

IV. Systèmes Complexes

L'étude des systèmes dynamiques complexes formés de plusieurs particules mobiles en interaction pose de nombreux autres problèmes liés à la topologie de connexion (constante ou non) et à la non-linéarité intrinsèque des modèles (distance euclidienne en dimension 2 ou 3).

Pour entrevoir quelques-uns des phénomènes susceptibles de se produire, on peut réduire l'étude à des cas simples :

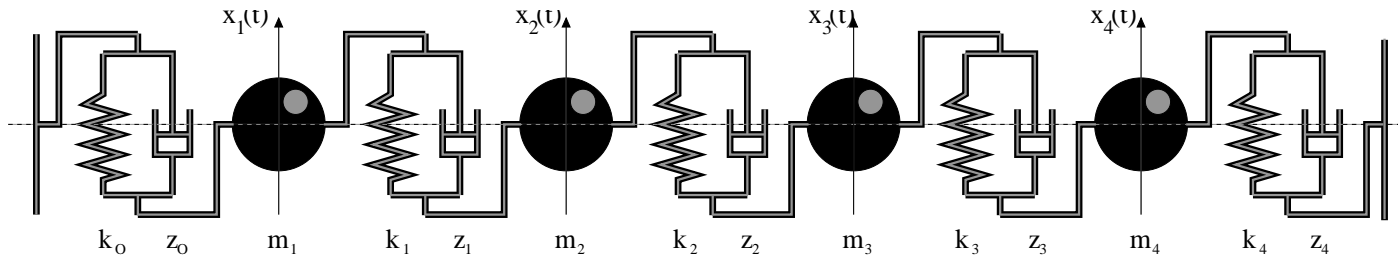
- système en dimension 1 (distance linéaire),
- + interactions simples (linéaires)
- + topologie constante (Réseaux Masses-Ressort)
- + systèmes non asservis (oscillations libres).

Cette simplification permet de formaliser le problème sous la forme d'un [Système Différentiel Linéaire](#) conduisant à une représentation matricielle très simple.

Cette forme matricielle permettra ensuite d'introduire la notion de [Représentation Modale](#) et de mettre en lumière certaines propriétés des systèmes complexes pouvant provoquer leur divergence.

IV.1. Réseau masses/ressorts (*topologie constante*)

1.1. Système linéaire en dimension 1



- **Particules mobiles :**
 - ponctuelles (sans volume), de masses m_i
 - se déplacent sur un axe unique x (dimension 1),
 - caractérisées par leur position ($x_i(t)$) et leur vitesse ($\dot{x}_i(t)$) .
- **points fixes :** particules spéciales immobiles ($m = \infty$, positions constantes, vitesses nulles)
- **Liaisons visco-élastiques** inter-masses :
 - ressort de Hook : de raideur k_j , produit une force linéaire $F_j^k = -k\Delta x$ (écart de positions)
 - frein cinétique : de viscosité z_j , produit une force linéaire $F_j^z = -k\Delta v$ (écart de vitesses)
- **Topologie de connexion :**
 - n particules mobiles $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ et 2 points fixes (P_0 et P_1)
 - $(n - 1)$ liaisons internes $(L_j)_{0 < j < n}$ connectées entre les particules mobiles ($M_i \leftrightarrow L_i \leftrightarrow M_{i+1}$)
 - 2 liaisons de bord : ($P_0 \leftrightarrow L_0 \leftrightarrow M_1$) et ($M_n \leftrightarrow L_n \leftrightarrow P_1$)

1.2. Représentation matricielle

a) Système différentiel linéaire, d'ordre 2

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -z_0 \dot{x}_1(t) - k_0 x_1(t) - z_1 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) - k_1 (x_1(t) - x_2(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = -z_1 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) - k_1 (x_2(t) - x_1(t)) - z_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)) - k_2 (x_2(t) - x_3(t)) \\ m_3 \ddot{x}_3(t) = -z_2 (\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) - k_2 (x_3(t) - x_2(t)) - z_3 (\dot{x}_3(t) - \dot{x}_4(t)) - k_3 (x_3(t) - x_4(t)) \\ m_4 \ddot{x}_4(t) = -z_3 (\dot{x}_4(t) - \dot{x}_3(t)) - k_3 (x_4(t) - x_3(t)) - z_4 \dot{x}_4(t) - k_4 x_4(t) \end{cases} \quad (49)$$

b) Vecteurs d'état et Matrices topologiques (particules mobiles)

Vecteurs des positions $X(t)$, des vitesses $X'(t)$ et des accélérations $X''(t)$ des n particules mobiles :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} \quad X''(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_4(t) \end{bmatrix}$$

Matrices d'inertie \mathbf{M} , d'amortissement \mathbf{Z} et d'élasticité \mathbf{K} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_0 + z_1 & -z_1 & 0 & 0 \\ -z_1 & z_1 + z_2 & -z_2 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_2 + z_3 & -z_3 \\ 0 & 0 & -z_3 & z_3 + z_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

On obtient l'équivalent matriciel de (49) (taille = nombre de particules mobiles) :

$$\mathbf{M}.X''(t) + \mathbf{Z}.X'(t) + \mathbf{K}.X(t) = 0 \quad (50)$$

1.3. Formalisation du processus approché

La matrice d'inertie \mathbf{M} étant diagonale, elle est trivialement inversible.

L'équation (50) peut être écrite sous la forme : $X''(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}(X'(t), X(t), t) = -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Z} \cdot X'(t) + \mathbf{K} \cdot X(t))$

On peut alors introduire les matrices des *paramètres réduits* : $\mathbf{K} = h^2 \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{K}$ et $\mathbf{Z} = h \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{Z}$

Comme pour l'oscillateur élémentaire, on forme, pour les trois schémas classiques, les systèmes numériques réalisant la simulation.

a) Euler Explicite

$$X_{n+1} = (2 \cdot \text{Id} + \mathbf{Z}) X_n - (\text{Id} - \mathbf{Z} + \mathbf{K}) X_{n-1} \text{ où Id est la matrice identité} \quad (51)$$

b) Leapfrog

$$X_{n+1} = (2 \cdot \text{Id} - \mathbf{Z} - \mathbf{K}) X_n + (\mathbf{Z} - \text{Id}) X_{n-1} \text{ où Id est la matrice identité} \quad (52)$$

c) Euler Implicite

$$(\text{Id} + \mathbf{Z} + \mathbf{K}) X_{n+1} = (2 \cdot \text{Id} + \mathbf{Z}) X_n - X_{n-1} \quad (53)$$

On pose $\Phi = (\text{Id} + \mathbf{Z} + \mathbf{K})$: matrice réelle, symétrique et théoriquement inversible.

Le système *explicitement* calculable réalisant la simulation est finalement donné par

$$X_{n+1} = \Phi^{-1} ((2 \cdot \text{Id} + \mathbf{Z}) X_n - X_{n-1}) \text{ où Id est la matrice identité} \quad (54)$$

d Limites des méthodes implicites

Système à topologie fixe (*matrices constantes*)

- le calcul de Φ^{-1} est fait une seule fois dans la phase de construction du modèle.
- si la topologie est suffisamment régulière (maillage «standard»), ce calcul peut se faire très simplement et sans recours à des méthodes numériques.
- 👉 le principal défaut de *Euler Implicite* est sa mauvaise adéquation avec le système continu en régime oscillant.

Système à topologie variable (*par ex. systèmes de particules*)

- Φ^{-1} doit être recalculée à chaque pas de simulation.
- ce calcul se fait alors par des méthodes⁸ numériques itératives et potentiellement instables
- 👉 en plus du défaut précédent, l'atout de stabilité de la méthode n'est plus garanti !

Système non linéaire et/ou asymétrique

- pour une simulation (même très simple) mettant en jeu des phénomènes «instantanés» de type *choc, fracture, explosion...* la formulation du système *implicite* peut devenir très difficile.
- les modèles de transport/dissipation d'énergie un peu élaborés mettent généralement en jeu des interactions *non linéaires* plus proche de la réalité physique
cf.: limites du modèle d'amortissement cinétique linéaire dans le problème du tir balistique.
- certains modèles peuvent également être *asymétriques* : *anisotropie*, interactions à *hystérésis*⁹, en gén. non linéaires (Navier-Stokes, induction électromagnétique, transfert de chaleur...)

⁸ «Gradient Conjugué», «Cholesky», «Gauss-Siedel»....

⁹ «Retard dans l'évolution d'un phénomène physique par rapport à un autre dont il dépend»

IV.2. Représentation Modale (très brève introduction)

2.1. Systèmes diagonalisable

- Dans les modèles matriciels précédents seules les matrices d'amortissement \mathbf{Z} et d'élasticité \mathbf{K} (aussi appelées *Tenseurs Dissipatif* et *Tenseur des Déformations*) sont non diagonales.
- Elles sont néanmoins *symétriques et réelles* donc *diagonalisables* dans une base orthonormée (cf. cours d'Algèbre Linéaire...).

a Systèmes Proportionnels

- Pour simplifier encore le problème, on peut se contenter d'étudier les systèmes dits à *viscosité compatible* pour lesquels ces deux matrices sont homogènes et proportionnelles :
 $\exists \mathbf{C} \text{ tq } \mathbf{K} = k \cdot \mathbf{C} \text{ et } \mathbf{Z} = z \cdot \mathbf{C}$: toutes les liaisons sont des ressorts-freins identiques de paramètres (k, z)
- La matrice \mathbf{C} est alors appelée *matrice de connexion* et elle reflète la topologie du système :
 - de taille n , nombre de particules mobiles (p_i).
 - si deux masses mobiles p_i et p_j sont liées, alors $(c_{i,j} = c_{j,i} = -1)$, sinon $(c_{i,j} = c_{j,i} = 0)$.
 - les coefficients diagonaux sont donnés par le nombre total de liaisons branchées sur p_i :
 $c_{i,i} = (\sum_{j \neq i} c_{i,j} + f_i)$ où f_i est le nombre de liaisons entre la particule p_i et des points fixes.
 - pour l'exemple précédent («corde» à 4 masses libres) on aurait la matrice de connexion :

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

b Diagonalisation

Sous ces conditions simplifiées, le système complet est facilement diagonalisable :

- l'équation (50) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{M}.X''(t) + z.\mathbf{C}.X'(t) + k.\mathbf{C}.X(t) = 0 \quad \text{soit} \quad X''(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}.\left(z.X'(t) + k.X(t)\right) = 0 \quad (55)$$

- \mathbf{M} étant diagonale, la matrice $\mathbf{C}_M = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ est diagonalisable : $\mathbf{C}_M = \mathbf{Q}.\Delta.\mathbf{Q}^{-1}$, avec
 - $\Delta = \text{diag}\{\lambda_i, 0 \leq i < n\}$ est la matrice *diagonale* des valeurs propres de \mathbf{C}_M
 - \mathbf{Q} est la matrice de passage (formée des n vecteurs propres)
- on forme ainsi le *système diagonal* équivalent à (55) :

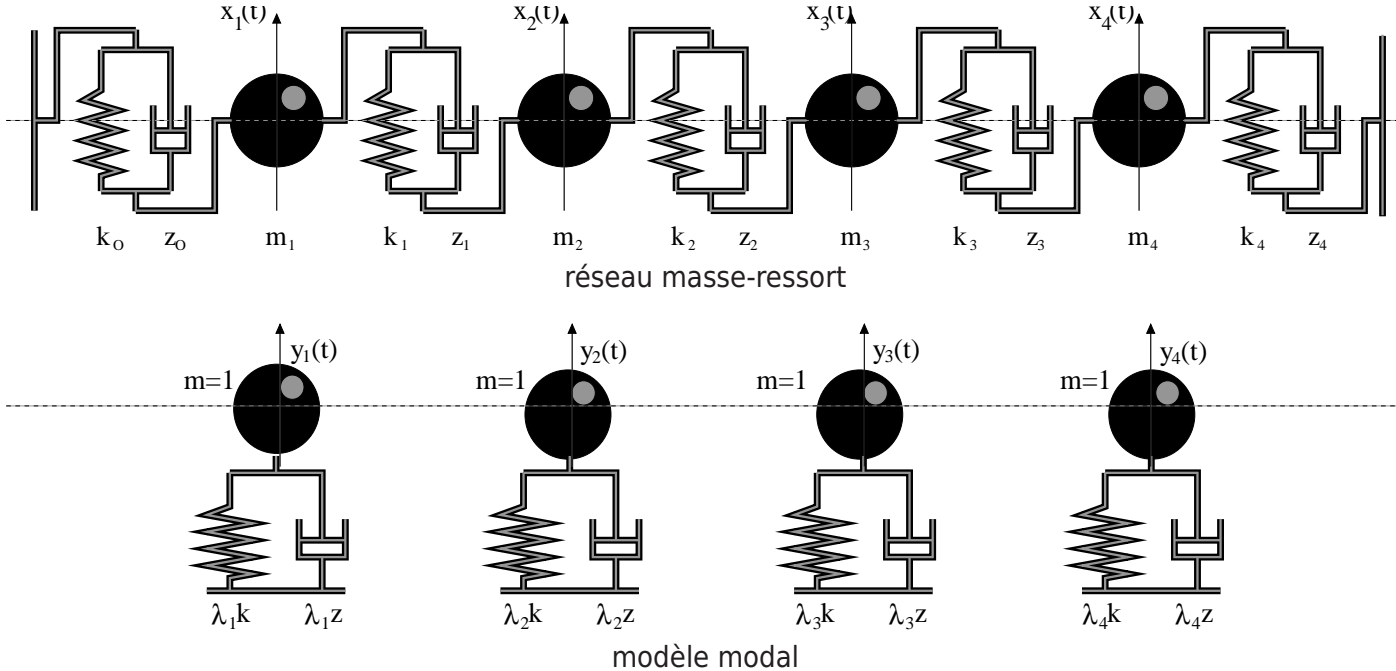
$$Y''(t) + \Delta.\left(z.Y'(t) + k.Y(t)\right) = 0 \quad (56)$$

Il s'agit donc d'un système de n équations différentielles *indépendantes* :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + (z\lambda_1).\dot{y}_1(t) + (k\lambda_1).y(t) = 0 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n(t) + (z\lambda_n).\dot{y}_n(t) + (k\lambda_n).y(t) = 0 \end{cases}$$

Chacune de ces équations modélise le comportement d'un oscillateur élémentaire indépendant d'état $y_i(t)$ et de paramètres $((m = 1), z\lambda_i, k\lambda_i)$, dont le comportement est celui étudié précédemment.

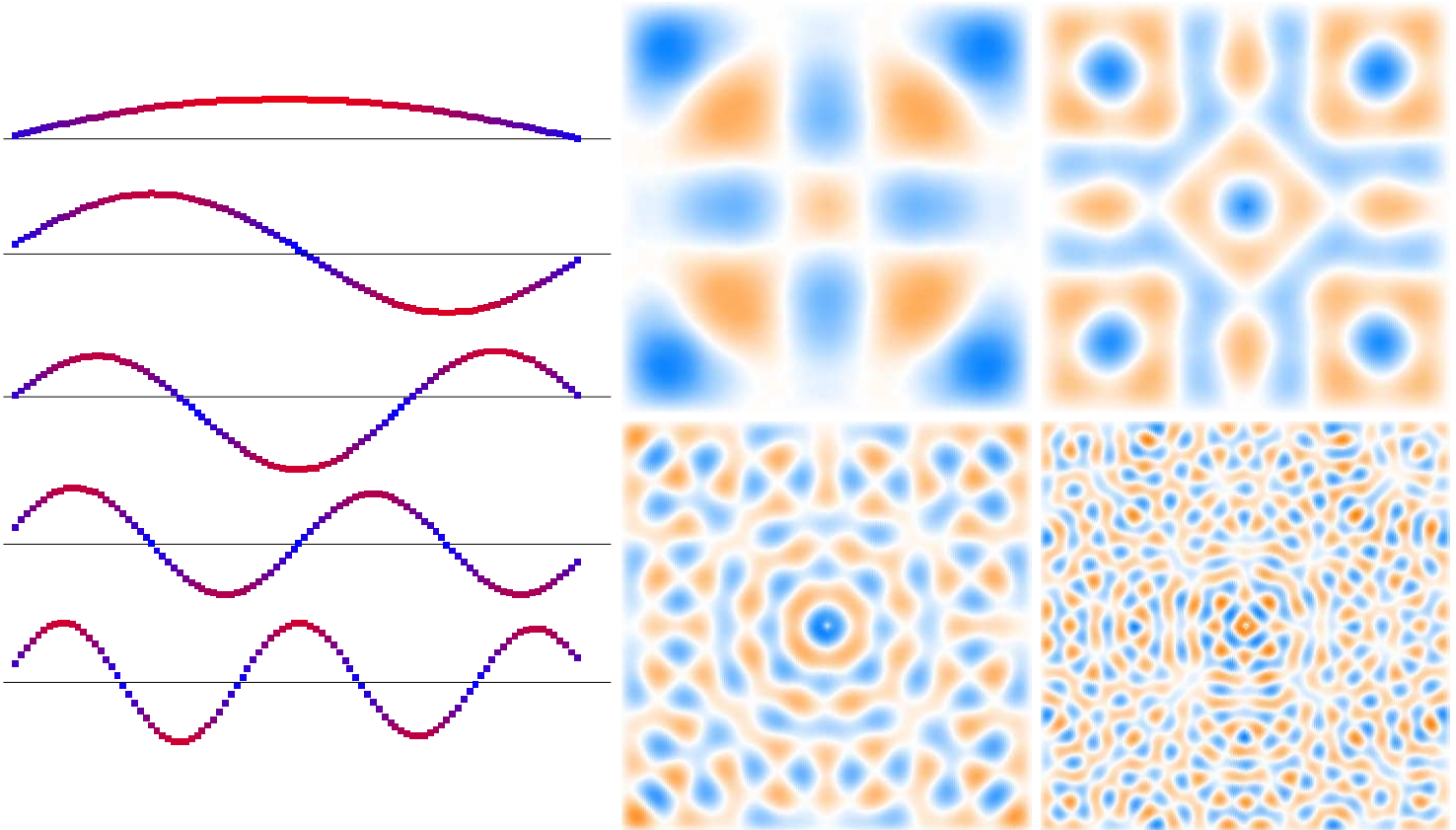
2.2. Modèle Modal



a Modes de déformation

- A chaque Réseau Masse-Ressort à n particules mobiles correspond donc un unique **Système de n Oscillateurs Indépendants**.
- Ce système, appelé **Modèle Modal**, est construit par diagonalisation du réseau initial.
- Chacun des n oscillateurs correspond à un **mode vibratoire** particulier du réseau initial.
- A chaque mode vibratoire correspond une *fréquence modale* et un *amortissement modal* (caractéristiques de l'oscillateur modal).

- A chaque mode correspond une **déformée modale** donnée par le vecteur propre correspondant :

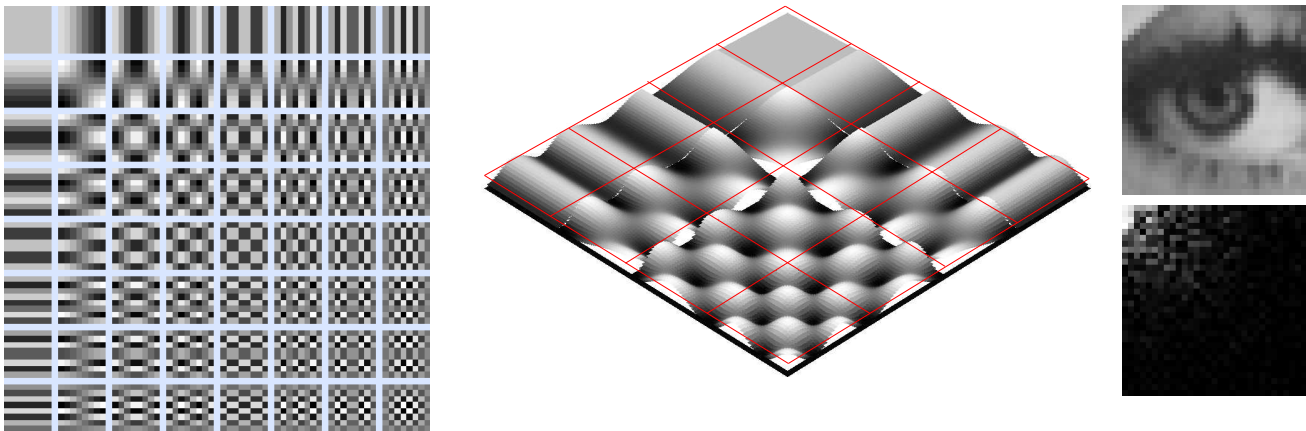


quelques déformées modales pour les topologies corde et grille

b Interdépendance

- Tous les modes de déformation d'une structure en réseau *co-existent* dans le réseau initial mais ne sont pas nécessairement *actifs*.
- L'interdépendance entre ces modes se transmet au Modèle Modal via les contraintes extérieures, distribuées aux modes indépendants par projection sur la base de vecteurs propres (matrice de passage Q).
- Ainsi, une contrainte globale $F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ appliquée sur le réseau est distribuée en n actions indépendantes $\Phi = (\phi_j)_{1 \leq j \leq n} = Q.F.Q^{-1}$ sur les n modes.
- Inversement, le comportement d'un mode se répercute sur l'ensemble du réseau.

Remarque : ce principe est exactement le même que l'action d'une transformation fréquentielle de type *Fourier* ou *Karhunen-Loève* en traitement du signal : un bloc de données corrélées (image = réseau interconnecté) est séparé en *composantes principales* qui peuvent être traitées indépendamment puis re-combinées par une transformation inverse



blocs DCT pour le format JPEG : (vecteurs propres / déformées modales), (blocs image et transformé)

2.3. Stabilité des Systèmes Complexes (aide au paramétrage)

Le Modèle Modal donne également des pistes pour comprendre les problèmes d'instabilité dans les systèmes complexes.

Un système à n particules mobiles en interaction possède n modes propres susceptibles d'être activés. Si un seul de ces modes actifs est divergeant¹⁰, cette divergence se transmet à l'ensemble du système qui devient alors instable.

L'ensemble peut ne pas diverger car les effets du mode divergeant peuvent être compensés par les autres (son effet se dilue), mais on voit apparaître des phénomènes parasites à haute fréquence.

a Le maillon faible

- Dans le cas des réseaux masse-ressorts simplifiés (diagonalisables), on montre¹¹ que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de la matrice topologique C_M ont la propriété suivante : $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$
- Ainsi, le premier mode susceptible d'être divergeant est le mode le plus élevé, caractérisé par λ_n . Si ce mode est stable, l'ensemble est stable. S'il ne l'est pas, l'ensemble *peut* diverger.
- ☞ C'est donc lui le **maillon faible**.
- En l'absence de liaison à un point fixe (ancrage) dans le modèle, on $\lambda_1 = 0$: mouvements sans déformation. On notera $\lambda_{\min} = \lambda_1$ ou $\lambda_{\min} = \lambda_2$ selon qu'il y ou non ancrage.
- La distribution des modes sur le spectre (les rapports de valeurs entre les différents λ_i et surtout le rapport λ_{\min}/λ_n dépend *essentiellement* de la topologie de connexion du système.
 - cas extrême ① : la topologie de ligne («corde») : $\lambda_{\min}/\lambda_n \simeq n$
 - cas extrême ② : la topologie complète (entièrement connecté) : $\lambda_{\min}/\lambda_n = 1$
(l'ensemble se comporte comme une unique particule).

¹⁰cf. conditions de stabilité de l'oscillateur élémentaire, avec différents intégrateurs.

¹¹cf. cours d'Algèbre Linéaire.

- La hauteur des modes dépend essentiellement de la *raideur* du système (paramètre k)
- 🔊 C'est donc en jouant parallèlement sur la *taille* (n), la *raideur* (k) et la topologie C_M du modèle que l'on peut contrôler la stabilité de son mode le plus élevé.
Pour stabiliser un modèle divergeant sans réduire le pas de discrétisation h on peut
 - réduire le nombre de particules (n)
 - réduire la raideur (k)
 - ajouter des liaisons (densifier la topologie \rightarrow réduit le rapport λ_{\min}/λ_n)

b Interprétation des modes propres

- Dans un système à n particules mobiles, certains modes peuvent être non oscillants, d'autres oscillants à plus ou moins haute fréquence. Plus le mode est élevé, plus sa fréquence est haute.
- Les modes bas :
 - correspondent à des déformations de la structure à grande échelle et grande amplitude (dans le mode *fondamental* (λ_1), toutes les particules bougent en phase : vitesses relatives minimales).
 - ils sont activés par des interactions extérieures globales (la gravité, un modèle de vent...)
 - 🔊 ce sont eux qui donnent l'aspect visuel *macroscopique* (les mouvements d'un drapeau).
- Les modes élevés :
 - correspondent à des déformation à petite échelle et faible amplitude (si ils sont stables) (dans le mode le plus élevé λ_n , deux particules voisines sont en opposition de phase, leur vitesse relative est maximale).
 - ils sont activés par des interactions extérieures très locales (collisions, fractures).
 - 🔊 ils n'ont que très peu d'intérêt visuellement (mais ils existent tout de même) et peuvent même devenir gênants si ils sont trop visibles.
 - 🔊 ce sont également eux qui peuvent rendre le système instable.

C Le rôle de l'amortissement

L'influence du paramètre d'amortissement dans les systèmes complexes est très importante :

- amortissement externe :
de nombreuses publications préconisent un amortissement individuel des particules, basé sur leur vitesse absolue. Ce modèle correspondrait à un réseau sans «frein» entre les particules (juste des ressorts) mais des «freins» connectés entre chaque particule et un point fixe représentant le «monde extérieur» ou un «milieu ambiant» dissipatif.

On peut voir facilement qu'un tel modèle à pour effet d'amortir de manière équivalente tous les modes propres ce qui se traduit par des mouvements macroscopique trop peu dynamiques ou au contraire des mouvements à hautes fréquences trop dynamiques.

☞ Ça n'est donc pas une bonne idée...

- amortissement interne :
à l'inverse, des «freins» entre particules mobiles dissipant l'énergie en fonction de leurs vitesses relatives n'auront que très peu d'effets sur les modes bas mais absorberont beaucoup plus d'énergie sur les modes élevés : ils stabilisent les hautes fréquences sans gêner les mouvement à grandes échelle.

Par ailleurs, on peut montrer que cet amortissement interne à tendance à aplatir le spectre des modes, donc à réduire le rapport λ_{\min}/λ_n .

☞ Ces modèles seront donc à la fois plus stables et plus réalistes.

- amortissement non linéaire :
le modèle primaire de «frein cinétique linéaire» est simple mais atteint vite ses limite. Des modèles beaucoup plus élaborés existent. Un simple modèle quadratique (interne) donne de meilleurs résultats en renforçant les effets précédents.