Aguja de Buffon

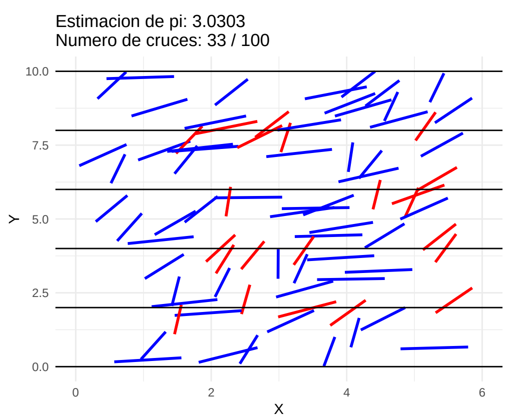
Daniela Rodríguez

Planteado en 1733 por Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, el problema de la aguja de Buffon es una de las primeras cuestiones resueltas en la probabilidad geométrica y posiblemente de las más representativas. Este experimento clásico ofreció una de las primeras conexiones entre el azar y el número π. Este problema investiga la probabilidad de que una aguja lanzada al azar sobre un suelo de tiras paralelas de igual ancho cruce una de las líneas que delimitan las tiras.

El experimento

Imaginemos un suelo con líneas paralelas separadas por una distancia constante d. Se lanza al azar una aguja de longitud ℓ (con $\ell \leq d$) sobre este suelo, y se observa si la aguja cruza alguna de las líneas. Lo que se intenta responder es: ¿Cuál es la **probabilidad** de que la aguja cruce una de las líneas?

Para responder esta pregunta podemos hacer un experimento de manera repetida. Tiramos agujas en el suelo y consideramos n: número total de lanzamientos y X_n: número de veces que la aguja cruza una línea. Y si calculamos $\dfrac{2\ell n}{d \cdot X_n}$ resulta ser una buena aproximación de π. Por ejemplo, la siguiente figura muestra el resultado de simular 100 repeticiones del experimento con agujas de longitud ($\ell = 1$ y distancia entre lineas $d = 2$.



Frecuencia y probabilidad

La Ley de los Grandes Números establece que, al repetir un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa converge en probabilidad a la probabilidad teórica.

En el contexto del experimento, definimos la variable aleatoria

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la aguja } i \text{ cruza una línea,} \\ 0 & \text{si no cruza.} \end{cases}$$

Entonces, $Y_1, \ldots, Y_n$ son variables independientes con distribución de Bernoulli con parámetro $p = P($ cruza una línea$)$, es decir, $E[Y_i] = p$. La frecuencia relativa observada es simplemente:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{X_n}{n}.$$

Luego por la Ley de los Grandes Números, la frecuencua relativa converge en probabilidad a p,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} p.$$

Buffon demostró que $p = \frac{2\ell}{\pi d}$ y por lo tanto despejando π de la fórmula de probabilidad, obtenemos:

$$\pi \approx \frac{2\ell n}{dX_n},$$

lo cual permite estimar el valor de π a partir de los datos experimentales: número total de lanzamientos n y número de cruces X_n.

Gracias a la Ley de los Grandes Números, sabemos que al aumentar el número de lanzamientos, la frecuencia relativa observada se acerca a la probabilidad real. Esto justifica el uso del experimento de Buffon como un método válido para estimar el número π mediante técnicas aleatorias.

La cuenta del Buffon

Mostraremos como se obtiene esa probabilidad p. Para ello notemos que al lanzar una aguja"al azar", asumimos que la posición y el ángulo de la aguja siguen, cada una, una distribución uniforme. Los dos parámetros clave para determinar si una aguja cruza una línea son la distancia y desde el centro de la aguja a la línea inferior y el ángulo θ que forma la aguja con las líneas paralelas.

Se definen las variables aleatorias Y y Θ, independientes y distribuidas uniformemente:

$$\begin{aligned} Y \sim U[0,d[\quad &\Rightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{d}\mathbf{1}_{[0,d]}(y) \\ \Theta \sim U[0,\pi] \quad &\Rightarrow \quad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi[}(\theta) \end{aligned}$$

El problema se subdivide en dos casos principales: Si la aguja es corta $(l < d)$ o si la aguja es larga $(l \geq d)$. Para cada caso calculemos la probabilidad de que la aguja corte un linea.

Caso 1: Aguja Corta ($l < d$)

En este caso, la longitud de la aguja (l) es menor que la distancia entre las líneas paralelas (d). Una aguja cruzará una línea si su extremo inferior o superior toca una línea. Esto ocurre si:

$$y \leq \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} \quad \text{o} \quad d - y \leq \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y \geq d - \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}$$

Sea A el evento de que la aguja golpea la línea inferior y B el evento de que la aguja golpea la línea superior. Dado que $l < d$, una aguja no puede cruzar la línea superior e inferior simultáneamente, lo que significa que los eventos A y B son disjuntos.

La probabilidad de que la aguja cruce una línea es $P\{\text{aguja cruza una línea}\} = P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$. La derivación integral para esta probabilidad es la siguiente:

$$\begin{aligned}
P\{\text{aguja cruza una línea}\} &= P\left\{0 \leq y \leq \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\right\} + P\left\{d - \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} \leq y \leq d\right\} \\
&= \int_0^\pi \int_0^{\sin(\theta)\cdot\frac{l}{2}} f_Y(y) f_\Theta(\theta)\, dy\, d\theta + \int_0^\pi \int_{d-\sin(\theta)\cdot\frac{l}{2}}^{d} f_Y(y) f_\Theta(\theta)\, dy\, d\theta \\
&= \frac{1}{d\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\, d\theta + \frac{1}{d\pi} \int_0^\pi \left(d - \left(d - \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\right)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{d\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\, d\theta + \frac{1}{d\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\, d\theta \\
&= \frac{2}{d\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}\, d\theta \\
&= \frac{2}{d\pi} \left[-\cos(\theta) \cdot \frac{l}{2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{d\pi} \left(-\cos(\pi) \cdot \frac{l}{2} + \cos(0) \cdot \frac{l}{2}\right) \\
&= \frac{2}{d\pi} \left(-(-1) \cdot \frac{l}{2} + (1) \cdot \frac{l}{2}\right) \\
&= \frac{2}{d\pi} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) \\
&= \frac{2l}{d\pi}
\end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que una aguja corta cruce una línea es $P\{\textbf{aguja cruza una línea}\} = \frac{2l}{d\pi}$.

Caso 2: Aguja Larga ($l \geq d$)

Este caso es más complejo porque la aguja puede intersectar varias líneas a la vez. Aquí, los eventos A (tocar la línea inferior) y B (tocar la línea superior) **no son disjuntos**.

Existe un **ángulo crítico** θ_0 tal que si el ángulo de la aguja está en el intervalo $[\theta_0, \pi - \theta_0]$, la aguja siempre intersectará al menos una línea, independientemente de la posición y de su centro.

Este ángulo se define como:

$$\sin(\theta_0) = \frac{d/2}{l/2} = \frac{d}{l} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = \arcsin\left(\frac{d}{l}\right)$$

La fuente indica que el problema se puede analizar dividiendo el intervalo $[0, \pi[$ en tres subintervalos y que, aunque existen tres casos (aguja más cerca de la línea inferior, más cerca de la superior, o exactamente a mitad de camino), los resultados son los mismos para cualquiera de ellos. La fuente solo resuelve el caso en el que la aguja se encuentra exactamente a la mitad entre las líneas ($y = d/2$), pero el lector es animado a probar los otros.

La probabilidad $P\{A\}$ (aguja golpea la línea inferior) y $P\{B\}$ (aguja golpea la línea superior) son idénticas en este caso:

$$P\{A\} = \frac{l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)$$
$$P\{B\} = \frac{l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)$$

La probabilidad de que ambos eventos ocurran ($P\{A \cap B\}$) es:

$$P\{A \cap B\} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)$$

Aplicando la fórmula para la unión de eventos no disjuntos, $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$:

$$\begin{aligned}
P\{\text{aguja cruza una línea}\} &= \left(\frac{l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right) \\
&\quad - \left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right) \\
&= \frac{2l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 2 - \frac{4}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right) - \left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right) \\
&= \frac{2l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad $\arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\alpha)$, la fórmula final para el caso de la aguja larga es:

$$\begin{aligned}
P\{\text{aguja cruza una línea}\} &= \frac{2l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{d}{l}\right)\right) \\
&= \frac{2l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) + 1 - 1 + \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{d}{l}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{d}{l}\right) + \frac{2l}{d\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

Ambas fórmulas, para la aguja corta y larga, permiten estimar el valor de π a partir de la probabilidad observada de que la aguja cruce una línea.

Conclusión

El problema de la aguja de Buffon muestra cómo una situación puramente aleatoria puede ser utilizada para estimar una constante matemática universal. Este experimento es considerado un antecedente de los métodos de *Monte Carlo*, que utilizan el azar para resolver problemas matemáticos complejos.