Ejercicios Repaso Final Introducción a la Estadística TD

1. (a) De una urna que contiene 6 bolillas blancas y 4 bolillas negras se extraen 2 bolillas CON reposición. Sea $X=$ "cantidad de bolillas blancas extraídas", y sea Y la variable aleatoria que vale 1 si la cantidad de bolillas blancas extraídas es igual a 1 y que vale 0 en caso contrario.
      i. Calculá la función de probabilidad de masa de X.
      ii. Calculá la función de probabilidad de masa conjunta del vector aleatorio (X, Y).
      iii. Calculá $E(X|Y = 0)$.

   (b) De otra urna que contiene solamente 3 bolillas (numeradas del 1 al 3), Carlos va a extraer 66 bolillas CON reposición. Sea X_i el número de bolilla que sale en la i-ésima extracción.
      i. Calcula $E(X_1)$, $Var(X_1)$ y tambien el desvio estandar de $X_1 - 3X_2$.
      ii. Calculá la probabilidad aproximada de que la suma de los números de las 66 extracciones sea mayor a 143.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con distribución normal bivariada, donde X e Y representan respectivamente la cantidad de kilos de papa y de tomate que se venden por día en una cierta verdulería. Se conocen los siguientes datos: $E(X) = 100$, $E(Y) = 80$, $Var(X) = 25$, $Var(Y) = 16$ y $Corr(X, Y) = 0.44$. En esta verdulería, el kilo de papa deja una ganancia de 40 pesos y el de tomate deja una ganancia de 33 pesos.

   (a) Calculá la probabilidad de que la ganancia diaria (generada por las ventas de papas y tomates) sea mayor a 6924 pesos.
   (b) Calculá $P(Y > 96 \mid X = 125)$.

3. La cantidad de carne en kilos que se vende por día en un frigorífico es una variable aleatoria con distribución normal con esperanza 500 y varianza 625, y la venta en días diferentes son independientes entre sí. Sea X_i la cantidad de carne en kilos que se vende el día i.

   (a)) Sea $W = \frac{X_1+...+X_{10}}{10}$ el promedio de las variables aleatorias $X_1, ..., X_{10}$. ¿Cuánto valen la esperanza y la varianza de W? ¿Tiene W distribución exactamente normal?
   (b) Hallá los valores de n tales que $P(499 \leq \frac{X_1+...+X_n}{n} \leq 501) \geq 0.95$.

4. Suponé que el tiempo que tarda Marcos en llegar a su trabajo es una variable aleatoria continua con función de densidad
$$f(x) = \frac{3}{500}(-x^2 + 30x - 200)$$
si $10 \leq x \leq 20$ y $f(x) = 0$ en otro caso, y que el tiempo que tarda Marcos en llegar a su trabajo en días diferentes son independientes entre sí. La semana que viene a Marcos irá a su trabajo los 7 días de la semana. Sea Y la variable aleatoria "cantidad de días de la semana que viene en los que Marcos tarda más de 18 minutos en llegar a su trabajo". Calculá $P(Y = 2 \mid Y \geq 2)$.

5. Un club dispone de una pileta al aire libre. Suponé que la cantidad de personas que ingresan al club por día durante el mes de diciembre es una variable aleatoria con distribución Poisson, de parámetro 300 si es un día caluroso, y de parámetro 200 si no es un día caluroso. El pronóstico anunciaba que ayer iba a ser un día caluroso con probabilidad 0.8. Teniendo en cuenta la información de que ayer ingresaron al club 250 personas o más, Calcula la probabilidad de que el día de ayer haya sido caluroso.

6. Suponé que el 25% de los alumnos de la Universidad tiene conocimientos del idioma italiano, y el restante 75% no. Se va a elegir a una persona al azar de la Universidad y se le van a realizar 2 preguntas relacionadas con el idioma italiano. Cada vez que se le hace una de esas preguntas a un alumno que tiene conocimientos del idioma italiano, la probabilidad de que responda correctamente es 0.8; mientras que cada vez que se le hace una pregunta a un alumno que NO tiene conocimientos del idioma italiano, la probabilidad de que responda correctamente es 0.3. Suponé además que para una persona dada, las respuestas son independientes entre sí. Sea X la variable aleatoria con distribución Bernoulli que vale 1 si la persona seleccionada tiene conocimientos del idioma italiano y que vale 0 si no tiene; y sea Y la variable aleatoria "número de respuestas que responde correctamente la persona seleccionada".

(a) Calculá la función de probabilidad de masa conjunta del vector (X, Y) (es decir, calculá $p_{XY}(x, y)$ para todo x en el rango de X y para todo y en el rango de Y), y determiná, realizando los cálculos que consideres pertinentes, si los eventos $\{X = 1\}$ e $\{Y = 2\}$ son eventos independientes.

(b) Para los siguientes ítems considerá un nuevo vector aleatorio discreto (W, Z) con rango de $W = \{0, 1\}$, rango de $Z = \{5, 6\}$, $p_{WZ}(0, 5) = 0.2$, $P(W = 0) = 0.5$ y $P(Z = 5) = 0.3$.

i. Calculá $Var(W|Z = 5)$.

ii. Calculá la esperanza de la variable aleatoria $Var(W|Z)$.

7. Suponé que la cantidad de kilómetros que camina Pedro cada día es una variable aleatoria con función de densidad
$$f(x) = \frac{3}{4000}(20x - x^2)$$
si $0 \leq x \leq 20$ y $f(x) = 0$ en otro caso, y que la cantidad de kilómetros que camina Pedro en días diferentes son independientes entre sí.

(a) Calculá, aproximadamente, la probabilidad de que el promedio de lo que camine Pedro en los próximos 80 días sea mayor a 10.5 kilómetros.

(b) Pedro tiene una libreta en la que al finalizar cada día anota una cruz si ese día caminó menos de 6 kilómetros, y no anota la cruz en caso contrario.

i. Calculá la probabilidad de que en los próximos 3 días anote al menos dos cruces.

ii. Calculá, aproximadamente, la probabilidad de que la cantidad de cruces que anote en los próximos 100 días sea mayor o igual a 10 y menor o igual a 25.

8. Una empresa tiene tres máquinas que producen varillas. La longitud (en milímetros) de las varillas producidas por la máquina A es una variable aleatoria continua con distribución Uniforme(3.7, 8.1); la de las varillas producidas por la máquina B es una variable aleatoria continua con distribución Uniforme(8.7, 12.7); y la de las producidas por la máquina C tiene distribución normal con esperanza 8.5 y varianza 4. Se sabe además que la máquina A produce el 45% de la varillas de esta empresa, la máquina B el 30% y la máquina C el restante 25%. Se elige una varilla al azar de esta empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que su longitud sea mayor que 7 y menor que 10 milímetros?

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bivariada, en donde X e Y representan las notas del primer y del segundo parcial respectivamente de un alumno elegido al azar en la materia "Análisis". Se sabe que $X \sim N(50, 25)$, $Y \sim N(65, 16)$ y $\rho(X, Y) = 0.6875$. Sea $W = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y$, que representa la nota final del alumno. Calcula $P(\{W > 55\} \mid \{W < 75\})$.

10. Pedro tiene dos monedas, una roja y otra verde. La moneda roja cae en cara con probabilidad 0.7, mientras que la moneda verde cae en cara con probabilidad 0.6. Pedro va a elegir una de sus dos monedas con igual probabilidad, y va a lanzar esa moneda 10 veces. Sea X la variable aleatoria que vale 1 si elige la moneda roja, y que vale 0 si elige la verde. Sea Y la variable aleatoria que cuenta la cantidad de caras que obtiene Pedro. Calcular:

(a) La función de probabilidad de masa condicional de Y dado $X = 1$.

(b) $p_{XY}(1, y)$ y $p_Y(y)$.

(c) La función de probabilidad de masa conjunta del vector (X, Y).

(d) $E(Y|X = 1)$ y $V(Y|X = 1)$.

(e) $E(X|Y = 2)$ y $V(X|Y = 2)$.

(f) Si la moneda se lanza 3 veces en lugar de 10. Calcular $Corr(X, Y)$ y $Var(-5X - 3Y)$.