

## Занятие 2.

### Тема: Кинематика материальной точки.

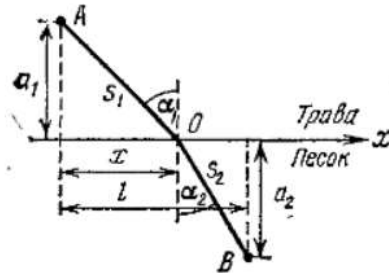
1. Точка движется в плоскости  $xu$  по закону:  $x = at$ ,  $y = at(1 - at)$ , где  $a$  и  $a$  – положительные постоянные,  $t$  – время. Найти: а) уравнение траектории точки  $y(x)$ , изобразить ее график; б) модуль скорости  $v$  и модуль ускорения  $w$  точки в зависимости от времени; в) момент  $\tau$ , в которой вектор скорости составляет угол  $\frac{\pi}{4}$  с вектором ускорения. (Ответ:  $y(x) = x(1 - ax/a)$ ,

$$\vec{v} = a\vec{e}_x + (a - 2ata)\vec{e}_y, \quad \vec{w} = -2aa\vec{e}_y, \quad \tau = 1/a)$$

2. Радиус-вектор точки  $A$  относительно начала координат меняется со временем  $t$  по закону  $\vec{r} = at\vec{e}_x - bt^2\vec{e}_y$ ,  $a$  и  $b$  – положительные постоянные. Найти: 1) уравнение траектории точки  $y(x)$ , изобразить ее график; 2) зависимость от времени векторов скорости  $\vec{v}$ , ускорения  $\vec{w}$  и модулей этих величин; 3) зависимость от времени угла  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ ; средний вектор скорости за первые  $t$  секунд движения и модуль этого вектора.

3. Тело бросили с поверхности Земли под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха найти: а) время движения  $\tau$ ; б) максимальную высоту подъема  $h$  и горизонтальную дальность полета  $L$ , при каком значении угла  $\alpha_0$  они будут равны; в) уравнение траектории  $y(x)$ , где  $x$  и  $y$  – перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно; г) полное, тангенциальное и нормальное ускорение в начале и середине траектории; д) радиус кривизны  $R$  начала и вершины траектории.

4. Ось  $x$  на рис. служит границей между участком, поросшим травой, и участком, покрытым рыхлым песком. Пешеходу нужно попасть из пункта  $A$  в пункт  $B$ . По траве пешеход может идти со скоростью  $v_1 = 5,00$  км/ч, по песку – со скоростью  $v_2 = 3,00$  км/ч. Чтобы совершить переход за самое короткое время, пешеход выбирает ломанный путь  $AOB$ . При каком соотношении между синусами углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  время движения пешехода из  $A$  в  $B$  будет минимальным?



5. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,10 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели в отсутствие сопротивления воздуха? (Ответ:  $t = 24$  с)

6. Тело брошено под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 20$  м/с. Найти: а) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета; б) под каким углом  $\beta_1$  к горизонту движется тело через  $\tau_1 = 1,5$  с после начала движения? Через  $\tau_1 = 2,5$  с? в) через сколько времени  $\tau_0$  и на какой высоте  $h$  тело будет двигаться под углом  $\beta_2 = 45^\circ$  к горизонту?

$$(\text{Ответ: а) } H = 15 \text{ м, б) } \tan \beta_1 = \frac{v_0 \sin \alpha - g\tau_1}{v_0 \cos \alpha}, \quad \beta_1 = 13,5^\circ; \text{ в) } \tau_0 = \frac{v_0(\sin \alpha - \cos \alpha)}{g} = 0,74 \text{ с})$$

7. Снаряд, выпущенный из орудия под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, дважды был на одной и той же высоте  $h$  спустя время  $t_1 = 10$  с и  $t_2 = 50$  с после выстрела. Определить начальную скорость  $v_0$  и высоту  $h$ . (Ответ:  $v_0 = \frac{2(t_1 + t_2)}{2 \sin \alpha} = 600$  м/с;  $h = 2500$  м)

8. Над колодцем глубиной  $h = 10$  м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью  $v_0 = 14$  м/с. Через сколько времени камень достигнет дна колодца? (Ответ:  $t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2}}$ )

9. Точка движется в плоскости  $xOy$  по закону  $x = a \sin \omega t$ ,  $y = at(1 - \cos \omega t)$ , где  $\omega$  и  $a$  – положительные постоянные,  $t$  – время. Найти: а) путь  $S$ , проходимый точкой за время  $\tau$ ; б) угол между векторами скорости и ускорения точки. (Ответ:  $S = a\omega\tau$ ;  $\alpha = \pi/2$ )

10. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости  $v$  по закону  $w = a\sqrt{v}$ , где  $a$  – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна  $v_0$ . Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

11. Зависимость модуля скорости тела от пройденного пути имеет вид  $v(s) = v_0 - bs$ . Найти: а) зависимость пути  $s$  от времени  $t$ ; б) зависимость модуля скорости  $v$  от времени  $t$ .

12. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью  $v_0 = 250$  м/с: первый – под углом  $\alpha_1 = 60^\circ$  к горизонту, второй – под углом  $\alpha_2 = 45^\circ$  (азимут один и тот же). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом. (Ответ:  $\Delta t = \frac{2 v_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{g(\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)}$ )

13. Вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с брошен камень. Через 1 секунду после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте встретятся камни?

14. Тело бросили горизонтально с некоторой высоты  $h$  со скоростью 10 м/с. Дальность полета тела равна высоте  $h$ . Определить высоту  $h$ .

15. Уравнение движения тела дано в виде  $x = 15t + 0,4t^2$  (м). Определить начальную скорость и ускорение движения тела, а также координату и скорость тела через 5 с после начала движения

16. Камень падает с высоты  $H = 1000$  м. Какой путь  $s$  пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

17. Вертикально падающая дождевая капля в момент, когда она достигает поверхности земли, имеет скорость 15 м/с. Одна из капель падает в колодец глубиной 10 м. Сколько времени нужно для того, чтобы человек, стоящий на земле, услышал удар капли о поверхность воды, если скорость звука в воздухе 340 м/с? (~0,6 с)