

## 21

## Surfaces and Positive Definiteness

## 曲面和正定性

代数、微积分、几何、线性代数的结合体



神几何化一切。

*God ever geometrizes.*

—— 柏拉图 (Plato) | 古希腊哲学家 | 424/423 ~ 348/347 BC

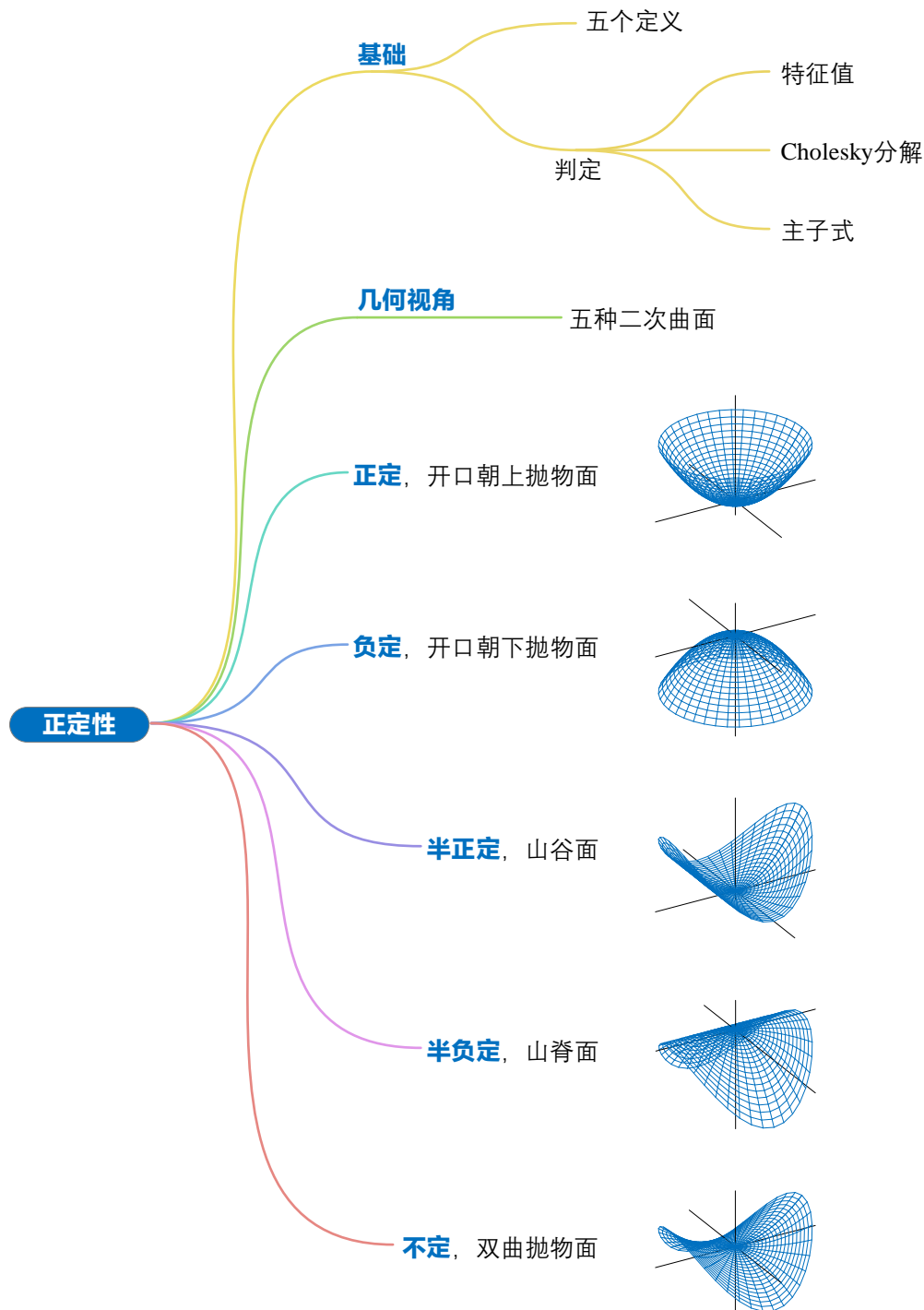


- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制填充等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ◀ numpy.arange() 在指定区间内返回均匀间隔数组
- ◀ numpy.array() 创建 array 数据类型
- ◀ numpy.cos() 余弦函数
- ◀ numpy.linalg.cholesky() Cholesky 分解函数
- ◀ numpy.linspace() 产生连续均匀间隔数组
- ◀ numpy.meshgrid() 生成网格化数据
- ◀ numpy.multiply() 向量或矩阵逐项乘积
- ◀ numpy.roots() 多项式求根
- ◀ numpy.sin() 正弦函数
- ◀ numpy.sqrt() 平方根
- ◀ sympy.abc import x 定义符号变量 x
- ◀ sympy.diff() 求解符号导数和偏导解析式
- ◀ sympy.Eq() 定义符号等式
- ◀ sympy.evalf() 将符号解析式中未知量替换为具体数值
- ◀ sympy.plot\_implicit() 绘制隐函数方程
- ◀ sympy.symbols() 定义符号变量

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 21.1 正定性

**正定性** (positive definiteness) 是优化问题经常出现线性代数概念。本章结合三维曲面，特别是**二次曲面** (quadratic surface)，和大家聊一聊正定性及其应用。

### 五个定义

矩阵正定性分为如下五种情况。

当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  ( $\mathbf{x}$  为非零列向量) 时，如果满足：

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (1)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  为**正定矩阵** (positive definite matrix)。

当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  时，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (2)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  为**半正定矩阵** (positive semi-definite matrix)。

当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  时，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad (3)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  为**负定矩阵** (negative definite matrix)。

当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  时，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \quad (4)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  为**半负定矩阵** (negative semi-definite matrix)。

矩阵  $\mathbf{A}$  不属于以上任何一种情况， $\mathbf{A}$  为**不定矩阵** (indefinite matrix)。

### 判定正定矩阵

判断矩阵是否为正定矩阵，本书主要采用如下两种方法：

- ◀ 若矩阵为对称矩阵，并且所有特征值为正，则矩阵为正定矩阵；
- ◀ 若矩阵可以进行 Cholesky 分解，则矩阵为正定矩阵。



Bk4\_Ch21\_01.py 介绍如何使用 Cholesky 分解判定矩阵是否为正定矩阵。

### Cholesky 分解

如果矩阵  $A$  为正定矩阵，对  $A$  进行 Cholesky 分解，得到：

$$A = R^T R \quad (5)$$

利用 (5)，将  $x^T A x$  写成如下形式：

$$x^T A x = x^T R^T R x = (R x)^T R x = \|R x\|^2 \quad (6)$$

$R$  中列向量线性无关，若  $x$  为非零向量，则  $R x \neq 0$ ，因此  $x^T A x > 0$ 。

### 特征值分解

对称矩阵  $A$  进行特征值分解得到：

$$A = V \Lambda V^T \quad (7)$$

将 (7) 代入  $x^T A x$ ，得到：

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T V \Lambda V^T x \\ &= \left( V^T x \right)^T \Lambda \left( V^T x \right) \end{aligned} \quad (8)$$

令：

$$z = V^T x \quad (9)$$

(8) 可以写成：

$$\begin{aligned} x^T A x &= z^T \Lambda z \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_D z_D^2 = \sum_{j=1}^D \lambda_j z_j^2 \end{aligned} \quad (10)$$

当上式中特征值均为正数，除非  $z_1, z_2, \dots, z_D$  均为 0 (即  $z$  为零向量)，否则上式大于 0。如果  $x$  和  $z$  存在  $x = Vz$  这个映射关系且  $V$  为规范正交基，如果  $z$  为非零向量， $x$  也是非零向量。

若矩阵  $A$  为负定矩阵，则  $A$  的特征值均为负值。矩阵  $A$  为半正定矩阵，则矩阵  $A$  特征值为正值或 0。矩阵  $A$  为半负定矩阵，则矩阵特征值为负值或 0。

### 格拉姆矩阵

给定数据矩阵  $X$ ，它的格拉姆矩阵为  $G = X^T X$ 。格拉姆矩阵至少都是半正定矩阵。

将  $\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$  写成如下形式：

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{x} = \|\mathbf{X} \mathbf{x}\|^2 \geq 0 \quad (11)$$

特别地，当  $\mathbf{X}$  列满秩时，格拉姆矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$  为正定矩阵。若  $\mathbf{X}$  列满秩， $\mathbf{x}$  为非零向量，则  $\mathbf{X} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ，因此  $\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} > 0$ 。

$\mathbf{G} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$  半正定也解释了为什么奇异值分解得到的奇异值非负，即  $s_j \geq 0$ 。

这一节介绍了正定性相关性质，但是要直观理解这个概念，还需要借助几何视角。

## 21.2 几何视角看正定性

给定如下  $2 \times 2$  对称矩阵  $\mathbf{A}$ ：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (12)$$

构造如下二元函数  $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

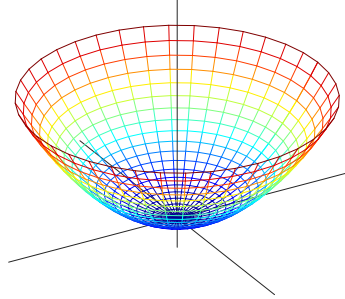
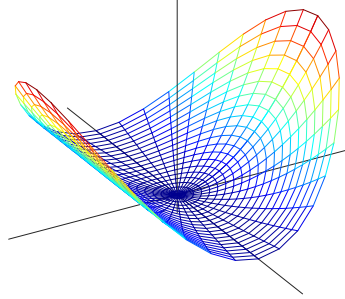
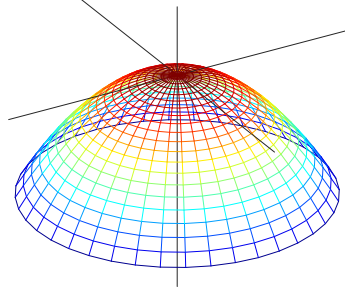
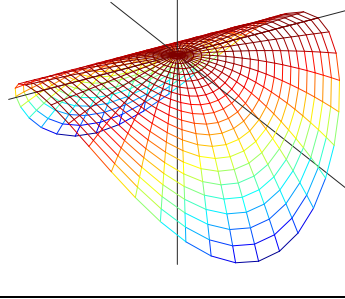
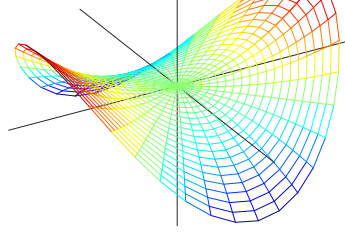
在三维正交空间中，当矩阵  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  正定性不同时， $y = f(x_1, x_2)$  对应曲面展现出不同的形状：

- ◀ 当  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  为正定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$  对应开口向上抛物面；
- ◀ 当  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  为半正定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$  对应山谷面；
- ◀ 当  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  为负定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$  对应开口向下抛物面；
- ◀ 当  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  为半负定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$  对应山脊面；
- ◀ 当  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  不定时， $y = f(x_1, x_2)$  为马鞍面，也叫做双曲抛物面。

表 1 总结了矩阵  $\mathbf{A}$  不同正定性条件下对应的曲面形状。本章以下六节就按表中形状顺序展开。

表 1. 正定性的几何意义

$\mathbf{A}_{D \times D}$	特征值	形状
---------------------------	-----	----

$A_{D \times D}$ 为正定矩阵 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	$D$ 个特征值均为正值	
$A_{D \times D}$ 为半正定矩阵，秩为 $r$ $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	$r$ 个正特征值， $D - r$ 个特征值为 0	
$A_{D \times D}$ 为负定矩阵 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$	$D$ 个特征值均为负值	
$A_{D \times D}$ 为半负定矩阵，秩为 $r$ $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$	$r$ 个负特征值， $D - r$ 个特征值为 0	
$A_{D \times D}$ 为不定矩阵	特征值符号正负不定	

## 21.3 开口朝上抛物面：正定

### 正圆

先来看一个单位矩阵的例子。若矩阵  $A$  为  $2 \times 2$  单位矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

构造如下二元函数  $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad (15)$$

观察上式，容易发现只有当  $x_1 = 0$  且  $x_2 = 0$  时，即  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

容易求得  $A$  特征值分别为  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 1$ ，对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

计算矩阵  $A$  的秩， $\text{rank}(A) = 2$ 。

图 1 (a) 所示为  $y = f(x_1, x_2)$  曲面。在该曲面边缘  $A$ 、 $B$  和  $C$  放置小球，小球都会朝着曲面最低点滚动。

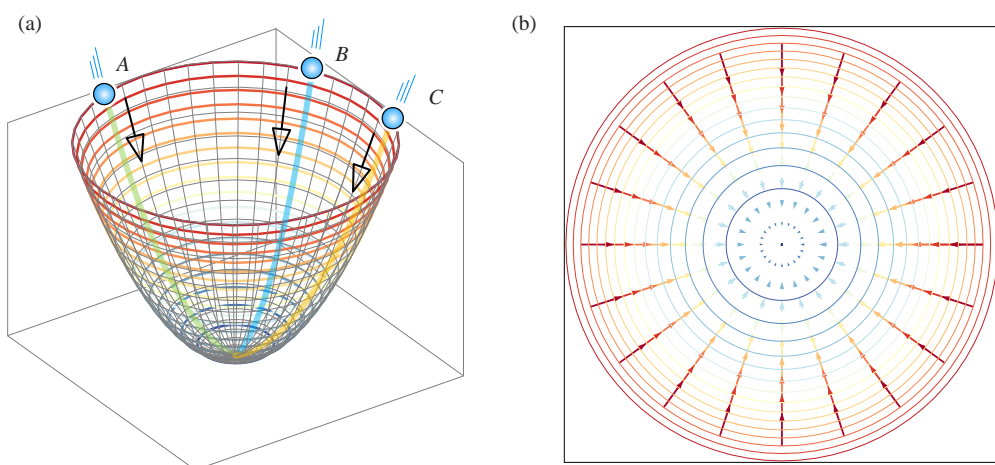


图 1. 正定矩阵曲面和梯度下降，正圆抛物面

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

(15) 的梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

图 1 (b) 展示曲面等高线为正圆，和不同位置的梯度下降向量。

如图 1 (b) 所示，梯度下降向量均指向最小值点。此外，梯度下降向量方向垂直所在等高线。梯度下降向量的长度代表坡度的陡峭程度。向量长度越大，坡度越陡，该方向上函数值变化率越大。当梯度下降向量的长度为 0 时，就对应驻点。

梯度向量为零向量  $\mathbf{0}$  的点，就是  $y = f(x_1, x_2)$  两个偏导均为 0 的点。本系列丛书《数学要素》介绍过，(0, 0) 这个点被称作驻点。通过图 1，很容易判断 (0, 0) 就是二元函数最小值点。

**▲** 注意，图 1 给出的是梯度下降向量(下山方向)，方向和梯度向量(上山方向)正好相反。沿着梯度下降向量方向移动，函数值减小；沿着梯度向量方向移动，函数值增大。

## 正椭圆

再看一个  $2 \times 2$  正定矩阵例子。矩阵  $\mathbf{A}$  具体值如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

同样，构造二元函数  $y = f(x_1, x_2)$ ，具体如下：

$$\begin{aligned} y = f(x_1, x_2) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 \end{aligned} \quad (19)$$

同样，只有  $x_1 = 0$  且  $x_2 = 0$  时， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。图 2 所示为 (19) 对应开口向上正椭圆抛物面。



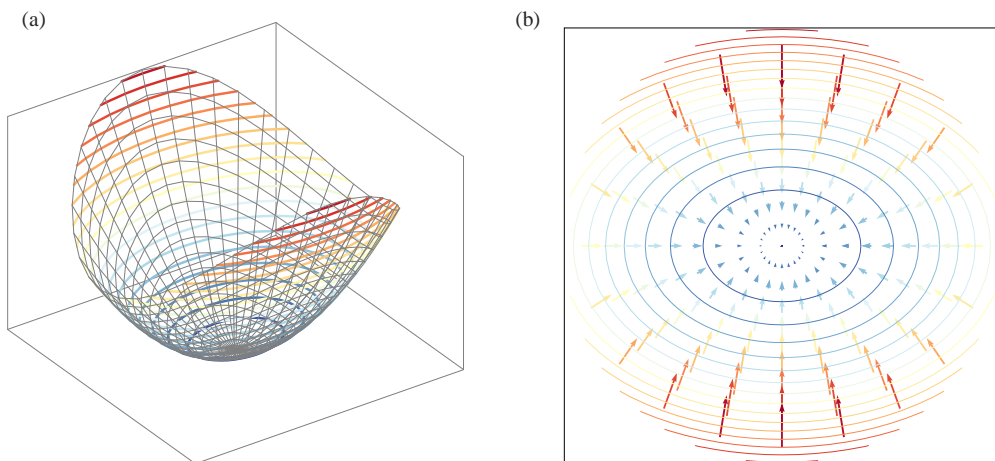


图 2. 正定矩阵曲面和梯度下降，正椭圆抛物面

容易求得  $A$  特征值分别为  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 2$ ，对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(15) 的梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

梯度向量为  $\mathbf{0}$  的点  $(0, 0)$  也是函数的最小值点。

### 旋转椭圆

本节前两个例子对应的曲面的等高线分别是正圆和正椭圆，下面再看一个旋转椭圆情况。 $A$  矩阵具体如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

构造函数  $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 1.5x_1^2 + x_1x_2 + 1.5x_2^2 \end{aligned} \quad (23)$$

同样，只有当  $x_1 = 0$  且  $x_2 = 0$  时， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

经过计算得到  $A$  特征值也是  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 2$ ；这两个特征值对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

(23) 梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 - x_2 \\ -x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$y = f(x_1, x_2)$  曲面对应图像如图 3。图 2 和图 3 两个椭圆唯一的差别就是旋转角度。根据前文所学，我们知道这两组椭圆的半长轴和半短轴的比例关系为  $\sqrt{\lambda_2}/\sqrt{\lambda_1}$ ，即  $\sqrt{2}/1$ 。

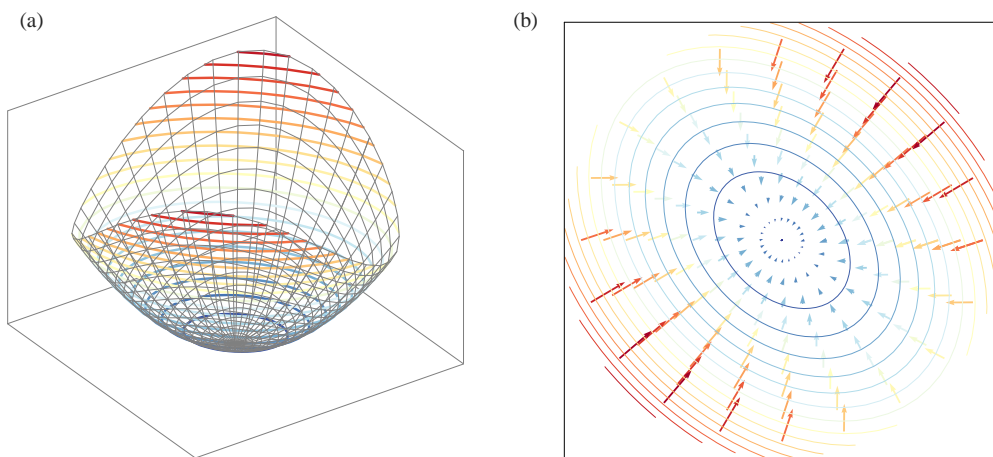


图 3. 正定矩阵曲面和梯度下降，开口向上旋转椭圆抛物面



Bk4\_Ch21\_02.py 绘制图 1、图 2、图 3，此外请大家修改代码并绘制本章其他图像。

## 21.4 山谷面：半正定

下面来聊一聊半正定矩阵情况。举个例子，矩阵  $A$  取值如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

容易判定  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$ 。构造如下二元函数  $y = f(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} y = f(x_1, x_2) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 \end{aligned} \quad (27)$$

$x_1 = 0$  时, 不管  $x_2$  取任何值, 上式为 0。

图 4 展示  $y = f(x_1, x_2)$  对应曲面。观察该图容易发现, 除了纵轴以外任意点处放置一个小球, 小球都会滚动到谷底。

(27) 梯度下降向量为:

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

谷底位置对应一条直线, 这条直线上每一点处梯度向量均为  $\mathbf{0}$ , 它们都是函数  $y = f(x_1, x_2)$  极小值。

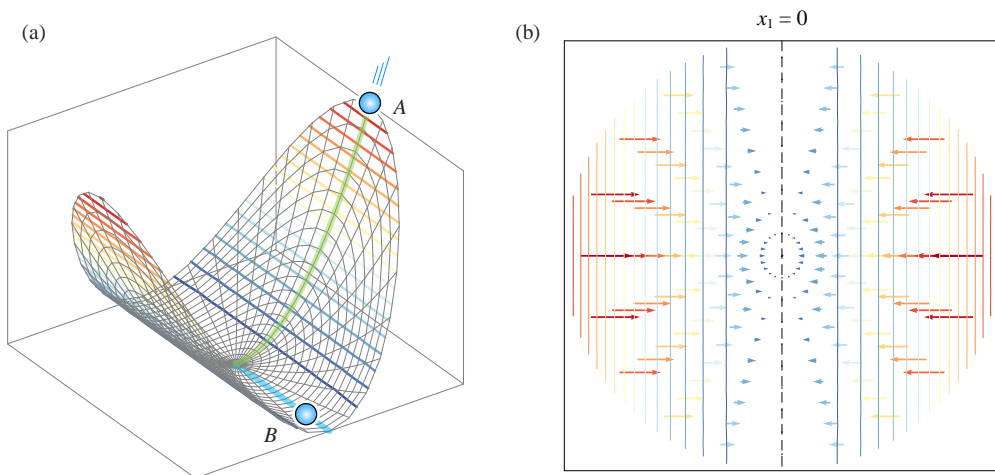


图 4. 半正定矩阵对应曲面

## 旋转山谷面

下式中矩阵  $\mathbf{A}$  也是半正定矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (29)$$

构造函数  $y = f(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 0.5x_1^2 - x_1x_2 + 0.5x_2^2 \end{aligned} \quad (30)$$

(30) 配方得到:

$$f(x_1, x_2) = 0.5x_1^2 - x_1x_2 + 0.5x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \quad (31)$$

容易发现, 任何满足  $x_1 = x_2$  的点, 都会使得  $y = f(x_1, x_2)$  为 0。

(30) 中矩阵  $\mathbf{A}$  特征值为  $\lambda_1 = 0$  和  $\lambda_2 = 1$ , 对应特征向量如下:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

图 5 展示 (30) 对应的旋转山谷面。同样, 小球沿图 5 中  $\mathbf{v}_1$  (特征值为 0 对应特征向量) 方向运动, 函数值没有任何变化。这条直线上的点都是 (31) 二元函数极小值点。

(31) 梯度下降向量为:

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

观察图 5 (b), 容易发现梯度下降向量长度各有不同, 但是它们相互平行, 且都垂直于等高线, 指向函数减小方向, 即下山方向。

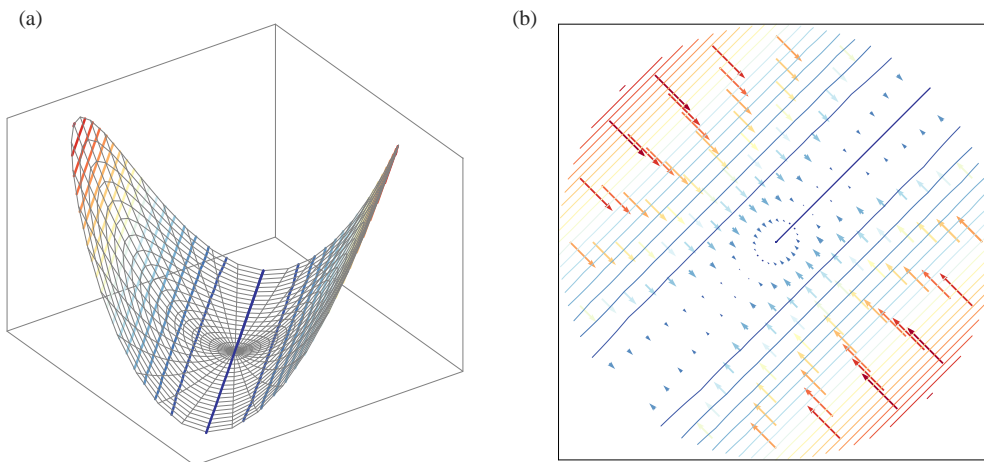


图 5. 旋转山谷面

## 21.5 开口朝下抛物面：负定

最简单的负定矩阵是单位矩阵取负，即 $-I$ 。 $-I$ 的特征值都为 $-1$ 。

下面也用 $2 \times 2$ 矩阵讨论负定。如下 $A$ 为负定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

构造如下二元函数 $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -x_1^2 - 2x_2^2 \end{aligned} \quad (35)$$

观察上式，容易发现只有当 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$ 时， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

很容易求得 $A$ 特征值分别为 $\lambda_1 = -2$ 和 $\lambda_2 = -1$ ，对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

图 6 展示负定矩阵对应曲面，容易发现 $y = f(x_1, x_2)$ 对应曲面为凹面。在曲面最大值处放置一个小球，小球处于不稳定平衡状态。受到轻微扰动后，小球沿着任意方向运动，都会下落。

(35) 中 $y = f(x_1, x_2)$ 梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

如图 6 所示，梯度下降向量方向指向均背离最大值点。

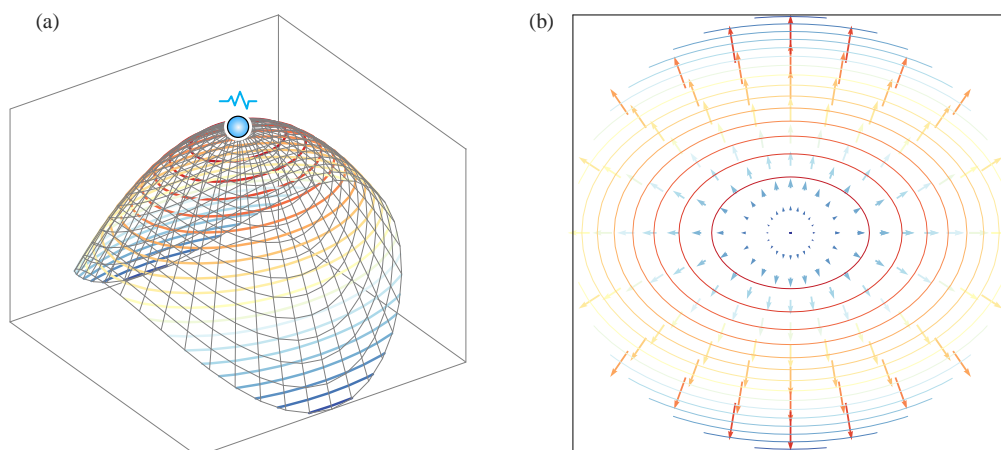


图 6. 负定矩阵对应曲面

## 21.6 山脊面：半负定

下面看一个半负定矩阵例子，矩阵  $A$  取值如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

构造  $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y = f(x_1, x_2) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -x_2^2 \end{aligned} \quad (39)$$

$x_2 = 0$ ,  $x_1$  为任意值，上式为 0。矩阵  $A$  的秩为 1,  $\text{rank}(A) = 1$ 。

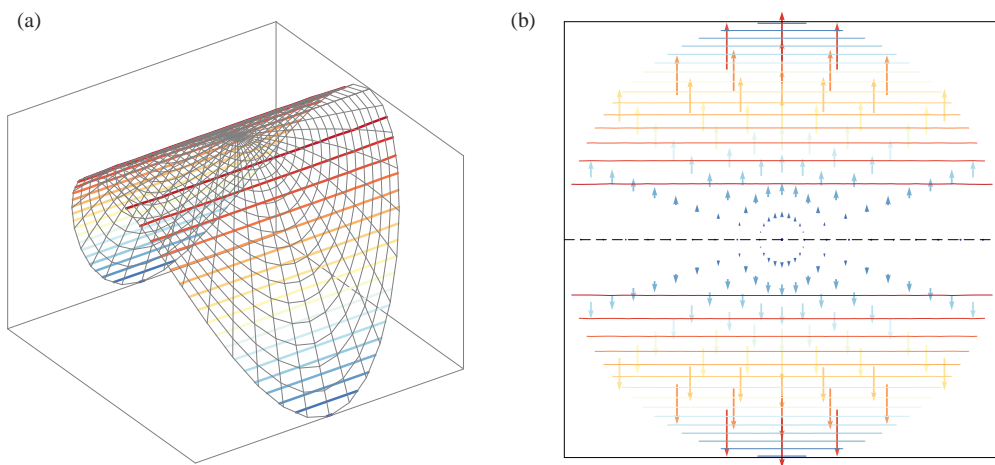


图 7. 半负定矩阵对应山脊面

图 7 展示半负定矩阵对应山脊面，发现曲面有无数个极大值。在任意极大值（山脊）处放置一个小球，受到扰动后，小球会沿着曲面滚下。然而，沿着山脊方向运动，函数值没有任何变化。

(39) 梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

图 7 (b) 中梯度下降方向平行于纵轴，指向函数值减小方向。

## 21.7 双曲抛物面：不定

本节最后聊一下不定矩阵情况。举个例子， $\mathbf{A}$  为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

构造函数  $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$\begin{aligned} y = f(x_1, x_2) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned} \quad (42)$$

求得矩阵  $\mathbf{A}$  对应特征值为  $\lambda_1 = -1$  和  $\lambda_2 = 1$ ，对应特征向量如下：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

图 8 展示  $y = f(x_1, x_2)$  对应曲面。

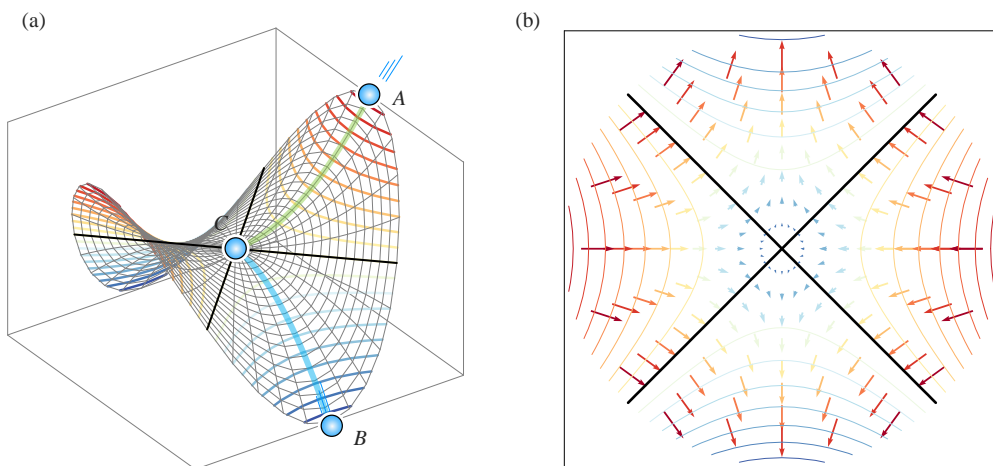


图 8. 不定矩阵对应曲面，马鞍面

当  $y$  不为零时，曲面对应等高线为双曲线。当  $y$  为零时，曲面对应等高线是两条在  $x_1x_2$  平面内直线 (图 8 (a) 中深色直线)，它们是双曲线渐近线。

图 8 告诉我们，曲面边缘不同位置放置小球会有完全不同结果。 $A$  点处松手小球会向向着中心方向滚动， $B$  点处小球受到轻微扰动后会朝远离中心方向滚动。

$y = f(x_1, x_2)$  梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

图 8 所示马鞍面中心  $C$  既不是极小值点，也不是极大值点；图 8 中马鞍面中心点被称作为**鞍点** (saddle point)。另外，沿着图 8 中黑色轨道运动，小球高度没有任何变化。

### 旋转双曲抛物面

图 8 中马鞍面顺时针旋转  $45^\circ$  得到图 9 曲面。图 9 曲面对应矩阵  $A$  如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$



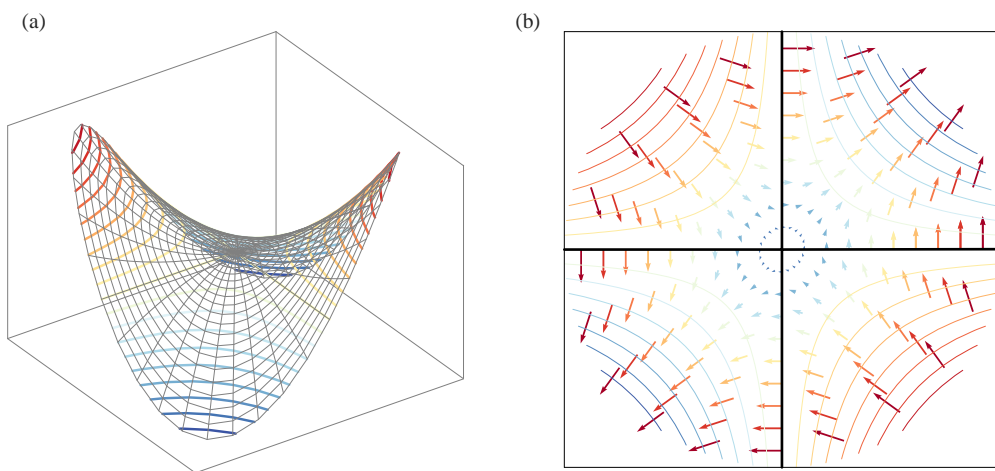


图 9. 不定矩阵对应曲面，旋转马鞍面

构造如下二元函数  $y = f(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned}
 y &= f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 &= -2x_1x_2
 \end{aligned} \tag{46}$$

在  $y = f(x_1, x_2)$  为非零定值时，发现上式相当于反比例函数。

(46) 的梯度下降向量为：

$$-\nabla f(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

请大家自行分析图 8 两幅图。

## 21.8 多极值曲面：局部正定性

### 判定二元函数极值点

本系列丛书在《数学要素》一册介绍过如何判定二元函数  $y = f(x_1, x_2)$  的极值。对于  $y = f(x_1, x_2)$ ，一阶偏导数  $f_{x_1}(x_1, x_2) = 0$  和  $f_{x_2}(x_1, x_2) = 0$  同时成立的点  $(x_1, x_2)$  为二元函数  $f(x_1, x_2)$  的驻点。如图 10 所示，驻点可以是极大值、极小值或鞍点。

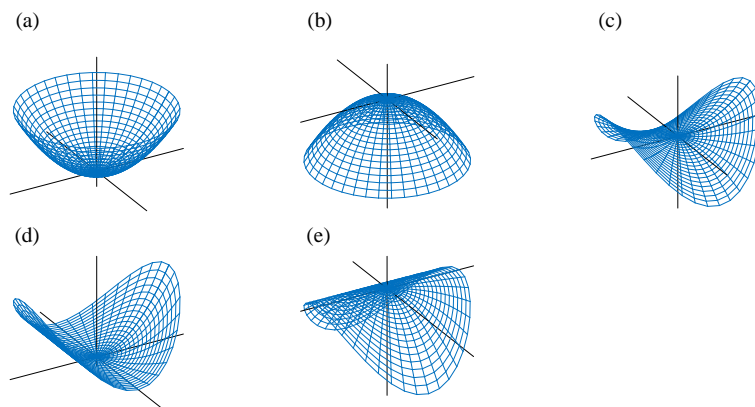


图 10. 二元函数驻点的三种情况

当时，我们聊过为了进一步判定驻点到底是极大值、极小值或是鞍点，我们需要知道二元函数  $f(x_1, x_2)$  二阶偏导。如果  $f(x_1, x_2)$  在  $(a, b)$  邻域内连续，且  $f(x_1, x_2)$  二阶偏导连续。令，

$$A = f_{x_1 x_1}, \quad B = f_{x_1 x_2}, \quad C = f_{x_2 x_2} \quad (48)$$

$f(a, b)$  是否为极值点可以通过如下条件判断：

- a)  $AC - B^2 > 0$  存在极值，且当  $A < 0$  有极大值， $A > 0$  时有极小值；
- b)  $AC - B^2 < 0$  没有极值；
- c)  $AC - B^2 = 0$ ，可能有极值，也可能没有极值，需要进一步讨论。

当时我们留了一个问题， $AC - B^2$  这个表达值的含义到底是什么？本节就来回答这个问题。

(13) 中函数的**黑塞矩阵** (Hessian matrix) 为：

$$H = \frac{\partial^2 (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = 2\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (49)$$

注意上式中  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。

$\mathbf{A}$  的行列式值为：

$$|\mathbf{A}| = ac - b^2 \quad (50)$$

相信大家已经在上式中看到和  $AC - B^2$  一样的形式。

**⚠ 注意**，对于二元函数， $\mathbf{A}$  的形状为  $2 \times 2$ 。 $\mathbf{A}$  为正定或负定时， $\mathbf{A}$  的两个特征值同号，因此  $\mathbf{A}$  的行列式值都大于 0。而  $a$  的正负则决定了开口方向，也就是决定了  $\mathbf{A}$  是正定还是负定，因此

决定了极大值或极小值。再进一步， $a$  实际上是  $A$  的一阶主子式。这引出了，判定正定的另一个方法。 $A$  正定的充分必要条件为  $A$  的顺序主子式全大于零。

## 举个例子

继续采用《数学要素》一书中反复出现的多极值曲面的例子。

图 11 为曲面平面等高线。图中  $\times$  对应的位置为梯度向量为  $\mathbf{0}$ 。观察图中等高线不难发现，I、II、III 点为极大值点，其中 I 为最大值点。IV、V、VI 为极小值点，其中 IV 为最小值点。VII、VIII、IX 是鞍点。

图 12 给出的是二元函数的梯度向量图 (和梯度下降向量方向相反)。极大值点处，梯度向量 (上山方向) 汇聚；极小值点处，梯度向量发散。这一点很好理解，在极大值点附近，朝着极大值走就是上山；相反，在极小值点附近，背离极小值走则对应上山，朝着极小值走则是下山。

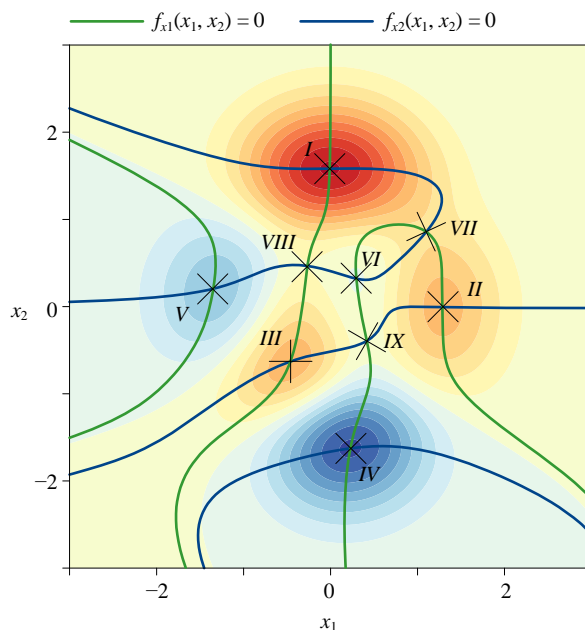


图 11.  $f_{x1}(x_1, x_2) = 0$  和  $f_{x2}(x_1, x_2) = 0$  同时投影在  $f(x_1, x_2)$  曲面填充等高线，来自本系列丛书《数学要素》

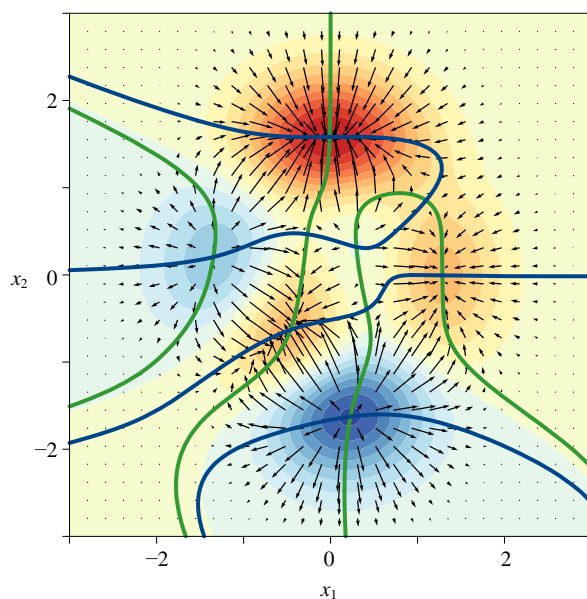


图 12.  $f(x_1, x_2)$  梯度向量图，梯度向量对应“上山”，和梯度下降（下山）反向

图 13 所示为二次函数黑塞矩阵行列式值对应的等高线图，阴影圈出来的六个点对应行列式值为正，因此它们是要考察的极值点。图 13 中虚线为行列式值为 0 对应位置。

根据图 14 所示一阶主子式对应等高线。通过一阶主子式值的正负，即  $f_{x_1x_1}$  正负，可以进一步判定极值点为极大值或极小值点，最终得出的结论和图 11 一致。

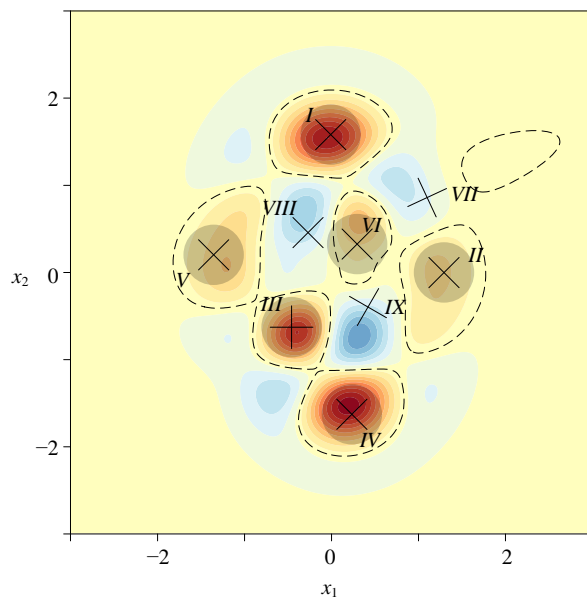


图 13. 黑塞矩阵行列式值

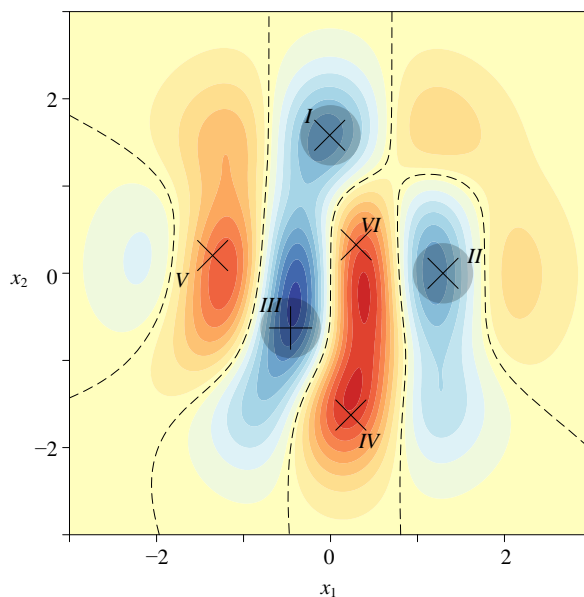


图 14. 一阶主子式正负

### 更一般情况

对于多元函数  $f(\mathbf{x})$ ，利用本书第 17 章介绍的二次逼近可以写成：

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}_p) + \nabla f(\mathbf{x}_p)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^\top \nabla^2 f(\mathbf{x}_p) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \\
 &= f(\mathbf{x}_p) + \nabla f(\mathbf{x}_p)^\top \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \nabla^2 f(\mathbf{x}_p) \Delta \mathbf{x} \\
 &= f(\mathbf{x}_p) + \nabla f(\mathbf{x}_p)^\top \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{51}$$

其中  $\mathbf{x}_p$  为展开点。

假设  $\mathbf{x}_p$  处存在梯度向量，且梯度向量为  $\mathbf{0}$ 。

当  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_p$  时， $\nabla f(\mathbf{x}_p)^\top \Delta \mathbf{x} \rightarrow 0$ 。但是如果在  $\mathbf{x}_p$  点处黑塞矩阵  $\mathbf{H}$  为正定， $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}$  为正。这意味着：

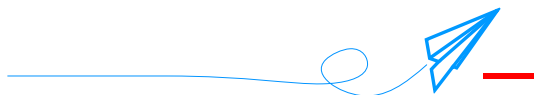
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_p) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}_p)^\top \Delta \mathbf{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}}_{+} > f(\mathbf{x}_p) \tag{52}$$

这种情况称  $\mathbf{x}_p$  局部正定，对应  $\mathbf{x}_p$  为极小值点。这个判断也适用于半正定情况，不过要将上式的  $>$  改为  $\geq$ 。

同理，如果在  $\mathbf{x}_p$  点处黑塞矩阵  $\mathbf{H}$  为负定， $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}$  为负，因此：

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_p) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}_p)^T \Delta \mathbf{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}}_{\rightarrow} < f(\mathbf{x}_p) \quad (53)$$

我们称  $\mathbf{x}_p$  局部负定，对应  $\mathbf{x}_p$  为极大值点。如上判断也适用于半负定情况，同样将上式的  $<$  改为  $\leq$ 。



本章把曲面、梯度向量、正定性、极值这几个重要的概念有机的联系起来。本章给出的各种例子告诉我们几何视角对于理解线性代数概念的重要性。

请大家再次回顾图 15 给出的五种情况，并且将正定性对号入座。相信大家会觉得正定性变得极容易理解。

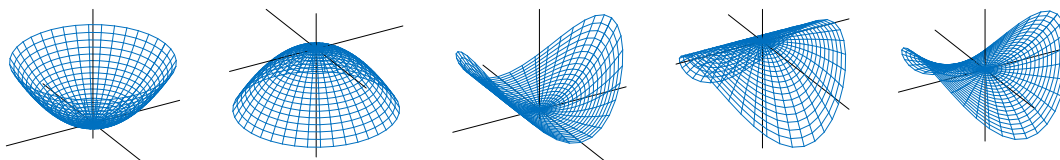


图 15. 总结本章重要内容的五副图