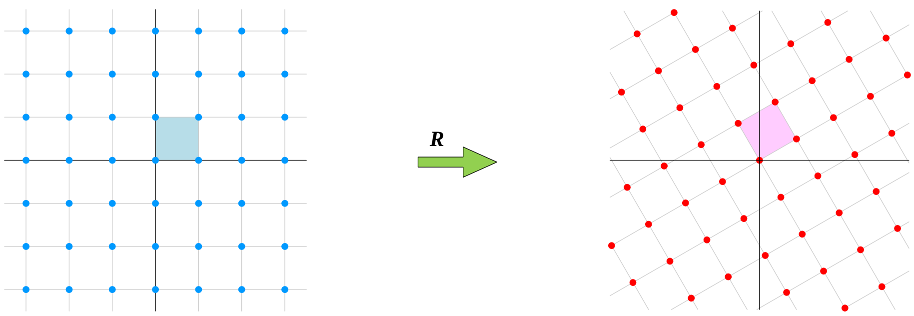


图 16. 旋转变换的网格

列向量坐标 $\boldsymbol{x}$ 逆时针旋转 θ 得到 $\boldsymbol{z}$：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{25}$$

(25) 代入 (24)，得到下式：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$\boldsymbol{R}$ 的行列式值为 1，也就是说旋转之后的网格面积不变：

$$\det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \tag{27}$$

行向量

坐标点为行向量时，逆时针旋转 θ 对应的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{R} \tag{28}$$

(25) 代入 (28) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{29}$$

(29) 相当于对 (26) 等式左右转置。

对于数据矩阵情况，逆时针旋转 θ 的矩阵运算如下：

$$\boldsymbol{Z}_{n\times 2} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}_{n\times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{30}$$

图 17 所示为几何形状旋转操作的两个例子。

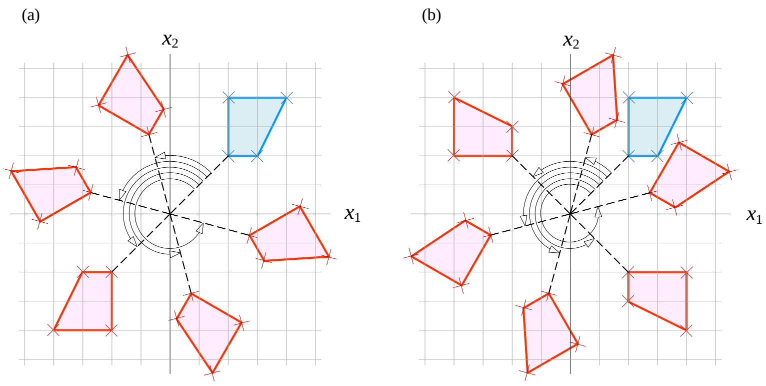


图 17. 旋转的两个例子

Bk4_Ch8_02.py 绘制图 17。

逆矩阵

旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 求逆得到 $\boldsymbol{R}^{-1}$。如图 18 所示，几何角度，$\boldsymbol{R}^{-1}$ 是朝着相反方向旋转。

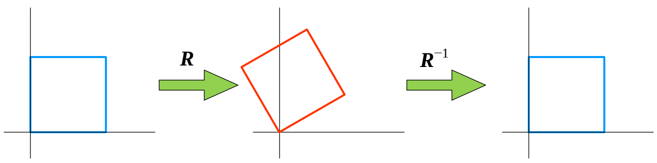


图 18. 旋转的逆运算

从数据角度看旋转操作，如图 19 所示。数据完成中心化 (平移) 后，质心位于原点，即椭圆中心位于原点。然后，中心化数据按照特定的角度绕原点旋转后，让椭圆的长轴位于横轴。也就是说，旋转椭圆变成正椭圆。图 19 右图的椭圆经过缩放后可以得到单位圆。单位圆意味着随机变量满足二元高斯分布 $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_{2\times2})$。

图 19 中，“旋转 → 缩放”过程是**主成分分析** (principal component analysis, PCA) 的思路。而从“缩放 → 旋转”的过程代表利用满足 IID $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_{2\times2})$ 二元随机数产生具有指定相关性系数、指定均方差的随机数。IID 指的是独立同分布 (Independent and Identically Distributed)。

这些内容，我们会在《概率统计》和《数据科学》两册书中深入讲解。

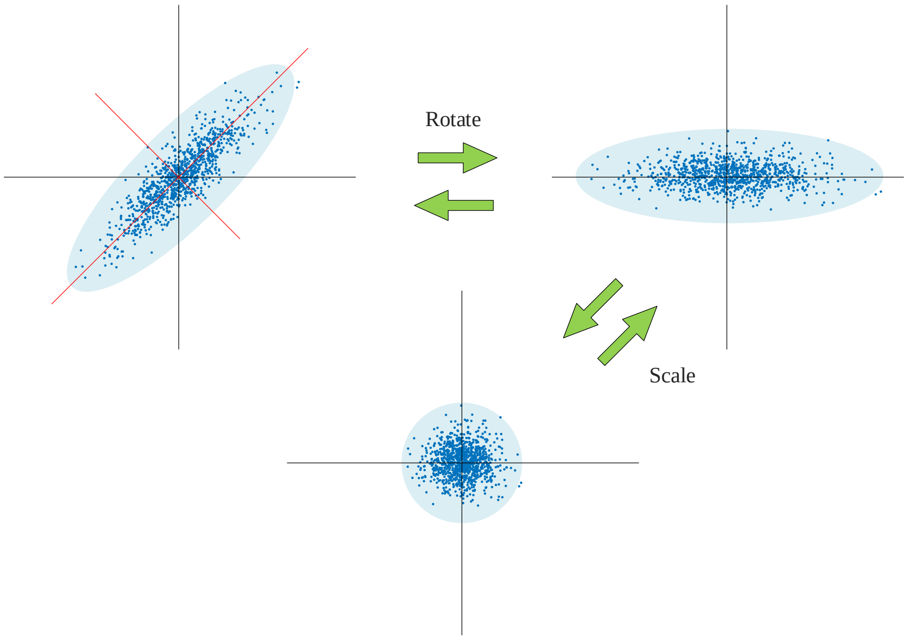


图 19. 数据视角下的旋转和缩放

矩阵乘法不满足交换律

前文讲过，一般来说，矩阵乘法不满足交换律，即，

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{31}$$

现在我们用图形的线性变换来说明这一点。

图 20 所示左侧方格，先经过 $\boldsymbol{S}$ 缩放，再通过 $\boldsymbol{R}$ 旋转得到右侧红色网格。图 20 红色网格显然不同于图 21。因为图 21 红色网格是先通过 $\boldsymbol{R}$ 旋转再经过 $\boldsymbol{S}$ 缩放得到的。

再次强调，如果用列向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^\mathrm{T}$ 代表坐标点时，矩阵乘法 $\boldsymbol{RSx}$ 代表先缩放 ($\boldsymbol{S}$)、后旋转 ($\boldsymbol{R}$)；而矩阵乘法 $\boldsymbol{SRx}$ 代表先旋转 ($\boldsymbol{R}$)、后缩放 ($\boldsymbol{S}$)。

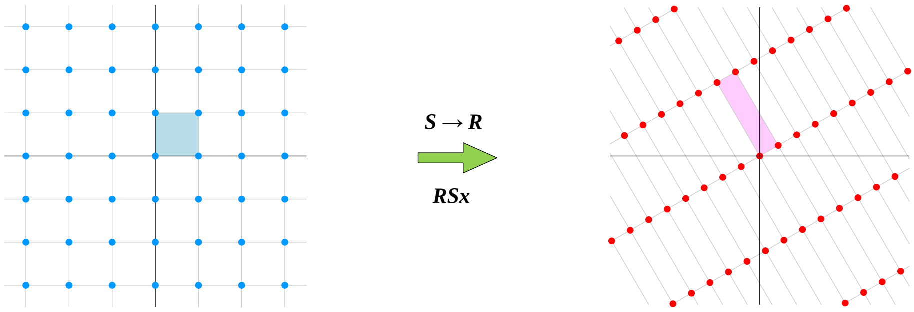


图 20. 先缩放再旋转

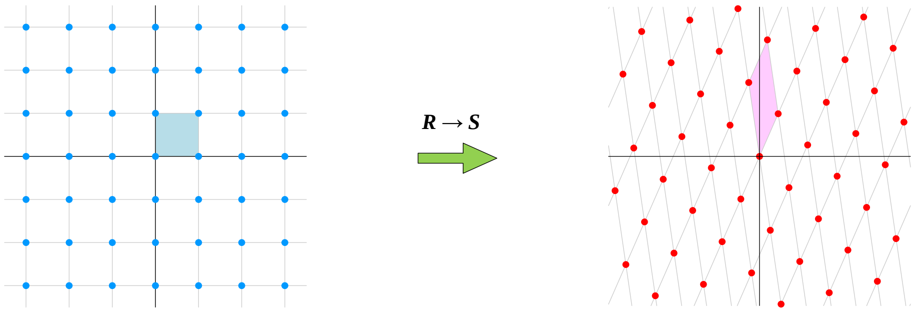


图 21. 先旋转再缩放

两个 2 × 2 缩放矩阵相乘满足交换律，因为它们都是对角阵。下式的 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 均为缩放矩阵，相乘时交换顺序不影响结果：

$$\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1 \tag{32}$$

图 22 给出一个按不同顺序先后缩放的例子。

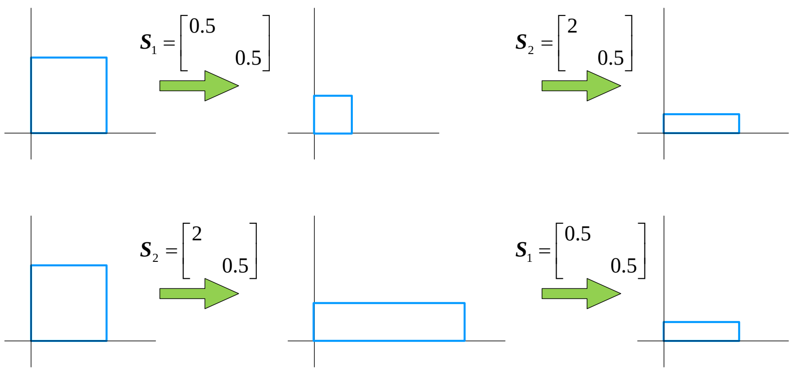


图 22. 两个 2 × 2 缩放矩阵连乘满足交换律

此外，两个形状相同的旋转矩阵相乘也满足交换律。令 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 为：

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{33}$$

根据三角恒等式，$\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 的乘积可以整理为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

同理，$\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_1$ 的乘积也可以整理为：

$$\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \tag{35}$$

图 23 给出的例子从几何角度说明上述规律。

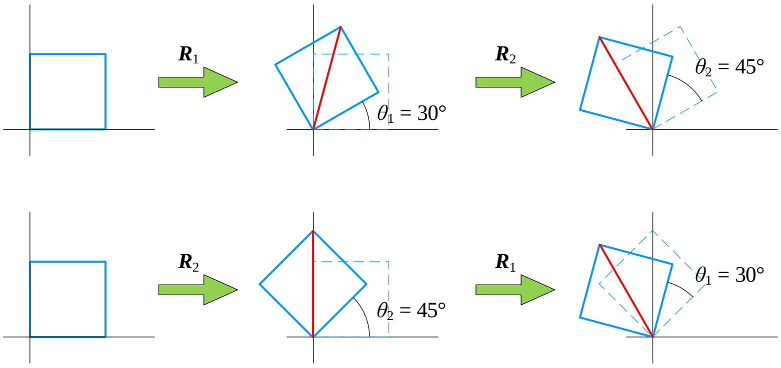


图 23. 两个 2 × 2 旋转矩阵连乘满足交换律

下面采用《数学要素》一册介绍的极坐标推导本节给出的旋转变换。

图 24 给出的是向量 $\boldsymbol{a}$ 在极坐标系坐标为 (r, α)，在正交系中向量 $\boldsymbol{a}$ 的横纵坐标为：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{36}$$

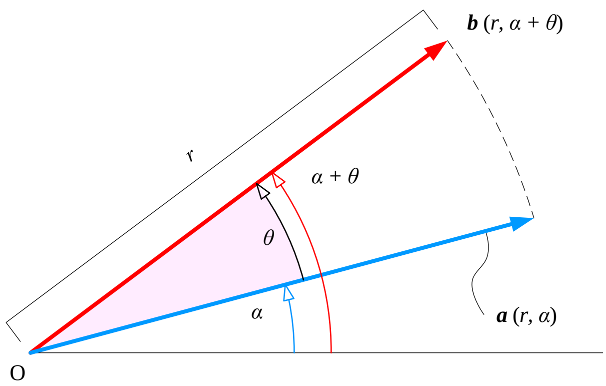


图 24. 极坐标中解释旋转

向量 $\boldsymbol{a}$ 逆时针旋转 θ 后，得到向量 $\boldsymbol{b}$。$\boldsymbol{b}$ 对应极坐标为 $(r, \alpha + \theta)$。向量 $\boldsymbol{b}$ 对应的横纵坐标为：

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix} \tag{37}$$

(37) 展开得到：

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underbrace{r\cos\alpha}_{x_1}\cos\theta-\underbrace{r\sin\alpha}_{x_2}\sin\theta \\ \underbrace{r\sin\alpha}_{x_2}\cos\theta+\underbrace{r\cos\alpha}_{x_1}\sin\theta \end{bmatrix} \tag{38}$$

将 (36) 中 x_1 和 x_2 代入 (38)，得到：

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\cos\theta-x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

8.5 镜像：行列式值为负

本节介绍两种用矩阵运算完成镜像计算的方法。

切向量

第一种镜像用切向量来完成。切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 具体为：

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

关于通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ 直线**镜像** (reflection) 的线性变换操作如下：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

对 $\boldsymbol{T}$ 求行列式值：

$$\det\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1^2-\tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2-\tau_1^2 \end{bmatrix}\right)=\frac{-\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)^2-4\tau_1^2\tau_2^2}{\|\boldsymbol{\tau}\|^4}=\frac{-\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)^2}{\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)^2}=-1 \tag{42}$$

$\boldsymbol{T}$ 的行列式值为负数，这说明线性变换前后图形发生翻转。图 25 给出两个镜像的例子。

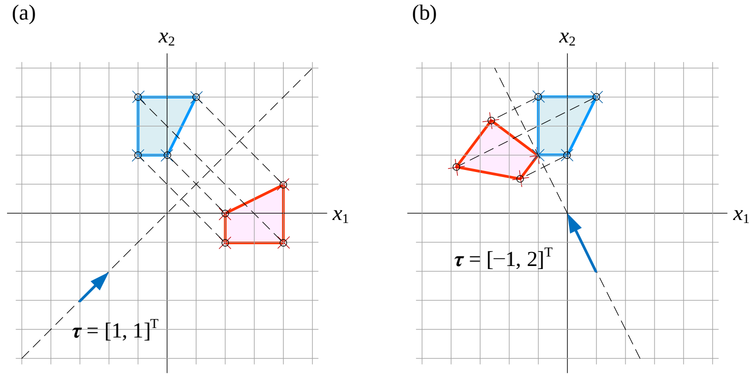


图 25. 两个镜像变换的例子

角度

第二种镜像通过角度定义。关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像，类比 (40)，直线的切向量相当于 $[\cos\theta, \sin\theta]^T$，因此完成镜像的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

实质上，(42) 和 (43) 完全等价。下一章将利用投影这个工具推导 (43)。

关于横纵轴镜像

关于横轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{44}$$

关于纵轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

图 26 所示为关于横轴和纵轴镜像的例子，请大家自行计算转化矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式值。

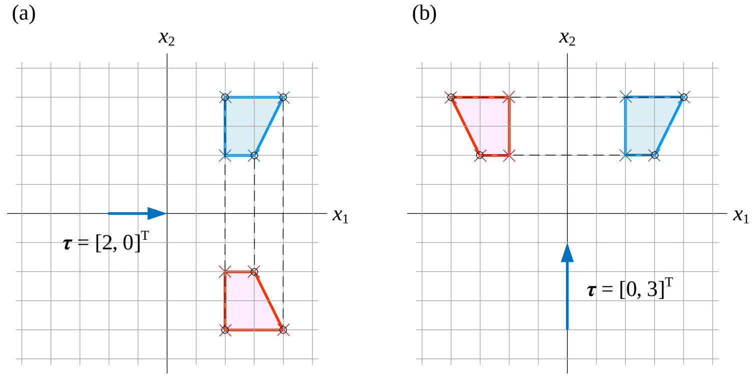


图 26. 分别关于横轴和纵轴镜像的例子

8.6 投影：降维操作

本节从几何角度简单介绍投影。不做特殊说明的话，本书中提到的投影都是**正交投影** (orthogonal projection)。

切向量

给定某点的坐标为 (x_1, x_2)，向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ $[\tau_1, \tau_2]^\mathrm{T}$ 直线方向**投影** (projection)，投影点坐标 (z_1, z_2) 为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{46}$$

正交投影的特点是，(x_1, x_2) 和 (z_1, z_2) 两点连线垂直于 $\boldsymbol{\tau}$。

行列式值

(46) 中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的行列式值为 0：

$$\det\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{47}$$

如图 27 所示，投影是一个降维的过程，平面网格“坍塌”成一条直线。

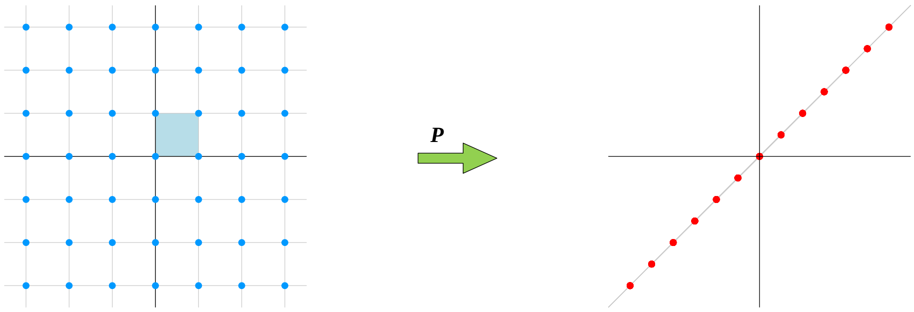


图 27. 投影网格

请大家自行计算图 28 中两个投影矩阵的具体值，并检验它们的行列式值是否为 0。

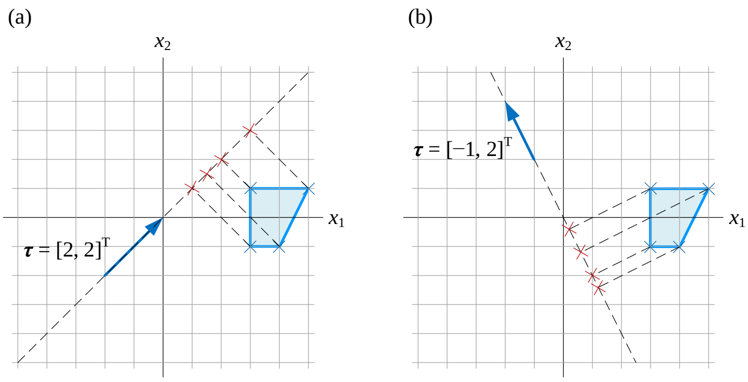


图 28. 两个投影例子

横、纵轴

向横轴投影，相当于将图形压扁到横轴：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

向纵轴投影对应的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

显然 (48) 和 (49) 中两个不同矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的行列式值都为 0。

秩

简单整理 $\boldsymbol{P}$ 得到：

$$P = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} & \tau_2\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{50}$$

我们发现，$\boldsymbol{P}$ 的列向量之间存在倍数关系，即 $\boldsymbol{P}$ 的列向量线性相关。也就是说，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 1，即 $\text{rank}(\boldsymbol{P}) = 1$。大家自行计算 (48) 和 (49) 中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的秩。

张量积

再进一步，我们发现 (50) 可以写成：

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} & \tau_2\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}\right) @ \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \tag{51}$$

容易发现，上式中存在本书第 2 章讲过的向量**单位化** (vector normalization)，也叫归一化。也就是说 $\boldsymbol{\tau}$ 单位化得到单位向量 (unit vector) $\hat{\boldsymbol{\tau}}$：

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

(51) 可以进一步写成张量积的形式，具体如下：

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{53}$$

大家可能已经疑惑了，正交投影怎么和张量积联系起来了？卖个关子，我们把这个问题留给下两章回答。

8.7 再谈行列式值：几何视角

有了本章之前的内容，本节总结行列值的几何意义。

对于一个 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$，它对应一定的线性变换，而 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值决定了几何变换前后面积缩放比例。

行列值为正

举个例子，给定矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{54}$$

把 $\boldsymbol{A}$ 写成 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$，其中：

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{55}$$

e_1 和 e_2 向量经过矩阵 A 线性变换得到 a_1 和 a_2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a_2} \tag{56}$$

如图 29 所示，e_1 和 e_2 向量构成的正方形面积为 1。而 a_1 和 a_2 向量构成的平行四边形面积为 11，即对应 $|A| = 11$，平面几何形状放大 11 倍。

反之，如果矩阵 A 的行列式值大于 0、小于 1，对应平面几何形状缩小。当然，行列式值可以为 0，也可以为负数。

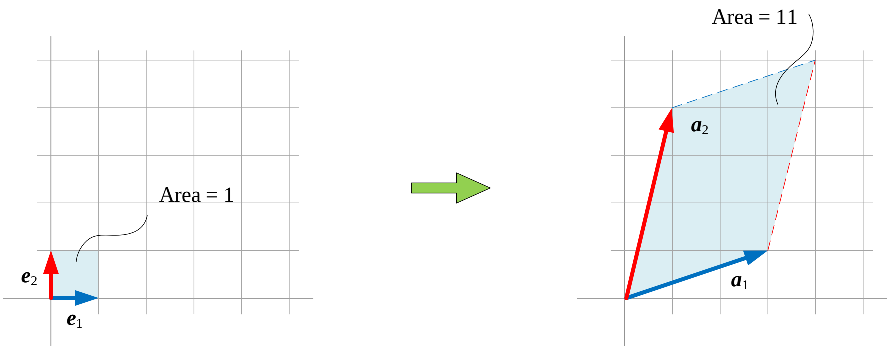


图 29. 行列式值为正

行列式值为 0

如果矩阵 A 行列式值为 0 时，从几何上来讲，A 包含“降维”变换。我们看这个例子，e_1 和 e_2 向量经过矩阵线性变换得到 a_1 和 a_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a_1}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a_2} \tag{57}$$

如图 30 所示，a_1 和 a_2 向量共线，夹角为 0 °，这样它们构成图形的面积也为 0，对应 $|A| = 0$。

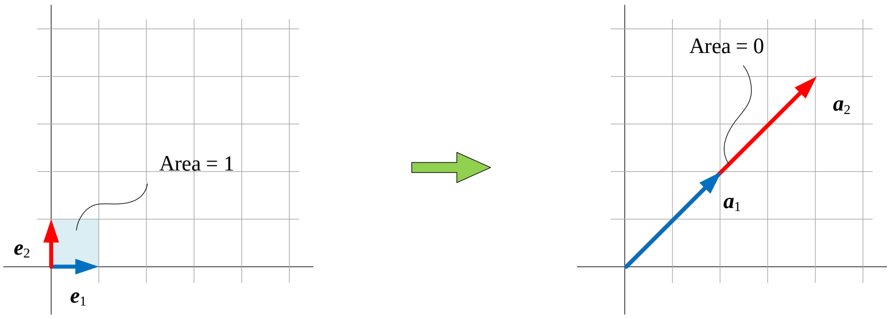


图 30. 行列式值为零

行列式值为负

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行列式值为负，几何上来看，几何图形翻转。如图 31 所示，顺时针来看，蓝色箭头和红色箭头几何变换前后“先后次序”发生调转。图 31 中图形几何变换后面积则放大了 10 倍 (行列式值的绝对值为 10)。请大家根据图 31 中 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 两个向量判断 $\boldsymbol{A}$ 的具体值。

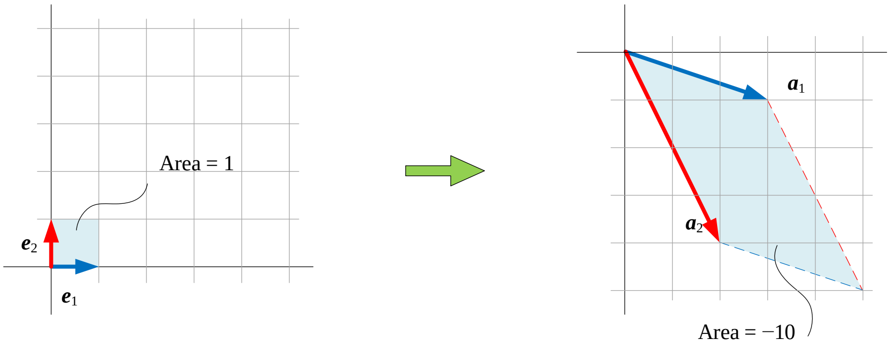


图 31. 行列式值为负

几何变换和行列式值

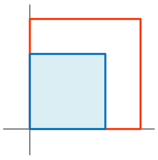
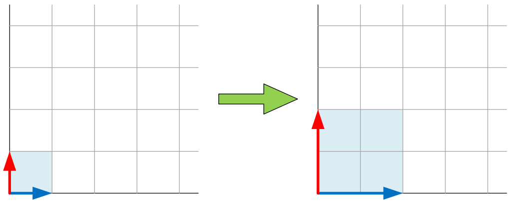
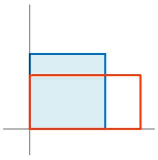
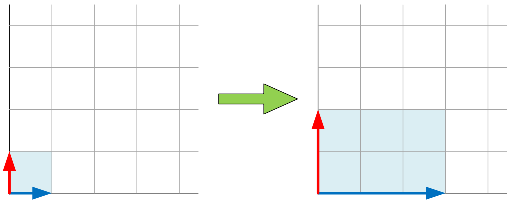
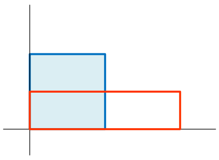
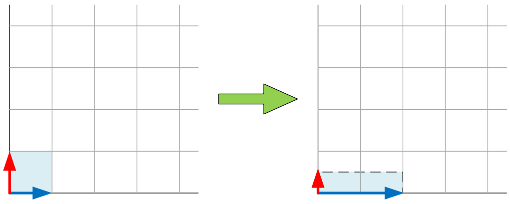
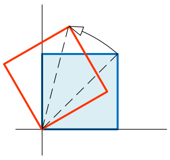
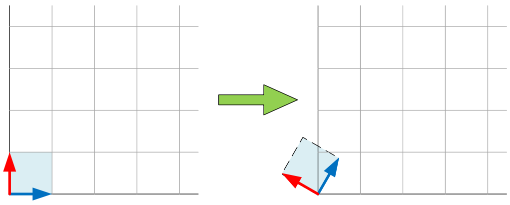
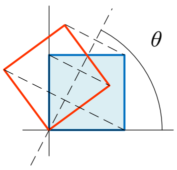
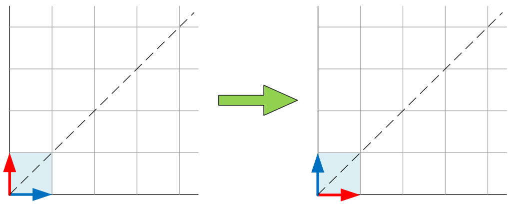
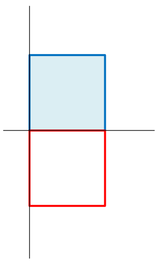
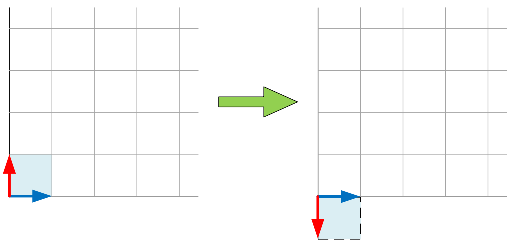
2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$。在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 单位向量变成 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$：

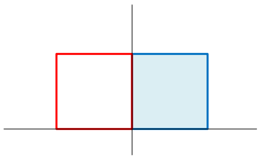
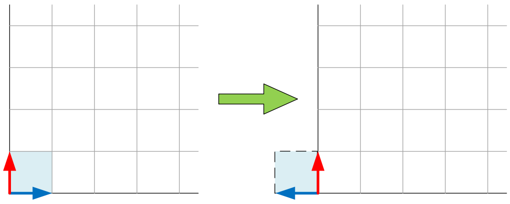
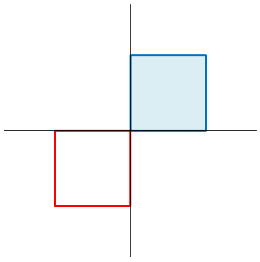
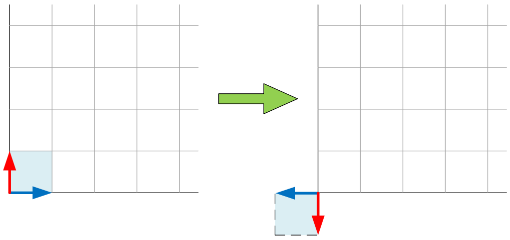
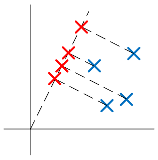
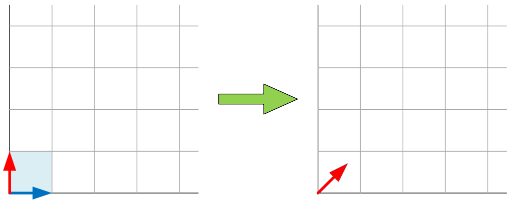
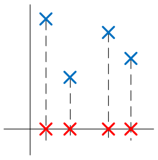
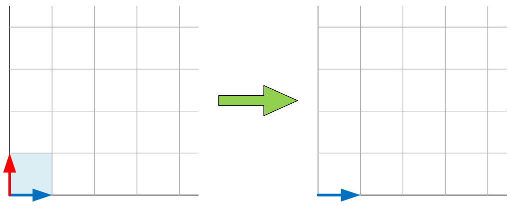
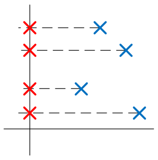
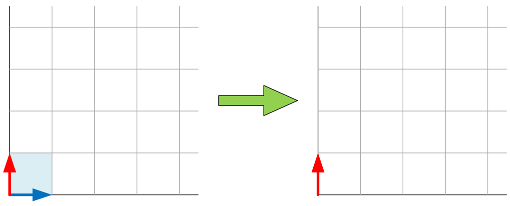
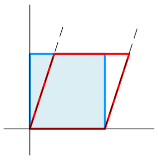
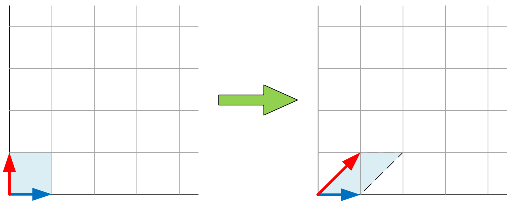
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_1} = \boldsymbol{a}_1, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_2} = \boldsymbol{a}_2 \tag{58}$$

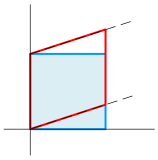
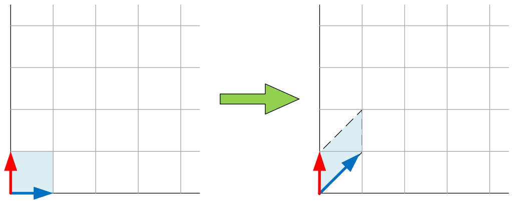
本节前文提过以 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 为边构成的平行四边形为正方形，对应的面积为 1。以 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 为边构成的一个平行四边形对应的面积就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值。表 2 总结本章主要几何变换，给出具体实例、计算行列式值，并比较几何变换前后图形的变化。

表 2. 本章主要几何变换示例

几何变换	例子和行列式值	面积变化

等比例缩放 s 倍 (scaling) 	$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=4,\quad \text{rank}(A)=2$	
非等比例缩放 (unequal scaling) 	$A=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=6,\quad \text{rank}(A)=2$	
挤压 s 倍 (squeeze) 	$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&0.5\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=1,\quad \text{rank}(A)=2$	
逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation) 	$A=\begin{bmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\1/2\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=1,\quad \text{rank}(A)=2$ 逆时针旋转 60°	
关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像；等同于上例，切向量相当于 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 	$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=-1,\quad \text{rank}(A)=2$ 夹角为 45°	
关于横轴镜像对称 (reflection) 	$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $a_1=Ae_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $a_2=Ae_2=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=-1,\quad \text{rank}(A)=2$	

关于纵轴镜像对称 (reflection) 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=-1,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	
关于原点对称 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=1,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	
向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ $[\tau_1, \tau_2]^{\mathrm{T}}$ 直线投影 (projection) 	$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=0,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$	
向横轴投影 (projection) 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=0,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$	
向纵轴投影 (projection) 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=0,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$	
沿水平方向剪切，θ 为剪切角 (shear) 	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=1,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$	

沿竖直方向剪切，θ 为剪切角 (shear) 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 1, \quad \text{rank}(A) = 2$	

本章讲了很多种几何变换，请大家格外关注平移、缩放、旋转和投影。我们将会在接下来的内容中反复使用这四种几何变换。

此外，本章在讲解几何变换的同时，还和大家从几何角度回顾并探讨了矩阵可逆性、矩阵乘法不满足交换律、秩、行列式值等线性代数概念。请大家特别注意行列式值的几何视角，我们将在特征值分解中再进一步探讨。

用几何视角理解线性代数概念，是学习线性代数的唯一“捷径”。此外，数据视角会让大家看到线性代数的实用性，并直接和编程联结起来。

有数据的地方，就有向量！

有向量的地方，就有几何！

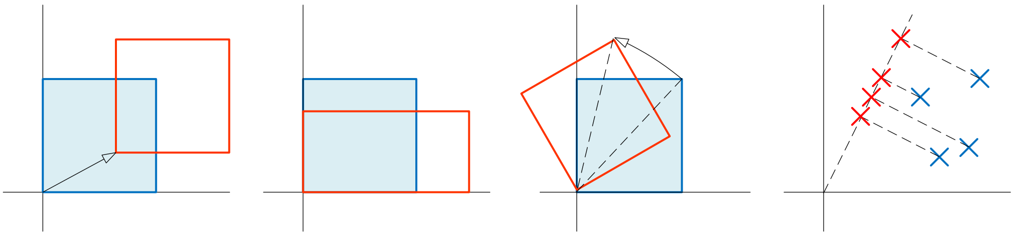


图 32. 总结本章重要内容的四副图