# Наращение простых и сложных процентов. Операция дисконтирования

Коэффициент наращения – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга. Коэффициент наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы долга.

**При единоразовом начислении процентов**

М1= М + М\*i / 100.

Если i выражено не в процентах, а в долях, то

М1= М(1+i).

В случае, когда рассматриваемый период времени включает в себя больше, чем единичный промежуток начисления, существуют два варианта начисления процентов.

***Формула простых процентов.***

S(t) = M(1+ti),

где t - числе единичных промежутков начисления в рассматриваемом периоде, S(t) - сумма к выплате через t единичных промежутков.

***Формула сложных проценто***в

S(t) = M (1+i)t

Различают несколько категорий процентных ставок.

***Фиксированная*** процентная ставка – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах.

***Постоянная***процентная ставка – неизменная на протяжении всего периода действия финансовой операции.

***Переменная*** процентная ставка – это ставка, изменяющаяся во времени, однако в соответствии с определенными правилами, известными всем сторонам, участвующим в финансовой операции.

***Плавающая*** процентная ставка – ставка, привязанная к определенной базовой ставке, изменяющейся во времени. Надбавка к базовой ставке определяется целым рядом условий, связанных обычно с конкретным контрактом.

**Дисконтирование**

Доходы, полученные в разные моменты времени, имеют различную ценность и это обстоятельство необходимо учитывать при осуществлении инвестиций.

**Дисконтирование** — определение стоимости денежного потока путём приведения стоимости всех выплат к определённому моменту времени

Сумма *М*, помещенная в банк, через год будет равна *M*(1+*r*), где *r* – ставка банковского процента. Через *n* лет она вырастет еще и станет равна *M*(1+*r*)*n* (если начисление производится по правилу сложных процентов). Наоборот, для того, чтобы через *n* лет получить сумму, равную *S*, надо сегодня положить в банк сумму, равную *S/(1+r)n* в настоящий момент эквивалентна (равноценна) сумме *S*, которую можно получить через *n* лет.

Необходимым условием целесообразности инвестиций будет выполнение соотношения

. (1.2.2)

Величину  называют ***дисконтирующим множителем,*** соответствующим ставке *r* и числу периодов *i*

Чистой приведенной стоимостью (Net present value) финансового потока называется сумма дисконтированной прибыли:

# Оценка инвестиционных проектов, чистый приведенный доход, рентабельность, внутренняя норма доходности.

Инвестициями называется вложение денег с целью получения прибыли. Использование полученной прибыли для последующих вложений с целью увеличения объемов деятельности и прибыли называется реинвестированием.

Чистая приведенная стоимость проекта будет равна

.

Важным показателем инвестиционного проекта является его ***рентабельность***, т.е. количественная характеристика, показывающая, какую прибыль приносит проект в расчете на единицу вложенных средств. Рентабельность определяется по формуле

.

***Срок окупаемости проекта*** определяется как период, за который сумма приведенных доходов достигнет (или превысит) сумму приведенных затрат (приведенных означает дисконтированных к начальному моменту времени). Для проекта, представленного табл. 1.3.2, срок окупаемости – это минимальное количество лет *l*, для которых

 0.

Другой важнейшей характеристикой инвестиционного процесса является ***внутренняя ставка (норма) дохода*** (*IRR* – Internal Rate of Return), т.е. такая процентная ставка *IRR*, при которой выполняется равенство

*NPV = 0.*

# Потоки платежей. Ренты.

Поток платежей - это (конечная или бесконечная) последова-тельность вида {Rk, tk}, где Rk - величина платежа, tk - момент време-ни поступления платежа. Если Rk >0, то имеется в виду поступление средств, если Rk <0 - то выплата.

***Величиной потока в момент времени Т*** называется сумма платежей потока, дисконтированных к этому моменту



***Современной величиной потока***называется величина NPV = *R(0).* Величина потока в момент последнего платежа называется ***конечной величиной потока****.*

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется ***рентой****.* Каждая отдельная выплата называется величиной рентного платежа (размером ренты), промежуток между платежами – периодом ренты, общее время платежей – сроком ренты

Если промежуток между выплатами равен одному году, то рента называется годовой, если суммы всех выплат одинаковы, то рента называется постоянной*.* Ренты с конечным числом членов называются ограниченными или конечными; если срок ренты не ограничен, то она называется бесконечной или «вечной».

Пусть ***R*** = *{R, n, i} –* постоянная годовая рента. Здесь *R* - величина платежа, *i* - процентная ставка, *n* - число лет в потоке.

Современная величина постоянной ренты *А(****R****)* определяется по формуле суммы геометрической прогрессии:

 (2.1.1)

Величина

 (2.1.2)

называется ***коэффициентом приведения ренты****.*

Тогда  *A(****R****)=R a(n,i).*

***Наращенной величиной ренты*** *S* называется ее конечная величина, т.е.

 (2.1.3)

Величина

 (2.1.4)

называется***коэффициентом наращения ренты****.* Очевидно, S=*R s(n,i).*

**"Вечная" годовая рента**

Если последовательность платежей по ренте является неограниченной, то такая рента называется ***"вечной".*** Современную величину такой ренты находим по формуле

*A(****R****)* =*R*  (2.1.5)

Здесь *i -* годовая ставка (при вычислении использовалась формула бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

# Кредитные расчеты.

Кредит (ссуда, заем) — это предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности. Как правило, предусмотрена уплата процентов. Существует несколько форм кредитных расчетов, т.е. способов погашения займов.

1. Погашение кредита одним платежом в конце.

Если кредит выдан в сумме M под r процентов годовых на n лет, то к концу n-го года выплачивается сумма

K=M(1+r)

2. Ежегодные выплаты текущих процентов и погашение основного долга одним платежом в конце. Пусть выдан кредит в сумме M на n лет под r процентов годовых. При таком способе расчетов платежи производятся по следующей схеме:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **1** | **2** | **...** | ***n*** |
| Выплачиваемая сумма  в конце года | *rM* | *rM* | *rM* | *rM+M* |

3. Погашение основного долга равными годовыми выплатами и ежегодные выплаты текущих процентов. Пусть выдан кредит в сумме M под r процентов годовых на n лет. При данном способе расчетов предусмотрена следующая схема выплат. В конце каждого года выплачивается n-я доля основного долга: M/n. Кроме того, в конце i-го года выплачиваются проценты в размере

*R=M*(1-)⋅*r*

Таким образом, общая сумма платежа в i-й год составит

*K=M/n+M*(1-)⋅*r*

4. Погашение кредита равными годовыми выплатами. Кредит в сумме M выдан на n лет под r процентов годовых. При данной форме расчетов в конце каждого года выплачивается одинаковая сумма R. Эти платежи можно рассматривать как ежегодную ренту заемщика (кредитора). В этом случае, сумма M представляет собой современную выплату ренты, а R - ежегодный рентный платеж. Поэтому в соответствии правилами расчета рентных платежей (тема 3), R находится из уравнения

*M=R a*(*n,r*)

где a(n, r) - коэффициент приведения ренты.

# Аренда оборудования

Расчеты в этом случае призваны ответить на ряд вопросов, важных для арендаторов и владельцев. Что выгоднее: арендовать оборудование (недвижимость) или купить? Сдать в аренду или продать? Как учесть в платежах норму амортизации?

Пусть цена оборудования равна *C*, норма амортизации *h*. Арендные платежи выплачиваются равными суммами в конце года в течение *n* лет. Если срок работы оборудования больше *n*, то к концу срока аренды его остаточная стоимость равна

*S = C (1 –nh) > 0*

если *C* – цена оборудования, то в год оно должно приносить доход в размере *jC*, то есть это требуемая отдача от вложенных средств

Пусть *r* - ставка по депозитам в банке. Доходность средств, вложенных в оборудование, должна быть с учетом амортизации не ниже доходов по депозитам. Отсюда:

*С(1+r) ≤ C (1+j – h),* т.е. *0 ≤ r ≤ j -h*

Дисконтированная, то есть приведенная к настоящему времени стоимость оборудования после *n* лет его использования, будет равна:



Таким образом, передавая оборудование в аренду, его владелец, в сущности, теряет некий актив, стоимость которого определяется как

 (2.3.1)

Эту потерю необходимо возместить за счет арендных платежей. Следовательно, мы можем рассматривать величину *D* как размер «кредита», выданного на *n* лет, доходность по которому должна быть не меньше, чем *j*.

Если арендные платежи производятся равными годовыми выплатами, то они представляют собой постоянную ренту для владельца оборудования. Поэтому величину годового платежа *R* можно найти из уравнения

 (2.3.2)

где *a(n,j)* – коэффициент приведения ренты сроком *n* и ставкой *j* .

C учетом (2.3.1) и (2.3.2) получаем выполнение равенства



или ( подставив значение для *a(n,j)* из раздела 2.1)



следует (при *S = C(1-nh))*



В ситуации, когда  *R* формируется в соответствии с рыночной конъюнктурой ( то есть является экзогенным параметром нашей задачи), реальная доходность *k* вложений в оборудование определяется из формулы



Приведенный анализ может использоваться и для принятия решения о том, следует покупать оборудование или лучше его арендовать.

Пусть конъюнктура рынка такова, что арендный платеж равен *R,* а *r –* годовая ставка по депозитам в банке. Тогда современная (дисконтированная) величина всех арендных платежей за n лет будет равна



Покупая оборудование по цене *С*, остаточная стоимость которого через *n* лет составит *С(1 – nh),* мы тратим средства, современная величина которых составляет



Если *M < N*, то предпочтительнее арендовать оборудование, если  *M>N*, то более выгодно его купить.

# Эффективная процентная ставка, учет инфляции.

**Эффективная процентная ставка** определяет реальную стоимость кредита. То есть помимо процентной ставки по кредиту она учитывает и все сопутствующие расходы

Таким образом, если *Т* - это число лет, то

*S(0)(1+ref)T = S(T)*, или *ref* =*-1*

***Инфляцией* называется** устойчивый рост среднего уровня цен на товары и услуги в экономике

Инфляцию, составляющую от 3 % до 10 % в год обычно называют «нормальной» или «ползучей», Если инфляция достигает уровня 30%, то ее называют галопирующей (самоускоряющейся), а при 50 % в месяц говорят о гиперинфляции.

Показателем уровня инфляции служит ***Индекс потребительских цен*** (ИПЦ), который характеризует динамику затрат на постоянный набор товаров и услуг за счет ценностного фактора.

***Расчет доходов с учетом инфляции***

Говорят, что инфляция составит величину *α* (в год), если один и тот же набор товаров стоит в конце года в *(1+α)* раз больше, чем в начале.

В условиях инфляции реальный доход по вкладам также уменьшится. Пусть первоначальная величина вклада равна *М.* Если номинальный доход по вкладу при годовой ставке r равен *М(1+r),* то реальный доход будет равен *М(1+r)/(1+α).*

# Учет векселей.

***Вексель*** - это ценная бумага, в которой фиксируется обязательство юридического лица (эмитента) выплатить определенную сумму S в строго фиксированный момент времени Т ***владельцу векселя****.*

Владелец векселя, в случае необходимости получить деньги раньше указанного срока, может ***досрочно учесть его в коммерческом банке,*** т.е. получить деньги раньше, но, разумеется, меньшую сумму (S1), чем указана в векселе. Когда подойдет срок погашения (Т), банк предъявляет вексель эмитенту, получая при этом всю сумму S. Разность S-S1 будет прибылью банка.

***по формуле простых процентов*** (обычно в случаях, когда речь идет о дне как периоде погашения).

Пусть до срока погашения векселя осталось *t* дней; установлена учетная ставка *d* (% годовых). Тогда сумма *S1*, выдаваемая владельцу векселя при учете векселя, составит (из расчета 360 дней в году)

*S1* = 

При этом ***дисконт*** (снижение стоимости) составит

*D =*.

***по формуле сложных процентов*** (обычно применяется, когда в качестве периода рассматривается месяц или год).

Пусть до срока погашения векселя осталось n месяцев, учетная ставка составляет d % годовых. Тогда сумма, выдаваемая владельцу векселя при учете векселя, составляет

*S1* = 

# Доходность финансовых операций.

В финансовом анализе доходность является важнейшей характеристикой операции, однако само понятие «доходность» определяется неоднозначно. Скорее, мы можем говорить о том, что существуют различные виды доходности.

***1. Номинальная (или расчетная) доходность***. Пусть *I* – затраты на проведение некоторой финансовой операции, *Y* – ее результат, то есть полученный доход. Номинальная доходность d определяется из уравнения

*Y = I (1+ d), d = (Y – I) /I*

Очевидно, что *1 + d = Y/I*, поэтому величина *Y/I* называется ***коэффициентом наращения,*** или ***множителем наращения***.

***2. Доходность с учетом инфляции***. Пусть α - величина инфляции за время проведения операции. Доходность *i*  с учетом инфляции определяется по формуле

*i = [ Y/ (1+ α) – I] / I.*

Легко видеть, что

*1 + i = Y/ (1+ α) I.*

***3.Эффективная доходность***. Иногда важно выяснить, насколько результат финансовой операции превышает безрисковое вложение средств (например, государственные облигации развитых стран считаются низкодоходным, но в высшей степени надежным размещением капитала). Пусть *b* – ставка безрисковых вложений. Эффективную доходность *е* определяем по формуле 

*e* =  *[ Y/ (1+b) – I] / I*

то есть

*1 + e = Y/ (1+ b) I.*

Все приведенные выше определения не учитывают продолжительность операции. Для того, чтобы учесть фактор времени, целесообразно найти для каждой из операции ее эффективную ставку. Это сразу же даст информацию о доходности финансовой операции в процентах годовых.

***4. Мгновенная доходность***. Пусть в момент времени *t* величина капитала равна *C(t).*

Скорость прироста капитала естественно определить как

.

Мгновенной доходностью  называется отношение скорости прироста капитала к его величине

 (3.4.1)

которая является логарифмической производной функции *C(t).*

# Финансовая эквивалентность обязательств.

В практике кредитно – финансовых институтов постоянно возникают ситуации, когда необходимо изменить условия уже подписанных контрактов, например, при досрочных выплатах или пролонгировании сроков платежей, объединении или замене обязательств и т.д. В этих случаях важно так изменить условия, чтобы они не приводили к убыткам сторон.

***Различные финансовые схемы считаются эквивалентными, если они приводят к одному и тому же финансовому результату.***

Для того, чтобы решить задачу замены одной схемы другой, ей эквивалентной, необходимо составить уравнение эквивалентности. Для этого финансовые результаты по обеим схемам, приведенные к одному и тому же моменту времени, приравниваются друг к другу.

# Понятие риска. Матрица последствий, матрица рисков. Правило Вальда.

*Мы будем называть финансовую операцию* ***рискованной****, если она может иметь более одного исхода, и эти исходы не равноценны для лиц, принимающих решение*

**Матрицы последствий и рисков**

Пусть *qij* – результатфинансовой операции в том случае, когда будет принято *i-*ое решение и наступит *j-*ая ситуация (лицо, принимающее решение заранее не знает, какая ситуация наступит).

Из величин *qij (i=1, 2…,m; j=1, 2,…,n)* мы можем составить так называемую ***матрицу последствий****:*

.

Обозначим

 (j=1, 2,…,n),

Если *qj = qkj,*а мы выбрали*qij, k≠i***,** то мы недополучили (доход) *qj – qij***.** Эта величина может служить мерой риска (в данном случае – риска «недополучения дохода»). Итак, величина *rij = qj – qij* определяет риск, сопутствующий принятию *i*-го решения в случае наступления *j-*ой ситуации.

Соответствующая матрица



называется ***матрицей рисков***.

**Правило Вальда** (это правило иногда называют правилом крайнего пессимизма)

Обозначим

** (4.2.1.)

Правило Вальда рекомендует выбрать такое решение *i0*, при котором *ai* является максимальным, т.е.

.

Можно сказать, что правило Вальда отражает психологию человека, «ожидающего худшего»: какое бы он не принял решение, реализуется именно та ситуация, которая предполагает наименьший (наихудший) результат, что отражено в формуле (4.2.1)**.** Принимая решение, в соответствие с формулой (4.2.2), мы выбираем «лучшее среди худших». Но, так или иначе, правило Вальда позволяет избежать *(n-1)* наихудших исходов из *(m* x *n***)** исходов, заданных матрицей последствий *Q.*

# Правила Сэвиджа и Гурвица.

**Правило Сэвиджа** (Правило минимального риска).

В отличие от предыдущего правила, которое ориентировано на нахождение более или менее оптимального дохода (результата), это правило основано на анализе матрицы рисков и направлено на минимизацию риска.

Обозначим

 (4.2.3)

Согласно правилу Сэвиджа, рекомендуется принять такое решение *i0*, при котором *bi* минимально, т. е.

 . (4.2.4)

Эта схема отражает психологию довольно осторожного человека, который также «ожидает худшего», но не в отношении финансового результата, а в отношении риска. При любом решении он ожидает ситуацию, в которой риск будет максимальным, и это выражено в формуле (4.2.3). Поэтому он выбирает решение *i0,* минимизирующее максимальный риск, согласно (4.2.4). Правило минимального риска позволяет избежать *(n-1)* наиболее рискованных (в смысле недополучения дохода) исходов.

**Правило Гурвица.** Выбирается число λ∈[0,1]. Правило рекомендует выбрать решение i0, при котором выражение



является максимальным, т. е. .

Число *λ* может выбираться из вероятностных соображений, например, если у принимающего решение лица есть какие-то представления о том, насколько вероятно наступление наилучших (т. е. max *qij)* и наихудших (т. е. min *qij)* исходов. Если таких данных нет, то λ может выбираться исходя из субъективных особенностей, например, насколько человек склонен к пессимизму (т. е. ожидает, что реализуется худший вариант min *qij)* или к оптимизму (т.е., надеется на лучшее, *max qij)*. В первом случае он выбирает *λ* близкое к *0*, при *λ=0* правило Гурвица совпадает с правилом Вальда. Во втором случае он выбирает *λ* близкое к единице. Человек осторожный, вероятно, выберет , если не располагает другими данными в пользу того или другого варианта.

# Средний ожидаемый доход и риск. Измерители рисков.

Вероятностными рисками в финансовом анализе называют вероятности нежелательных с точки зрения получения финансовых результатов событий, или событий, которые отрицательно влияют на результаты финансовых операций. Для того чтобы количественно оценить величину финансового риска, чаще всего используются вероятностные характеристики финансовой операции.

Предположим, что финансовую операцию можно представить в виде случайной дискретной величины *Q*:

Таблица 4.3.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Доход |  |  | … |  |
| вероятность |  |  | … |  |

***Средним ожидаемым доходом данной финансовой операции*** называется математическое ожидание случайной величины *Q*:

.

Иногда величину *M(Q)* называют эффективностью операции.

***Дисперсией*** данной финансовой операции называется дисперсия случайной величины, , т.е. величина



***Риском*** данной операции обычно называют среднее квадратичное отклонение случайной величины Q, т.е. величину

.

# Снижение риска путем диверсификации вложений.

Идея диверсификации вложений с целью снижения рисков основана на том, что, если корреляция между случайными величинами отрицательна, то риск их комбинации можно снизить, т.к. при изменении ситуации проигрыш в одной операции компенсируется выигрышем в другой.

Отрицательная корреляция между операциями А и В говорит о том, что активы А и В реагируют на изменение рыночной ситуации противоположным образом, поэтому у нас есть основания ожидать, что их подходящая комбинация поможет снизить риск ( по сравнению с каждой из операций в отдельности).

Составим комбинацию активов А и В:

*Q=αQA + βQB = αQA + (1-α)QB.*

Для того, чтобы исключить риск разорения, достаточно подобрать α таким образом, чтобы доход в каждой из ситуаций был неотрицательным

# Влияние диверсификации на снижение риска при увеличении числа вложений.

Хорошо известно следующее практическое правило финансового рынка: для повышения надёжности вложений в рискованные ценные бумаги целесообразно вкладывать средства не в один актив, а составлять портфель, содержащий как можно больше видов ценных бумаг.

Итак, пусть имеется n видов ценных бумаг/ активов, доходность которых может быть представлена случайными величинами *Q1, …, Qn,* *M(Qi)* – средний ожидаемый доход (математическое ожидание) от i-го актива, *σ(Qi*) – его риск. Предположим, что для некоторых *a, b, c, d*

 (4.6.1)

 (4.6.2)

при всех *i=1, 2, … n,*  т.е. *a* и *b* – это нижняя и верхняя граница доходности для всех активов, *c* и *d* – соответствующие границы для рисков.

Составим инвестиционный портфель, распределив средства поровну между всеми активами. Мы получим новый актив, доходность которого описывается случайной величиной

.

Предположим, что доходности всех рассматриваемых активов Q1, …,  Qn взаимно независимы и, следовательно, некоррелированы (т.е. все парные коэффициенты корреляции rij=0). Тогда, из хорошо известных свойств математического ожидания и дисперсии мы получим, что

,

.

Здесь D(Qi)=σ2(Qi) – дисперсия случайной величины Qi. Соответственно риск портфеля будет определяться величиной

.



т.е. доходность портфеля будет ограничена сверху и снизу теми же рамками, что и доходности бумаг, из которых он составлен.

Из условия (4.6.2) и равенства (4.6.3) получаем:



и, следовательно,

. (4.6.4)

Последнее неравенство (4.6.4) означает, что с увеличением числа активов n риск вложений уменьшается и при n→∞ стремится к нулю.

Этот вывод называется ***эффектом диверсификации****,* а соответствующее правило – правило диверсификаций.

Следует отметить, что применение этого правила оправдано лишь тогда, когда у инвестора есть уверенность в том, что доходности ценных бумаг, используемых для составления портфеля, действительно взаимно независимы. Только в этом случае верно равенство (4.6.3), которое играет в наших выкладках ключевую роль.

Еще одно обстоятельство, ограничивающее применение правила диверсификации – трансакционные издержки. Сбор информации о большом количестве активов, сама процедура закупки большого количества бумаг мелкими партиями может потребовать больших затрат, которые не всегда оправданы в сравнении с получаемым доходом.

# Модель Леонтьева. Расчет межотраслевого баланса в стоимостном выражении.

Основные определения:

Пусть n –количество отраслей в рассматриваемой экономике.

**Валовый продукт** отрасли — это стоимость всех товаров и услуг (то есть, произведённых за год в данной отрасли

Обозначим Xi – объем валового продукта i-отрасли.

**Конечный продукт отрасли**  — часть валового продукта отрасли, не используемая в качестве материальных производственных затрат в системе отраслей, а направляемая на цели потребления населения или экспорт.

*Yi* – конечная продукция, произведенная в i-отрасли. Условие: 𝑋i>𝑌i

*Xij* – количество продукции i-отрасли, которая используется в j-отрасли в качестве материальных затрат (промежуточная продукция).

**Технологические коэффициенты** (*коэффициенты прямых затрат)* показывают, какое количество продукции i-й отрасли затрачивается на производство **единицы** продукции j-й отрасли.

Матрица А называется матрицей **прямых затрат:**

Yi – конечная продукция, произведенная в i-отрасли.

Xij – продукция i-отрасли, которая используется в j-отрасли в качестве промежуточной продукции.

– вектор валовой продукции

– вектор конечной продукции

n+n2 – количество неизвестных

Технологические коэффициенты (коэффициенты прямых затрат) (aij)– средняя величина затрат продукции одной отрасли *i* на производство единицы продукции отрасли *j*.

или

Отсюда мы можем выделить матрицу прямых затрат:

А =

Тогда уравнение Леонтьева в матричной форме примет вид:

**Решение уравнение Леонтьева в матричной форме**

Пусть Е – единичная матрица. Тогда *Х=ХЕ=ЕХ.* Пусть существует обратная матрица *(E-A)-1* Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы *(E-A)* не был равен нулю*.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасль | 1 | 2 | 3 | Сумма по отраслям (строке) | Матрица Y, конечный продукт | Валовый продукт |
| 1 | X11 | X12 | X13 |  | Y1 |  |
| 2 | X21 | X22 | X23 |  | Y2 |  |
| 3 | X31 | X32 | X33 |  | Y3 |  |
| Сумма по отраслям (столбцу) |  |  |  | ? |  |  |
| УЧП |  |  |  |  | ? |  |
| Итого (ВП) | X1 | X2 | X3 |  |  |  |

*УЧП – условно чистая продукция – разность между валовым продуктом и суммой всех материальных затрат в каждой отрасли*

# Переход от натурального к стоимостному выражению в ММБ.

Напомним, *что* ***коэффициенты прямых затрат ( технологические коэффициенты) определяют количество продукции отрасли i, необходимое для производства единицы продукции отрасли j.***

Для балансовой модели в стоимостном выражении есть стоимость продукции отрасли *i*, вложенной в один рубль продукции отрасли *j*

Система уравнений Леонтьева для n отраслей выглядит так

**Рассмотрим экономическую систему, состоящую из 2-х отраслей (n=2)**

Система уравнений Леонтьева будет

Состоять и 2- х уравнений:

*X1 = a11 X1 +a12 X2 +Y1*

*X2 = a21 X1 +a22 X2 +Y2*

Пусть все данные представлены в натуральном выражении. Тем не менее, мы можем решить эту систему уравнений и найти *X1 и X2*

Пусть *p1 , p2* – цены единицы продукции каждой из отраслей, *l1,l2*- добавленная стоимость в расчете на единицу продукции каждой из отраслей.

Таким образом, *р = (p1 , p2*) – вектор цен, *l= (l1,l2*) – вектор добавленной стоимости.

|  |
| --- |
| **Добавленная стоимость** - разница между стоимостью проданного организацией продукта (оказанных услуг) и материальных затрат на его производство. Включает эквивалент затрат на заработную плату, процент на капитал, ренту и прибыль. |

Система уравнений для цен:

*p1 = a11 p1 +a21 p2 +l1*

*p2 = a12 p1 +a22 p2 +l2*

*p = ATp + l*

**Обобщение модели для произвольного n.**

*Х = (Х1,…,Хn ), Y= (Y1,…Yn) –* валовый и конечный продукты,

*р = (p1 ,…, pn*) – вектор цен, *l= (l1,…,ln*) – вектор добавленной стоимости.

Система уравнений для цен в матричной форме:

*p = ATp + l*

Решение аналогично общему решению уравнения Леонтьева:

*p = (E-AT)-1 l*

**Составляем балансовую таблицу**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| В натуральном выражении | | | | |
| Отрасль | 1 | 2 | конечный продукт | Валовый продукт |
| 1 | *X11* | *X12* | *Y1* | *X1*  2586.206897. |
| 2 | *X21* | *X22* | *Y2* | *X2*  *4051.724138* |
| В стоимостном выражении | | | | |
| 1 | *p1 X11* | *p1 X12* | *p1 Y1* | *p1 X1* |
| 2 | *p2X21* | *p2X22* | *p2Y2* | *p2X2* |
| Добавленная стоимость | *l1 X1* | *l2X2* | *p1 Y1+ p2Y2*  =  *l1 X1+ l2 X2* |  |
| Итого (ВП) | *p1 X1* | *p2X2* |  |  |

# Балансовые модели с учетом затрат на устранение загрязнений.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из 2-х отраслей (n=2)

Система уравнений Леонтьева будет состоять из 2- х уравнений:

*X1 = a11 X1 +a12 X2 +Y1*

*X2 = a21 X1 +a22 X2 +Y2*

Пусть все данные представлены в натуральном выражении. Будем предполагать, что каждая из отраслей производит загрязнения окружающей среды, которые пропорциональны объемам произведенной продукции и составляют *w1 и w2* в расчете на единицу продукции. Предположим также, что законодательство предусматривает обязанность загрязнителей покрывать затраты на устранений загрязнений.

В нашей модели мы можем предположить, что, кроме отраслей *X1 и X2,*  есть третья отрасль *X3* которая занимается устранением загрязнений. Пусть для устранения единицы загрязнений требуется *u1* и *u2* продукции двух первых отраслей. Составим систему уравнений:

*X1 = a11 X1 +a12 X2 + u1X3* +*Y1*

*X2 = a21 X1 +a22 X2 + u2X3 +Y2*

*X3 = w1 X1 +w2 X2*

Решив эту систему, получаем *X1, X2 ,X3*

Пусть *p1 , p2* – цены единицы продукции каждой из отраслей, *p3* – стоимость устранения единицы загрязнений, *l1,l2, l3*- добавленная стоимость в расчете на единицу продукции каждой из отраслей.

Таким образом, *р = (p1 , p2, p3*) – вектор цен, *l= (l1,l2, l3*) – вектор добавленной стоимости.

Система уравнений для цен:

*p1 = a11 p1 +a21 p2 +w1 p3* +*l1*

*p2 = a12 p1 +a22 p2 + w2 p3* +*l2*

*p3 = u1 p1 +u2 p2 +l3*

Решая эту систему , находим *p1 , p2., p3*

**Составляем балансовую таблицу**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | В натуральном выражении | | | | |
| Отрасль | 1 | | 2 | 3 | конечный продукт | Валовый продукт |
| 1 | *a11 X1* | | *a12 X2* | *u1X3* | *Y1* | *X1* |
| 2 | *a21 X1* | | *a22 X2* | *u2X3* | *Y2* | *X2* |
| 3 | *w1 X1* | | *w2 X2* |  |  | *Х3* |
| В стоимостном выражении | | | | | | |
| 1 | *p1a11 X1* | | *p1a12 X2* | *p1u1X3* | *p1 Y1* | *p1 X1* |
| 2 | *p2a21 X1* | | *p2a22 X2* | *p2u2X3* | *p2Y2* | *p2X2* |
| 3 | *p3w1 X1* | | *p3w2 X2* |  |  | *p3 X3* |
| Добавленная стоимость | *l1X1* | | *l2X2* | *l3X3* | *Суммарный конечный продукт*  *Суммарная добавленная стоимость* |  |
| ИТОГО: суммы по столбцу | *p1 X1* | | *p2X2* | *p3 X3* |  |  |

# Математическая модель спроса. Исследование спроса методом Лагранжа.