

Animation et Moteurs Physiques

M 2 INFO
2022-2023



Université
Gustave
Eiffel



INSTITUT
D'ÉLECTRONIQUE
ET D'INFORMATIQUE
GASPARD-MONGE



sommaire

Dynamique du Point	2
1. Un exemple analytique	3
1.1. Problème simplifié	3
1.1.1. Formulation	3
1.1.2. Résolution analytique	4
1.1.3. Animation	6
1.2. Enrichissement du modèle	8
1.2.1. Résistance du milieu ambiant	8
1.2.2. Courbes d'Interpolation	10
1.3. Suite de la trajectoire :	11
1.3.1. Modèle de choc solide	11
1.4. Résolution pas-à-pas	13
1.4.1. Principe	13
1.4.2. Exemple du tir balistique	14
Resolution Numerique	16
2. Méthodes d'intégration numérique	17
2.1. Cadre théorique général	17
2.1.1. Théories physiques et EDO	17
2.1.2. Le problème de Cauchy	18
2.1.3. Processus approché	18
2.1.4. Formulation Intégrale	22

2.1.5. Problèmes d'ordre supérieur	24
2.2. Schémas d'intégration	25
2.2.1. EDO et processus numérique	25
2.2.2. Schéma de Euler Explicite	27
2.2.3. Schéma de Euler Implicite	29
2.2.4. Le schéma Leapfrog	31
2.2.5. Schémas d'ordre supérieur	33
Systemes Masses-Ressorts	34
3. L'oscillateur mécanique	35
3.1. Système différentiel d'ordre 2	35
3.1.1. Équation à temps continu	36
3.1.2. Formalisation du processus approché	37
3.2. Suite récurrente d'ordre 2	39
3.2.1. Solution analytique	39
3.2.2. Retour sur les méthodes	42
3.2.3. Adéquation avec la solution réelle	44
4. Systèmes Complexes	49
4.1. Réseau masses/ressorts	50
4.1.1. Système linéaire en dimension 1	50
4.1.2. Représentation matricielle	51
4.1.3. Formalisation du processus approché	52
4.2. Représentation Modale	54
4.2.1. Systèmes diagonalisable	54
4.2.2. Modèle Modal	56
4.2.3. Stabilité des Systèmes Complexes	59

Dynamique du Point

Equation Differentielle Ordinaire

I. Un exemple analytique : tir balistique

Décrire la trajectoire et les déformations d'un ballon sous différentes conditions :

- formulation simplifiée et mise en équation
- résolution analytique
- mise en évidence des trajectoires, courbes de vitesse
- complexification du modèle
 - limites de la méthode analytique
 - solution par interpolation *ad-hoc*
 - solution par résolution *pas-à-pas*

👉 introduction aux schémas d'intégration numérique

I.1. Problème simplifié

1.1. Formulation - Mise en équation

Description : balle sphérique élastique

- de masse m et de rayon r
- lancée d'une position initiale $p_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$
- influence extérieure :

soumise au seul *champ de force* gravitationnel $\vec{G} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$ (supposé constant et uniforme)¹

¹c'est un *modèle descriptif*

Premières simplifications :

- balle indéformable \rightarrow masse ponctuelle
- vitesse initiale $\vec{v}_0 \Big|_{z_0}^{\dot{x}_0, \dot{y}_0}$ et accélération initiale nulle
- trajectoire dans le plan défini par $(p_0, \vec{v}_0), \vec{G}$

Problème réduit : dans le plan $\mathbb{R}^2(\Omega, \vec{x}, \vec{z})$ défini par $\vec{\Omega} \Big|_{y_0}^{x_0, y_0} \vec{x} \Big|_{\dot{y}_0}^{\dot{x}_0, \dot{y}_0}$, $\vec{z} = \vec{z}$

- conditions initiales $p_0 \Big|_{z_0}^{x_0 = 0} \vec{v}_0 \Big|_{\dot{z}_0}^{\dot{x}_0} \vec{a}_0 \Big|_0^0$
- gravité $\vec{G} \Big|_{-g}^0$

Formulation (bilan dynamique) : équation fondamentale de la dynamique (*2^e loi de Newton*)

$$m \vec{a}(t) = \sum \vec{F}(t) \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}(t) = -m \vec{G} \quad (1)$$

1.2. Résolution analytique

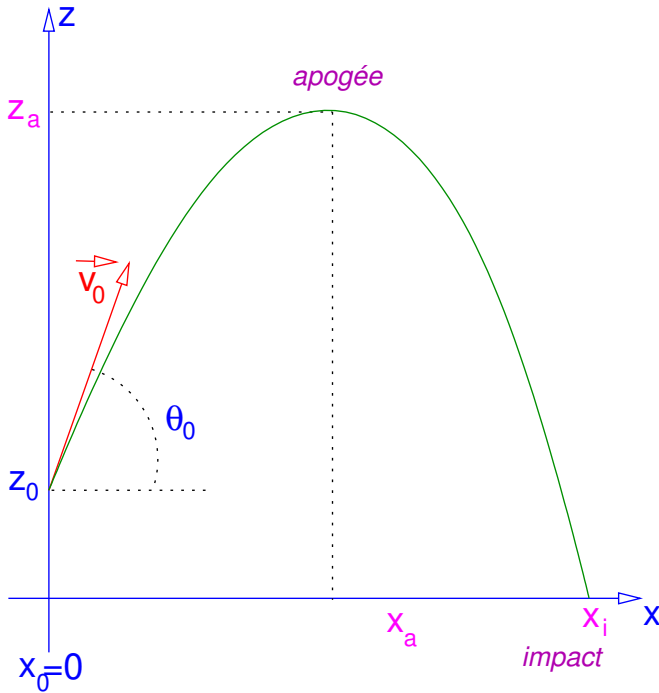
Équation d'État : système différentiel d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \exists \begin{matrix} b_x, c_x \\ a_z, b_z, c_z \end{matrix} \text{ tels que } \begin{cases} x(t) = b_x t + c_x & \text{linéaire en } t \\ z(t) = a_z t^2 + b_z t + c_z & \text{quadratique en } t \end{cases} \quad (2)$$

(b_x, c_x) et (a_z, b_z, c_z) dépendent des conditions initiales $p_0 \Big|_{z_0}^{x_0} \vec{v}_0 \Big|_{\dot{z}_0}^{\dot{x}_0}$:

$$p(0) = p_0 \Rightarrow \begin{cases} c_x = 0 \\ c_z = z_0 \end{cases} \quad \frac{d\vec{p}}{dt}(0) = \vec{v}_0 \Rightarrow \begin{cases} b_x = \dot{x}_0 \\ b_z = \dot{z}_0 \end{cases} \quad \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}(0) = \begin{matrix} 0 \\ -g \end{matrix} \Rightarrow a_z = -\frac{g}{2} \quad (3)$$

Trajectoire Spatiale :



Formulation paramétrique : trajectoires temporelles

$$\begin{cases} x(t) = \dot{x}_0 \cdot t \\ z(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + \dot{z}_0 \cdot t + z_0 \end{cases} \quad \text{portion de parabole} \quad (4)$$

Formulation cartésienne : trajectoire spatiale

$$z(x) = -\frac{g}{2\dot{x}_0^2} \cdot x^2 + \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} \cdot x + z_0 \quad \text{portion de parabole} \quad (5)$$

Points remarquables

- **apogée** (point d'altitude maximale) :

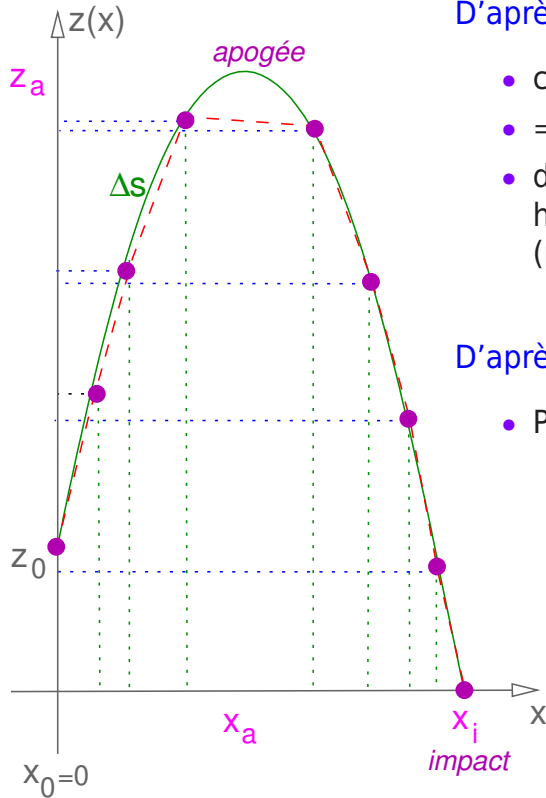
$$\dot{z}(t_a) = 0 \Rightarrow t_a = \frac{\dot{z}_0}{g} \Rightarrow A \left| \begin{array}{c} \frac{\dot{x}_0 \cdot \dot{z}_0}{g} \\ z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} \end{array} \right. \quad (6)$$

- **impact** (point d'altitude nulle) :

$$z(t_i) = 0 \Rightarrow t_i = \text{solution } >0 \text{ d'une équ. de degré 2} \quad (7)$$

La trajectoire géométrique $z(x)$ décrit où passe la balle mais pas *quand* elle y passe. Pour connaître cette information il faut connaître les trajectoires temporelles $x(t), z(t)$

1.3. Animation : découpage spatial et temporel de la scène "keyframes"



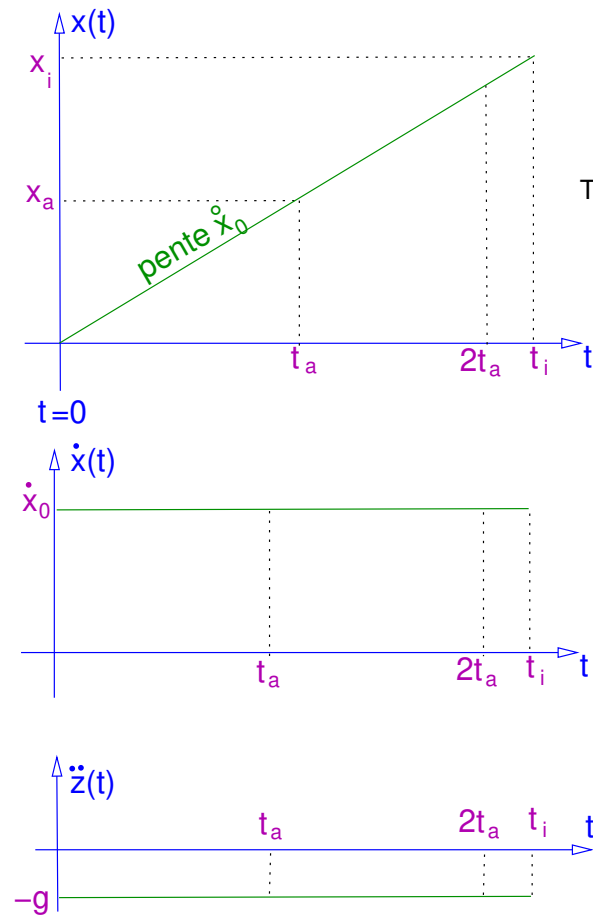
D'après trajectoire géométrique $y(x)$

- celle que l'on manipule avec outils d'interpol. classiques (*splines*)
- \Rightarrow paramètre guide : Δs (*longueur d'arc*)
- découpage direct et facile mais animation physiquement incohérente (parcours à vitesse constante)

D'après trajectoires temporelles $x(t), y(t)$

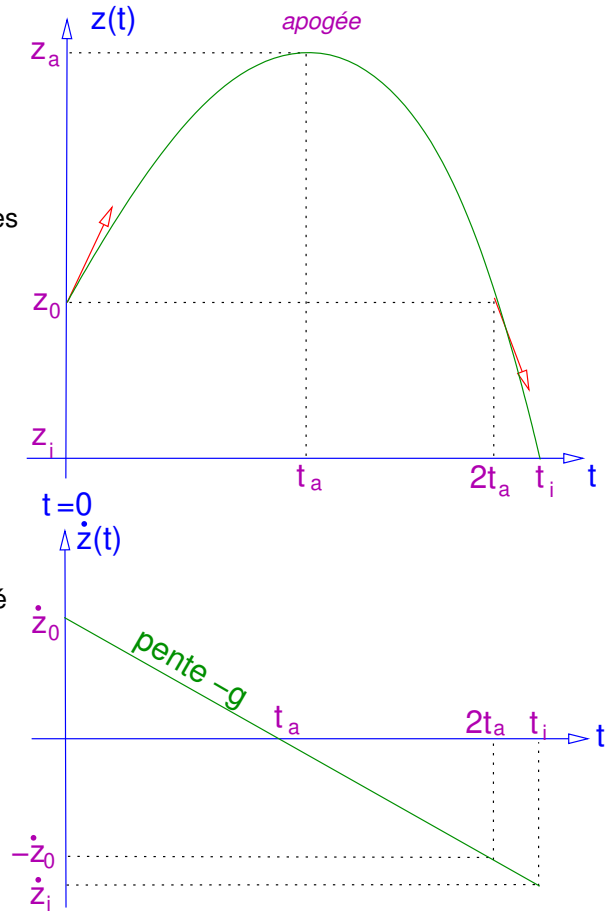
- Paramètre guide : Δt (*longueur de frame*)

Courbes temporelles :



Trajectoires temporelles

Courbes de vitesse



I.2. Enrichissement du modèle

2.1. Résistance du milieu ambiant

a) Modèle de résistance de l'air : poussée d'Archimède.

«Tout corps plongé dans un fluide *incompressible* reçoit une force opposée au poids du fluide déplacé»

- ☞ l'air *n'est pas* incompressible \Rightarrow masse volumique variable.
- ☞ le volume / la masse d'air déplacé dépend de la vitesse de l'objet
- ☞ le volume / la masse d'air déplacé dépend du volume de l'objet : notre objet *n'a pas* de volume

b) Modèle de frottement visqueux cinétique (*modèle descriptif très simple*)

- On introduit un paramètre $\alpha \geq 0$ caractérisant le milieu ambiant.
- ☞ *force de frottement visqueux* appliquée en un point de vitesse $\vec{v}(t)$ modélisée par $\vec{F}_v(t) = -\alpha \vec{v}(t)$

Formulation (bilan dynamique) :

$$m\vec{a}(t) = \sum \vec{F}(t) \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2}(t) = -m\vec{G} - \alpha \vec{v}(t) \quad (8)$$

Équation d'État : système différentiel d'ordre 2 (avec $\omega = \frac{m}{\alpha}$) :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{1}{\omega} \dot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) + \frac{1}{\omega} \dot{z}(t) + g = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{solutions générale de la forme } u(t) = A.e^{-t/\omega} + B.t + C \quad (9)$$

C Résolution

Courbes de vitesse (première intégration)

$$\text{accélération : } \begin{cases} \ddot{x}(t) = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \cdot e^{-t/\omega} \\ \ddot{z}(t) = \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} + g\right) \cdot e^{-t/\omega} \end{cases} \quad \text{vitesse : } \begin{cases} \dot{x}(t) = (\dot{x}_0) \cdot e^{-t/\omega} \\ \dot{z}(t) = (\dot{z}_0 + g \cdot \omega) \cdot e^{-t/\omega} - g \cdot \omega \end{cases} \quad (10)$$

Trajectoires temporelles

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \omega \cdot (\dot{x}_0) \cdot (1 - e^{-t/\omega}) \\ z(t) = z_0 + \omega \cdot (g \cdot \omega + \dot{z}_0) \cdot (1 - e^{-t/\omega}) - g \cdot \omega \cdot t \end{cases} \quad (11)$$

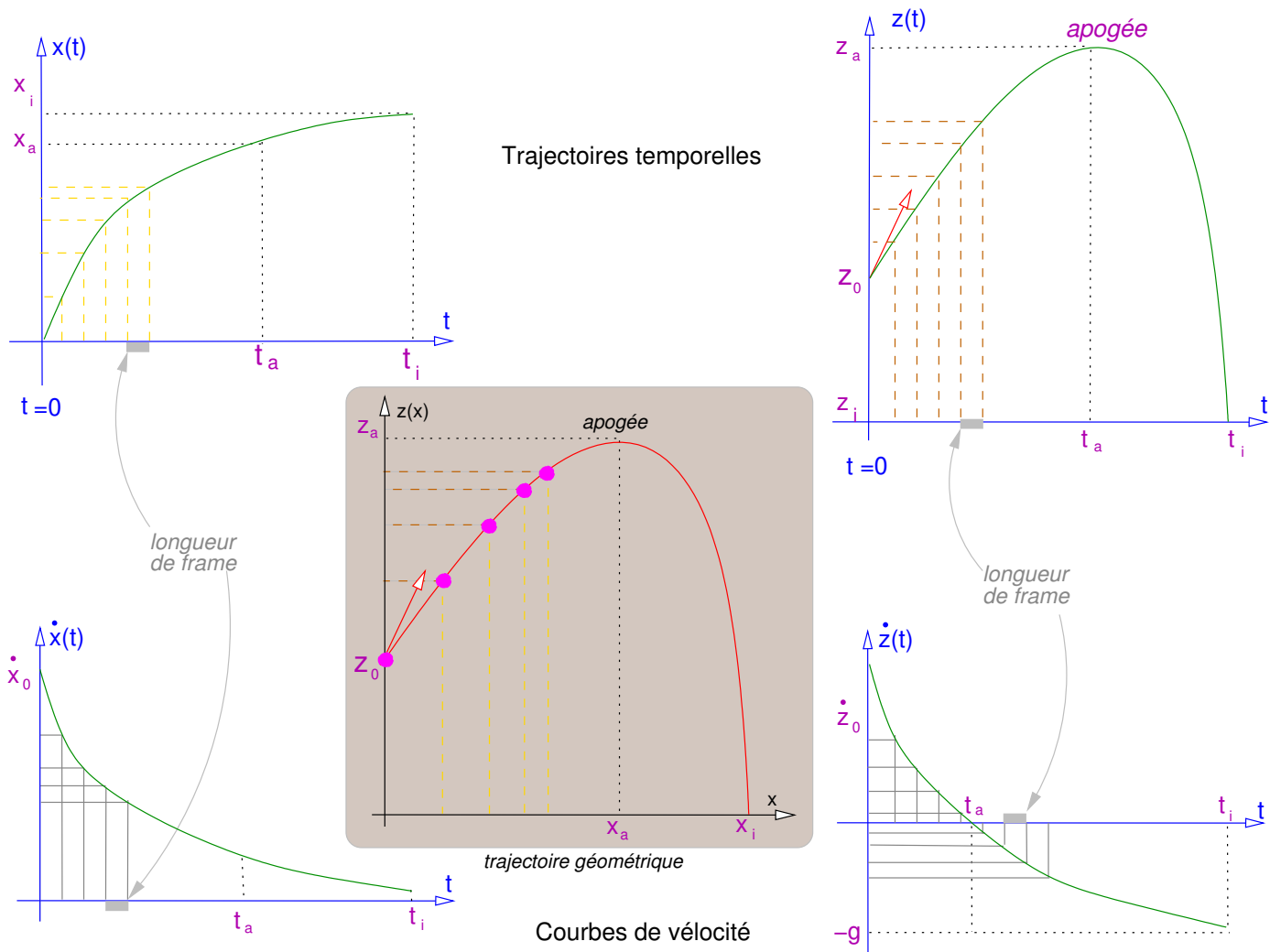
Trajectoire géométrique

$$z(x) = z_0 + (g \cdot \omega + \dot{z}_0) \cdot \frac{x(t) - x_0}{\dot{x}_0} + g \cdot \omega^2 \cdot \log \left(1 - \frac{x(t) - x_0}{\omega \cdot \dot{x}_0} \right) \quad (12)$$

Points remarquables

- l'apogée et surtout le point d'impact sont plus difficiles à extraire
- vitesse de chute limite : $\dot{z}_\infty = -g \cdot \omega$ dépend de m et α
- 👉 il faudrait en plus prendre en compte la surface de l'objet → cf. *Dynamique du Solide*
- 👉 on atteint les limites du modèle d'objet particulière
- 👉 l'usage des *Courbes d'Interpolation* permet encore de s'approcher d'une solution réaliste
- 👉 ... tant que ça reste relativement simple ...

2.2. Courbes d'Interpolation



I.3. Suite de la trajectoire : les rebonds

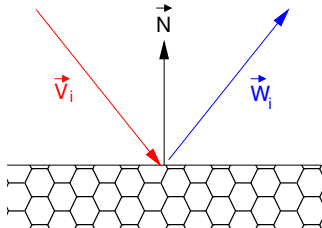
On connaît :

- le point d'impact : $z_i = 0 \Rightarrow t_i \Rightarrow x_i$
- la vitesse d'impact : $\vec{v}_i \Big|_{\dot{z}(t_i)}$
- 👉 il faut un *modèle descriptif de gestion de collision*

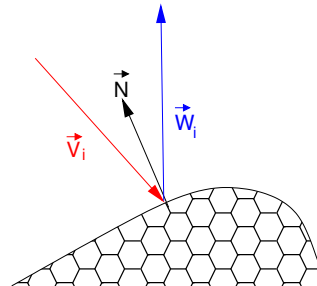
3.1. Modèle de choc solide

a Choc élastique conservatif sans amortissement, sans glissement

- La vitesse après impact \vec{w}_i a la même intensité mais une direction symétrique par rapport à la normale à l'obstacle au point d'impact (cf. RayTracing).



$$\vec{w}_i \Big|_{\dot{x}(t_i)}^{-\dot{z}(t_i)}$$

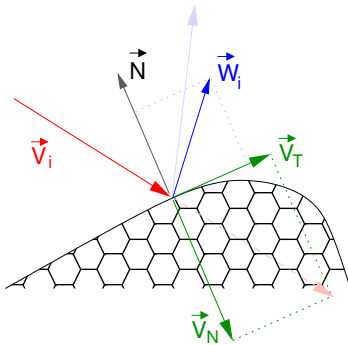


$$\vec{w}_i = 2(\vec{v}_i \cdot \vec{N})\vec{N} - \vec{v}_i$$

- On a les nouvelles conditions initiales $\vec{p}_0 \Big|_{x_i}^{x_i}$ et $\vec{v}_0 = \vec{w}_i \Rightarrow$ on recommence.

b Choc élastique dissipatif amorti, avec glissement

- La vitesse après impact a une intensité plus faible et une direction pas tout à fait symétrique par rapport à la normale au point d'impact.
- On utilise un premier *modèle descriptif* de *choc visco-élastique*
 - on introduit un *coeff. d'élasticité* $k \in \mathbb{R}$ et un *coeff. de rugosité* $z \in \mathbb{R}$ caractérisant la surface d'impact.
 - on décompose la vitesse d'impact sur la surface en *composantes normale* \vec{v}_N et *tangentielle* \vec{v}_T telles que $\vec{v}_i = \vec{v}_N + \vec{v}_T$
 - on définit la *vitesse après impact* par : $\vec{w}_i = -k\vec{v}_N + z\vec{v}_T$



$$\begin{aligned}\vec{v}_N &= -(\vec{v}_i \cdot \vec{N}) \vec{N} \\ \vec{v}_T &= \vec{v}_i - \vec{v}_N \\ \vec{w}_i &= -k\vec{v}_N + z\vec{v}_T\end{aligned}$$

- pour garder un certain *réalisme* physique, il faut $0 \leq k \leq z \leq ||\vec{v}_i||$
- 👉 ce modèle est simple et pratique, mais atteint vite ses limites (cf. *plus tard*).

I.4. Résolution pas-à-pas "physique impulsionnelle"

4.1. Principe (approche naïve)

On travaille dans un univers discret dans lequel tous les événements (contraintes, interactions, échanges d'information) ont lieu sous forme *impulsionnelle*, i.e. à des instants discrets.

- ☞ La gravité n'est pas une force continue constante mais un *train d'impulsions ponctuelles*
- ☞ Entre deux impulsions, *il ne se passe rien* : mouvements libres et conservatifs, aucune interaction.

- on note $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les *instants impulsionnels* et dt le laps de temps (constant) entre 2 impulsions.
- on suppose que l'on connaît la position x_n d'un point à l'impulsion n et sa vitesse $v_{(n,n+1)}$, constante, entre la fin de l'impulsion n et le début de l'impulsion $(n + 1)$.
- ☞ on peut alors déduire la position à l'instant $(n + 1)$: $x_{n+1} = x_n + dt \cdot v_{(n,n+1)}$ (mouvements libres).
- ☞ on en déduit une expression de la vitesse inter-impulsionnelle : $v_{(n,n+1)} = (x_{n+1} - x_n)/dt$

Cette expression évoque, lorsque le pas inter-impulsion tend vers 0, l'expression mathématique de l'opérateur de dérivation : $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-dt)}{dt}$

Une question se pose encore : la vitesse inter-impulsionnelle $v_{(n,n+1)}$ est-elle évaluée

- à la fin de l'impulsion n - dans ce cas c'est v_n (approximation de $v(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$) ?
- au début de l'impulsion $(n + 1)$ - c'est v_{n+1} (approximation de $v(t + dt) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$) ?

4.2. Exemple du tir balistique

On suppose que

- on connaît l'état complet du système (pos., vit., bilan dyn.) à un (ou plusieurs) instant(s) $(t-1) t$
- on dispose d'un schéma d'approximation de l'opérateur de dérivation
- on a fixé dt , intervalle de temps inter-impulsion
- 👉 on va essayer de déterminer une approximation de l'état suivant $t+1$
- *État à l'instant t :*
 - position $\vec{x}(t)$
 - vitesse $\vec{v}(t)$
 - bilan dyn. $\vec{a}(t) = -\vec{G} - \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t)$

a Première approximation (évaluation en fin d'impulsion)

On utilise l'opérateur de dérivation anticipée : $\dot{u}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{u(t+dt) - u(t)}{dt}$

- *Intégration :*

état à l'instant $t+dt$

- $\vec{v}(t) = \frac{\vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{x}(t+dt) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t).dt$
- $\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) \left(1 - \frac{\alpha}{m} dt\right) + \vec{G}.dt$
- bilan dynamique $\Rightarrow \vec{a}(t+dt) = -\vec{G} - \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t+dt)$

- **Problème** : avec le schéma $\dot{u}(t) = \frac{u(t+dt) - u(t)}{dt}$, on évalue la dérivée en t avec la valeur $u(t+dt)$ que l'on ne connaît pas encore².

👉 on est incapable d'évaluer la validité de la solution pas-à-pas calculée.

² puisque c'est précisément ce que l'on cherche à calculer!!

b Deuxième approximation (évaluation en début d'impulsion)

On utilise l'opérateur de dérivation retardée : $\dot{u}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t-dt)}{dt}$

- avec ce schéma on évalue la dérivée $\dot{u}(t)$ avec les valeurs $u(t - dt)$ et $u(t)$ que l'on connaît.

👉 on peut évaluer à tout instant la validité de la solution pas-à-pas calculée.

- la mise à jour de l'état du système se fait dans l'ordre inverse (en début d'impulsion).

état à l'instant $t+dt$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a}(t+dt) &= \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) &= \vec{v}(t) + \vec{a}(t+dt)dt \\ & & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) &= \vec{v}(t) + \left(-\vec{v}(t+dt)\frac{\alpha}{m} - \vec{G} \right) dt \\ & & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) \left(1 - \frac{\alpha}{m}dt \right) &= \vec{v}(t) - \vec{G}.dt \\ & & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) &= \left(1 - \frac{m}{m+\alpha.dt} \right) \vec{v}(t) - \left(\frac{m.dt}{m+\alpha.dt} \right) \vec{G} \end{aligned}$$

- Intégration :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{v}(t+dt) &= \frac{\vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t)}{dt} & \Rightarrow \vec{x}(t+dt) &= \vec{x}(t) + \vec{v}(t+dt).dt \\ \bullet \text{ bilan dynamique (à } t+2dt) & \Rightarrow \vec{a}(t+2dt) &= -\vec{G} - \frac{\alpha}{m}\vec{v}(t+dt) \end{aligned}$$

- Problème** : si l'expression du bilan dynamique est plus complexe, ça se complique !

$$\begin{aligned} \text{bilan dyn.} & \Rightarrow m\vec{a}(t)dt = \Phi(t, \vec{v}(t), \vec{x}(t)) \\ & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + \frac{dt}{m}\Phi(t+dt, \vec{v}(t+dt), \vec{x}(t+dt)) \\ & \Rightarrow \vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + \frac{dt}{m}\Phi(t+dt, \vec{v}(t+dt), \vec{v}(t+dt).dt + \vec{x}(t)) \end{aligned}$$

\Rightarrow ça peut devenir très très très difficile !