
ELECTRODINÁMICA I

Versión del 12 de agosto de 2016

Prefacio

*Este apunte ha sido escrito principalmente por **G. Rubilar** a partir de (e inspirado en) los cursos dictados por el Prof. Enrique Oelker en el **Departamento de Física** de la **Universidad de Concepción**, y ha contado con las contribuciones de F. Izaurieta, E. Rodriguez, J. Saez, C. Salas, O. Jiménez, F. Torres, P. Mella, J. Oliva, P. Utreras, J. Villegas, P. Muñoz, M.A. Solís y A. Maldonado.*

Esta obra ha sido publicada bajo una **licencia GPL v3**. El código fuente (pdf)L^AT_EX, así como las figuras en formato editable están disponibles en el **repositorio GitHub del proyecto**.

Otros apuntes en https://sites.google.com/site/apuntesdecienciasfisicas .
--

“...Así, nosotros los mortales, somos inmortales en lo que creamos en común.”

Albert Einstein.

Índice general

Prefacio	I
1. Electrostática	1
1.1. Introducción y conceptos fundamentales	1
1.1.1. Ley de Coulomb	1
1.1.2. Campo eléctrico	3
1.1.3. Líneas de campo eléctrico	4
1.1.4. Potencial eléctrico	5
1.2. Ley de Gauss	6
1.2.1. Ejemplo	7
1.2.2. Ecuación de Poisson y Laplace	7
1.3. Condiciones de frontera para el campo eléctrico en una interfase	7
1.3.1. Conductores	9
1.3.2. Sobre (dis)continuidad de los campos	9
1.4. Solución de la ecuación de Laplace	10
1.4.1. Coordenadas Esféricas	10
1.5. Solución de la ecuación de Poisson	12
1.5.1. Solución en términos de Funciones de Green*	12
1.5.2. Unicidad de la solución	14
1.6. Método de las imágenes	15
1.6.1. Conductor plano	15
1.6.2. Conductor esférico	17
1.6.3. Conductor Cilíndrico	18
1.7. Energía potencial eléctrica de cargas en un campo externo	20
1.8. Energía potencial de un sistema de cargas	21
1.8.1. Energía potencial de un conjunto de cargas puntuales	21
1.8.2. Energía potencial de una distribución continua de cargas	22
1.9. Expansión multipolar cartesiana	25
1.9.1. Expansión Multipolar	25
1.9.2. Distribuciones de carga en campos externos	31
1.10. Electrostática macroscópica	34
1.10.1. Vector y cargas de Polarización	34
1.10.2. Desplazamiento eléctrico	36
1.10.3. Relación Constitutiva, susceptibilidad, permeabilidad	37
1.10.4. Medios lineales anisótropos	38
1.10.5. Medios lineales isótropos	39
1.10.6. Ecuación de Poisson y su generalización	39
1.10.7. Direcciones principales de un medio anisótropo	40
1.10.8. Condiciones de frontera para \vec{D}	41

1.10.9. Caso de un medio lineal e isotrópico	41
1.10.10. Modelos microscópicos simples de polarización	45
1.10.11. Energía electrostática en un dieléctrico	46
1.10.12. Fuerzas y torques	47
2. Magnetoestática	50
2.1. Corriente y densidad de corriente	50
2.1.1. Densidad de Corriente	50
2.2. Conservación de la carga eléctrica	51
2.2.1. Corrientes Estacionarias	51
2.3. Campo magnético y fuerza magnética	51
2.4. Ley de Biot-Savart	52
2.5. Potencial vectorial	54
2.6. Divergencia del Campo Magnético	55
2.7. Ley de Ampère	56
2.7.1. Ejemplo: Campo magnético producido por una línea infinita de corriente	57
2.8. Potencial escalar magnético	57
2.9. Expansión multipolar magnética	58
2.9.1. Momento dipolar de una espira plana	60
2.9.2. Relación entre momento magnético y momento angular	60
2.10. Fuerza y torque sobre una distribución compacta de corriente	61
2.11. Campos magnéticos en la materia	62
2.11.1. Magnetización	63
2.11.2. Excitación magnética	65
2.11.3. Condiciones de continuidad en interfaces	65
2.11.4. Relación constitutiva, susceptibilidad magnética	66
2.11.5. Paramagnetismo, diamagnetismo, ferromagnetismo	67
3. Electrodinámica	70
3.1. Ley de inducción de Faraday	70
3.1.1. Energía del campo magnético	72
3.1.2. Fuerzas y torques sobre circuitos magnéticos	74
3.2. Ecuaciones de Maxwell	74
3.3. Conservación de la energía y Vector de Poynting	75
3.4. Conservación del momentum lineal	77
3.5. Ondas Electromagnéticas	79
3.5.1. Campos electromagnéticos y ecuación de la onda	79
3.5.2. Ondas electromagnéticas planas monocromáticas	80
3.5.3. Ondas electromagnéticas en la materia	82
3.5.4. Índices de reflexión y refracción	82
3.5.5. Guías de onda y cavidades resonantes	82
3.6. Potenciales y transformaciones de gauge	82
A. Coordenadas curvilíneas	87
A.1. Coordenadas Cartesianas	87
A.2. Coordenadas Cilíndricas	88
A.3. Coordenadas Esféricas	88
B. Campos vectoriales, rotores y divergencias	90

C. Sistemas de Unidades	93
C.1. Sistema Internacional de unidades (S.I.)	95
C.2. Sistema Gaussiano de Unidades (C.G.S.)	95
C.3. Conversión de magnitudes S.I. a Gaussianas	96
D. Constantes Físicas (S.I.)	97

Capítulo 1

Electrostática

1.1. Introducción y conceptos fundamentales

Uno de los conceptos fundamentales para la descripción de los fenómenos electromagnéticos es el de *carga eléctrica*. La carga eléctrica es una propiedad física de los cuerpos, atribuida a ellos precisamente para diferenciar (o, en general, describir) su comportamiento en las interacciones electromagnéticas. La experiencia ha mostrado que es posible describir las propiedades de la interacción electromagnética (por ejemplo, atracción, repulsión, o ausencia de fuerza) si se asume que la magnitud física llamada carga eléctrica puede adoptar valores positivos, negativos (o nulos), y que es una propiedad aditiva (es decir, que la carga eléctrica total de un sistema formado por otras cargas es la suma algebraica de las cargas constituyentes).

En general, la interacción electromagnética entre cargas puede ser bastante complicada. Por ejemplo, la fuerza que una carga ejerce sobre otra depende en general no sólo de la distancia entre ellas, sino también de sus velocidades y aceleraciones relativas, y presenta además efectos “de retardo” (esto quiere decir que la fuerza que una carga experimenta debido a la otra no depende de la posición, velocidad y aceleración de la otra en el mismo instante, sino que en tiempos anteriores). Por esto, comenzaremos estudiando el caso más simple en que el sistema de cargas consideradas es *estacionario*. En esta situación los efectos de retardo y la dependencia con las velocidades y aceleraciones desaparecen, de modo que **las fuerzas electrostáticas dependen sólo de las distancias entre las cargas**.

1.1.1. Ley de Coulomb

En 1785 Coulomb¹ *establece experimentalmente* que la fuerza entre dos cargas muy pequeñas comparadas con la distancia que las separa (“puntuales”) es *aproximadamente* proporcional a la magnitud de las cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y en la dirección que las une. Finalmente el sentido de la fuerza es tal que dos cargas de igual signo se repelen y dos de signos opuestos se atraen. Este resultado experimental, y por consiguiente necesariamente aproximado, es la base de la teoría de la interacción electrostática. Esta teoría *asume* entonces que la fuerza entre cargas “puntuales” es *exactamente* inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y en la dirección de la línea que los une, de modo que

¹Charles Augustin de Coulomb: físico e ingeniero francés (1736-1806). Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb.

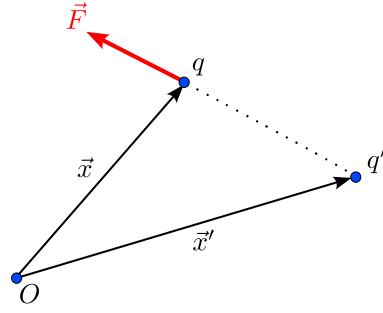


Figura 1.1: Fuerza electrostática entre dos cargas puntuales.

$$F_i \propto \underbrace{\frac{qq'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}}_{\text{magnitud}} \cdot \underbrace{\frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{vector unitario}}. \quad (1.1)$$

Podemos por tanto escribir

$$F_i = k \frac{qq'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \cdot \frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.2)$$

El valor de la constante k depende del sistema de unidades usado para medir magnitud de las cargas eléctricas. Nosotros utilizaremos el sistema internacional SI (MKSA) donde la constante k es denotada como²

$$k := \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

y donde ϵ_0 se conoce como la *permitividad del vacío*, y entonces

$$\boxed{F_i = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}. \quad (1.4) \text{ Ley de Coulomb}$$

En el sistema SI, la constante k tiene el valor

$$k = c^2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad (1.5)$$

en que c es la *velocidad de la luz en el vacío*. Su valor es $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Con esto $k \approx 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$, $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

La expresión (1.4) es conocida como *ley de Coulomb*. Adicionalmente, se *asume* que la fuerza que ejerce un conjunto de N cargas puntuales $q^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, N$, en posiciones $x_i^{(\alpha)}$ sobre una carga q con posición x_i es

$$F_i = \sum_{\alpha=1}^N \frac{qq^{(\alpha)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_i - x_i^{(\alpha)})}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \frac{(x_i - x_i^{(\alpha)})}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3}. \quad (1.6)$$

La suposición que esta fuerza sea la suma (vectorial) de las fuerzas individuales que actuaría sobre la carga q debido a cada una de las cargas $q^{(\alpha)}$ es llamado *principio de superposición*. Note que, como su nombre lo indica, este es un *principio* en el que se basa la teoría electromagnética, ya que no es *necesario a priori* que la interacción electrostática respete esta propiedad. En otras palabras, podría ocurrir (o haber ocurrido) que la fuerza que dos

²En el *sistema gaussiano de unidades* (cgs) se define $k := 1$ de modo que la unidad de carga no es independiente: $[q] \stackrel{\text{cgs}}{=} \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$. Esta unidad es llamada una *unidad electrostática* (esu) o un *statCoulomb*.

cargas ejercen sobre una tercera no fuese *exactamente* la suma vectorial de las fuerzas que cada una de ellas ejerce individualmente. Por ejemplo, hoy sabemos que esto último es lo que efectivamente ocurre con la interacción gravitacional (*no* satisface el principio de superposición!). En la teoría electromagnética se asume que la superposición es satisfecha en forma exacta. Como veremos, una consecuencia de este principio es que las ecuaciones que relacionan los campos eléctricos (y sus respectivas fuerzas) con las distribuciones de carga que las producen están descritas por *ecuaciones* (diferenciales y/o integrales) *lineales*.

Para una *distribución continua de cargas* podemos considerar un elemento de volumen dV' conteniendo una carga $dq' = \rho(x')dV'$, donde $\rho(x')$ es la densidad (volumétrica) de carga (carga por unidad de volumen). Usando el principio de superposición podemos escribir la fuerza total que esta distribución ejerce sobre una carga (puntual) de prueba q como

$$F_i = \int_V dF_i \quad (1.7)$$

$$= \int_V \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dq', \quad (1.8)$$

es decir,

$$F_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad \text{Frag sobre carga puntual (1.9)}$$

Análogamente, podemos describir cargas distribuidas en (regiones que puedan aproximarse por) una superficie y/o curva usando la *densidad superficial de carga* $\sigma(x')$ (carga por unidad de área) y/o la *densidad lineal de carga* $\lambda(x')$ (carga por unidad de longitud), de modo que $dq' = \sigma(x')dS$ y $dq' = \lambda(x')d\ell$, respectivamente.

1.1.2. Campo eléctrico

El campo eléctrico $E_i(\vec{x})$ en un punto x_i es definido operacionalmente como la fuerza por unidad de carga *sobre una carga muy pequeña en tamaño y magnitud* (“carga de prueba puntual”) q situada en la posición x_i , es decir,

$$E_i(\vec{x}) := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_i}{q}. \quad (1.10)$$

Note que el proceso límite $q \rightarrow 0$ es necesario puesto que el uso de una carga q de forma y magnitud arbitraria en general (mediante la fuerza de Coulomb) *modificará la distribución de cargas original*. Si la carga q es cada vez más pequeña en extensión y magnitud, entonces ésta modificará cada vez menos la distribución de carga original. En el límite $q \rightarrow 0$, que ciertamente es una abstracción ya que en la práctica no existen cargas puntuales, ni tampoco cargas de magnitud arbitrariamente pequeña, el cociente F_i/q será independiente de la carga de prueba usada, y describirá por lo tanto una cantidad dependiente sólo de la distribución de cargas considerada. Esto permite entonces considerar al campo eléctrico como el campo *generado por la distribución de cargas*.

Con estas consideraciones, tenemos entonces que el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas puntuales $q^{(\alpha)}$ es dado por

$$E_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \frac{(x_i - x_i^{(\alpha)})}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3}. \quad (1.11)$$

C. eléctrico,
cargas
puntuales

Similarmente, para una distribución volumétrica de cargas:

$$E_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad \text{C. eléctrico, distribución (1.12)}$$

En general, preferiremos la descripción de la distribución de cargas en términos de la densidad volumétrica $\rho(\vec{x})$, ya que a partir de ella podemos recobrar rápidamente los otros casos de interés. Por ejemplo, podemos recobrar el resultado para el conjunto de cargas puntuales (1.11) a partir de (1.12) si consideramos

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}). \quad (1.13)$$

1.1.3. Líneas de campo eléctrico

En electrodinámica es útil introducir el concepto de *líneas de campo*. En el caso electrostático, asociado a cada configuración de campo eléctrico, descrito por el campo $E_i(\vec{x})$, es posible definir líneas de campo eléctrico. Cada una de estas curvas, puede modelarse usando una parametrización de la forma $x_i = x_i(\lambda)$, donde λ es un parámetro real. Las líneas de campo son definidas como aquellas tales que sus vectores tangentes en cada punto son paralelos al vector campo eléctrico. Esto es equivalente a la condición,

$$\frac{dx_i}{d\lambda}(\lambda) = E_i(\vec{x}(\lambda)). \quad (1.14) \quad \text{Líneas de campo}$$

Note que, en general, es posible considerar un factor adicional al lado derecho de esta expresión (por ejemplo, $\alpha(\lambda)E_i(\vec{x}(\lambda))$ en lugar de $E_i(\vec{x}(\lambda))$), sin embargo la función $\alpha(\lambda)$ puede siempre ser “normalizada” al valor 1 redefiniendo convenientemente el parámetro para describir la curva.

Más explícitamente, la condición (1.14) adopta, en coordenadas cartesianas y en tres dimensiones, la forma

$$\frac{dx}{d\lambda}(\lambda) = E_x(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (1.15)$$

$$\frac{dy}{d\lambda}(\lambda) = E_y(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (1.16)$$

$$\frac{dz}{d\lambda}(\lambda) = \vec{E}_z(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (1.17)$$

de modo que define, dadas las componentes del campo $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ y $E_z(x, y, z)$, un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, de primer orden, para las incógnitas $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ y $z(\lambda)$.

Una línea de campo particular queda determinada por la solución del sistema de ecuaciones que satisface una determinada condición inicial, por ejemplo $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, donde \vec{x}_0 es un punto dado del espacio. La correspondiente solución $\vec{x}(\lambda; \vec{x}_0)$ describirá la línea de campo que pasa por el punto \vec{x}_0 . Para algunos ejemplos, ver la figura³ 1.2.

³Figuras generadas usando VectorFieldPlot [1].

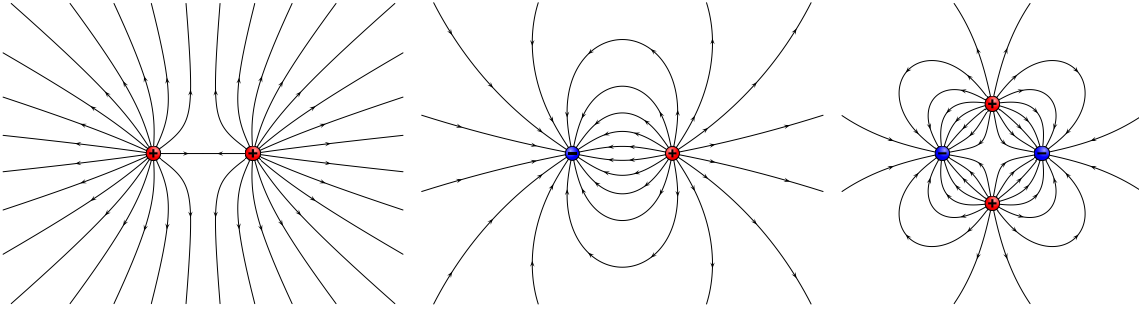


Figura 1.2: Ejemplos simples de líneas de campo eléctrico.

1.1.4. Potencial eléctrico

Usando el hecho que

$$\frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \equiv -\partial_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \quad (1.18)$$

podemos escribir (1.12) como

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (1.19)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (1.20)$$

$$= -\partial_i \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right] \quad (1.21)$$

$$= -\partial_i \phi, \quad (1.22)$$

es decir,

$$\boxed{\vec{E}(x) = -\vec{\nabla}\phi(x),} \quad (1.23) \text{ Campo a partir de potencial}$$

donde hemos definido el *potencial eléctrico*

$$\boxed{\phi(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \text{constante.}} \quad \text{Potencial electrostático} \quad (1.24)$$

Note que es posible agregar una constante arbitraria a la definición del potencial. Por otro lado, es directo verificar que, como consecuencia directa de (1.23), todo campo electrostático es irrotacional, es decir, su rotor es nulo:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}.} \quad (1.25)$$

C. eléctrico
irrotacional

Usando (1.23), podemos expresar el potencial electrostático como una integral de línea del campo eléctrico:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{x}.} \quad (1.26)$$

Debido a (1.25) la integral (1.26) es independiente de la trayectoria que une los puntos \vec{x}_0 y \vec{x} , o equivalentemente,

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0,} \quad (1.27)$$

para toda curva cerrada \mathcal{C} . Note además que de esta propiedad se desprende que las líneas de campo electrostático no pueden ser cerradas. En efecto, si existiese una línea de campo eléctrico cerrada \mathcal{C} , entonces podemos evaluar $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{x}$ sobre esta curva. Pero sobre una línea de campo se satisface que (1.14), de modo que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot d\vec{x} \quad (1.28)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} d\lambda \quad (1.29)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \quad (1.30)$$

$$> 0, \quad (1.31)$$

en contradicción con (1.27).

Note que como consecuencia de (1.23) o, equivalentemente, de (1.26) el vector campo eléctrico es siempre *normal a las superficies equipotenciales* (definidas como aquellos puntos que satisfacen $\phi(\vec{x}) = \text{cte.}$) y su *sentido es siempre hacia regiones de menor potencial*.

1.2. Ley de Gauss

Usando (1.20) podemos calcular la divergencia del campo eléctrico:

$$\partial_i E_i = -\partial_i \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \right] \quad (1.32)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \partial_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (1.33)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (1.34)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \left[-4\pi\delta^{(3)}(x_i - x'_i) \right] dV' \quad (1.35)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x') \delta^{(3)}(x_i - x'_i) dV' \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x). \quad (1.37)$$

Obtenemos así la **forma diferencial de la ley de Gauss**⁴:

$$\boxed{\partial_i E_i = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).} \quad (1.38)$$

Usando el teorema de la divergencia (de Gauss!) para un volumen V arbitrario con borde $S = \partial V$, obtenemos

$$\int_V \partial_i E_i dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x') dV', \quad (1.39)$$

$$\oint_S E_i dS_i = \frac{1}{\epsilon_0} q_V, \quad (1.40)$$

⁴Carl Friedrich Gauss, (1777-1855): matemático, astrónomo y físico alemán, ver http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

donde q_V es la carga neta en el volumen V . En notación vectorial:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_V. \quad (1.41)$$

Esta es la **forma integral de la ley de Gauss**. Es importante recordar que la ley de Gauss en su forma integral es válida *para todo volumen* V y su correspondiente superficie “gaussiana” ∂V . Debido a esta propiedad, la forma integral de la ley de Gauss resulta particularmente eficiente para determinar campos eléctricos en situaciones altamente simétricas, donde es posible elegir el volumen de modo que \vec{E} sea *constante* sobre ∂V (o al menos, sobre partes de ∂V).

1.2.1. Ejemplo

Plano infinito de densidad de carga constante

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, & x < 0 \end{cases}. \quad (1.42)$$

1.2.2. Ecuación de Poisson y Laplace

Usando (1.23) y (1.38) obtenemos

$$\partial_i E_i = -\partial_i \partial_i \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.43)$$

es decir, el potencial eléctrico satisface la **ecuación de Poisson**⁵:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.44) \quad \text{Ec. de Poisson}$$

Como consecuencia, el potencial electrostático en una región libre de cargas satisface la **ecuación de Laplace**⁶:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.45) \quad \text{Ec. de Laplace}$$

1.3. Condiciones de frontera para el campo eléctrico en una interfase

La figura 1.3 muestra la interfase entre dos regiones separadas por una superficie S que posee una densidad superficial de carga $\sigma(x)$. Para estudiar las condiciones que el campo eléctrico satisface en esta interfase, aplicamos primero la ley de Gauss, a la superficie gaussiana de la figura 1.4:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.46)$$

$$= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{n})\Delta S + (\vec{E}_2 \cdot \hat{n})\Delta S + 0 \quad (1.47)$$

$$= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \quad (1.48)$$

⁵Simon Denis Poisson (1781-1840): matemático francés, ver http://es.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson.

⁶Pierre Simon Laplace (1749-1827): matemático, físico y astrónomo francés, <http://es.wikipedia.org/wiki/Laplace>.

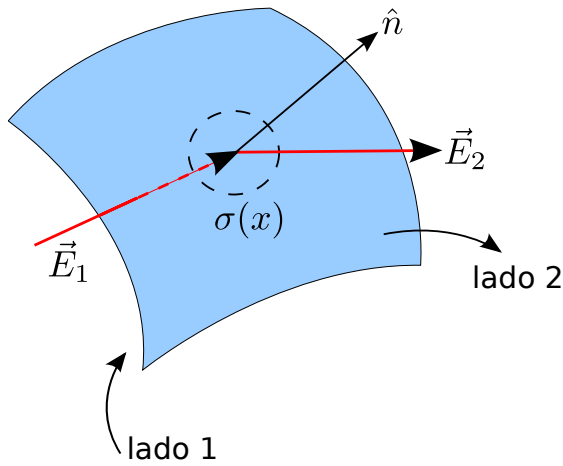


Figura 1.3: Condiciones de frontera para el campo eléctrico.

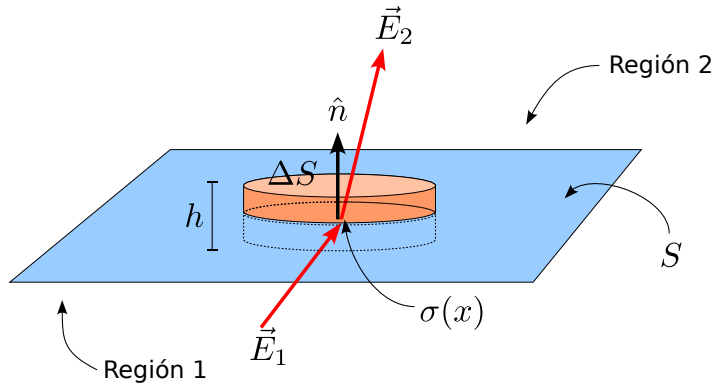


Figura 1.4: Condición de frontera para la componente normal del campo eléctrico.

donde ΔS es una superficie, cuyo *vector unitario* \hat{n} está *dirigido desde la cara 1 a la cara 2*, que contiene una densidad de carga $\sigma(\vec{x})$ [C/m^2], y los campos eléctricos a cada lado de la superficie son como se indica en la figura.

Por tanto, obtenemos

$$\boxed{\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.} \quad (1.49)$$

Por otro lado, aplicando (1.27) a la curva de la figura 1.5 obtenemos:

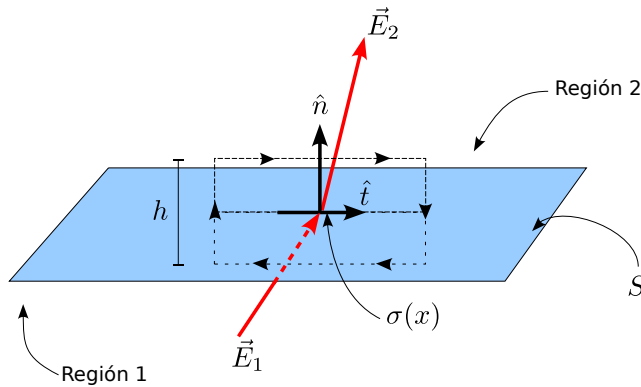


Figura 1.5: Condición de frontera para la componente tangencial del campo eléctrico.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_4} \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (1.50)$$

$$= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{t})\ell + (\vec{E}_2 \cdot \hat{t})\ell + 0 + 0 \quad (1.51)$$

$$= 0. \quad (1.52)$$

De aquí encontramos que

$$\boxed{\vec{E}_2 \cdot \hat{t} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}.} \quad (1.53)$$

Ya que la dirección del vector \hat{t} es arbitraria (pero siempre tangencial a la superficie S), la condición (1.53) implica que *las componentes tangenciales (2 componentes linealmente independientes) del campo eléctrico permanecen inalteradas al cruzar la superficie S .*

1.3.1. Conductores

Los **conductores** son materiales que, aunque estén eléctricamente neutros a nivel macroscópico, poseen una enorme cantidad de electrones “libres” (es decir, no ligados a los átomos, y que pueden moverse a través del conductor tan pronto como exista un campo eléctrico que induzca su movimiento) aptos para conducir la electricidad. La carga de estos electrones es neutralizada (a escala macroscópica) por la de los protones que están en los núcleos, que pueden considerarse fijos. Como ejemplo de conductores podemos mencionar a los metales y a los electrolitos (cambiémoslos conocidos como **soluciones iónicas**).

Si un conductor es cargado, o está en presencia de cargas externas, los electrones rápidamente⁷ se desplazan hasta una situación de *equilibrio*, es decir, un *estado estacionario*. En este estado el campo eléctrico (macroscópico) en el interior del conductor debe anularse ya que de otro modo la fuerza sobre ellos sería no nula, induciendo movimiento. Por tanto, en situación estacionaria $\vec{E} = \vec{0}$ en el *interior* de los conductores. Como consecuencia de la ley de Gauss, la densidad de carga en el interior del conductor se anula cuando éste alcanza su estado estacionario. En otras palabras, *un conductor en estado estacionario distribuye su carga neta sobre su superficie*.

Aplicando las condiciones de borde (1.49) y (1.53) a la interfase del conductor, y tomando en cuenta que en este caso $\vec{E}_1 = \vec{0}$, encontramos que *en cada punto de la superficie (exterior) del conductor*

$$\vec{E}_2(x) = \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0} \hat{n}(x), \quad (1.54)$$

es decir, que el campo eléctrico es normal a la superficie, y proporcional a la densidad de carga en cada punto de ésta. El potencial eléctrico, por otro lado, es necesariamente constante tanto dentro del conductor como sobre su superficie.

1.3.2. Sobre (dis)continuidad de los campos

Idealmente, al menos clásica y macroscópicamente, la distribución de carga descrita por la densidad volumétrica $\rho(\vec{x})$ debiese ser una función *finita y continua* en todo punto. Como consecuencia, el campo eléctrico y el potencial serían, de acuerdo a (1.12) y (1.24), también funciones finitas y continuas. Sin embargo, comúnmente es *conveniente* idealizar la distribución de cargas, considerando que ésta está limitada a una superficie bidimensional (es decir, de sección transversal despreciable). Este caso corresponde a considerar una densidad volumétrica ρ singular (discontinua y divergente)⁸. En este caso, el campo

⁷Como veremos más adelante el *tiempo de relajación* es del orden de $\tau = \varepsilon/\sigma$ donde ε es la *constante dieléctrica* del material y σ su *conductividad*. Por ejemplo, para el cobre $\tau \approx 10^{-19}$ s.

⁸Por ejemplo, la densidad volumétrica correspondiente a una carga distribuida en todo el plano xy , con densidad superficial de carga $\sigma(x, y)$ puede escribirse como $\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\delta(z)$.

eléctrico poseerá, en general, *discontinuidades* en la superficie donde ρ es singular, tal como analizamos en la sección 1.3, pero será *finito en todo punto*. El potencial, por otro lado, será una *función continua y diferenciable por tramos*. En resumen, para distribuciones de carga singulares que incluyan distribuciones superficiales de carga, el potencial puede siempre considerarse como una función continua, el campo eléctrico (proporcional a las derivadas del potencial) puede tener discontinuidades, mientras que las segundas derivadas del potencial (proporcionales a las primeras derivadas del campo eléctrico y, a través de la ecuación de Poisson (1.44), ligadas a la densidad volumétrica de carga) pueden poseer regiones (superficies) singulares. En el caso de que la distribución de carga se modele incluyendo cargas puntuales o líneas de carga, el potencial ya no será finito en todo punto.

1.4. Solución de la ecuación de Laplace

1.4.1. Coordenadas Esféricas

Una solución general (finita sobre el eje z) de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas puede escribirse como:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.55)$$

donde A_{lm} y B_{lm} son coeficientes constantes. Note que estos coeficientes son en general complejos.

Si, como caso particular, el potencial tiene simetría axial, es decir no depende de la coordenada φ , entonces la expansión se reduce a

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{l0} r^l + B_{l0} r^{-(l+1)} \right] Y_{l0}(\theta, \varphi) \quad (1.56)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{l0} r^l + B_{l0} r^{-(l+1)} \right] \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad (1.57)$$

o, equivalentemente,

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta), \quad (1.58)$$

donde a_l y b_l son nuevos coeficientes reales constantes.

Ejemplo: Esfera conductora en un campo eléctrico externo

Consideramos una esfera conductora de radio R ubicada en un campo externo inicial homogéneo \vec{E}_0 . Elegimos los ejes coordenados de modo que el origen coincida con el centro de la esfera y el eje z con la dirección del campo externo, es decir, $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$.

Luego de ubicar la esfera en el campo externo, las cargas libres en ella se reacomodan rápidamente. En la situación estacionaria final el campo eléctrico en el interior de la esfera es nulo, es decir, $\vec{E} = 0$ para $r < R$. Como consecuencia directa $\phi = \text{cte.}$ para $r < R$. Podemos elegir esta constante igual a cero, de modo que

$$\phi(r, \theta) = 0, \quad r < R. \quad (1.59)$$

Por otro lado, de acuerdo a (1.54) el campo eléctrico en la superficie externa del conductor es radial, y proporcional a la densidad de carga $\sigma(\theta, \varphi)$. Debido que el sistema es simétrico

bajo rotaciones en torno a la dirección de \vec{E} , tendremos que $\phi = \phi(r, \theta)$ y $\sigma = \sigma(\theta)$. Finalmente, fuera de la esfera el potencial satisface la ec. de Laplace, por lo que éste debe tener la forma general (1.58). Por lo tanto, para determinar el potencial en todo punto basta determinar los coeficientes (constantes) a_l y b_l .

Una condición necesaria es que asintóticamente, es decir, para $r \rightarrow \infty$, el campo debe tender al campo externo inicial ya que los efectos de las cargas inducidas en la esfera serán cada vez menores en puntos cada vez más alejados, es decir, $\vec{E} \rightarrow \vec{E}_0$. Esta condición es equivalente a

$$\phi \rightarrow -E_0 z + \alpha = -E_0 r \cos \theta + \alpha. \quad (1.60)$$

Aplicando esta condición a la expansión (1.58) encontramos que necesariamente

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = -E_0, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0, \quad (1.61)$$

por lo que el potencial en todo punto se reduce a

$$\phi(r, \theta) = \alpha - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r \geq R. \quad (1.62)$$

Como el potencial es una función continua, debemos tener que

$$\phi(R, \theta) = \alpha - E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0, \quad \forall \theta. \quad (1.63)$$

De aquí, y ya que los polinomios de Legendre son funciones linealmente independientes, encontramos que necesariamente

$$\alpha + \frac{b_0}{R} = 0, \quad -E_0 R + \frac{b_1}{R^2} = 0, \quad b_2 = b_3 = \dots = 0. \quad (1.64)$$

Con esto, el potencial se reduce a

$$\phi(r, \theta) = \alpha - E_0 r \cos \theta - \alpha \frac{R}{r} + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta. \quad (1.65)$$

La constante α es proporcional a la carga neta de la esfera. En efecto, usando (1.54) podemos calcular la densidad superficial de carga en la esfera:

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \vec{E}(R, \theta) \cdot \hat{r} \quad (1.66)$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}(R, \theta) \quad (1.67)$$

$$= -\varepsilon_0 \left[-E_0 \cos \theta + \frac{\alpha}{R} - 2E_0 \cos \theta \right] \quad (1.68)$$

$$= \varepsilon_0 \left[3E_0 \cos \theta - \frac{\alpha}{R} \right]. \quad (1.69)$$

La carga neta de la esfera es entonces

$$Q = \int_S \sigma(\theta) dS \quad (1.70)$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (1.71)$$

$$= 2\pi \varepsilon_0 R^2 \int_0^\pi \left[3E_0 \cos \theta - \frac{\alpha}{R} \right] \sin \theta d\theta \quad (1.72)$$

$$= 2\pi \varepsilon_0 R^2 \left[0 - \frac{2\alpha}{R} \right] \quad (1.73)$$

$$= -4\pi \varepsilon_0 R \alpha. \quad (1.74)$$

En otras palabras,

$$\alpha = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (1.75)$$

Con este resultado, el potencial (1.65) puede escribirse como

$$\phi(r, \theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) r \cos \theta. \quad (1.76)$$

Como vemos, los primeros dos términos son independientes del campo externo y representan el potencial de la carga neta de la esfera (que hemos supuesto aislada). El tercer término es el campo externo inicial y por lo tanto el último término describe el campo eléctrico inducido producto de la polarización de la esfera conductora. El campo eléctrico

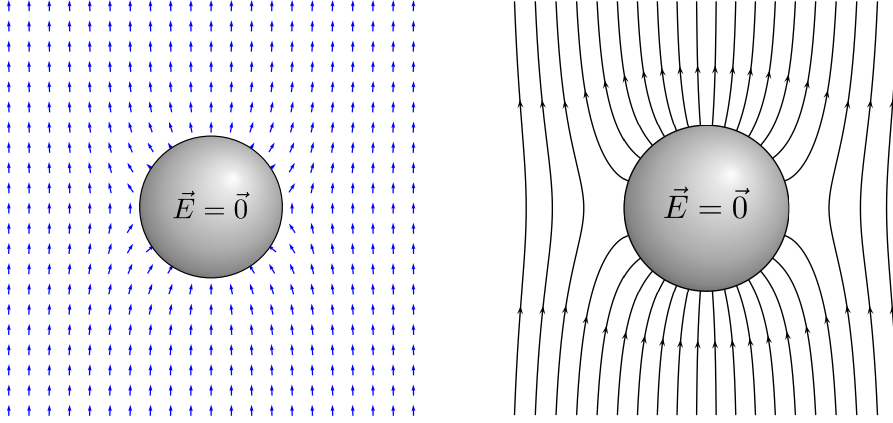


Figura 1.6: Campo eléctrico de una esfera conductora neutra en un campo eléctrico externo. El gráfico de la izquierda (normalizado) fue creado usando [este script](#) Python. La figura de la derecha fue generada usando [VectorFieldPlot](#), a partir de [este](#) archivo original.

es entonces dado por

$$\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}, \quad (1.77)$$

con

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + E_0 \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right) \cos \theta, \quad E_\theta = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \sin \theta. \quad (1.78)$$

En la figura 1.6 se muestra la forma de este campo, en el caso en que $Q = 0$.

1.5. Solución de la ecuación de Poisson

1.5.1. Solución en términos de Funciones de Green*

La ecuación de Poisson (1.44) para el potencial es una *EDP lineal elíptica inhomogénea*. Una forma de encontrar soluciones de este tipo de ecuaciones es usando el método de las *funciones de Green*. En nuestro caso, se dice que $G(\vec{x}, \vec{x}')$ es una función de Green del operador Laplaciano si satisface

$$\nabla^2 G(\vec{x}', \vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.79)$$

Si se conoce una función de Green entonces la solución de la ecuación de Poisson para el potencial en una región V puede expresarse de la forma siguiente:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} \left[\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}') \right] \cdot d\vec{S}' \quad (1.80)$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} \left[\phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'}(\vec{x}') \right] dS' \quad (1.81)$$

Introduciendo el campo eléctrico en el segundo término del lado derecho podemos escribir

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} \left[\phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') + G(\vec{x}, \vec{x}') E_n(\vec{x}') \right] dS', \quad (1.82)$$

donde $E_n := \vec{E} \cdot \hat{n}$ es la componente del campo eléctrico normal a la superficie ∂V (con \hat{n} orientado hacia el exterior del volumen V).

Por otro lado, la función de Green no es única. Si $G_1(\vec{x}, \vec{x}')$ es una función de Green entonces $G_2(\vec{x}, \vec{x}') = G_1(\vec{x}, \vec{x}') + H(\vec{x}, \vec{x}')$ también lo será si H es una solución del problema homogéneo: en nuestro caso de la ecuación de Laplace, $\nabla^2 H(\vec{x}, \vec{x}') = 0$. Esta arbitrariedad en la definición de la función de Green es de hecho una ventaja, puesto que en general no se tiene información *simultánea* del potencial y la componente normal del campo en la frontera ∂V . Por esto, es conveniente elegir una función de Green de modo que los términos del lado derecho de (1.82) puedan efectivamente ser evaluados. Por ejemplo, si se conoce el potencial⁹ en ∂V (típicamente, en situaciones donde ∂V coincide con la superficie de conductores conectados a baterías suministrando una diferencia de potencial conocida) entonces es conveniente usar una *función de Green que se anule en la frontera*, $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$, $\forall \vec{x}' \in \partial V$. En este caso, la solución se reduce a

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} \phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') dS', \quad (1.83)$$

Por otro lado, si se conoce la componente normal del campo en la frontera¹⁰ (por ejemplo, en situaciones donde se dispone de información sobre la densidad de carga superficial en ∂V) entonces parece conveniente usar una función de Green tal que su derivada normal sobre la frontera sea nula. Lamentablemente, esta condición *no es posible de implementar* ya que necesariamente¹¹ debe cumplirse que

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} dS' = 1. \quad (1.84)$$

Una condición un poco menos restrictiva, y factible de implementar consistentemente, es imponer que la derivada normal de la función de Green sea *constante en la frontera*. Entonces, (1.84) requiere que

$$\frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{S}, \quad \vec{x}' \in \partial V, \quad (1.85)$$

donde S es el área total de la frontera, $S := \oint_{\partial V} dS$. En este caso, la solución para el potencial adopta la forma

$$\phi(\vec{x}) = \langle \phi \rangle_S - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} G(\vec{x}, \vec{x}') E_n(\vec{x}') dS', \quad (1.86)$$

⁹condición de borde tipo Dirichlet.

¹⁰condición de borde tipo Neumann.

¹¹Use el teorema de Gauss sobre la integral de volumen de (1.79) para verificar esto!.

donde

$$\langle \phi \rangle_S := \frac{1}{S} \oint_{\partial V} \phi(\vec{x}') dS' \quad (1.87)$$

es el *valor promedio del potencial sobre ∂V* .

Finalmente, la función de Green más conocida del operador Laplaciano es dada por

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.88)$$

Esta función de Green particular posee las propiedades adicionales de ser simétrica bajo rotaciones respecto al punto \vec{x}' , depender sólo de la diferencia $\vec{x} - \vec{x}'$ y de anularse en el infinito (para todo valor finito de \vec{x}'). Debido a estas propiedades está directamente relacionada con la solución de la ecuación de Poisson en el caso en que la región V cubre todo el espacio y se asume que el campo eléctrico se anula en el infinito¹², de modo que el potencial se reduce a

$$\phi(\vec{x}) = \langle \phi \rangle_\infty + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (1.89)$$

1.5.2. Unicidad de la solución

A continuación probaremos que *la solución de la ecuación de Poisson es única* (salvo una constante aditiva), en una región V , para valores dados del potencial *o de la componente normal del campo* en la frontera¹³ ∂V . Para esto, asumimos que existen dos soluciones distintas de (1.44) en V , $\phi_1(\vec{x})$ y $\phi_2(\vec{x})$, que *satisfacen las mismas condiciones de borde*, es decir, su valor es conocido en ∂V o bien su derivada normal es conocida en esta frontera.

Definimos la diferencia $U(\vec{x}) := \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x})$ que será entonces una solución de la ecuación de Laplace, $\nabla^2 U = 0$. En la frontera ∂V esta función satisface $U = 0$ o bien $\partial U / \partial n = 0$, ya que asumimos que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen las mismas condiciones de borde (tipo Dirichlet, o bien tipo Neumann). Usamos ahora la identidad¹⁴

$$\int_V \left[|\vec{\nabla} U|^2 + U \nabla^2 U \right] dV \equiv \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS, \quad (1.90)$$

que puede ser verificada fácilmente usando el teorema de Gauss. En nuestro caso, dada la EDP y las condiciones de borde que U satisface, la identidad implica que

$$\int_V |\vec{\nabla} U|^2 dV = 0. \quad (1.91)$$

Como consecuencia la función U debe ser *constante*¹⁵, por lo que las dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 sólo pueden diferir por una constante, representando la misma solución física¹⁶.

Es importante notar que este resultado implica que, en general, es inconsistente intentar encontrar una solución de la ecuación de Poisson *imponiendo simultáneamente el valor del potencial y de su derivada normal en la frontera*.

Note que los teoremas anteriores implican que el campo electrostático en una región V queda totalmente determinado por la densidad de carga en el interior del volumen V , y por las condiciones de borde en la frontera ∂V . Una de las múltiples consecuencias de

¹²más rápido que $1/r$, es decir, tal que $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{E}|r = 0$.

¹³Condiciones de borde tipo Dirichlet o tipo Neumann, respectivamente.

¹⁴Esta identidad es un caso particular de la así llamada *primera identidad de Green*.

¹⁵En principio, esto sería válido excepto (a lo sumo) en un conjunto de medida cero. Sin embargo, esta posibilidad queda descartada si el potencial es una función continua.

¹⁶Más aún, para condiciones de borde tipo Dirichlet, esta constante es necesariamente nula.

este hecho es que el campo al interior de un volumen de forma arbitraria, cuya frontera es mantenida a un potencial fijo (por ejemplo, por medio de un conductor puesto “a tierra”) es *independiente de la distribución de cargas en el exterior*. De esta forma, es posible aislar una región de las influencias eléctricas externas (“jaula de Faraday”).

1.6. Método de las imágenes

Como vimos la sección 1.5.2, la solución de la ecuación de Poisson, que determina el potencial electrostático y por lo tanto también el campo eléctrico, es única dadas las condiciones de borde apropiadas. Debido a esto, si obtenemos, *por cualquier método*, una solución que respete las condiciones de borde dadas, ésta es *la* solución del problema. El *método de las imágenes* suministra un procedimiento para encontrar una solución en casos donde el sistema contiene conductores (perfectos) a potencial constante (típicamente, “puestos a tierra”) y la geometría de los conductores y las cargas es simple. Para ello, se introducen *cargas ficticias* en posiciones apropiadas tales que el campo creado por el sistema de cargas reales + ficticias satisface las condiciones de borde.

En otras palabras, el método de las imágenes se basa en el hecho que la solución para el campo eléctrico en una región finita V con una distribución de carga conocida y potenciales dados en su superficie ∂V pueden ser los mismos (en V) que los campos generados por la misma distribución de carga en V y por otra distribución de carga diferente fuera de V . Por esto, para solucionar el problema “real”, en el que la distribución de carga en V y los potenciales en ∂V son conocidos, se puede considerar el problema “ficticio” de encontrar las cargas “imágenes” fuera de V tales que la distribución de cargas total (reales e imágenes) satisfaga las condiciones de contorno en ∂V . Los campos así encontrados son solución del problema original, dentro (pero no fuera) de V . Como veremos, el método de las imágenes básicamente provee un método heurístico para encontrar la función de Green apropiada a las condiciones de borde de un cierto problema físico.

1.6.1. Conductor plano

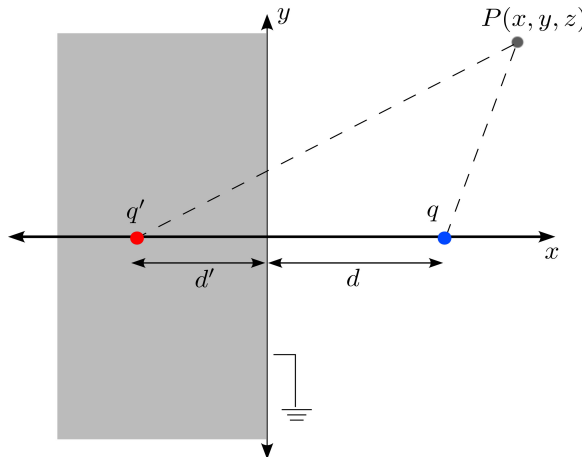


Figura 1.7: Conductor plano, carga real q e imagen q' .

Consideremos la situación donde una carga puntual q se encuentra a una distancia d de un plano conductor (infinito) “puesto a tierra” (de modo que su potencial es igual al potencial en el infinito, elegido como $\phi_\infty = 0$). Elijiendo los ejes coordenados como lo indica la figura 1.7, tendremos que en la situación estacionaria $\phi = 0$ para $x \leq 0$. Usando

el método de las imágenes resolvemos el problema equivalente obtenido al reemplazar el plano conductor por una carga ficticia (imagen) q' ubicada en la posición $x = -d' < 0$. El potencial de la configuración de carga real más carga imagen es entonces

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+d')^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (1.92)$$

La condición que $\phi = 0$ sobre el plano, es decir, para todo punto con $x = 0$, se satisface sólo si

$$d' = d, \quad q' = -q. \quad (1.93)$$

Por lo tanto, la solución para el potencial en todo punto con $x \geq 0$ es dada por

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right], \quad x \geq 0. \quad (1.94)$$

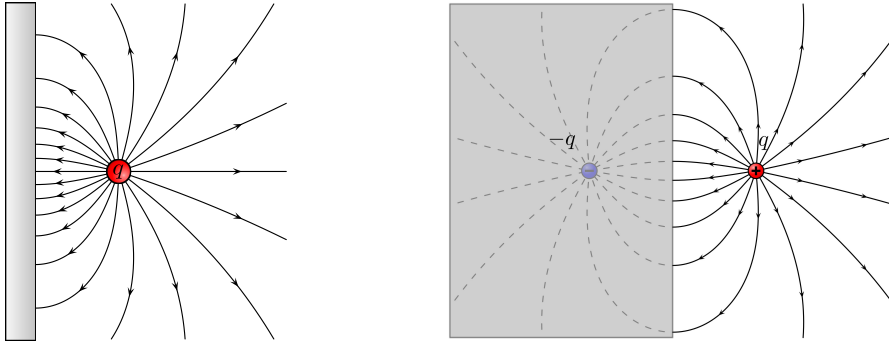


Figura 1.8: Campo eléctrico de plano conductor (puesto a Tierra) y carga puntual. Figuras adaptadas de [este](#) y [este](#) archivo original.

La densidad de carga inducida en el conductor puede calcularse usando

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 (\partial_x \phi)|_{x=0} \quad (1.95)$$

que, luego de algo de álgebra, resultar ser

$$\sigma(y, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.96)$$

Por otro lado, la fuerza que ejerce el plano sobre la carga puede ser calculada usando

$$\vec{F}_q = q\vec{E}', \quad (1.97)$$

donde \vec{E}' es el campo *externo* que actúa sobre q , es decir, el campo determinado por el potencial

$$\phi'(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}, \quad x > 0, \quad (1.98)$$

evaluado en la posición en que se ubica la carga q , es decir,

$$\vec{F}_q = -q(\vec{\nabla} \phi')|_{\vec{x}=d\hat{x}} \quad (1.99)$$

$$= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{x}. \quad (1.100)$$

Note que esta fuerza es la misma que ejerce(ría) la carga imagen sobre la carga real.

1.6.2. Conductor esférico

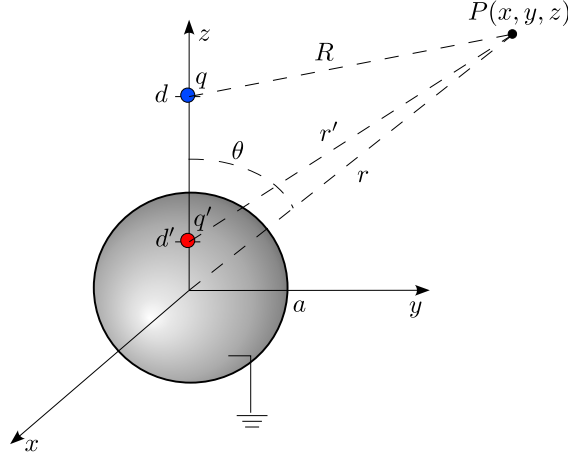


Figura 1.9: Conductor esférico, carga real q e imagen q' .

En este caso, consideramos el sistema formado por un conductor esférico, de radio a , “puesto a tierra”, de modo que su potencial $\phi = \phi_\infty \stackrel{!}{=} 0$, y una carga puntual q ubicada a una distancia d del centro del conductor. El campo eléctrico fuera del conductor es equivalente al campo producido por la carga real q y una carga imagen de magnitud q' ubicada dentro de la esfera, a una distancia d' de su centro.

En efecto, el potencial de la carga real y la carga imagen, de acuerdo a las posiciones indicadas en la figura 1.9, es dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2d'r \cos \theta}} \right] \quad (1.101)$$

Puede verificarse rápidamente que la condición que $\phi = 0$ sobre la esfera, para todo punto con $r = a$, se satisface sólo si

$$d' = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -q \frac{a}{d}. \quad (1.102)$$

Por lo tanto, la solución para el potencial en todo punto exterior a la esfera conductora es dada por

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{a}{\sqrt{a^4 + r^2 d^2 - 2a^2 dr \cos \theta}} \right], \quad r \geq a. \quad (1.103)$$

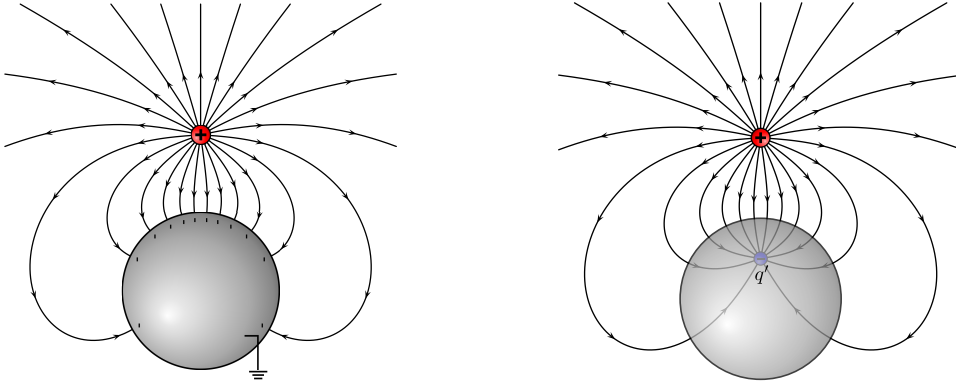


Figura 1.10: Campo eléctrico de esfera conductora (puesta a Tierra) y carga puntual. Figuras adaptadas a partir de [este](#) y [este](#) archivo original.

La densidad de carga inducida en la esfera conductora puede calcularse usando

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\varepsilon_0 (\partial_r \phi)|_{r=a}. \quad (1.104)$$

Reemplazando (1.103) en (1.104) encontramos que

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi a d} \frac{1 - \frac{a^2}{d^2}}{\left[1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{d}\right) \cos \theta\right]^{3/2}}. \quad (1.105)$$

La carga total inducida en la esfera es entonces

$$Q_{\text{ind}} = \oint \sigma dS = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = -q \frac{a}{d}. \quad (1.106)$$

Note que necesariamente la esfera debe tener una carga neta (igual a la carga imagen) para que $\phi = 0$ en su superficie.

Finalmente, la fuerza que la esfera ejerce sobre la carga es dada por

$$\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{d} \frac{1}{(d' - d)^2} \hat{z} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ad}{(a^2 - d^2)^2} \hat{z}. \quad (1.107)$$

1.6.3. Conductor Cilíndrico

Consideremos ahora el campo generado por dos líneas (infinitas) de carga, con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$, situadas en $x = +d$ y $x = -d$, respectivamente. Ver figura 1.11.

El potencial en un punto cualquiera fuera de las líneas de carga es dado por

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} \right). \quad (1.108)$$

Estudiemos la ubicación de las superficies equipotenciales de esta configuración de cargas. Por simplicidad (de cálculo), consideraremos las superficies con $\phi = \phi_0 = \text{cte.}$, con

$$\phi_0 := \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln M, \quad (1.109)$$

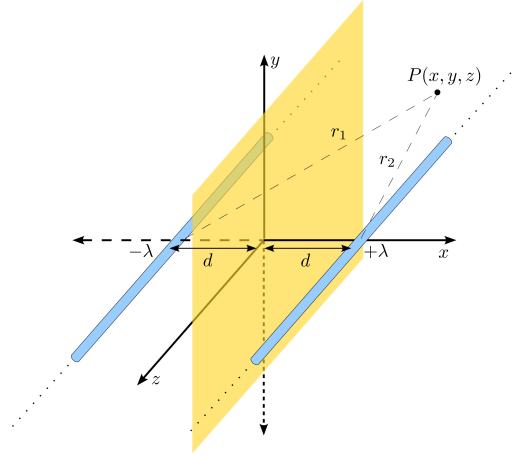


Figura 1.11: Conductor cilíndrico, líneas de densidad λ y $-\lambda$.

donde $M > 0$ es una constante adimensional. Con esto, las superficies $\phi = \phi_0$ corresponden a los puntos que satisfacen

$$\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = M^2. \quad (1.110)$$

Luego de un poco de álgebra encontramos que, si $M \neq 1$, (1.110) es equivalente a

$$\left[x - \frac{d(1+M^2)}{M^2-1} \right]^2 + y^2 = \frac{4M^2d^2}{(1-M^2)^2}, \quad (1.111)$$

que es la ecuación de un cilindro (una circunferencia en el plano xy), centrado en las coordenadas (x_c, y_c) y con radio R , dados por

$$x_c = \frac{d(1+M^2)}{M^2-1}, \quad y_c = 0, \quad R = \frac{2Md}{|1-M^2|}. \quad (1.112)$$

Vemos de aquí que (asumiendo $\lambda > 0$) $x_c < -d$ y $\phi_0 < 0$ si $M < 1$, mientras que $x_c > d$ y $\phi_0 > 0$ si $M > 1$.

Por otro lado, si $M = 1$, entonces la superficie equipotencial es el plano definido por $x = 0$, es decir, el plano yz .

De estos resultados, vemos que las superficies equipotenciales del sistema de cargas analizado son cilindros centrados sobre el eje x (a ambos lados del plano yz eje) y un plano a potencial nulo en $x = 0$. Ver figura 1.12.

Esta información puede ser usada, por ejemplo, para encontrar el campo electrostático entre un plano y un cilindro, a una diferencia de potencial dada V . Si el plano se encuentra en $x = 0$, a potencial nulo y el cilindro, de radio R , se ubicado en $x_c > R$, entonces el campo puede ser determinado considerando *ambas líneas de carga como ficticias*. De las relaciones (1.109), con $\phi_0 = V$, y (1.112) podemos entonces encontrar la constante M , así como la posición, d , y magnitud λ de las líneas de cargas ficticias del problema equivalente, en función de los datos V , x_0 y R . Considerando que $V > 0$, es decir, el potencial sobre el cilindro es mayor que sobre el plano y, de acuerdo a la figura 1.12 el cilindro está a la derecha del plano¹⁷ ($x_x > 0$). Luego de algo de álgebra, obtenemos

$$M = \frac{x_c}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_c}{R}\right)^2 - 1}, \quad d = \frac{R(M^2 - 1)}{2M}, \quad \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln M}. \quad (1.113)$$

¹⁷Si $V < 0$ la situación es similar, luego de una reflexión respecto al plano $x = 0$.

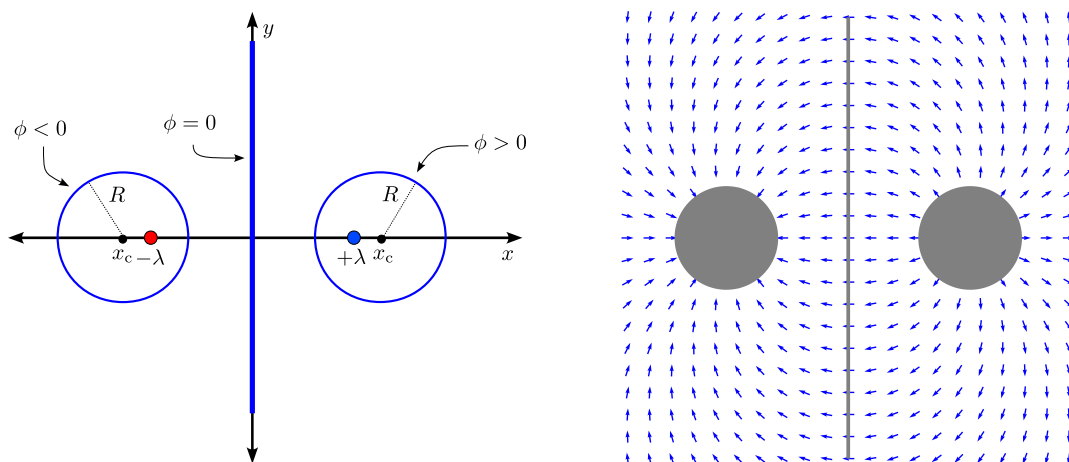


Figura 1.12: Superficies equipotenciales y líneas de campo. Código Python de la figura de la derecha disponible [aquí](#).

1.7. Energía potencial eléctrica de cargas en un campo externo

Como consecuencia de (1.23), la fuerza electrostática es *conservativa*, pues puede derivarse de una energía potencial (o, equivalentemente, el trabajo es independiente de la trayectoria, ya que el campo eléctrico es irrotacional):

$$F_i = qE_i = -q\partial_i\phi. \quad (1.114)$$

Definimos la **energía potencial eléctrica** de una carga q ubicada en un punto x con campo eléctrico (externo) descrito por el potencial $\phi(x)$ por

$$U(x) := q\phi(x), \quad (1.115)$$

de modo que

$$F_i(x) = -(\partial_i U)(x). \quad (1.116)$$

Como toda energía potencial, la energía potencial eléctrica es una cantidad bien definida salvo una constante aditiva arbitraria. Como consecuencia, *sólo las diferencias de energía potencial tienen significado físico inambiguo* (pueden en principio ser medidas). Esta característica se ilustra más claramente si consideramos el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre una carga q al desplazarse ésta desde el punto A hasta el punto B :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F_i dx_i = - \int_A^B \partial_i U dx_i = -U|_A^B = -\Delta U = -q\Delta\phi = -q(\phi_B - \phi_A). \quad (1.117)$$

Como consecuencia, una partícula cargada de masa m y carga q moviéndose en el campo eléctrico externo descrito por el potencial ϕ tendrá una energía mecánica $E = K + U = m\vec{v}^2/2 + q\phi$, que será constante si no existen otras fuerzas actuando, es decir,

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\phi(x) = \text{cte}. \quad (1.118)$$

Podemos generalizar la expresión (1.115) para el caso de una distribución continua de cargas *de prueba*, en un campo *externo*. En otras palabras, *despreciamos el campo que las mismas cargas producen*. Por simple superposición encontramos que la energía potencial

de una distribución de cargas descritas por la densidad $\rho(\vec{x})$ en un campo *externo* $\phi(\vec{x})$ es dado por

$$U = \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (1.119)$$

1.8. Energía potencial de un sistema de cargas

1.8.1. Energía potencial de un conjunto de cargas puntuales

Consideremos ahora el problema de determinar la *energía potencial total de un conjunto de N cargas puntuales*, pero *ahora tomando en cuenta el campo que ellas mismas generan*. Cada carga $q^{(\alpha)}$ posee una energía potencial $U^{(\alpha\beta)}$ asociada al campo eléctrico producido por cada una de las *otras cargas* $q^{(\beta)}$, con $\beta \neq \alpha$. Aquí $\alpha, \beta = 1, \dots, N$.

Además, el potencial eléctrico en el punto \vec{x} , generado por la carga $q^{(\beta)}$ ubicada en el punto $\vec{x}^{(\beta)}$, es dado por

$$\phi^{(\beta)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^{(\beta)}}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\beta)}|}, \quad (1.120)$$

de modo que

$$U^{(\alpha\beta)} = q^{(\alpha)} \phi^{(\beta)}(\vec{x}^{(\beta)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (1.121)$$

Vemos de (1.121) que $U^{(\alpha\beta)} = U^{(\beta\alpha)}$, es decir, la energía potencial de la carga α -ésima debido al campo producido por la carga β -ésima es igual a la energía potencial de la β -ésima debido al campo de la α -ésima.

Además, $U^{(\alpha\beta)} \rightarrow 0$, cuando $|\vec{x}^{(\alpha)}| \rightarrow \infty$ ó $|\vec{x}^{(\beta)}| \rightarrow \infty$. Entonces, de acuerdo a (1.117), podemos interpretar $U^{(\alpha\beta)}$ como la *energía (trabajo) que se necesita para traer la carga $q^{(\alpha)}$ desde el infinito hasta la posición $\vec{x}^{(\alpha)}$, en el campo eléctrico producido por la carga $q^{(\beta)}$, fija en $\vec{x}^{(\beta)}$* , o viceversa.

Para calcular la energía potencial eléctrica total de un sistema de muchas cargas puntuales, “construimos” el sistema, carga por carga, trayéndolas desde el infinito (donde la interacción mutua es despreciable): Primero consideramos que la carga $q^{(1)}$ es transportada desde el infinito hasta su posición final $\vec{x}^{(1)}$. Para esto no se requiere trabajo alguno ya que no existe campo eléctrico preexistente que actúe sobre esta carga. Como segundo paso, traemos la carga $q^{(2)}$ desde el infinito hasta su posición final $\vec{x}^{(2)}$. Este proceso requiere una energía dada por $U^{(21)}$. En el siguiente paso, traemos $q^{(3)}$ desde el infinito hasta $\vec{x}^{(3)}$, manteniendo fijas las cargas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$. La energía requerida para este paso es $U^{(31)} + U^{(32)}$. Hasta el momento la energía total requerida para formar el sistema de 3 cargas es $U^{(21)} + U^{(31)} + U^{(32)} = U^{(12)} + U^{(13)} + U^{(23)}$. Continuando este proceso encontramos que la *energía potencial eléctrica total de un sistema de N cargas $q^{(\alpha)}$, con posiciones $\vec{x}^{(\alpha)}$* es dado por

$$U = \sum_{\alpha, \beta (\alpha > \beta)}^N U^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha, \beta (\alpha > \beta)}^N \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (1.122)$$

Alternativamente, ya que $U^{(\alpha\beta)} = U^{(\beta\alpha)}$, podemos escribir $U = (1/2) \sum_{\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)}^N U^{(\alpha\beta)}$, de modo que

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)}^N \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (1.123)$$

En términos del *potencial electrostático total en el punto $\vec{x}^{(\alpha)}$ debido a todas las otras cargas $q^{(\beta)}$ ($\beta \neq \alpha$)*,

$$\phi'(\vec{x}^{(\alpha)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\beta (\beta \neq \alpha)}^N \frac{q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}, \quad (1.124)$$

tenemos que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \phi'(\vec{x}^{(\alpha)}). \quad (1.125)$$

1.8.2. Energía potencial de una distribución continua de cargas

En el caso de una *distribución continua* de carga descrita por una densidad de carga $\rho(\vec{x})$, requerimos una expresión similar a la encontrada en la sección anterior para cargas puntuales. En el límite continuo, esperamos poder reemplazar $q^{(\alpha)} \rightarrow dq = \rho(\vec{x}) dV$. Por otro lado, podríamos esperar que el potencial $\phi'(x^{(\alpha)})$ tienda simplemente al potencial de la distribución continua de carga, evaluado en el punto \vec{x} , es decir, $\phi'(x^{(\alpha)}) \rightarrow \phi(\vec{x})$, ya que no tiene sentido hacer distinción, en el caso de una distribución continua, entre el campo ϕ' (es decir, el potencial producido por las cargas del sistema localizadas en puntos $\vec{x}' \neq \vec{x}$) y el simplemente el potencial $\phi(\vec{x})$.

De este modo, obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (1.126)$$

Es importante entender la diferencia entre (1.119) y (1.126). La primera expresión representa la energía potencial de una distribución de cargas *en un campo externo, despreciando el campo que ellas mismas producen* (cargas “de prueba”), mientras que la segunda representa *la energía potencial total contenida en un sistema de cargas debido su propio campo*. En otras palabras, los potenciales involucrados en (1.119) y (1.126) son de naturaleza distinta: en la primera expresión representa el potencial externo, y en la segunda el potencial generado por las propias cargas. *Sólo en el segundo caso el potencial está relacionado con la densidad por medio de la ecuación de Poisson.*

Además, si bien al aplicar la integral (1.126) al caso de distribuciones continuas y finitas de carga se obtienen resultados finitos, al intentar aplicarla al caso de una carga *puntual* (o conjuntos de cargas puntuales) se encuentra un resultado *divergente*. Esto, sin embargo, es usualmente interpretado asumiendo que una carga puntual es una *idealización*: el límite en que el tamaño de la carga es nulo. En la práctica, consideraremos a (1.126) como la expresión general para la energía de una distribución general de cargas, mientras que para un conjunto de cargas puntuales usaremos (1.123) o, alternativamente, (1.125).

Derivación alternativa

Podemos derivar la expresión (1.126) considerando el proceso de “construcción” del sistema en que la densidad es aumentada paulatinamente desde 0 hasta $\rho(\vec{x})$. Si en un instante dado la densidad es, en cada punto, una fracción λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) de la densidad total, es decir, si la densidad es $\lambda\rho(\vec{x})$, entonces el potencial generado por esta densidad es $\phi_\lambda(\vec{x}) = \lambda\phi(\vec{x})$, ya que la ecuación que determina el potencial a partir de la densidad de carga (la ec. de Poisson (1.44)) es lineal. Entonces el trabajo necesario para aumentar la fracción de carga desde λ hasta $\lambda + d\lambda$ es el trabajo necesario para transportar las cargas $dq = d\lambda\rho(\vec{x})dV$ desde el infinito hasta sus posiciones finales, en el campo $\phi_\lambda(\vec{x})$. Por lo

tanto, el trabajo total requerido para aumentar la densidad de carga en una fracción $d\lambda$ es dado por:

$$dW = \int_V dq \phi_\lambda(\vec{x}) \quad (1.127)$$

$$= \int_V [d\lambda \rho(\vec{x}) dV] [\lambda \phi(\vec{x})] \quad (1.128)$$

$$= \lambda d\lambda \int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (1.129)$$

La energía requerida en el proceso completo de “construcción” del sistema de cargas es entonces la suma de los trabajos de la forma (1.129) desde $\lambda = 0$ hasta $\lambda = 1$, es decir,

$$U = \int_0^1 dW, \quad (1.130)$$

que lleva nuevamente a la expresión (1.126).

Energía de un sistema de cargas formado por dos subsistemas

Si tenemos un sistema de cargas que pueda ser separado en dos subsistemas, el primero con densidad de carga $\rho_1(x)$ que genera un potencial $\phi_1(x)$, y el segundo con densidad $\rho_2(x)$ y potencial $\phi_2(x)$, entonces

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x), \quad (1.131)$$

ya suponemos que las regiones donde $\rho_1(x)$ y $\rho_2(x)$ son no nulas son disjuntas. Además, en un punto cualquiera el potencial es dado por

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x). \quad (1.132)$$

Reemplazando estas expresiones en nuestro resultado general (1.126) encontramos que la energía del sistema completo puede ser escrita como

$$U = U_1 + U_2 + U_{\text{int}} \quad (1.133)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int \rho_1(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) dV, \quad U_2 = \frac{1}{2} \int \rho_2(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}) dV, \quad (1.134)$$

$$U_{\text{int}} = \int \rho_1(x) \phi_2(x) dV = \int \rho_2(x) \phi_1(x) dV. \quad (1.135)$$

La energía U_{int} puede ser interpretada, de acuerdo a nuestro resultado (1.119), como la **energía potencial de las cargas en el subsistema 1 debido al campo (externo) generado por el subsistema 2**, o bien como la **energía potencial de las cargas en el subsistema 2 debido al campo (externo) generado por el subsistema 1**, o simplemente como la **energía de interacción**.

Energía en función del campo eléctrico

Podemos expresar la energía (1.126) en términos del campo eléctrico, usando la ley de Gauss (1.38):

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV \quad (1.136)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\partial_i E_i) \phi dV \quad (1.137)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int [\partial_i (E_i \phi) - E_i \partial_i \phi] dV \quad (1.138)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\oint E_i \phi dS_i - \int E_i \partial_i \phi dV \right] \quad (1.139)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[0 + \int E_i E_i dV \right] \quad (1.140)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 dV. \quad (1.141)$$

En este cálculo, hemos considerado que la integral de volumen se extiende sobre todo el espacio, y que el campo eléctrico se anula suficientemente rápido en el infinito, de forma tal que la integral de superficie es nula¹⁸. Con esto, obtenemos

$$U = \int u_E(\vec{x}) dV, \quad u_E(\vec{x}) := \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}). \quad (1.142)$$

De esta forma, podemos calcular la energía (potencial) electrostática de una distribución de carga como la integral de una *densidad de energía* $u_E(\vec{x})$. Comparando (1.142) con (1.123) vemos que la energía potencial de un sistema de cargas puede interpretarse alternativamente como la *energía almacenada en el campo eléctrico* del sistema de cargas, a través de la densidad de energía $u_E(\vec{x})$.

Ejemplo

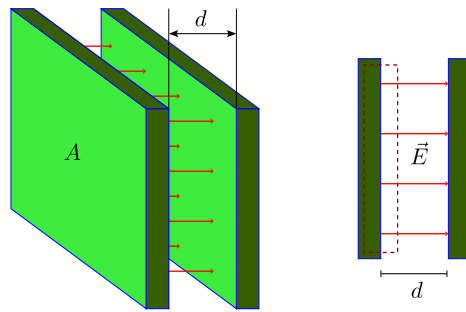


Figura 1.13: Energía almacenada en un condensador de placas paralelas.

Considere un condensador de placas paralelas, como se muestra en la figura 1.13. Despreciando efectos de borde, es decir, considerando que dentro de la región limitada por las placas en campo eléctrico es homogéneo y fuera de ella es nulo, y además despreciando el espesor de las placas, podemos modelar la densidad de carga como

$$\rho(\vec{x}) = \sigma \delta(x) - \sigma \delta(x - d), \quad (1.143)$$

¹⁸La integral tiende a cero si ϕ decae más rápido que $1/\sqrt{r}$ para $r \rightarrow \infty$. Esta condición es siempre satisfecha para distribuciones compactas de carga, donde se tiene de hecho que ϕ decae al menos como $1/r$.

para todo (y, z) en la región delimitada por las placas.

El campo eléctrico entre las placas (que puede obtenerse fácilmente usando la ley de Gauss) es dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{x} = E \hat{x}, \quad 0 < x < d, \quad (1.144)$$

donde σ es la densidad total de carga por unidad de superficie (en cada placa ubicada en $x = 0$). Con esto, podemos evaluar la energía (1.142) (el campo eléctrico sólo es no nulo entre las placas, que encierran un volumen $V = Ad$):

$$U = \int u_E(\vec{x}) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 V = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 Ad = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Ad = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \frac{d}{A}. \quad (1.145)$$

Por otro lado, usando (1.26) encontramos que el potencial entre las placas es de la forma

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) - Ex = \phi(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, \quad 0 < x < d, \quad (1.146)$$

con lo que podemos evaluar (1.126) (la densidad de carga sólo es no nula sobre las placas), obteniendo

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(x) \phi(x) dV = \frac{1}{2} [\sigma A \phi(0) - \sigma A \phi(d)] = \frac{\sigma^2 Ad}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \frac{d}{A}. \quad (1.147)$$

En términos de la *capacidad del condensador*, $C := Q/\Delta V = \varepsilon_0 A/d$, tenemos

$$U = \frac{C(\Delta V)^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.148)$$

1.9. Expansión multipolar cartesiana

1.9.1. Expansión Multipolar

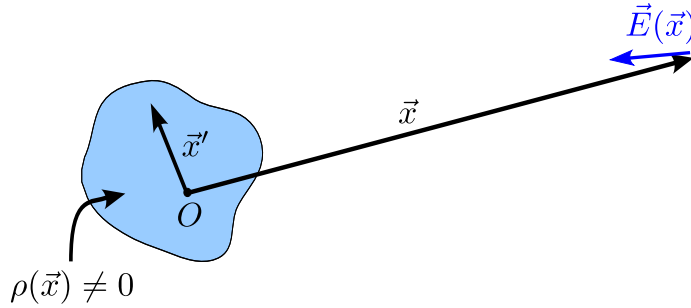


Figura 1.14: Esquema de la expansión multipolar eléctrica.

El método de *expansión multipolar* permite calcular los campos (potencial y campo eléctrico) de una *distribución compacta, pero arbitraria*, de carga en forma relativamente sencilla y general. Consideramos entonces una distribución compacta de carga, situaremos (sin pérdida de generalidad) el origen del sistema coordenado en un punto representativo de la distribución (no necesariamente el centro de masa o el centro de carga), y consideraremos el problema de describir el campo generado por esta distribución en puntos muy alejados de ella, de modo que $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$, ver figura 1.14. Esto permite reescribir la expresión general

(1.24) para el potencial eléctrico, en forma de una expansión en serie, ya que el término $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ puede ser expandido¹⁹ en potencias de las componentes del vector \vec{x}' :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - x'_i \partial_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)_{x'_i=0} + \cdots + (-1)^2 \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)_{x'_i=0} \quad (1.149)$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} - x'_i \partial_i \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{(-1)^2}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{x}|} + \cdots \quad (1.150)$$

$$= \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{(-1)^2}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \cdots \quad (1.151)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (1.152)$$

Note que los términos con derivadas de la forma $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} r^{-1}$ son funciones (relativamente) simples y *conocidas*. Por ejemplo:

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad (1.153)$$

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \quad (1.154)$$

$$\partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} = \frac{3(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})}{r^5} - \frac{15x_i x_j x_k}{r^7}, \quad (1.155)$$

etc. Con esto, podemos escribir

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + O(x_i'^3). \quad (1.156)$$

En general, el término de orden n , $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} r^{-1}$, decrecerá con la distancia como $r^{-(n+1)}$.

Con la expansión (1.152) podemos reescribir la expresión (1.24) para un potencial electrostático general (imponiendo $\phi = 0$ en el infinito) como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (1.157)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r} dV' \quad (1.158)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\int_V \rho(\vec{x}') x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} dV' \right] \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (1.159)$$

Definiendo el momento multipolar de orden n como el tensor de rango n dado por

$$Q_{i_1 \cdots i_n} := \int_V \rho(\vec{x}) x_{i_1} \cdots x_{i_n} dV, \quad (1.160)$$

podemos expresar un campo electrostático general por medio de la *expansión multipolar*

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (1.161)$$

¹⁹Para esto usamos la expresión general para una expansión en serie de Taylor de una función de varias variables: $f(x_i + x'_i) = f(x_i) + x'_i (\partial_i f)|_x + (1/2!) x'_i x'_j (\partial_i \partial_j f)|_x + (1/3!) x'_i x'_j x'_k (\partial_i \partial_j \partial_k f)|_x + \cdots$

En otras palabras, podemos descomponer el potencial electrostático en una suma de términos de distinto orden en la expansión multipolar

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(\vec{x}), \quad (1.162)$$

donde $\phi^{(n)}(\vec{x})$ es la contribución multipolar de orden n , definida por

$$\phi^{(n)}(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^n}{n!} Q_{i_1 \dots i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (1.163)$$

Los primeros términos de esta expansión general son de la forma:

$$\phi(\vec{x}) = \phi^0(\vec{x}) + \phi^{(1)}(\vec{x}) + \phi^{(2)}(\vec{x}) + \dots \quad (1.164)$$

El término *monopolar* es

$$\phi^0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (1.165)$$

donde Q , el *momento monopolar*, es simplemente la carga total del sistema:

$$Q = \int \rho(\vec{x}) dV. \quad (1.166)$$

El segundo término, el término *dipolar* es dado por

$$\phi^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i p_i}{r^3}, \quad (1.167)$$

donde $p_i := Q_i$ es el *momento dipolar* del sistema:

$$p_i := \int x_i \rho(\vec{x}) dV. \quad (1.168)$$

La tercera contribución viene dada por el término *cuadrupolar*:

$$\phi^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{ij} \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right). \quad (1.169)$$

El *momento cuadrupolar* Q_{ij} es dado por

$$Q_{ij} := \int x_i x_j \rho(\vec{x}) dV. \quad (1.170)$$

Con esto, la expansión multipolar del potencial es de la forma:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{ij} \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + O(r^{-4}) \quad (1.171)$$

Podemos también encontrar una expansión multipolar para el campo eléctrico simplemente derivando el potencial. Con esto, obtenemos

$$\begin{aligned} E_i(\vec{x}) = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3p_j x_j x_i - r^2 p_i)}{r^5} \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{jk} \left[\frac{3(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})}{r^5} - \frac{15x_i x_j x_k}{r^7} \right] + O(r^{-5}). \end{aligned} \quad (1.172)$$

Observaciones:

- El momento multipolar de orden n , $Q_{i_1 \dots i_n}$ es un tensor simétrico de rango n respecto a transformaciones ortogonales de coordenadas. Por eso, $Q_{i_1 \dots i_n}$ tiene $(n+1)(n+2)/2$ componentes linealmente independientes.
- Los momentos multipolares son cantidades *aditivas* (o extensivas). Esto quiere decir que si se divide un sistema en dos partes (el volumen donde están contenidas las cargas, en dos volúmenes más pequeños o, equivalentemente, la densidad de carga en la suma de dos densidades) entonces cada momento multipolar (de un orden dado) es la suma de los momentos multipolares de cada subsistema.
- Note que los momentos multipolares **dependen en general de la elección del origen**. Si se desplaza el origen del sistema coordenado de modo que el origen O original tenga coordenadas \vec{d} respecto al nuevo origen O' entonces $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{d}$ y los nuevos momentos multipolares respecto al origen O' están dados por:

$$Q' = Q, \quad (1.173)$$

$$Q'_i = Q_i + Q d_i, \quad (1.174)$$

$$Q'_{ij} = Q_{ij} + Q_i d_j + Q_j d_i + Q d_i d_j, \quad (1.175)$$

etc.

Momento cuadrupolar sin traza

El momento cuadrupolar (1.170) es un tensor *simétrico*, por lo que tiene $3 \cdot (3+1)/2 = 6$ componentes linealmente independientes (que hay que calcular!). Sin embargo, debido a que este tensor siempre está multiplicado en la expansión multipolar del potencial por $(3 x_i x_j / r^5 - \delta_{ij} / r^3)$, puede verificarse que no todas las componentes de Q_{ij} contribuyen a la expansión multipolar. En efecto, debido a que la contracción $\delta_{ij} (3 x_i x_j / r^5 - \delta_{ij} / r^3)$ se anula *idénticamente*, es posible sumar un término proporcional a δ_{ij} al momento cuadrupolar, sin por ello alterar la expansión multipolar. En otras palabras, existe una libertad para redefinir el momento cuadrupolar ya que $\tilde{Q}_{ij} := Q_{ij} + \lambda \delta_{ij}$ puede ser considerado como un momento cuadrupolar útil y legítimo.

Una posibilidad sería elegir $\lambda \stackrel{!}{=} -Q_{ii}$, en cuyo caso obtendríamos

$$Q'_{ij} = \int (x_i x_j - x_k x_k \delta_{ij}) \rho(\vec{x}) dV, \quad (1.176)$$

que, salvo un signo global, tiene la misma forma que el conocido tensor momento de inercia asociado a un cuerpo en rotación. En este sentido, el momento cuadrupolar eléctrico es el análogo al tensor momento de inercia en mecánica.

Sin embargo, es más común explotar la libertad para elegir λ para definir el *momento cuadrupolar libre de traza*, definido tal que $\tilde{Q}_{ii} \equiv 0$. Esto equivale a considerar $\lambda \stackrel{!}{=} -Q_{ii}/3$, es decir, $\tilde{Q}_{ij} = Q_{ij} - Q_{kk} \delta_{ij}/3$ o, más explícitamente:

$$\tilde{Q}_{ij} = \int (x_i x_j - \frac{1}{3} x_k x_k \delta_{ij}) \rho(\vec{x}) dV. \quad (1.177)$$

La ventaja de usar este tensor es que, por ser libre de traza, sólo tiene 5 componentes linealmente independientes (que calcular, por ejemplo: \tilde{Q}_{11} , \tilde{Q}_{12} , \tilde{Q}_{13} , \tilde{Q}_{22} , \tilde{Q}_{23} , ya que $\tilde{Q}_{21} = \tilde{Q}_{12}$, $\tilde{Q}_{31} = \tilde{Q}_{13}$, $\tilde{Q}_{32} = \tilde{Q}_{23}$ y $\tilde{Q}_{33} = -\tilde{Q}_{11} - \tilde{Q}_{22}$) (pero, por otro lado, la integral que se necesita calcular es algo más complicada).

Además, el momento cuadrupolar (con o sin traza), por ser un tensor *simétrico* de segundo rango, puede ser diagonalizado, es decir, es posible encontrar sus vectores (y valores) propios, que definen direcciones “principales”, ortogonales entre si. En el sistema coordenado definido por estas tres direcciones principales el momento cuadrupolar adopta una forma diagonal.

Monopolo ideal

Una carga puntual es un “monopolo ideal”, ya que (eligiendo el origen en la posición de la carga) el único momento distinto de cero es el momento monopolar.

Dipolo ideal

Un “dipolo ideal” (también llamado “dipolo puntual”) es un sistema idealizado cuyo único momento multipolar eléctrico no nulo es el momento dipolar.

El sistema formado por una carga $q^{(1)} = -q$ y otra $q^{(2)} = +q$, separados una distancia d tiene momento monopolar nulo, mientras que

$$p_i = (-q)x_i^{(1)} + (+q)x_i^{(2)} = q(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) = qd_i, \quad (1.178)$$

$$Q_{ij} = (-q)x_i^{(1)}x_j^{(1)} + (q)x_i^{(2)}x_j^{(2)}, \quad (1.179)$$

$$Q_{ijk} = (-q)x_i^{(1)}x_j^{(1)}x_k^{(1)} + (q)x_i^{(2)}x_j^{(2)}x_k^{(2)}, \quad (1.180)$$

etc. En el límite $\vec{d} \rightarrow \vec{0}$, pero tal que \vec{p} sea finito (esto, por supuesto, requiere $q \rightarrow \infty$), tendremos que $Q_{ij} \rightarrow 0$, $Q_{ijk} \rightarrow 0$, y lo mismo ocurrirá para todo momento multipolar de orden superior (las componentes del momento multipolar de orden n son en este caso proporcionales a $qd^n = pd^{n-1}$).

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (1.181)$$

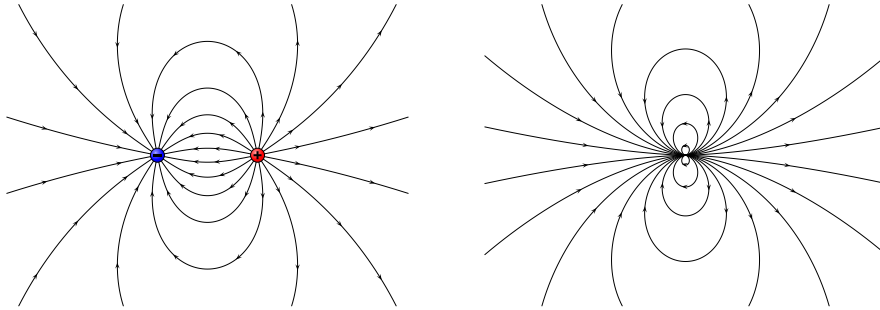


Figura 1.15: Dipolo (dos cargas opuestas) versus dipolo ideal. Figuras creadas usando VectorFieldPlot [1].

Cuadrupolo ideal

$$Q = 0, p_i = 0, Q_{ij} \neq 0, Q_{ijk} = 0, \text{ etc.}$$

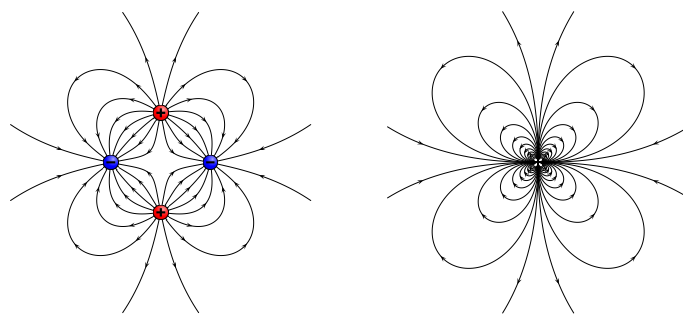


Figura 1.16: Cuadripolo versus cuadripolo ideal. Figuras creadas usando VectorFieldPlot [1].

1.9.2. Distribuciones de carga en campos externos

En las secciones anteriores hemos considerado la expansión multipolar *generada* por una distribución compacta de carga $\rho(\vec{x})$. Ahora discutiremos una situación distinta: consideraremos una (pequeña) distribución de cargas en un campo eléctrico *externo* (es decir, generado por alguna *otra* distribución de carga). En particular, calcularemos la energía potencial de la distribución de carga en el campo externo dado, así como la fuerza y el torque que el campo externo ejerce.

Energía Potencial

Para evaluar esta integral, consideramos un *punto representativo* P de la distribución con coordenadas \vec{x} y un punto P' cualquiera de la distribución (con coordenadas $\vec{x} + \vec{x}'$ respecto al origen, ver figura) determinado por el vector \vec{x}' respecto al punto representativo P de la distribución, y expandiremos los valores $\phi(P')$ en una serie de Taylor en torno a P :

$$\phi(P') = \phi(\vec{x} + \vec{x}') \quad (1.182)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} \quad (1.183)$$

$$= \phi|_{\vec{x}'=\vec{0}} + x'_i (\partial_i \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} x'_i x'_j (\partial_i \partial_j \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \cdots \\ + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \cdots \quad (1.184)$$

$$= \phi(\vec{x}) - x'_i E_i(\vec{x}) - \frac{1}{2} x'_i x'_j (\partial_i E_j)(\vec{x}) \\ - \cdots - \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n-1}} E_{i_n})(\vec{x}) + \cdots \quad (1.185)$$

Con esto, podemos escribir (1.119) como

$$U = \int \rho(P') \phi(P') dV' \quad (1.186)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int \rho(P') x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} dV' \right] (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} \quad (1.187)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)(\vec{x}) \quad (1.188)$$

$$= Q\phi(\vec{x}) - Q_i E_i(\vec{x}) - \frac{1}{2} Q_{ij} (\partial_i E_j)(\vec{x}) \\ - \cdots - \frac{1}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n-1}} E_{i_n})(\vec{x}) + \cdots \quad (1.189)$$

Por lo tanto, obtenemos que la energía potencial de una distribución de carga, caracterizada por sus momentos multipolares, en un *campo externo* es dado por

$$\boxed{U = Q\phi(\vec{x}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x}) - \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i E_j(\vec{x}) + \cdots} \quad (1.190)$$

El primer término de esta expansión, la contribución monopolar, es equivalente a la de una carga *puntual* en un potencial externo. El término siguiente (dipolar) representa la energía potencial de un dipolo ideal en un campo eléctrico externo. Note que este término

es mínimo cuando el momento dipolar es paralelo al campo eléctrico externo (y es, en general, proporcional al coseno del ángulo entre \vec{p} y \vec{E}). El término cuadrupolar es distinto de cero sólo cuando el campo es inhomogéneo. Note que en esta expresión también es posible usar un momento cuadrupolar redefinido como se discutió en la sección (1.9.1). En particular puede usarse el momento cuadrupolar sin traza. La energía potencial calculada usando distintos momentos cuadrupolares equivalentes es la misma puesto que un término proporcional a δ_{ij} contribuiría con un término proporcional a $\delta_{ij}(\partial_i E_j) = \partial_i E_i$, que es cero en virtud de la ley de Gauss y el hecho que \vec{E} describe un *campo eléctrico externo*, es decir, un campo generados por fuentes fuera de la región bajo consideración.

Fuerza

Una carga puntual q experimenta una fuerza $\vec{F}(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x})$ cuando está situada en un punto donde existe un campo externo $\vec{E}(\vec{x})$. Como consecuencia, la fuerza total sobre una distribución con densidad ρ en un campo *externo* puede escribirse como

$$F_i = \int \rho(P') E_i(P') dV'. \quad (1.191)$$

Expandimos $E_i(P')$ en serie de Taylor, de forma similar a como lo hicimos en la sección anterior con el potencial

$$E_i(P') = E_i(\vec{x}) + x'_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \frac{1}{2} x'_j x'_k (\partial_j \partial_k E_i)(\vec{x}) + \cdots + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \cdots. \quad (1.192)$$

Con esto, podemos reescribir (1.191) como

$$F_i = \int \rho(P') \left[E_i(\vec{x}) + x'_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \frac{1}{2} x'_j x'_k (\partial_j \partial_k E_i)(\vec{x}) + \cdots + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \cdots \right] dV' \quad (1.193)$$

$$= Q E_i(\vec{x}) + p_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \cdots + \frac{1}{n!} Q_{i_1 \dots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \cdots. \quad (1.194)$$

El primer término, $Q \vec{E}(\vec{x})$, es nuevamente la contribución monopolar correspondiente a la fuerza sobre una carga puntual. La contribución dipolar es ahora proporcional al gradiente del campo eléctrico. Usando el hecho que el campo electrostático satisface $\partial_i E_j = \partial_j E_i$ podemos expresar el término dipolar como $\partial_i (p_j E_j)$, es decir.

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = Q \vec{E}(\vec{x}) - \vec{\nabla} \left(-\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \right) + \cdots} \quad (1.195)$$

Note que el segundo término es el gradiente de la contribución dipolar a la energía potencial de la distribución.

Torque

Análogamente al caso de la fuerza total, podemos calcular el *torque neto* ejercido por el campo externo sobre la distribución, respecto del punto representativo que hemos considerado:

$$\vec{\tau} = \int \rho(P') \vec{x}' \times \vec{E}(P') dV'. \quad (1.196)$$

En componentes, y usando la expansión (1.192) obtenemos

$$\tau_i = \varepsilon_{ijk} \int \rho(P') x'_j E_k(P') dV' \quad (1.197)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \int \rho(P') x'_j \left[E_k(\vec{x}) + x'_l (\partial_l E_k)(\vec{x}) + \frac{1}{2} x'_l x'_m (\partial_l \partial_m E_k)(\vec{x}) \right. \\ \left. + \cdots + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} E_k)(\vec{x}) + \cdots \right] dV' \quad (1.198)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left[p_j E_k(\vec{x}) + Q_{jl} (\partial_l E_k)(\vec{x}) + \frac{1}{2} Q_{jlm} (\partial_l \partial_m E_k)(\vec{x}) \right. \\ \left. + \cdots + \frac{1}{n!} Q_{ji_1 \dots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} E_k)(\vec{x}) + \cdots \right]. \quad (1.199)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{x}) + \cdots} \quad (1.200)$$

Es posible expresar la primera contribución (dipolar) al torque como un “gradiente” del término dipolar de la energía potencial $U_{\vec{p}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, esta vez, sin embargo, no respecto a variaciones de la posición \vec{x} de la distribución, sino con respecto a cambios en la orientación del momento dipolar respecto al campo externo. La magnitud del torque es dada por

$$\begin{aligned} \tau &= pE \sin \theta \\ &= -\frac{d}{d\theta} (pE \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.201)$$

$$= \frac{dU_{\vec{p}}}{d\theta}. \quad (1.202)$$

1.10. Electrostática macroscópica

Hasta ahora hemos estudiado las propiedades de los campos electrostáticos *en el vacío* y en el interior de *conductores ideales*. Estamos ahora interesados en las propiedades el campo eléctrico *macroscópico* en el interior de un material *aislante*. El término macroscópico se refiere al campo promedio en una pequeña región que, sin embargo, es grande comparada con el tamaño de las moléculas que constituyen el material.

Consideraremos entonces materiales aislantes, también llamados *dieléctricos*, en los que las cargas internas no tienen la libertad de desplazarse distancias macroscópicas (conducir) en presencia de un campo eléctrico aplicado, sino que están confinadas por la estructura atómica/molecular del material. La mayoría de los materiales son, en buena aproximación, dieléctricos.

En presencia de un campo eléctrico los dieléctricos *redistribuyen sus cargas* constituyentes. Éstas no pueden desplazarse distancias macroscópicas, como ocurre en los conductores, sino sólo distancias del orden de magnitud determinado por su estructura molecular. Estos pequeños desplazamientos de carga tienen, sin embargo, consecuencias que se acumulan hasta ser perceptibles a escalas macroscópicas. Concretamente, en presencia de un campo eléctrico, el material se *polariza*. El campo eléctrico que causa (el cambio en) la polarización puede ser un campo “externo” (producido por “cargas externas”²⁰, que no forman parte de la estructura atómica/molecular característica del medio).

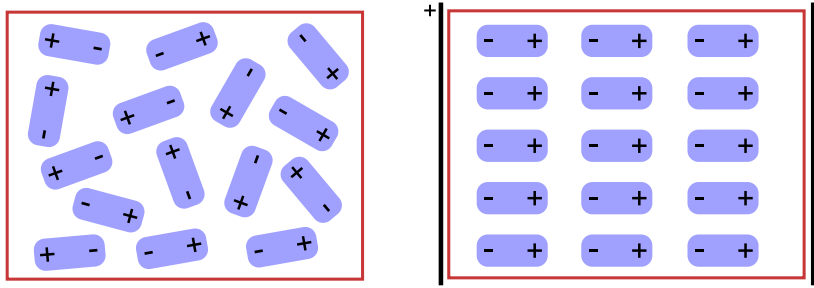


Figura 1.17: Un material dieléctrico se polariza en presencia de un campo externo.

El campo eléctrico total (“EL” campo eléctrico) es influenciado por la polarización del medio. Modelaremos este campo eléctrico (macroscópico) \vec{E} como la suma del campo producido por las cargas externas y el campo producido por la distribución de *cargas de polarización* (descrita por el vector de polarización \vec{P}) del medio.

1.10.1. Vector y cargas de Polarización

Se define el *vector de polarización* como la *densidad de momento dipolar* (momento dipolar por unidad de volumen),

$$\vec{P}(x) := \text{“} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \text{”} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}, \quad (1.203)$$

donde $\Delta \vec{p}$ es el *momento dipolar total de las cargas del material contenidas en el volumen* ΔV . La región con volumen ΔV se considera centrada en el punto \vec{x} , suficientemente pequeña desde el punto de vista macroscópico, pero grande comparada con la escala determinada por la estructura atómica/molecular del material. Equivalentemente, el vector

²⁰También llamadas “cargas libres” o “cargas no ligadas”.

de polarización es definido tal que el momento dipolar $d\vec{p}$ en un elemento de volumen (macroscópico) dV es dado por $d\vec{p} = \vec{P}(\vec{x})dV$.

Como consecuencia de la definición anterior, el momento dipolar total de las cargas contenidas en un volumen finito V es dado por

$$\vec{p}_V = \int_V \vec{P}(\vec{x}) dV. \quad (1.204)$$

Por otro lado, sabemos que el potencial generado por un dipolo ideal de momento dipolar \vec{p} ubicado en un punto con coordenadas \vec{x}' es de la forma (1.181). Luego, el potencial generado por una pequeña región de un medio polarizado con elemento de volumen dV' y polarización \vec{P} es dada por

$$d\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_j - x'_j)P_j(x') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (1.205)$$

De esta forma, si el sistema contiene además cargas libres en dV' entonces

$$d\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{\text{ext}}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_i(x')(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (1.206)$$

Por lo tanto, el potencial (macroscópico, total), de acuerdo a nuestro modelo, es dado por

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho_{\text{ext}}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{P_i(x')(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] dV'. \quad (1.207)$$

Usando la identidad (1.18) podemos escribir

$$\frac{P_i(x')(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = P_i(x') \partial'_i \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (1.208)$$

$$= \partial'_i \left(\frac{P_i(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{(\partial'_i P_i)(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1.209)$$

De esta forma, considerando que la integral sobre los términos que dependen de la polarización están confinados al volumen V del material (lo que no necesariamente es así para el término conteniendo las cargas libres), podemos escribir

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ext}}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \partial'_i P_i dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{P_i(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_i \quad (1.210)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ext}}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\sigma_P(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'. \quad (1.211)$$

La expresión anterior muestra que el campo (macroscópico) total es *equivalente* al campo producido por una densidad volumétrica de carga total,

$$\rho_T := \rho_{\text{ext}} + \rho_P, \quad (1.212)$$

donde

$$\rho_P := -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (1.213)$$

es la *densidad (volumétrica) de carga de polarización*, (definida en cada punto del material), más una *densidad de carga de polarización de superficie*,

$$\sigma_P := \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad (1.214)$$

distribuida en la superficie $S = \partial V$ del dieléctrico.

Note que la carga total de polarización, tal como se espera, es nula:

$$Q_P = \int_V \rho_P dV + \oint_{\partial V} \sigma_P dS \equiv 0, \quad (1.215)$$

en virtud del teorema de Gauss.

1.10.2. Desplazamiento eléctrico

Usando (1.212) en la ley de Gauss, podemos escribir

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_T \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_{\text{ext}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right) = \frac{\rho_{\text{ext}}(x)}{\varepsilon_0}. \quad (1.216)$$

Definimos el *vector de desplazamiento eléctrico* (también llamado *excitación eléctrica* o *inducción eléctrica*) como

$$\boxed{\vec{D}(\vec{x}) := \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})}, \quad (1.217)$$

de modo que

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}}}. \quad (1.218)$$

Las unidades del vector desplazamiento son de carga por unidad de área: $[\vec{D}] = [\vec{P}] = [\sigma] \stackrel{\text{S.I.}}{=} C/m^2$.

La utilidad de usar \vec{D} en lugar de \vec{E} en esta “ley de Gauss” (1.218) es que esta relación *sólo involucra explícitamente a las cargas externas* (que son usualmente conocidas y/o controlables). Por ejemplo, como consecuencia de (1.218) tenemos que

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{ext}}}. \quad (1.219)$$

Ejemplo: Esfera dieléctrica isótropa y carga central

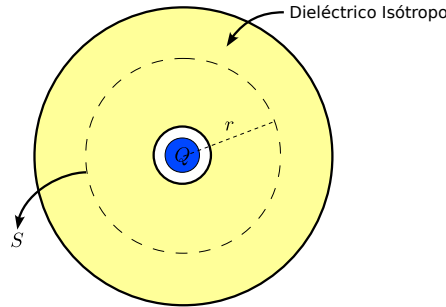


Figura 1.18: Un material dieléctrico isótropo con una carga central.

Consideremos una carga (externa) Q situada en el centro de una esfera dieléctrica *isótropa*, ver figura 1.18, podemos encontrar el vector de desplazamiento aplicando (1.219). Debido a la simetría del sistema (ya que asumimos que el dieléctrico es *isótropo*, ver secciones 1.10.4 y 1.10.5), tendremos que $\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$. Eligiendo una superficie Gaussiana esférica de radio r centrada en la carga Q , encontramos entonces que

$$D(r) \oint_S dS = D(r) 4\pi r^2 = Q, \quad (1.220)$$

y por lo tanto

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (1.221)$$

1.10.3. Relación Constitutiva, susceptibilidad, permeabilidad

Cada medio se caracteriza por la polarización $\vec{P}(\vec{x})$ que presenta, dados los campos/cargas externas. Esta polarización $\vec{P}(\vec{x})$ depende entonces de los campos/cargas externas y de la constitución atómica/molecular del material (y en principio de otras propiedades, como la temperatura, presión, etc).

En un elemento de volumen dado del medio éste modificará su distribución microscópica de cargas como respuesta al campo eléctrico “total” que actúa sobre este elemento, hasta finalmente adoptar un cierta polarización. Podemos, por tanto, considerar que $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ o, equivalentemente $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$. Esta última relación es llamada *relación constitutiva* del medio. El problema es que el campo $\vec{E}(\vec{x})$ en un punto dado (con vector de polarización $\vec{P}(\vec{x})$ y por tanto desplazamiento $\vec{D}(\vec{x})$) depende también de cómo se polariza el medio *en otras regiones*, e.d., $\vec{E}(\vec{x})$ depende en general de²¹ $\vec{P}(\vec{x}')$. En otras palabras, en general la polarización que se presentará en un medio es fruto de la *respuesta colectiva* del material a los campos externos.

Vemos entonces que calcular $\vec{P}(\vec{x})$ desde “primeros principios” es en general difícil y requiere conocer los detalles de la estructura del material en estudio.

Existe una gran variedad de medios materiales con propiedades eléctricas diferentes e interesantes. Existen por ejemplo medios que tienen *polarización no nula aún en ausencia de campos/cargas externas*. Estos medios son conocidos como *electretos* (análogos eléctricos de los imanes permanentes), y *ferroeléctricos* (que presentan polarización no nula bajo una cierta temperatura crítica, de Curie, análogamente a los ferromagnetos). Un ejemplo de material ferroeléctrico es el $BaTiO_3$ (titanato de bario), que exhibe un momento dipolar eléctrico no nulo a temperaturas bajo $120^\circ C$. Un ejemplo de electreto es el cuarzo (SiO_2 , dióxido de Silicio), que presenta *propiedades piezoeléctricas*.

Es útil además distinguir entre distintos tipos de polarización, dependiendo del mecanismo que gobierne dicha propiedad: *polarización electrónica*, p.ej. cuando un átomo se “deforma” en presencia de un campo externo; *polarización iónica*, causada por arreglo de iones (p.ej. $NaCl$); *polarización polar* que se manifiesta en los gases (cuando la temperatura aumenta, disminuye la polarización porque las moléculas se “desordenan”).

Más aún, en algunos materiales (“no-lineales”) la respuesta (polarización) del material puede depender no-linealmente del campo eléctrico.

Sin embargo, existe una gran variedad de materiales que, desde el punto de vista macroscópico, pueden ser modelados adecuadamente (es decir, con *precisión suficiente* en la mayoría de las situaciones) por una relación lineal entre \vec{D} y \vec{E} . Un *material lineal*, pero en general *no-local*, puede describirse a través de una relación de la forma

$$D_i[\vec{E}](\vec{x}, t) = \int f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t') E_j(\vec{x}', t') dV' dt', \quad (1.222)$$

donde $f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$ es un cierto tensor que describe las propiedades del medio. Como la polarización y por tanto el vector desplazamiento en un punto \vec{x} del medio están influenciadas en forma más determinante por lo que le ocurre al material en la inmediata vecindad de \vec{x} es de esperar que la función $f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$ sea concentrada en torno a \vec{x} , es decir, que decaiga rápidamente para $|\vec{x}' - \vec{x}| \gg d$ donde d es la escala característica de la estructura microscópica del medio.

Por otro lado, existen muchos casos en que es *suficiente* considerar una *relación constitutiva local* en la que el vector desplazamiento en un punto dado puede modelarse como

²¹Matemáticamente, esto significa que, en general, \vec{E} es un *funcional*, una “función de funciones” o una “función no-local” de \vec{P} .

dependiendo exclusivamente del valor del campo eléctrico *en el mismo punto* (macroscópico), es decir $\vec{D}(\vec{x}) = \vec{D}(\vec{E}(\vec{x}))$ o, equivalentemente $\vec{P}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{E}(\vec{x}))$.

En un material descrito por una relación constitutiva local podemos considerar la dependencia de \vec{P} con \vec{E} a través de una expansión en serie de la forma:

$$P_i(x) = P_i(E_j(x)) = (P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + E_j(\partial_j P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + \frac{1}{2} E_j E_k (\partial_j \partial_k P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + \dots, \quad (1.223)$$

que esperamos sea útil para campos eléctricos suficientemente débiles (en el presente contexto sólo podemos saber *a posteriori* qué tan débil requiere ser el campo). Note que en el lado derecho de (1.223) las derivadas ∂_i denotan derivadas respecto a la componente i -ésima del campo eléctrico, es decir $\partial_i P_j = \partial P_j / \partial E_i$, etc.. Las cantidades $(P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$, $(\partial_j P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$, $(\partial_j \partial_k P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$, etc. son tensores (cartesianos) que asumen diferentes valores para cada material y pueden ser considerados como parámetros (a determinar). Con esto, podemos escribir

$$P_i(x) = \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_{ij} E_j + \mathcal{A}_{ijk} E_j E_k + \dots \quad (1.224)$$

En general, si el material es *inhomogéneo* (por ejemplo, si está formado por capas de distintos materiales), los tensores \mathcal{A}_i , \mathcal{A}_{ij} , \mathcal{A}_{ijk} , etc. dependerán de la posición. Para materiales no-ferroeléctricos (la gran mayoría) tenemos que $\mathcal{A}_i = 0$.

1.10.4. Medios lineales anisótropos

Adicionalmente, si la polarización de un material es descrita apropiadamente por una relación lineal, como ocurre en el caso de campos eléctricos suficientemente débiles, tendremos

$$P_i(x) = \varepsilon_0 \chi_{ij}(x) E_j(x), \quad (1.225)$$

entonces decimos que el medio es *lineal*. El tensor χ_{ij} es llamado *tensor de susceptibilidad eléctrica* del medio. El factor ε_0 es incluido de modo que χ_{ij} es un tensor adimensional. En este caso, usando (1.217) y (1.225), tenemos que

$$D_i(x) = \varepsilon_{ij}(x) E_j(x) = \varepsilon_0 \kappa_{ij}(x) E_j(x), \quad (1.226)$$

donde hemos definido el *tensor de permitividad* del medio ε_{ij} , por

$$\varepsilon_{ij} := \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) \quad (1.227)$$

y, alternativamente, el *tensor dieléctrico*,

$$\kappa_{ij} := \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}, \quad (1.228)$$

que tiene la ventaja de ser una cantidad adimensional.

Es posible probar por argumentos energéticos que si el medio no es disipativo (no existen mecanismos de transferencia de energía del campo eléctrico a otras formas de energía) entonces necesariamente χ_{ij} (y por tanto ε_{ij} y κ_{ij}) es un tensor *simétrico* y que posee, por lo tanto, 6 componentes independientes. La descripción de las propiedades de un medio lineal a través de un tensor de susceptibilidad eléctrica incluye el caso en que el medio sea *anisótropo*, es decir, que sus propiedades no sean invariantes bajo rotaciones o, en otras palabras, que posea ciertas *direcciones preferentes*. En un medio anisótropo, la polarización no será en general paralela al campo eléctrico (excepto para las direcciones preferentes dadas por las direcciones principales. Ver sección 1.10.7.), esto como resultado de la estructura microscópica del material (típicamente, cristales), que tienen como consecuencia que el material se polarice en algunas direcciones más fácilmente que en otras.

Note que en el caso más general en que se consideran campos eléctricos dependientes del tiempo (esto es necesario, por ejemplo, en el caso de propagación de ondas electromagnéticas), aún cuando un medio pueda considerarse lineal y local respecto a su dependencia con la posición, la relación constitutiva es de la forma

$$D_i(x, t) = \int f_{ij}(t, t') E_j(x, t') dt'. \quad (1.229)$$

En estos casos es conveniente considerar las *transformadas de Fourier temporal* de los campos, es decir $\tilde{D}_i(x, \omega)$, $\tilde{E}_i(x, \omega)$, etc., ya que permiten escribir la relación constitutiva como

$$\tilde{D}_i(x, \omega) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, \omega) \tilde{E}_j(x, \omega). \quad (1.230)$$

Comparando (1.230) con (1.226) vemos que en el caso más general, el tensor $\tilde{\varepsilon}_{ij}(x, \omega)$ juega un rol análogo a ε_{ij} en (1.226) y también es llamado, por esta razón, el tensor dieléctrico del medio. Note, sin embargo, que este tensor *asume valores complejos y depende en general de la frecuencia ω* .

1.10.5. Medios lineales isótropos

Si el material es isótropo, es decir, si éste no posee ninguna dirección preferente, la polarización debe necesariamente ser paralela al campo eléctrico, independientemente de la dirección de este último. Esta condición requiere que el tensor de susceptibilidad sea proporcional al tensor identidad,

$$\chi_{ij} = \chi \delta_{ij}, \quad (1.231)$$

de modo que

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (1.232)$$

Muchos materiales presentan propiedades de polarización independientes de la dirección del campo eléctrico, es decir, son isótropos. Por ejemplo, los gases, líquidos (excepto los, así llamados, *cristales líquidos*), sólidos amorfos (plásticos, vidrio). Los medios no-lineales, pero isótropos, pueden ser descritos usando $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(|\vec{E}|) \vec{E}$.

En este curso, a menos que se explicita lo contrario, consideramos siempre materiales lineales, isótropos y homogéneos. En este caso, es suficiente introducir la (“constante de”) permitividad y/o la constante dieléctrica por

$$\varepsilon := \varepsilon_0(1 + \chi), \quad \kappa := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi. \quad (1.233)$$

Note que en un medio polarizable es de esperar que $\chi > 0$, de modo que $\varepsilon > \varepsilon_0$ o, equivalentemente, $\kappa > 1$. El vacío puede ser considerado como un “medio isótropo” con $\chi = 0$ y $\kappa = 1$, es decir, no polarizable. Recuerde también que el índice de refracción de la mayoría de los medios (“no-magnéticos”) es dado por $n \approx \sqrt{\kappa}$.

1.10.6. Ecuación de Poisson y su generalización

Usando (1.218) y (1.23) encontramos la generalización de la ecuación de Poisson para el potencial en un dieléctrico lineal y local:

$$\partial_i (\kappa_{ij} \partial_j \phi) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{ext}}. \quad (1.234)$$

Para un material homogéneo e isótropo, esta ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_{\text{ext}}, \quad (1.235)$$

Material	κ
Vacío	1
Aire (seco, 0°C, 1 bar)	1,00059
Agua (110°C, 1 bar)	1,0126
Agua (20°C)	80,0
Hielo (−30°C)	99
$SrTiO_3$ (cristal, 10K)	12.000

Cuadro 1.1: Algunos materiales isótropos y sus constantes dieléctricas.

que tiene la misma forma (matemáticamente, es la *misma* ecuación) que en caso del campo en el vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$). Finalmente, en regiones fuera de cargas externas (¡pero *no* de cargas de polarización!), el potencial satisface la ecuación de Laplace. Como consecuencia, es posible usar las técnicas conocidas para solucionar esta ecuación, por ejemplo, expansión en funciones especiales, o funciones de Green, en el caso de los dieléctricos. Como veremos a continuación, una diferencia importante respecto al caso en el vacío será la implementación de las condiciones de borde o frontera.

1.10.7. Direcciones principales de un medio anisótropo

Como vimos, en un medio anisótropo, el campo eléctrico no tiene en general la misma dirección que el vector desplazamiento. Existen, sin embargo, direcciones “especiales” a lo largo de las cuales el campo eléctrico sí tiene la misma dirección que la polarización. Esto significa que, si \hat{n} es una de estas direcciones, conocidas como *direcciones principales* del material, entonces $\vec{E} = E\hat{n}$ y $\vec{D} = D\hat{n}$. Insertando estas condiciones en (1.226) obtenemos que

$$\kappa_{ij} \hat{n}_j = \lambda \hat{n}_i, \quad D = \varepsilon_0 \lambda E. \quad (1.236)$$

Vemos de aquí que las direcciones principales corresponden a los vectores propios de la matriz κ_{ij} , mientras que el valor propio λ es el valor de la constante dieléctrica del material a lo largo de aquella dirección principal. Como la matriz κ_{ij} es real y simétrica, es posible encontrar tres vectores propios ortonormales, es decir, una base ortonormal formada por las direcciones principales del material. Existen distintos casos particulares e interesantes de materiales anisótropos correspondiendo a si los valores propios son todos diferentes o iguales. Si todos los valores propios son iguales, el material es isótropo, puesto que en ese caso $\kappa_{ij} = \lambda \delta_{ij}$. Si dos valores propios son iguales y uno diferente, se dice que el material es *uniaxial* (puesto que tienen una dirección distintiva, aquella descrita por el vector propio del valor propio distinto a los otros dos. Esta dirección es llamada *eje óptico*). Un ejemplo de material uniaxial natural es la Calcita ($CaCO_3$). En materiales uniaxiales la propagación de la luz presenta el fenómeno llamado *birefringencia*, en los que la luz en su interior se propaga, en general, por dos trayectorias diferentes (rayo “ordinario” y “extraordinario”) correspondientes a dos índices de refracción diferentes. Además, es posible inducir anisotropía (y por tanto, en general, birefringencia), comprimiendo un material en una dirección dada, o con un campo eléctrico intenso externo (*efecto Kerr*). Finalmente, si los tres valores propios del tensor dieléctrico son diferentes, entonces el material (típicamente un cristal) es llamado *biaxial*.

Mineral	Fórmula química	$n_o = \sqrt{\kappa_{\perp}}$	$n_e = \sqrt{\kappa_{\parallel}}$
Berilo	$\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{Si}_6\text{O}_{18})$	1.602	1.557
Calcita	CaCO_3	1.658	1.486
Hematita	Fe_2O_3	2.940	3.220
Hielo	H_2O	1.309	1.313
Niobiato de litio	LiNbO_3	2.272	2.187
Fluoruro de magnesio	MgF_2	1.380	1.385
Quarzo	SiO_2	1.544	1.553
Rubí	$\text{Al}_2\text{O}_3\text{:Cr}$	1.770	1.762
Zafiro	Al_2O_3	1.768	1.760
Nitrato de sodio	NaNO_3	1.587	1.336
Circón, high	ZrSiO_4	1.920 -1.960	1.967-2.015

Cuadro 1.2: Algunos cristales uniaxiales y sus índices de refracción. Datos tabulados para $\lambda \sim 590$ [nm] [3].

Mineral	Fórmula química	$\sqrt{\kappa_x}$	$\sqrt{\kappa_y}$	$\sqrt{\kappa_z}$
Bórax	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	1.447	1.469	1.472
Sulfato de magnesio	$\text{MgSO}_4 \cdot 7(\text{H}_2\text{O})$	1.433	1.455	1.461
Olivina	$(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}$	1.640	1.660	1.680
Perovskita	CaTiO_3	2.300	2.340	2.380

Cuadro 1.3: Algunos cristales biaxiales. Datos tabulados para $\lambda \sim 590$ [nm] [3].

1.10.8. Condiciones de frontera para \vec{D}

El vector desplazamiento eléctrico satisface la ecuación (1.218), que es de la misma forma que la ley de Gauss (1.38), con la diferencia que en (1.218) el factor ε_0 está ausente y que la densidad de carga en el lado derecho es sólo la densidad de cargas externas (no las de polarización). Como consecuencia, podemos aplicar el mismo procedimiento discutido en la sección 1.3 para derivar las condiciones que el vector desplazamiento debe satisfacer en la frontera de dos materiales. Consideramos una superficie que divide dos dieléctricos de propiedades diferentes, en la que, eventualmente, existe una densidad de carga externa σ_{ext} . Si \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie en un punto dado, que apunta desde el material 1 hasta el 2, entonces

$$\boxed{\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \sigma_{\text{ext}}.} \quad (1.237)$$

Por otro lado, el campo eléctrico \vec{E} sigue satisfaciendo (1.25), de modo que, como consecuencia, su componente tangencial es continua a través de la superficie, tal como lo expresa la condición (1.53). Recuerde finalmente que el potencial eléctrico siempre es una función continua, de modo que el campo eléctrico, aunque eventualmente discontinuo, es finito en todo punto.

1.10.9. Caso de un medio lineal e isotrópico

Consideramos aquí el caso particular de medios lineales e isotrópicos caracterizados por las constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 respectivamente. Consideramos además el ángulo entre los vectores campo eléctrico a cada lado de la superficie y el vector normal. Ver figura 1.21.

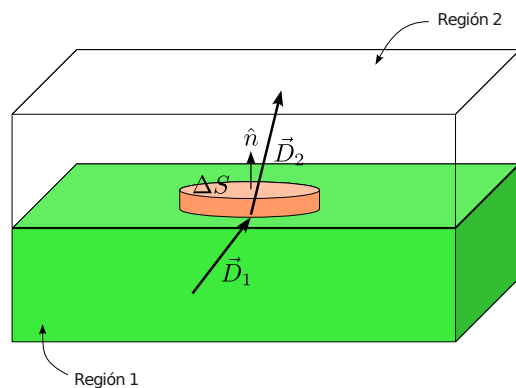


Figura 1.19: La componente normal del vector desplazamiento puede ser discontinua si existen cargas externas en el la interfase entre dos dieléctrico.

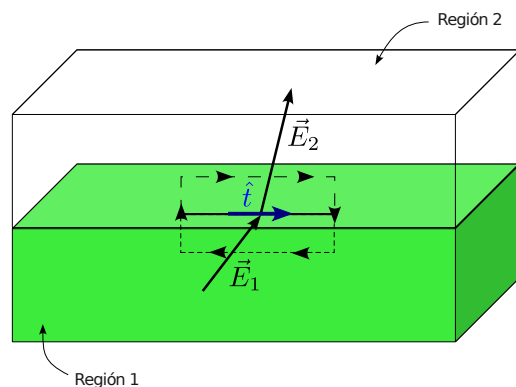


Figura 1.20: La componente tangencial del campo eléctrico es siempre continua en una interfase.

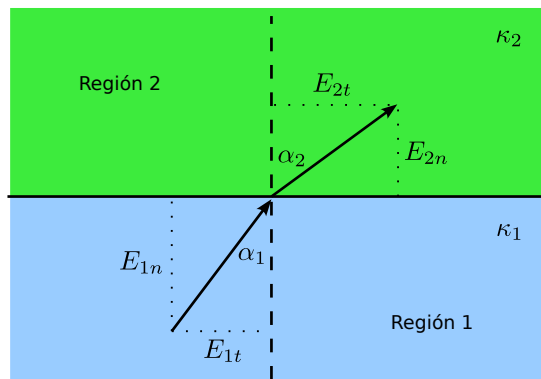


Figura 1.21: Refracción de las líneas de campo.

Aquí tendremos que, en ausencia de cargas externas, la componente normal del vector desplazamiento es continua a través de la superficie, $\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}$, que puede escribirse más explícitamente como:

$$\kappa_1 E_1 \cos \alpha_1 = \kappa_2 E_2 \cos \alpha_2. \quad (1.238)$$

Por otro lado, la condición sobre la componente tangencial a la superficie implica que

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (1.239)$$

Dividiendo (1.239) por (1.238) (asumiendo naturalmente que E_1 y E_2 son no nulos), obtenemos una simple relación entre los ángulos α_1 y α_2 :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\kappa_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\kappa_2}. \quad (1.240)$$

Ejemplo: Esfera dieléctrica en un campo eléctrico externo uniforme

Aquí consideraremos el ejemplo de una esfera dieléctrica (lineal e isotrópica) de radio R y constante dieléctrica κ_1 sumergida en un medio de constante dieléctrica κ_2 y en presencia de un campo externo constante \vec{E}_0 .

En este caso no existen cargas externas en el dominio considerado (las únicas cargas externas del problema serían aquellas que generan el campo externo, que consideraremos están ubicadas muy lejos de la esfera). Entonces el potencial eléctrico, de acuerdo a (1.235), satisface la ecuación de Laplace tanto dentro ($r \leq R$) como fuera ($r \geq R$) de la esfera. Resolveremos el problema en coordenadas esféricas orientando el eje z en la dirección de \vec{E}_0 . Entonces, debido a la simetría del problema (recuerde que los medios son isotrópicos) los campos tendrán simetría axial. En particular $\phi = \phi(r, \theta)$. Por esto, la forma general del campo en cada región es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta). \quad (1.241)$$

En el interior de la esfera el potencial debe ser finito en todo punto y, en particular, en el origen $r = 0$. Esta condición, junto con la elección $\phi(r = 0, \theta) \stackrel{!}{=} 0$, reduce la forma posible del potencial a

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l^{(1)} r^l P_l(\cos \theta), \quad r \leq R. \quad (1.242)$$

Por otro lado, lejos de la esfera ($r \gg R$) el campo eléctrico debe tender al campo eléctrico externo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$. Esto es equivalente a que el potencial satisfaga

$$\phi(r, \theta) \rightarrow -E_0 z + \alpha = -E_0 r \cos \theta + \alpha, \quad r \gg R, \quad (1.243)$$

donde α es una constante. Con esta condición, el potencial fuera de la esfera sólo puede adoptar la forma

$$\phi(r, \theta) = \alpha - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{(2)} r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta), \quad r > R. \quad (1.244)$$

El potencial es una función continua. Por lo tanto, en $r = R$ las soluciones internas y externas deben adoptar el mismo valor. Usando (1.242) y (1.244) encontramos así la condición

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l^{(1)} R^l P_l(\cos \theta) = \alpha - E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{(2)} R^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (1.245)$$

que implica, para $l = 0$, que

$$\alpha - B_0^{(2)} R^{-1} = 0. \quad (1.246)$$

Además, para $l = 1$, obtenemos

$$A_1^{(1)} R = -E_0 R + B_1^{(2)} R^{-2}. \quad (1.247)$$

Finalmente, para $l \geq 2$, encontramos

$$A_l^{(1)} R^l = B_l^{(2)} R^{-(l+1)}. \quad (1.248)$$

Por otro lado, la condición (1.237) se reduce, ya que $\sigma_{\text{ext}} = 0$, a $\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}$. Además en este caso $\hat{n} = \hat{r}$, por lo que la condición es equivalente a

$$\kappa_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R^-} = \kappa_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R^+}. \quad (1.249)$$

Reemplazano nuevamente (1.242) y (1.244) en esta condición obtenemos

$$k \sum_{l=1}^{\infty} A_l^{(1)} l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_l^{(2)} R^{-(l+2)} P_l(\cos \theta), \quad (1.250)$$

donde hemos definido $k := \kappa_1 / \kappa_2$. Para $l = 0$ esta condición implica que

$$B_0^{(2)} = 0. \quad (1.251)$$

Para el caso $l = 1$, obtenemos

$$k A_1^{(1)} = -E_0 - 2 B_1^{(2)} R^{-3}. \quad (1.252)$$

Finalmente, para $l \geq 2$, encontramos la condición

$$k l A_l^{(1)} = -(l+1) B_l^{(2)} R^{-(2l+1)}. \quad (1.253)$$

Al reemplazar el resultado (1.251) en (1.246) obtenemos $\alpha = 0$. Similarmente, las ecuaciones (1.247) y (1.252) permiten encontrar las constantes $A_1^{(1)}$ y $B_1^{(2)}$. Simple álgebra muestra que la solución en este caso es dada por

$$A_1^{(1)} = \frac{-3}{k+2} E_0, \quad B_1^{(2)} = \frac{k-1}{k+2} R^3 E_0. \quad (1.254)$$

Finalmente, las ecuaciones (1.248) y (1.253) determinan $A_l^{(1)}$ y $B_l^{(2)}$ para $l \geq 2$. En este caso, sin embargo, la única solución posible es la nula, es decir,

$$A_l^{(1)} = 0, \quad B_l^{(2)} = 0, \quad l \geq 2. \quad (1.255)$$

Con esto, la solución para el potencial queda totalmente determinado tanto dentro como fuera de la esfera:

$$\phi(r, \theta) = \frac{-3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} E_0 r \cos \theta, \quad r \leq R \quad (1.256)$$

y

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} R^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (1.257)$$

Ahora estudiaremos algunas características de la solución obtenida, en el caso particular en que fuera de la esfera hay sólo vacío, es decir, $\kappa_2 = 1$. Primero, el potencial en el interior de la esfera puede escribirse, en coordenadas cartesianas como

$$\phi(r, \theta) = \frac{-3}{\kappa_1 + 2} E_0 z, \quad r \leq R, \quad (1.258)$$

lo que implica que el campo eléctrico en el interior de la esfera es homogéneo y dado por

$$\vec{E} = \frac{3}{\kappa_1 + 2} \vec{E}_0, \quad r \leq R. \quad (1.259)$$

Por otro lado, fuera de la esfera, el potencial consta de dos términos: uno que corresponde al campo homogéneo externo y otro con la forma (es decir, dependencia espacial) de un *campo dipolar*. En efecto, el campo de un dipolo eléctrico con momento dipolar $\vec{p} = p\hat{z}$ orientado a lo largo del eje z es

$$\phi_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}. \quad (1.260)$$

Por lo tanto, el campo en el exterior de la esfera dieléctrica es dado por la suma del campo externo \vec{E}_0 y el campo de un dipolo con momento dipolar

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 2} R^3 \vec{E}_0. \quad (1.261)$$

Puede verificarse que esta identificación es correcta recordando que el vector de polarización es definido como la densidad de momento dipolar del medio. Como consecuencia, la relación (1.204) permite calcular el momento dipolar total de la esfera como una integral de volumen de su vector de polarización. En el caso estudiado, el vector de polarización es proporcional al campo eléctrico y por lo tanto también homogéneo al interior de la esfera:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\kappa_1 - 1)\vec{E} \quad (1.262)$$

$$= \frac{3\epsilon_0(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 2} \vec{E}_0. \quad (1.263)$$

Con esto, el momento dipolar de la esfera puede ser calculado fácilmente:

$$\vec{p} = \int_V \vec{P} dV \quad (1.264)$$

$$= \vec{P} V \quad (1.265)$$

$$= \frac{3\epsilon_0(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 2} \vec{E}_0 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (1.266)$$

Finalmente, podemos calcular las densidades de carga de polarización en la esfera. Ya que el vector de polarización es homogéneo, la densidad $\rho_P = 0$. La densidad superficial de carga de polarización σ_P es no nula:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{r} \quad (1.267)$$

$$= \frac{3\epsilon_0(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 2} E_0 \cos\theta. \quad (1.268)$$

Finalmente, es interesante notar que el caso de un *conductor* esférico de carga total nula, en un campo externo homogéneo, ver sección 1.4.1, puede ser recuperado en el límite $\kappa_1 \rightarrow \infty$.

1.10.10. Modelos microscópicos simples de polarización

Polarizabilidad

En muchos casos, los átomos que constituyen un dieléctrico no están polarizados...

1.10.11. Energía electrostática en un dieléctrico

En la sección 1.8.2 vimos una expresión para la energía almacenada en un campo dado o, equivalentemente la energía necesaria para formar el sistema de cargas correspondientes a un campo. Ahora calcularemos algo análogo, pero diferente: la energía almacenada en una configuración de campo en un sistema que consta de cargas externas y un dieléctrico dado. En otras palabras, *no incluiremos la energía necesaria para formar el dieléctrico*, sino sólo la energía necesaria para montar una cierta distribución de cargas externas en un dieléctrico preexistente.

El trabajo necesario para aumentar (en general, para cambiar) la densidad de cargas externas en $\delta\rho_{\text{ext}}(x)$ en un medio con potencial $\phi(x)$ es dado por

$$\delta U = \int_{R^3} \phi(x) \delta\rho_{\text{ext}}(x) dV. \quad (1.269)$$

Usando (1.218) encontramos que el cambio en densidad de cargas externas está relacionado con el cambio en el vector desplazamiento por medio de $\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) = \delta\rho_{\text{ext}}$. Usando esto, e integrando por partes, podemos reescribir (1.269) como:

$$\delta U = \oint_{\infty} \phi(x) \delta\vec{D}(x) \cdot d\vec{S} + \int_{R^3} \vec{E} \cdot \delta\vec{D} dV. \quad (1.270)$$

Asumiendo, como es usual, que los campos se anulan suficientemente rápido en el infinito, llegamos a

$$\delta U = \int_{R^3} \vec{E}(x) \cdot \delta\vec{D}(x) dV. \quad (1.271)$$

Si las cargas externas están posicionadas de forma tal que (en cada punto) su densidad es una fracción λ de la densidad final, es decir, si es $\lambda\rho_{\text{ext}}(x)$, entonces el vector desplazamiento correspondiente será $\lambda\vec{D}(x)$ (como consecuencia de (1.218)) y el campo eléctrico correspondiente lo denotaremos $\vec{E}_{\lambda}(x)$. Al incrementar ahora la densidad en $\delta\rho_{\text{ext}}(x) = \rho_{\text{ext}}(x) d\lambda$ el cambio respectivo del vector desplazamiento es $\delta\vec{D}(x) = \vec{D}(x) d\lambda$. Entonces, la energía total requerida para “montar” una distribución de carga (final) $\rho_{\text{ext}}(x)$ o, equivalentemente, la energía necesaria para que el campo eléctrico sea $\vec{E}(x)$ y el vector desplazamiento $\vec{D}(x)$ puede calcularse “sumando” las energías necesarias en cada incremento, desde la situación inicial donde no hay cargas externas ($\lambda = 0$) hasta alcanzar el 100 % de las cargas y campos ($\lambda = 1$):

$$U = \int_0^1 d\lambda \int_{R^3} \vec{E}_{\lambda} \cdot \vec{D} dV. \quad (1.272)$$

Esta expresión es válida en general, para cualquier tipo de dieléctrico.

Para *medios lineales* las componentes del vector desplazamiento son directamente proporcionales a las componentes del campo eléctrico, luego $\vec{E}_{\lambda}(x) = \lambda\vec{E}(x)$. En este caso, la energía necesaria para obtener, en un medio dieléctrico lineal preexistente, una cierta configuración de campos y cargas es

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{E} \cdot \vec{D} dV. \quad (1.273)$$

La respectiva *densidad de energía* electrostática asociada es, entonces,

$$u(x) = \frac{1}{2} \vec{E}(x) \cdot \vec{D}(x). \quad (1.274)$$

En general, para un medio anisótropo tendremos

$$u(x) = \frac{\varepsilon_0}{2} \kappa_{ij}(x) E_i(x) E_j(x). \quad (1.275)$$

Finalmente, para un medio isótropo

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \kappa \vec{E}^2. \quad (1.276)$$

Note además que, en términos del potencial y la densidad de carga externa, la energía (1.273) puede escribirse como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \phi(x) \rho_{\text{ext}}(x) dV. \quad (1.277)$$

1.10.12. Fuerzas y torques

El conocimiento de la energía electrostática de sistemas que constan de cargas, conductores y dieléctricos puede ser usada para calcular (generalmente en forma simple) fuerzas y torques actuando sobre una parte del sistema. Para esto, deben considerarse dos subcasos: a) aquellos sistemas que están aislados y, por lo tanto, la carga y la energía total del sistema son constantes, y b) sistemas que no están aislados, pero en los que, fuentes (baterías) externas mantienen constante las diferencias de potencial entre los conductores presentes.

Sistema aislado

En este caso, el trabajo δW realizado por las fuerzas que actúan sobre una de las *partes móviles* del sistema debe producirse a costa de la variación de la energía electrostática del mismo sistema, δU , es decir,

$$\delta W + \delta U = 0. \quad (1.278)$$

Si la parte móvil realiza un desplazamiento (real o virtual) δx_i a partir de su posición inicial x_i , y la fuerza sobre ella es F_i entonces

$$\delta W = F_i \delta x_i. \quad (1.279)$$

Usando (1.278) y (1.279) podemos entonces escribir

$$F_i = - \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_Q, \quad (1.280)$$

donde el subíndice Q indica que al efectuar las derivadas parciales debe tenerse en cuenta que la carga del sistema se mantiene constante, y la energía electrostática debe ser escrita en función de la posición de la parte móvil, $U = U(x_i)$.

En el caso que la parte móvil *rota en un ángulo $\delta\theta$ respecto a un eje determinado por el vector \hat{n}* , tenemos que $\delta W = \vec{\tau} \cdot \hat{n} \delta\theta$, de modo que *el torque sobre la parte móvil* puede ser calculado usando

$$\vec{\tau} \cdot \hat{n} = - \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_Q. \quad (1.281)$$

Análogamente al caso “traslacional” de la fuerza, la expresión (1.281) asume que se ha determinado la dependencia de la energía electrostática del sistema en función de la posición angular de la parte móvil, es decir, que se conoce la función $U(\theta)$.

Sistema con conductores a potencial constante

En este caso, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre una de las partes móviles del sistema, más la variación de la energía electrostática del sistema, debe ser igual a la energía suministrada por las baterías que mantienen los conductores a potenciales constantes, δW_b , de modo que

$$\delta W + \delta U = \delta W_b. \quad (1.282)$$

Ahora, la variación de la energía electrostática de los conductores con potenciales fijos es dada, ver (1.269), por

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \delta Q^{(\alpha)}, \quad (1.283)$$

donde $\delta Q^{(\alpha)}$ es el cambio de las cargas en el conductor α -ésimo, necesaria para mantener su potencial $\phi^{(\alpha)}$ constante. Por otro lado, la energía suministrada por las baterías es igual al trabajo necesario para transportar las cargas $\delta Q^{(\alpha)}$ hasta cada conductor, es decir,

$$\delta W_b = \sum_{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \delta Q^{(\alpha)}. \quad (1.284)$$

De esta forma encontramos que

$$\delta W_b = 2\delta U. \quad (1.285)$$

Con este resultado y (1.282) llegamos a

$$\delta U = \delta W, \quad (1.286)$$

que, en los casos de desplazamientos y rotaciones, implica

$$F_i = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_\phi, \quad (1.287)$$

y, para el torque,

$$\vec{\tau} \cdot \hat{n} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_\phi. \quad (1.288)$$

Ejemplo: Fuerza sobre un condensador semi-lleno con un dieléctrico

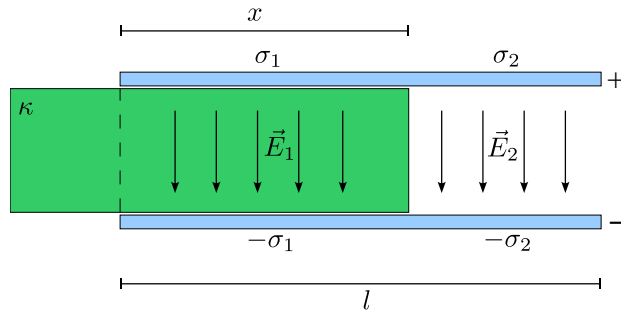


Figura 1.22: Condensador parcialmente lleno con dieléctrico.

Consideremos el caso en que el sistema está cargado, con cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente, y aislado. Debemos determinar los campos en la región con dieléctrico (región 1) y sin él (región 2). Despreciando efectos de borde, podemos aproximar que todos los campos

son verticales, con sus sentidos hacia abajo en la figura. Ya que la componente tangencial del campo eléctrico es continua en una interfase entre dos dieléctricos, encontramos que el campo eléctrico \vec{E} es igual en todo punto entre las placas del condensador, es decir,

$$E_1 = E_2. \quad (1.289)$$

Usando (1.219) encontramos directamente que

$$D_1 = \varepsilon_0 \kappa E = \sigma_1, \quad D_2 = \varepsilon_0 E = \sigma_2, \quad (1.290)$$

donde σ_1 y σ_2 son las densidades de carga en las placas en la región correspondiente. La carga total en cada placa es entonces dada por

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (1.291)$$

$$= \varepsilon_0 \kappa E w x + \varepsilon_0 E w (l - x) \quad (1.292)$$

$$= \varepsilon_0 E w (\kappa x + l - x), \quad (1.293)$$

donde w es la longitud de la otra arista del rectángulo que define cada placa (es decir, en la dirección perpendicular a la figura 1.22).

La energía electrostática del sistema puede ser calculada evaluando (1.273):

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad (1.294)$$

$$= \frac{1}{2} (D_1 E V_1 + D_2 E V_2) \quad (1.295)$$

$$= \frac{1}{2} [\varepsilon_0 \kappa x w d + \varepsilon_0 (l - x) w d] E^2 \quad (1.296)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\kappa x + l - x) w d E^2. \quad (1.297)$$

Usando (1.293), podemos finalmente expresar la energía electrostática del sistema como

$$U(x) = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 w} \frac{1}{(\kappa x + l - x)}. \quad (1.298)$$

Ya que el sistema está aislado y Q es constante, la fuerza sobre el dieléctrico puede ser calculada a partir de (1.280). Así obtenemos

$$F(x) = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 w} \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa x + l - x)^2}, \quad (1.299)$$

que es una fuerza que *atrae al dieléctrico hacia el interior de las placas*.

Ejemplo: Electrómetro

Capítulo 2

Magnetoestática

2.1. Corriente y densidad de corriente

Cuando existen cargas en movimiento, se define la *corriente eléctrica* I como la cantidad de *carga neta* que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie S en una *dirección determinada*,

$$I(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}, \quad (2.1)$$

Corriente eléctrica

de modo que la carga neta que atraviesa entre los tiempos t_1 y t_2 una superficie por donde circula una corriente $I(t)$ es

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (2.2)$$

La unidad S.I. para la corriente es el **Ampère**: $1A := 1C/1s$.

2.1.1. Densidad de Corriente

Consideremos una superficie sobre la cual inciden cargas con densidad ρ , moviéndose con velocidad \vec{v} , cruzando un elemento de superficie (orientado) $d\vec{S}$. La carga neta que

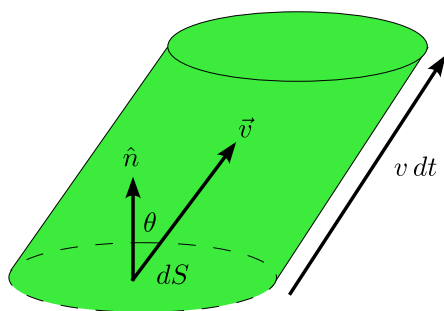


Figura 2.1: Carga con densidad ρ fluyendo con velocidad \vec{v} a través de un elemento de superficie $d\vec{S}$.

atraviesa el área dS en un intervalo de tiempo dt es la que está contenida en un cilindro oblicuo de base dS y de largo $v dt$. Ver figura 2.1.

Esto permite escribir:

$$dQ = \rho dV = \rho dS (v dt) \cos \theta = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt. \quad (2.3)$$

Definimos la **densidad de corriente**

$$\boxed{\vec{J}(x) := \rho(x)\vec{v}(x),} \quad (2.4)$$

de modo que

$$dQ = \vec{J} \cdot d\vec{S} dt. \quad (2.5)$$

En otras palabras, la densidad de corriente es la carga por unidad de tiempo y por unidad de superficie que atraviesa un elemento de área normal dado. Como consecuencia, la corriente, es decir, la carga por unidad de tiempo, que atraviesa una superficie S es dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (2.6)$$

Es importante notar que si $\rho > 0$, entonces \vec{J} y \vec{v} tienen igual sentido, mientras que si $\rho < 0$, entonces \vec{J} y \vec{v} tienen sentidos opuestos.

2.2. Conservación de la carga eléctrica

La ley (experimental) de conservación (local) de la carga eléctrica puede ser escrita en general, como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (2.7)$$

que expresa el hecho que todo cambio en la carga neta contenida en un volumen V dado (pero arbitrario) es debido al flujo neto de carga por la superficie ∂V que lo encierra. Usando el teorema de Gauss, podemos transformar la integral de superficie a una integral de volumen, obteniendo

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) dV = 0. \quad (2.8)$$

Como esta relación debe ser válida para todo volumen V , es decir, de tamaño y forma arbitraria, es necesario que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.} \quad (2.9)$$

Conservación
local carga

Esta relación es conocida como la *ecuación de continuidad*.

2.2.1. Corrientes Estacionarias

Un caso de particular interés es aquel en que las corrientes son *estacionarias*, es decir, en las que tanto ρ como \vec{J} *no dependen del tiempo*. Bajo estas condiciones, la ecuación de continuidad requiere que la divergencia de la densidad de corriente sea nula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.10)$$

2.3. Campo magnético y fuerza magnética

Se ha encontrado *experimentalmente* que la fuerza que actúa sobre una pequeña carga q , moviéndose con velocidad \vec{v} en un campo magnético dado es proporcional a q , a la rapidez v , y que tiene dirección perpendicular a \vec{v} . Esto permite *definir* la *intensidad de campo magnético* \vec{B} como un (pseudo-)vector tal que (en el sistema internacional de unidades)

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la fuerza total que actúa sobre una carga q en un punto del espacio con campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} es dada por la *fuerza de Lorentz*¹

$$\boxed{\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)}. \quad (2.12)$$

La unidad de medida de la intensidad de campo magnético \vec{B} es entonces $[B] = Ns/Cm = Vs/m^2$, que se define como un *Tesla*: $1T := Vs/m^2$. Alternativamente se define un *Gauss* como $1G := 10^{-4}T$.²

Como consecuencia directa del hecho que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de las cargas, *el campo magnético no realiza trabajo* sobre ellas. Esto tiene como consecuencia que el campo magnético sólo puede cambiar la dirección de la velocidad de una carga y no su módulo (energía cinética).

Si las cargas están distribuidas continuamente, entonces la fuerza magnética total sobre una región V con densidad ρ y velocidad \vec{v} será

$$\vec{F}_m = \int_V \rho \vec{v} \times \vec{B} dV = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV. \quad (\text{Fuerza magnética}) \quad (2.13)$$

Podemos describir esta situación usando la **densidad de fuerza magnética** \vec{f}_m , definida como la fuerza por unidad de volumen, dada por

$$\vec{f}_m := \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.14)$$

de modo que

$$\vec{F}_m = \int_V \vec{f}_m dV. \quad (2.15)$$

2.4. Ley de Biot-Savart

Biot³ y Savart⁴ encontraron (~ 1820) que el campo magnético $d\vec{B}$ que un pequeño segmento dx' orientado en la dirección de flujo de la corriente I y ubicado en la posición \vec{x}' produce en un punto de posición \vec{x} es proporcional a la intensidad de corriente, al largo del pequeño segmento, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el segmento y el punto de observación, es decir,

$$|d\vec{B}| \propto \left(I, dx', \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right), \quad (2.16)$$

y que la dirección del campo producido es perpendicular a $d\vec{x}'$ y al vector que une el segmento con el punto de observación,

$$d\vec{B} \perp (d\vec{x}', \vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.17)$$

y que, finalmente, el sentido del campo magnético es dado por la regla de la mano derecha a partir de los vectores $d\vec{x}'$ y $\vec{x} - \vec{x}'$. Ver figura 2.4. En resumen,

¹En honor a Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928): físico y matemático holandés. Ganador del Premio Nobel de Física en 1902. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Lorentz.

²Por ejemplo, la magnitud campo magnético interestelar oscila entre 0,1 and 10 nT , el campo magnético de la Tierra es de orden $\approx 0,5G$, mientras que un imán de Neodimio ($Nd_2Fe_{14}B$) produce un campo del orden de 1,25 T . Un magneto de un sistema de resonancia magnética produce campos entre 1,5 T y 3 T . Los campos magnéticos más intensos producidos en un laboratorio son del orden de 100 T [9, 10]. El campo magnético en una estrella de neutrones puede oscilar entre 1 y 100 MT .

³Jean Baptiste Biot: Físico, Astrónomo y Matemático francés (1774-1862). Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Biot.

⁴Félix Savart: Físico, Médico y Profesor francés (1791-1841). Ver http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%A9lix_Savart.

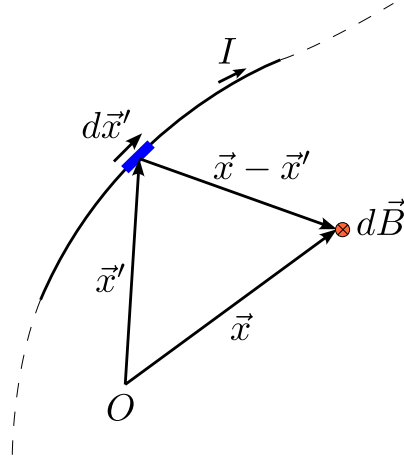


Figura 2.2: Ley de Biot-Savart.

$$dB_i = kI\varepsilon_{ijk}dx'_j \frac{(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (2.18)$$

donde k es una constante, que depende del sistema de unidades usado y que, en el Sistema Internacional, *se define* como

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \left[\frac{V s}{A m} \right], \quad (2.19)$$

y donde μ_0 es llamada la constante de **permeabilidad magnética del vacío**.

Con esto, escribimos la **ley de Biot-Savart** como

$$dB_i = \frac{\mu_0}{4\pi} I \varepsilon_{ijk} dx'_j \frac{(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (2.20)$$

Usando el **principio de superposición** obtenemos una expresión para el campo producido por un cable de longitud finita, pero muy delgado:

$$B_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \varepsilon_{ijk} I dx'_j \frac{(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (2.21)$$

Podemos generalizar este resultado al caso de una distribución volumétrica de corriente, descrita por su densidad de corriente. Para esto, consideramos un pequeño “tubo de corriente” de sección transversal dS que sigue las líneas de flujo, es decir, tal que el vector normal a la superficie transversal, \hat{n} , es paralelo a \vec{J} . Entonces, $\vec{J} = J\hat{n}$, $d\vec{x} = d\ell \hat{n}$, y además $dV = d\ell dS$ (ver figura 2.3), de modo que podemos escribir

$$I d\vec{x} = (JdS)(\hat{n}d\ell) = (J\hat{n})(d\ell dS) = \vec{J} dV. \quad (2.22)$$

Con esto podemos encontrar la forma general que usaremos para la ley de Biot-Savart:

$$B_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \varepsilon_{ijk} J_j(x') \frac{(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (2.23)$$

También podemos considerar una *distribución superficial de corriente*, es decir una situación donde puede *aproximarse* que la corriente está confinada sobre una superficie (de ancho

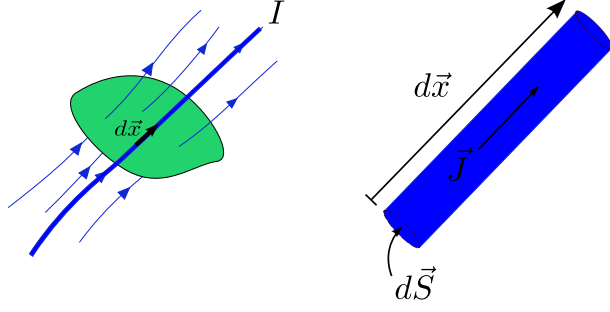


Figura 2.3: Una distribución volumétrica y los “tubos de corriente” asociados.

nulo). Para describir esta distribución usamos la **densidad superficial de corriente**, que denotaremos como \vec{j} . Esta densidad superficial es definida tal que

$$\vec{J} dV = \vec{j} dS, \quad (2.24)$$

donde dS denota el elemento de superficie *sobre* (y no *a través* de) la que fluye la corriente. El campo magnético generado por este tipo de distribuciones adopta entonces la forma siguiente:

$$B_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \varepsilon_{ijk} j_j(x') \frac{(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS'. \quad (2.25)$$

Tal como en el estudio del campo electrostático, trabajaremos con la expresión volumétrica (2.21), que es más general. Si se requiere adaptar las expresiones al caso de corrientes superficiales o lineales pueden entonces usarse las siguientes reglas de conversión:

$$\vec{J} dV = \vec{j} dS = I d\vec{x}. \quad (2.26)$$

Note además que si la corriente es siempre producida por una distribución de cargas moviéndose con velocidad \vec{v} entonces

$$\vec{J} = \rho \vec{v}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{v}, \quad I = \lambda v, \quad (2.27)$$

donde ρ , σ y λ son las densidad de carga por unidad de volumen, superficie y longitud, en el caso de distribuciones de corriente volumétrica, superficial y lineal, respectivamente.

2.5. Potencial vectorial

Consideramos ahora la identidad

$$\frac{x_k - x'_k}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \equiv -\partial_k \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right). \quad (2.28)$$

Reemplazándola en (2.23) encontramos

$$B_i(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \varepsilon_{ijk} J_j(x') \partial_k \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (2.29)$$

$$= -\varepsilon_{ijk} \partial_k \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_j(x') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right) \quad (2.30)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_k(x') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right). \quad (2.31)$$

Por lo tanto, siempre es posible escribir el campo magnetostático como el rotor de un campo vectorial,

$$\boxed{B_i(x) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k(x)}, \quad (2.32) \begin{matrix} \text{Potencial} \\ \text{Vectorial} \end{matrix}$$

donde hemos introducido el **potencial vectorial**,

$$\boxed{A_k(x) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_k(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'}. \quad (2.33) \begin{matrix} \text{Pot. Vectorial} \\ \text{particular} \end{matrix}$$

Análogamente al caso electrostático, el *potencial vectorial no es único*. En el caso magnético, sin embargo, la situación es algo menos trivial ya que es posible considerar un nuevo potencial vectorial

$$A'_i := A_i + \partial_i \Psi(x), \quad (2.34)$$

donde $\Psi(x)$ es una *función arbitraria*, y el campo magnético permanecerá inalterado, ya que $B'_i(x) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A'_k(x) = B_i(x)$. La transformación (2.34) es llamada una **transformación de gauge** del potencial vectorial. Como consecuencia, el potencial vectorial $\vec{A}(x)$ *no es una cantidad medible*, sino más bien un campo auxiliar (muy) útil en muchos cálculos. En general, a menos que se especifique lo contrario, cuando hablemos del potencial vectorial magnético nos referiremos la elección particular dada por (2.33).

2.6. Divergencia del Campo Magnético

Como consecuencia directa de (2.32), vemos que *el campo magnetostático es siempre libre de divergencia*:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}. \quad (2.35)$$

Equivalentemente,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.36)$$

es decir, que el **flujo magnético** a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

Recordemos que el flujo magnético a través de una superficie S es definido como

$$\Phi_S := \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.37)$$

Usando (2.32) y el teorema de Stokes encontramos que

$$\Phi_S = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{x}, \quad (2.38)$$

es decir, que el flujo magnético a través de una superficie sólo depende del valor del potencial vectorial sobre la curva (orientada) ∂S que delimita S . Puede verificarse además que, si bien la expresión anterior involucra el potencial vectorial, *el valor del flujo Φ_S es independiente de la elección particular de \vec{A}* dentro de la familia de potenciales vectoriales asociados a un campo \vec{B} dado. En otras palabras el flujo es **invariante** bajo transformaciones de gauge. Note además que, debido a la relación entre Φ_S y \vec{B} este último vector es también llamado **densidad de flujo magnético**. En el sistema internacional de unidades, se define el *Weber*⁵ como unidad de flujo magnético: $1Wb = 1T \cdot 1m^2 = 1V \cdot 1s$.

⁵En honor a Wilhelm Weber, físico alemán (1804-1891). Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Weber.

2.7. Ley de Ampère

Queremos calcular el rotor de la intensidad de campo magnético, es decir, $\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k$. Usando (2.32) podemos escribir:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m \quad (2.39)$$

$$= \partial_i(\partial_j A_j) - \partial_j\partial_j A_i. \quad (2.40)$$

Para evaluar esta expresión usaremos el potencial definido por (2.33) (el resultado final es independiente de la elección de \vec{A} ya que sólo depende de \vec{B}). Calculemos primero la divergencia del potencial vectorial:

$$\partial_i A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_i(x') \partial_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.41)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_i(x') \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.42)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\partial'_i \left(\frac{J_i(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{(\partial'_i J_i(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (2.43)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{J_i(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_i + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\partial'_i J_i(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.44)$$

$$= 0. \quad (2.45)$$

El primer término del lado derecho de (2.44) se anula cuando V se extiende a todo el espacio, puesto que suponemos que la densidad de corriente se anula suficientemente rápido en el infinito (más rápido que $1/r$). Además, el segundo término es nulo *para corrientes estacionarias*, ver (2.10). Por lo tanto, hemos probado que el potencial (2.33) tiene divergencia nula en el caso de corrientes estacionarias confinadas a regiones compactas del espacio.

Debemos ahora calcular el laplaciano (de cada una de las componentes) de \vec{A} . De la definición (2.33) encontramos que

$$\nabla^2 A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_i(x') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.46)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J_i(x') \left(-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \right) dV' \quad (2.47)$$

$$= -\mu_0 J_i(x). \quad (2.48)$$

Reemplazando (2.45) y (2.48) en (2.40) encontramos la **ley de Ampère**⁶:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \mu_0 J_i}, \quad (2.49)$$

o, en notación vectorial,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}. \quad (2.50)$$

La versión integral de la ley de Ampère (obtenida integrando (2.50) en una superficie S con borde ∂S , y usando el teorema de Stokes) es

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I_S}, \quad (2.51)$$

donde $I_S = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ es la corriente neta que fluye por S .

⁶ **André-Marie Ampère** (1775-1836): matemático y físico francés.

2.7.1. Ejemplo: Campo magnético producido por una línea infinita de corriente

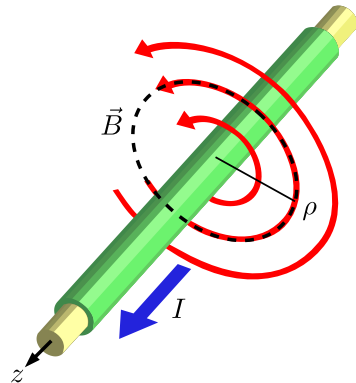


Figura 2.4: Campo magnético producido por un conductor recto. Figura original [aquí](#).

Aplicando la ley de Ampère a la circunferencia de radio ρ indicada en la figura (2.4) encontramos que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = (2\pi\rho)B = \mu_0 I, \quad (2.52)$$

de modo que

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho}. \quad (2.53)$$

Un potencial vectorial posible para describir este campo es

$$\vec{A}_1(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \hat{z}. \quad (2.54)$$

Sin embargo, otro potencial posible es

$$\vec{A}_2(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho} \hat{\rho}. \quad (2.55)$$

2.8. Potencial escalar magnético

En regiones en las que no existen corrientes, $\vec{J} = \vec{0}$, el rotor del campo magnético es nulo, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$. En este caso es *posible escribir \vec{B} como el gradiente de un campo escalar*,

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi^*, \quad (2.56)$$

donde ϕ^* es llamado **potencial escalar magnético**. Ya que además el campo magnético es (siempre) libre de divergencias, tenemos que

$$\boxed{\nabla^2 \phi^* = 0}, \quad (2.57)$$

en regiones sin corrientes.

Esta propiedad permite en muchos casos aplicar métodos similares a aquellos de la electrostática, para determinar el potencial (magnético, en este caso) como solución de la ecuación de Laplace en regiones libres de corrientes, imponiendo las condiciones de contorno adecuadas para el campo magnético.

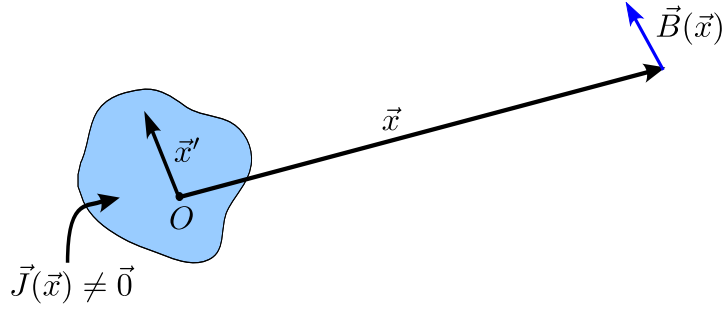


Figura 2.5: Esquema de la expansión multipolar magnética.

2.9. Expansión multipolar magnética

Análogamente al caso electrostático, deseamos calcular el campo magnético \vec{B} lejos de una distribución de corrientes, descritas por una densidad de corriente \vec{J} , localizada en una región pequeña comparada con la distancia a la cual se calculará el campo.

Situando el origen en un punto representativo de la distribución de corrientes, tendremos que para distancias grandes comparadas con el tamaño de la distribución se satisface $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$, ver figura 2.5. Con esto, podemos usar la expansión (1.152) y reescribir la expresión (2.33) como una expansión multipolar magnética:

$$A_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} M_{i_1 \dots i_n i} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}, \quad (2.58)$$

donde hemos definidos los **momentos multipolares magnéticos** como

$$M_{i_1 \dots i_n i} := \int_V x_{i_1} \dots x_{i_n} J_i(x) dV. \quad (2.59)$$

Note que, debido al carácter vectorial de la densidad de corriente, el momento multipolar magnético de orden n es un tensor de orden $n + 1$.

En la práctica es común usar sólo los primeros términos de la expansión multipolar magnética. Además, el término monopolar magnético es siempre idénticamente nulo *para corrientes estacionarias*, ya que

$$M_i = \int_V J_i(x) dV = 0. \quad (2.60)$$

Para probar esto, considere la siguiente integral $\oint_{\partial V} x_i J_j dS_j$. Usando el teorema de Gauss podemos escribir

$$\oint_{\partial V} x_i J_j dS_j = \int_V \partial_j (x_i J_j) dV = \int_V [(\partial_j x_i) J_j + x_i (\partial_j J_j)] dV = \int_V [\delta_{ij} J_j + 0] dV \quad (2.61)$$

En la última igualdad usamos el hecho que para corrientes estacionarias la divergencia del vector densidad de corriente es nula, ver (2.10). Con esto, encontramos la identidad

$$\int_V J_i dV \equiv \oint_{\partial V} x_i J_j dS_j. \quad (2.62)$$

Esta identidad es válida para cualquier volumen V . Entonces para probar lo requerido basta considerar un volumen que *contiene totalmente* la distribución de corrientes, de modo que $\vec{J} = \vec{0}$ en la superficie ∂V .

Este resultado general (para corrientes estacionarias) tiene como consecuencia que *la expansión multipolar magnética comienza con el término dipolar* ($n = 1$).

El momento multipolar de orden 1 es dado por

$$M_{ij} = \int_V x_i J_j(x) dV. \quad (2.63)$$

Es posible probar que este tensor es *antisimétrico*, $M_{ij} = -M_{ji}$, para distribuciones de corrientes estacionarias. Para esto, basta analizar la integral $\oint_{\partial V} x_i x_j J_k dS_k$ de forma análoga a lo discutido anteriormente, es decir, aplicando el teorema de Gauss y la condición de divergencia nula de la densidad de corriente. Ya que M_{ij} es antisimétrico, *la información que este tensor contiene puede ser equivalentemente descrita en términos de un (pseudo-) vector $\vec{\mu}$, llamado momento (dipolar) magnético*, y definido por

$$\mu_i := \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}, \quad M_{ij} = \varepsilon_{ijk} \mu_k, \quad (2.64)$$

es decir,

$$\mu_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int_V x_j J_k(x) dV, \quad (2.65)$$

o, en notación vectorial,

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x} \times \vec{J}(x) dV, \quad (2.66)$$

Con esto, el término dipolar de la expansión multipolar magnética para el potencial vectorial (2.33) es

$$A_i^{(1)}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} M_{ji} \partial_j \frac{1}{r} \quad (2.67)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\varepsilon_{jil} \mu_l) \left(-\frac{x_j}{r^3} \right) \quad (2.68)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \frac{\mu_j x_k}{r^3}, \quad (2.69)$$

es decir,

$$\vec{A}^{(1)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{r^3}. \quad (2.70)$$

Más importante que el potencial, que sabemos no es único, es el campo magnético. La contribución dipolar al campo generado por una distribución compacta de corriente es entonces dado por

$$B_i^{(1)}(x) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^{(1)}(x) \quad (2.71)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\mu_l x_m}{r^3} \right) \quad (2.72)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \mu_l \partial_j \left(\frac{x_m}{r^3} \right) \quad (2.73)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}) \mu_l \left(\frac{\delta_{jm}}{r^3} - 3 \frac{x_j x_m}{r^5} \right) \quad (2.74)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{x_i (x_j \mu_j)}{r^5} - \frac{\mu_i}{r^3} \right], \quad (2.75)$$

o, en notación vectorial

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3 \hat{r} (\vec{\mu} \cdot \hat{r}) - \vec{\mu}}{r^3} \right], \quad \hat{r} := \frac{\vec{x}}{r}. \quad (2.76)$$

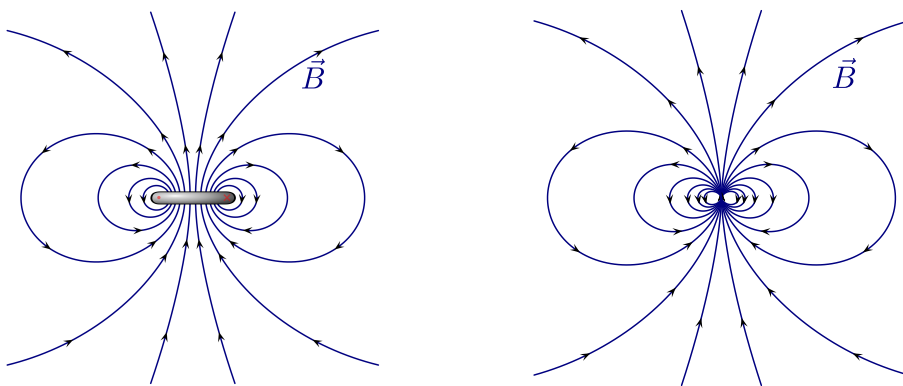


Figura 2.6: a) Campo magnético de una espira, b) campo magnético de un dipolo ideal. Adaptadas a partir de [esta](#) y [esta](#) figuras originales.

2.9.1. Momento dipolar de una espira plana

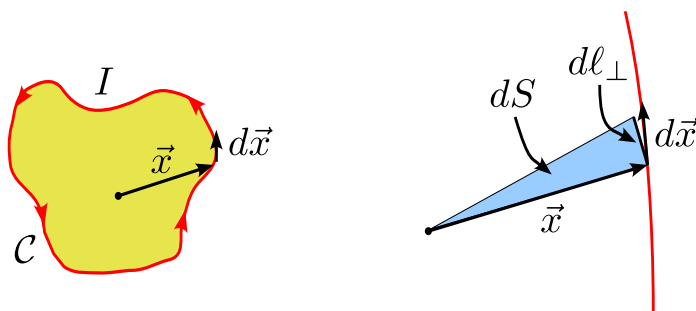


Figura 2.7: Espira plana y elemento de área.

En el caso de que la distribución de corriente se concentre en conductores que describen una curva \mathcal{C} (sobre un plano) y transportan corriente I , el momento magnético es dado por

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_{\mathcal{C}} \vec{x} \times d\vec{x}. \quad (2.77)$$

En el caso de un *espira plana*, pero de forma arbitraria, tenemos que (situando el origen en un punto del mismo plano), $\vec{x} \times d\vec{x}/2 = r d\ell_{\perp} \hat{n}/2 = dS \hat{n}$, donde \hat{n} es el vector normal a la espira cuya con dirección dada por la regla de la mano derecha aplicada a la curva orientada de acuerdo al sentido de circulación de la corriente⁷. Con esto obtenemos que el momento magnético de una espira plana de área A es siempre de la forma

$$\boxed{\vec{\mu} = IA \hat{n}.} \quad (2.78)$$

2.9.2. Relación entre momento magnético y momento angular

En algunos sistemas se tiene que la densidad de carga eléctrica (en cada punto) es proporcional a la densidad de masa, de modo que

$$\rho(x) = \frac{Q}{M} \rho_m(x). \quad (2.79)$$

⁷Equivalentemente, puede obtener este resultado a partir de (2.77) usando el teorema de Stokes.

donde Q es la carga total y M la masa total del sistema. Esto ocurre, en general, en sistemas constituidos por *un sólo tipo de partículas*, masivas y cargadas. En este caso, si cada elemento del sistema se mueve con velocidad $\vec{v}(x)$, entonces

$$\vec{J} = \rho(x)\vec{v}(x) = \frac{Q}{M}\rho_m(x)\vec{v}(x) \quad (2.80)$$

y entonces el momento magnético puede escribirse como

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x} \times \vec{J} dV = \frac{Q}{2M} \int_V \vec{x} \times \rho_m(x)\vec{v}(x) dV = \frac{Q}{2M} \int_V \vec{x} \times d\vec{p}, \quad (2.81)$$

donde $d\vec{p} := \rho_m(x)\vec{v}(x) dV$ denota el **momentum lineal** de la masa en el elemento de volumen dV . De esta forma $d\vec{L} := \vec{x} \times d\vec{p}$ es el **momento angular** del pequeño elemento de masa (respecto al origen elegido) y, finalmente,

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{Q}{2M}\vec{L}.} \quad (2.82)$$

2.10. Fuerza y torque sobre una distribución compacta de corriente

Consideramos ahora el caso en que una pequeña distribución de corriente se ubica en una región donde existe un campo magnético *externo* $\vec{B}(x)$.

La fuerza total que la distribución de corrientes experimenta, debido al campo externo (es decir, sin tomar en cuenta la autointeracción de la distribución), es dada por (2.13). Para expresar esta fuerza en términos de los momentos multipolares magnéticos de la distribución, situamos nuevamente el origen de coordenadas en un punto representativo de la distribución y expandimos la intensidad de campo magnético en puntos dentro de ésta en una serie de potencias de las componentes del \vec{x}' :

$$B_i(\vec{x} + \vec{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} B_i)(x) \quad (2.83)$$

$$= B_i(x) + x'_j (\partial_j B_i)(x) + \frac{1}{2} x'_j x'_k (\partial_j \partial_k B_i)(x) + \cdots \quad (2.84)$$

Reemplazando esto en (2.13), y tomando en cuenta que la integral sobre la región con corrientes es sobre la variable \vec{x}' , encontramos

$$F_i^m = \varepsilon_{ijk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_{i_1 \cdots i_n j} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} B_k)(x) \quad (2.85)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left[M_j B_k(x) + M_{lj} (\partial_l B_k)(x) + \frac{1}{2} M_{lnj} (\partial_l \partial_n B_k)(x) + \cdots \right]. \quad (2.86)$$

Usando (2.60) y (2.64) obtenemos

$$F_i^m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljm} \mu_m (\partial_l B_k)(x) + \cdots \quad (2.87)$$

$$= \mu_j (\partial_i B_j)(x) - \mu_i (\partial_j B_j)(x) + \cdots \quad (2.88)$$

Finalmente, usando la ecuación de campo (2.35) llegamos a

$$\boxed{F_i^m = \mu_j (\partial_i B_j)(x) + \cdots} \quad (2.89)$$

En otras palabras, la primera contribución en la expansión multipolar a la fuerza neta sobre una distribución arbitraria es dada por el término dipolar, con

$$\boxed{F_i^{m,(1)} = -\partial_i U_m,} \quad (2.90)$$

donde hemos introducido la **energía de interacción entre un dipolo magnético y un campo externo**

$$\boxed{U_m(x) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(x).} \quad (2.91)$$

Similarmente, el torque neto sobre la espira (con respecto al punto de referencia O) puede calcularse a partir de

$$\tau_i = \varepsilon_{ijk} \int_V x'_j f_k^m(x') dV', \quad (2.92)$$

donde f_k^m son las componentes de la densidad de fuerza magnética, definida en (2.15). Por lo tanto, usando nuevamente la expansión (2.83) podemos escribir,

$$\tau_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \int_V x'_j J_l(x') B_m(x') dV' \quad (2.93)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \int_V x'_j J_l(x') [B_m(x) + x'_p (\partial_p B_m)(x) + \dots] dV \quad (2.94)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} [M_{jl} B_m(x) + M_{jpl} (\partial_p B_m)(x) + \dots] \quad (2.95)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{jlp} \mu_p B_m(x) + \dots \quad (2.96)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \mu_j B_k(x) + \dots \quad (2.97)$$

o, en notación vectorial

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} + \dots} \quad (2.98)$$

Puede verificarse usando (2.91) y (2.98) que un dipolo magnético (o, en primera aproximación, toda distribución compacta de corriente) situado en un campo (homogéneo) externo experimentará un torque que tenderá a *alinearse* el momento magnético de la distribución con el del campo externo. La posición de equilibrio corresponde al caso en que $\vec{\mu}$ es paralelo a \vec{B} , que es además un equilibrio estable ya que la energía de interacción es mínima. Más generalmente, el momento magnético puede realizar un **movimiento de precesión** en torno al campo magnético.

2.11. Campos magnéticos en la materia

Análogamente al caso electrostático, en el que un medio se polariza en presencia de un campo externo, éste puede además *magnetizarse*. Esto significa que en cada pequeño elemento de volumen (macroscópico) puede existir un momento magnético no nulo. Este momento magnético puede ser producto de los pequeños “loops” de corrientes inducidas por el campo aplicado sobre los electrones atómicos. Este tipo de dipolos se inducen en *dirección contraria* al campo aplicado, por lo que tienden a *reducir* el valor de la inducción magnética al interior del material. Los materiales **diamagnéticos** son aquellos en que este tipo de magnetización es dominante. El hecho que las partículas subatómicas, y en particular los electrones, posean *momentos magnéticos intrínsecos* (permanentes), hace posible que un material presente magnetización no nula, de origen distinto a la generada por las corrientes inducidas. En general, un campo magnético aplicado tenderá a alinear, en mayor o menor medida, los momentos magnéticos permanentes del material con el campo aplicado, pudiendo compensar y revertir la magnetización debida a las corrientes inducidas. Los

materiales paramagnéticos presentan momentos magnéticos netos en la misma dirección del campo aplicado. En los ferromagnetos, por otro lado, la alineación de los momentos magnéticos permanentes es tal que el momento magnético total es no nulo en ausencia de un campo aplicado, y puede asumir valores varios ordenes de magnitud mayor que el caso de los paramagnetos.

2.11.1. Magnetización

En resumen, consideraremos que en el interior de un medio, existen momentos magnéticos distribuidos en su interior. Modelaremos esta distribución definiendo el **(pseudo-)vector de magnetización** como la densidad de momento magnético, es decir, como el momento magnético por unidad de volumen en una pequeña región ($\Delta V \rightarrow 0$, desde el punto de vista macroscópico) del material:

$$\vec{M}(x) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\mu}}{\Delta V}. \quad (2.99)$$

Definición
Magnetización

Como consecuencia, la magnetización tiene unidades de corriente por unidad de longitud: $[\vec{M}] = [\vec{\mu}]/L^3 = IL^2/L^3 = I/L$. Con esta definición, tenemos que el momento magnético $d\vec{\mu}(x)$ contenido en un elemento de volumen (macroscópico) dV centrado en un punto con posición \vec{x} es

$$d\vec{\mu}(x) = \vec{M}(x) dV. \quad (2.100)$$

Entonces, a partir de (2.70) podemos calcular al campo (potencial vectorial) producido por la distribución de momentos dipolares como la superposición del campo correspondiente al momento dipolar magnético contenido en cada elemento de volumen:

$$A_i^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{d\mu_j(x')(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (2.101)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{M_j(x')(x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (2.102)$$

Usando la identidad (1.18) podemos escribir este potencial vectorial producido por la magnetización del material como:

$$A_i^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \int_V M_j(x') \partial'_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.103)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \int_V \left[\partial'_k \left(\frac{M_j(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{(\partial'_k M_j(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (2.104)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\varepsilon_{ijk} M_j(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_k + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\varepsilon_{ijk} \partial'_j M_k(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.105)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{(\varepsilon_{ijk} M_j(x') \hat{n}_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\varepsilon_{ijk} \partial'_j M_k(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.106)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{j_i^{M,S}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (2.107)$$

En resumen

$$\vec{A}^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{j}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS', \quad (2.108)$$

donde hemos definido la **densidad de corriente de magnetización** \vec{J}^M y la **densidad de corriente superficial de magnetización** \vec{j}^M por

$$\vec{J}^M(x) := \vec{\nabla} \times \vec{M}(x), \quad \vec{j}^M(x) := \vec{M}(x) \times \hat{n}(x). \quad \text{corrientes de magnetización} \quad (2.109)$$

Estas definiciones de densidades de corriente, que pueden ser reales o ficticias dependiendo del origen de la magnetización \vec{M} , son de utilidad puesto que, de acuerdo a (2.108), el campo producido por la magnetización es *equivalente* al campo producido (a través de la ley de Biot-Savart) por las corrientes descritas por \vec{J}^M en el interior del material y por \vec{j}^M en su superficie.

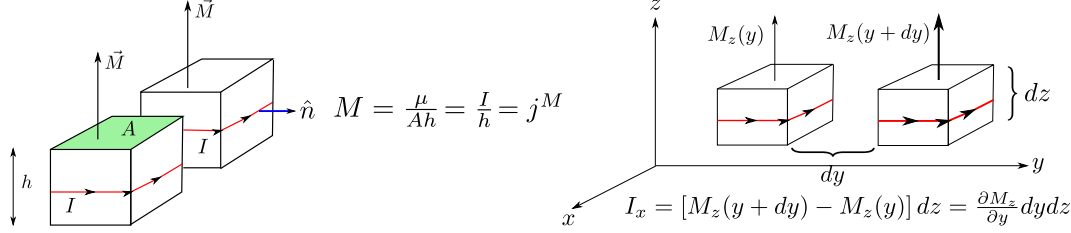


Figura 2.8: Corrientes de magnetización de volumen y superficie. (Figura original gentileza de A. Maldonado) *** EDITAR, MEJORAR, EXPLICAR ***

Usando (2.103) podemos calcular la contribución de la magnetización a la inducción magnética como:

$$B_i^M = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^M \quad (2.110)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \int_V M_l(x') \partial_j \partial'_m \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.111)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \int_V M_l(x') \partial_j \partial_n \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.112)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[M_j(x') \partial_j \partial_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - M_i(x') \partial_j \partial_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (2.113)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_i \left[\int_V M_j(x') \partial_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V M_i(x') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.114)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \partial_i \left[\int_V M_j(x') \partial'_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right] + \mu_0 \int_V M_i(x') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV', \quad (2.115)$$

de donde obtenemos:

$$\boxed{\vec{B}^M(x) = \mu_0 \vec{M}(x) - \mu_0 \vec{\nabla} \phi_M^*(x)}, \quad (2.116)$$

donde hemos definido el **potencial escalar de magnetización**⁸

$$\boxed{\phi_M^*(x) := \frac{1}{4\pi} \int_V M_j(x') \partial'_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(x') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'}. \quad (2.117)$$

Potencial
escalar de
magnetización

En un sistema general existirán, además de la magnetización, corrientes *externas* (también llamadas *libres* o *de transporte*), por lo que la inducción magnética total es dada por:

$$\vec{B}(x) = \vec{B}^{\text{ext}}(x) + \vec{B}^M(x). \quad (2.118)$$

Usando (2.23) y (2.116) encontramos finalmente una expresión para la inducción magnética macroscópica total en un medio magnetizado y con corrientes externas:

$$\boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\text{ext}}(x') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' + \mu_0 \vec{M}(x) - \mu_0 \vec{\nabla} \phi_M^*(x)}. \quad (2.119)$$

\vec{B} : corrientes
externas +
magnetización

⁸Note que éste es un campo *distinto* al potencial escalar magnético definido en la sección 2.8.

2.11.2. Excitación magnética

Al calcular el rotor del campo definido en (2.119), vea (2.50), encontramos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (2.120)$$

De aquí, podemos escribir

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{ext}}. \quad (2.121)$$

Esto motiva definir la **excitación magnética** (también llamada **intensidad de campo magnético**):

$$\vec{H}(x) := \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(x) - \vec{M}(x), \quad (2.122)$$

es decir,

$$\vec{H}(x) := \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\text{ext}}(x') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' - \vec{\nabla} \phi_M^*(x), \quad (2.123)$$

que satisface entonces la “ley de Ampère”,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad (2.124)$$

o, en su versión integral,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{ext}}. \quad (2.125)$$

Análogamente al caso del vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} , la intensidad de campo magnético \vec{H} es una cantidad útil puesto que está relacionada, a través de la ecuación (2.124), con las corrientes externas del sistema, que son las corrientes que (en principio) pueden ser manipuladas.

A partir de (2.123) vemos que *en regiones sin corrientes externas*, la excitación magnética puede derivarse íntegramente del potencial escalar de magnetización⁹,

$$\vec{H}(x) = -\vec{\nabla} \phi_M^*(x). \quad (2.126)$$

2.11.3. Condiciones de continuidad en interfaces

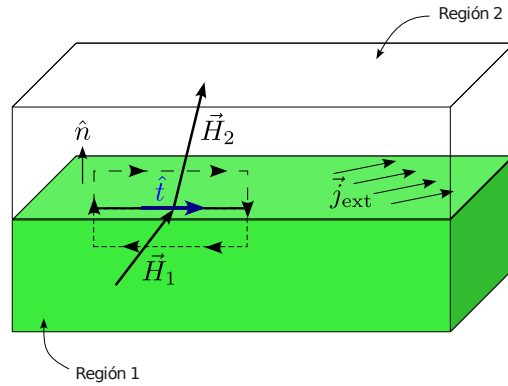


Figura 2.9: Condiciones de continuidad para \vec{H} en una interface de dos medios magnéticos.

⁹Compare con (2.56).

Al aplicar la ley de Ampère (2.125) al circuito de la figura 2.9, y considerando que

$$I_{\text{ext}} = \int_S \vec{J}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{\text{ext}} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dS = \vec{J}_{\text{ext}} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) \ell = (\vec{J}_{\text{ext}} \times \hat{n}) \cdot \hat{t} \ell, \quad (2.127)$$

encontramos

$$\boxed{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{J}_{\text{ext}} \times \hat{n}) \cdot \hat{t}} \quad (2.128)$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{\text{ext}}}. \quad (2.129)$$

Note que en (2.127) el lado derecho contiene a la **densidad de corriente superficial externa** \vec{J}_{ext} . En este caso puede considerarse que $\vec{J}_{\text{ext}} = \vec{J}_{\text{ext}} \delta(z)$, donde la superficie que limita las dos regiones está determinada por la condición $z = 0$, siendo z una coordenada normal a la superficie.

Si no hay corrientes externas de superficie, entonces la componente *tangencial* de la excitación magnética cruza continuamente la interface. En general, si existen corrientes externas de superficie, la componente de la intensidad de campo magnético paralela a $\vec{J}_{\text{ext}} = j_{\text{ext}} \hat{j}$ cruzará continuamente la interface, mientras que la componente ortogonal tendrá una discontinuidad de magnitud j_{ext} . Esto puede verse directamente de (2.128) eligiendo \hat{t} en la dirección y sentido de \vec{J}_{ext} , es decir, $\hat{t} = \hat{j}$, obteniendo

$$H_2^{\parallel} = H_1^{\parallel}, \quad H^{\parallel} := \vec{H} \cdot \hat{j}, \quad (2.130)$$

mientras que, eligiendo $\hat{t} = \hat{j} \times \hat{n}$, encontramos

$$H_2^{\perp} - H_1^{\perp} = j_{\text{ext}}, \quad H^{\perp} := \vec{H} \cdot (\hat{j} \times \hat{n}). \quad (2.131)$$

Estas relaciones se complementan con aquella que se desprende del hecho que el campo magnético tiene siempre divergencia nula (independientemente del medio considerado). Análogamente al caso eléctrico, ver por ejemplo (1.237), la ecuación (2.35) implica

$$\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0}, \quad (2.132)$$

es decir, la componente de \vec{B} normal a la superficie es continua en la interface.

2.11.4. Relación constitutiva, susceptibilidad magnética

Análogamente al caso electrostático, se llama relación constitutiva a la relación entre la magnetización de un material (la “respuesta” de éste) con el campo magnético existente, por ejemplo:

$$\vec{M} = \vec{M}[\vec{H}]. \quad (2.133)$$

Esta relación puede ser no-local, no-lineal, anisótropa e inhomogénea, y es usualmente inferida a partir de experimentos. Sin embargo, muchos materiales pueden ser descritos por relaciones *locales*. En este caso puede parametrizarse la dependencia de la magnetización con la intensidad magnética por medio de una serie de la forma

$$M_i(x) = M_i(H_j(x)) = M_i|_{\vec{H}=\vec{0}} + \chi_{ij}^{\text{m}}(x) H_j(x) + \chi_{ijk}^{\text{m}}(x) H_j(x) H_k(x) + \cdots \quad (2.134)$$

Para medios locales, *lineales* y *sin magnetización permanente* ($M_i|_{\vec{H}=\vec{0}} = 0$), la relación se reduce a

$$\boxed{M_i(x) = \chi_{ij}^{\text{m}}(x) H_j(x)}, \quad (2.135)$$

donde χ_{ij}^m es el **tensor de susceptibilidad magnética** del material. En este caso, la inducción magnética adopta la forma

$$B_i(x) = \mu_{ij}(x)H_j(x) = \mu_0 \kappa_{ij}^m(x)H_j(x), \quad (2.136)$$

con el tensor de **permeabilidad magnética** μ_{ij} y el tensor de **permeabilidad relativa** κ_{ij}^m , definidos por

$$\mu_{ij} := \mu_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^m) = \mu_0 \kappa_{ij}^m. \quad (2.137)$$

Finalmente, en el caso de medios locales, lineales e isótropos, las expresiones anteriores para la relación constitutiva se reducen a

$$\vec{M}(x) = \chi_m(x)\vec{H}(x), \quad (2.138)$$

$$\vec{B}(x) = \mu(x)\vec{H}(x) = \mu_0 \kappa_m(x)\vec{H}(x), \quad (2.139)$$

$$\mu := \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \kappa_m. \quad (2.140)$$

Ecuación de Laplace para el potencial escalar de magnetización

Como vimos en la sección 2.11.2, en regiones libres de corrientes externas la excitación magnética \vec{H} es proporcional al gradiente del potencial escalar de magnetización, ver (2.126). Si además el medio es *lineal e isótropo*, entonces $\vec{B} = \mu\vec{H} = -\mu\vec{\nabla}\phi_M^*$. Finalmente, si además el medio es *homogéneo*, encontramos, usando (2.35), que el potencial escalar de magnetización satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi_M^* = 0. \quad (2.141)$$

2.11.5. Paramagnetismo, diamagnetismo, ferromagnetismo

Diamagnetismo

En este tipo de materiales \vec{M} tiene **dirección opuesta a \vec{H}** , por lo que $\chi_m < 0$ y $\kappa_m < 1$ y la inducción magnética \vec{B} es **debilitada** (respecto al valor que asumiría en el vacío, dada la misma distribución de corrientes externas). Este tipo de materiales requiere que no existan *momentos magnéticos permanentes* significativos, de modo que la magnetización se deba principalmente a **corrientes inducidas**. Estas **corrientes inducidas generan momentos dipolares en sentido contrario al campo que las induce**, por lo que **la inducción magnética disminuye en el interior de un diamagneto**. En la mayoría de los casos de diamagnetismo la susceptibilidad magnética es independiente de la temperatura y posee un valor muy pequeño: $|\chi_m| \lesssim 10^{-5}$. El diamagnetismo es una propiedad general, es decir, que se presenta en todos los materiales (siempre se producen pequeñas corrientes inducidas), pero se dice que un material es diamagnético si este efecto es el dominante, es decir, cuando no existen otras fuentes de magnetización que reviertan la contribución diamagnética. Ejemplos de materiales diamagnéticos: casi todas las sustancias orgánicas, metales nobles (oro, plata, cobre, mercurio, ...). Un caso extremo de diamagnetismo es un **superconductor**, en el que la inducción magnética es **anulada en su interior**, $\chi_m = -1$ y $\kappa_m = 0$ (“diamagneto ideal”).

Paramagnetismo

En este tipo de materiales la magnetización \vec{M} tiene la misma dirección y sentido que \vec{H} . Equivalentemente \vec{M} tiene la misma dirección y sentido que \vec{B} , de modo que $\chi_m > 0$, $\kappa_m > 1$. Por esto, en un material paramagnético la inducción magnética \vec{B} es **reforzada**. Este caso requiere que el material posea *momentos magnéticos permanentes*, que puedan alinearse con el campo magnético. A la tendencia de los momentos magnéticos a alinearse se contraponen el “desorden” relacionado con las agitaciones térmicas del material. Por esto, **en un material paramagnético χ disminuye a medida que la temperatura aumenta**. Muchos materiales paramagnéticos satisfacen la **ley de Curie**: $\chi \propto 1/T$.

Material	χ_m
Aluminio	$2,1 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Oro	$-3,5 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-2,8 \times 10^{-5}$
Plata	$-2,4 \times 10^{-5}$
Sodio	$0,84 \times 10^{-5}$
Titanio	$18,0 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$7,6 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-0,22 \times 10^{-8}$
Nitrógeno (1 atm)	$-0,67 \times 10^{-8}$
Oxígeno (1 atm)	$193,5 \times 10^{-8}$

Cuadro 2.1: Algunos materiales y sus susceptibilidades magnéticas, a temperatura ambiente (Reitz-Milford).

Ferromagnetismo

En este tipo de materiales (típicamente materiales que contienen Hierro, Cobalto o Níquel) **la magnetización no es proporcional a la excitación magnética**. Esto es algunas veces expresado diciendo que la **susceptibilidad magnética efectiva** $\chi_m := M/H$ depende del valor del campo (y de otras variables, como por ejemplo de la temperatura), $\chi_m = \chi_m(T, \vec{H})$. El ferromagnetismo requiere también que el material posea dipolos magnéticos permanentes. Debido a interacciones cuánticas, los momentos magnéticos de un ferromagneto se ordenan *espontáneamente* (es decir, sin necesidad de campo magnético externo), cuando la temperatura baja de un cierto valor crítico, llamada temperatura de Curie, T_C . En el cero absoluto de temperatura, todos los momentos magnéticos estarían alineados. A medida que la temperatura aumenta, el desorden inducido por las vibraciones térmicas tiende a disminuir la alineación, pero sin conseguir anular la magnetización total. Cuando la temperatura cruza la temperatura de Curie, el sistema experimenta una transición de fase, y a partir de ese momento se comporta como un paramagneto usual.

Material	Fe	Co	Ni	Gd	EuO	CrBr ₃
T_C [K]	1043	1393	631	290	69	37

Cuadro 2.2: Algunos materiales ferromagnéticos y sus temperaturas de Curie [11].

Típicamente, los ferromagnetos poseen susceptibilidades magnéticas muy altas y **la magnetización que presentan depende de su historia**, es decir, de cómo hayan sido expuestos a campos externos. En otras palabras, **dado un valor de la excitación \vec{H} el valor de \vec{M} no es único, sino que depende de cómo se haya alcanzado el valor \vec{H}** . Este fenómeno es conocido como **histéresis**. El comportamiento de histéresis típico de un ferromagneto es ilustrado en la figura 2.10. Un material ferromagnético sin

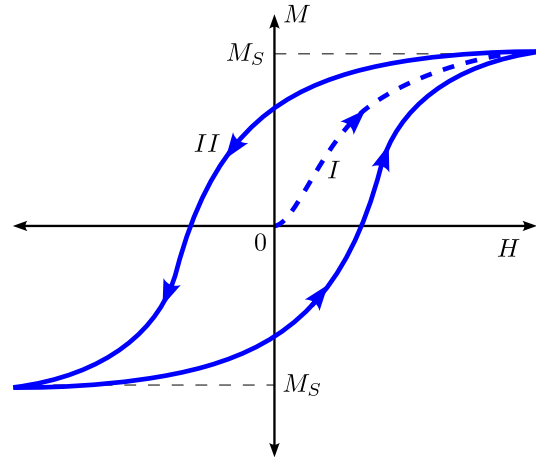


Figura 2.10: Curva de histéresis típica para un material ferromagnético.

magnetización previa sometido a un campo H se magnetiza siguiendo la curva I, llegando a una magnetización máxima M_S (“magnetización de saturación”). Si luego se disminuye la intensidad de campo magnético el sistema se comienza a demagnetizar, pero siguiendo la curva II, de modo que, incluso cuando el campo H es cero, el material conserva una magnetización no nula (magneto permanente), llamada “magnetización remanente”. Esta magnetización puede ser anulada aplicando un campo en sentido inverso (intensidad de campo “coercitivo”). La propiedad de histéresis está relacionada con la existencia de **dominios magnéticos**, que poseen un momento magnético macroscópico no nulo y que requieren de energía para reorientarse. La histéresis de los ferromagnetos es usada en la fabricación de **dispositivos de memoria**, en los que la información es codificada en la orientación del momento magnético de los dominios, que permanece indefinidamente hasta que campos externos sean usados para cambiar su estado.

Capítulo 3

Electrodinámica

3.1. Ley de inducción de Faraday

Faraday¹ encontró experimentalmente (1831) que *si el flujo magnético a través de una espira cerrada varía en el tiempo, se induce una corriente sobre una espira*. Si el flujo es constante, se observa que la corriente desaparece. La **ley de Faraday** se escribe como

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -K \frac{d\phi}{dt}, \quad (3.1)$$

donde ε_{ind} es la fuerza electromotriz (f.e.m.) *inducida* en la espira. El signo menos describe la dirección de la corriente inducida, dada por la **ley de Lenz**. Aquí K es una constante que depende del sistema de unidades usado. En el Sistema Internacional es una cantidad adimensional, que determinaremos más adelante.

En términos de campos, se genera un campo eléctrico \vec{E} que es el que hace mover las cargas en la espira, es decir,

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon_{\text{ind}}. \quad (3.2)$$

Con esto, podemos escribir (3.1) como

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -K \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (3.3)$$

En general, la superficie puede variar en el tiempo. Si éste *no* es el caso, y S es constante, entonces podemos deducir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -K \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Considere ahora el caso en que la espira se mueve *rígidamente*, es decir, que la velocidad de los puntos de la espira es independiente de la posición (puede, sin embargo, depender del tiempo). Entonces el cambio del flujo por la superficie, entre los tiempos t y $t + dt$,

¹Michael Faraday (1791-1867): físico y químico británico. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday.

puede calcularse como sigue:

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) \quad (3.5)$$

$$= \int_{S(t+dt)} B_i(\vec{x} + \vec{v}dt, t + dt) dS_i - \int_{S(t)} B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (3.6)$$

$$= \int_{S(t+dt)} [B_i(\vec{x}, t) + dt v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + dt \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i - \int_{S(t)} B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (3.7)$$

$$= \int_S [B_i(\vec{x}, t) + dt v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + dt \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i - \int_S B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (3.8)$$

$$= dt \int_S [v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i. \quad (3.9)$$

En la penúltima igualdad usamos el hecho que el elemento de superficie dS_i sobre la superficie $S(t)$ y $S(t + dt)$ son iguales, ya que la superficie se mueve rígidamente (es decir, con igual velocidad en cada punto). Así obtenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S [v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i. \quad (3.10)$$

Usamos ahora la identidad

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l v_m) \equiv v_j (\partial_j B_i) - v_i (\partial_j B_j), \quad (3.11)$$

y la ley (2.35) (que suponemos válida incluso en el caso dinámico) para reescribir (3.10) como

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S [\partial_t B_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l v_k)] dS_i \quad (3.12)$$

$$= \int_S \partial_t B_i dS_i + \oint_{\partial S} \varepsilon_{ijk} B_j v_k dx_i \quad (3.13)$$

o, en notación vectorial,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.14)$$

Apliquemos estos resultados para comparar la descripción, respecto a dos sistemas de referencia inerciales (SRI's), del fenómeno de inducción de corriente en una espira debido a la variación de flujo magnético. Primero, en el SRI K en el que la espira está en reposo y el magneto se mueve tenemos que en cada punto del espacio el campo magnético \vec{B} dependerá del tiempo, por lo que se inducirá un campo eléctrico de acuerdo a (3.4). Este campo eléctrico ejercerá una fuerza $\vec{F}_q = q\vec{E}$ sobre una carga q en la espira, que consideraremos inicialmente en reposo.

Por otro lado, en un SRI K' con velocidad relativa \vec{v} respecto a K (de modo que en K' el magneto está en reposo) la corriente inducida es debido al movimiento de la espira. Si en este SRI el campo magnético es $\vec{B}'(x)$, no existe campo eléctrico inducido puesto que $\partial \vec{B}' / \partial t = \vec{0}$. En este SRI la corriente inducida se describe íntegramente debido a la fuerza de Lorentz ejercida por el campo magnético sobre las cargas en la espira, que ahora se mueven con velocidad $-\vec{v}$. La fuerza que actúa sobre la carga es ahora $\vec{F}'_q = -q\vec{v} \times \vec{B}'$. Además, la f.e.m. está dada, usando el resultado (3.14) aplicado a este caso, así como la ley de Faraday (3.4), por

$$\varepsilon'_{\text{ind}} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.15)$$

Ya que K y K' son SRI's, la aceleración, y por tanto la fuerza que actúa sobre la carga (inicialmente en reposo en K), son necesariamente iguales. De lo anterior, es decir $\vec{F}_q = \vec{F}'_q$, vemos que esto sólo es posible si el campo inducido es dado por

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}'. \quad (3.16)$$

Además, la f.e.m. debe ser la misma, ya que la corriente inducida lo es, por lo que

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \varepsilon'_{\text{ind}}, \quad (3.17)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.18)$$

Usando ahora (3.16) en el lado izquierdo obtenemos

$$-\oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.19)$$

Esta relación implica que la constante K debe tener, en el Sistema Internacional de Unidades, el valor $K = 1$.

De esta forma, la ley de Faraday adopta la forma

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad (3.20)$$

o, en forma diferencial:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \quad (3.21)$$

3.1.1. Energía del campo magnético

Consideremos ahora una espira por la que circula una corriente I y el campo magnético *que ella misma produce*. Si I no varía en el tiempo, no existe fem inducida ya que el flujo magnético por la espira permanece constante (suponemos una espira fija, en reposo). Calcularemos la energía necesaria para cambiar la corriente I y el correspondiente campo magnético \vec{B} en una pequeña cantidad. Durante el intervalo de tiempo dt en que la corriente cambia en dI y el campo magnético en $d\vec{B}$, se genera un campo eléctrico inducido y su correspondiente fem ε (que en general se superponen al campo y fem que mantenían la corriente I fluyendo originalmente). Este campo inducido “intenta reducir” el cambio de la corriente. Para esto, el campo realiza trabajo sobre las cargas en movimiento en la espira.

Dividiremos la curva en elementos de longitud $d\vec{\ell} = d\ell \hat{t}$, en los que existe una carga $dq = \lambda d\ell$. El vector unitario \hat{t} está definido de modo que $d\vec{\ell}$ tiene la orientación standard respecto al vector normal \hat{n} a la superficie que encierra la espira. El campo eléctrico \vec{E} ejerce trabajo sobre las cargas dq . En un intervalo de tiempo dt el trabajo realizado sobre las cargas dq es entonces

$$dq \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (\lambda d\ell) \vec{E} \cdot (\vec{v} dt) \quad (3.22)$$

$$= (\lambda d\ell) \vec{E} \cdot (v \hat{t}) dt \quad (3.23)$$

$$= (\lambda v) \vec{E} \cdot (d\ell \hat{t}) dt \quad (3.24)$$

$$= I(\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) dt. \quad (3.25)$$

Aquí hemos identificado la corriente $I = \lambda v$ sobre la espira, y tomado en cuenta que $\vec{v} = v\hat{t}$. Por lo tanto, el trabajo total realizado por el campo sobre las cargas de la espira, en el intervalo de tiempo dt , es dado por

$$dW = \oint_C dq \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.26)$$

$$= I \oint_C (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) dt \quad (3.27)$$

$$= I \varepsilon dt \quad (3.28)$$

$$= -I \frac{d\Phi}{dt} dt \quad (3.29)$$

$$= -I d\Phi. \quad (3.30)$$

A partir de este resultado vemos que la energía (proveniente de fuentes externas) necesaria para cambiar el flujo magnético en una cantidad $d\Phi$, en un sistema con una corriente I es dada por

$$\boxed{dU = I d\Phi.} \quad (3.31)$$

En otras palabras, *un cambio en el valor de la intensidad de campo \vec{B} requiere invertir energía*. En cierto sentido, la ley de Faraday establece una cierta “inercia” en el campo magnético, ya que un sistema de cargas y campos tiende a “resistirse” al cambio del valor del campo (y su flujo). Esto implica además que *es necesario asociar una energía a una cierta configuración de campos y corrientes*, puesto que es necesario invertir energía para establecer estas corrientes y sus campos asociados. Para evaluar esta energía, reescribiremos (3.31) usando (2.38): la energía δU necesaria para variar el potencial vectorial $\vec{A}(x)$ de un sistema de corrientes y campo magnético en $\delta \vec{A}(x)$ es dada por

$$\delta U = I \oint_C \delta \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.32)$$

$$= \oint_C \delta \vec{A} \cdot I d\vec{\ell} \quad (3.33)$$

$$= \int_V \delta \vec{A} \cdot \vec{J}_{\text{ext}} dV. \quad (3.34)$$

En el último paso hemos usado la relación (2.26) para reescribir la energía en términos de una integral de volumen de la densidad de corriente. Note que la corriente inducida es en general corriente “externa” o de “conducción”, por lo que hemos explicitado en el último término la densidad de corrientes externas \vec{J}_{ext} . Además, usando la ley de Ampère para la excitación magnética (2.124), podemos escribir

$$\delta U = \int_{V'} \delta A_i \varepsilon_{ijk} (\partial_j H_k) dV \quad (3.35)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \int_{V'} [\partial_j (H_k \delta A_i) - H_k (\partial_j \delta A_i)] dV \quad (3.36)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \oint_{\partial V'} H_k \delta A_i dS_j - \varepsilon_{ijk} \int_{V'} H_k (\partial_j \delta A_i) dV \quad (3.37)$$

$$= 0 + \int_{V'} H_k \varepsilon_{kji} (\partial_j \delta A_i) dV \quad (3.38)$$

$$= \int_{V'} H_k \delta B_k dV. \quad (3.39)$$

Aquí hemos extendido el dominio de integración a un volumen $V' \rightarrow R_3$, es decir, a todo el espacio, usado el teorema de Gauss y considerado que la integral de superficie se anula en el infinito. Con esto, obtenemos la siguiente expresión para la *energía requerida para cambiar la inducción magnética de un sistema en $\delta\vec{B}(x)$* :

$$\delta U = \int_{R^3} \vec{H}(x) \cdot \delta\vec{B}(x) dV. \quad (3.40)$$

Note la similitud entre las expresiones (3.34) y (3.40) con los resultados (1.269) y (1.271) para la energía almacenada por un campo eléctrico, respectivamente.

*** Agregar comentario energía y área bajo la curva de gráfico H v/s B ***

Similarmente a lo discutido en el caso eléctrico, la *energía total requerida para aumentar el campo magnético de un sistema desde cero hasta un valor final \vec{B}* es

$$U = \int_0^1 \int_{R^3} \lambda \vec{H}(x) \cdot \delta\vec{B}_\lambda(x) dV, \quad (3.41)$$

donde $\vec{B}_\lambda(x)$ es el valor de la inducción magnética correspondiente al caso en que la excitación magnética tiene un valor $\vec{H}_\lambda(x)$ igual a una fracción λ de la excitación magnética final, es decir, $\vec{H}_\lambda(x) = \lambda\vec{H}(x)$.

En el caso de un *medio magnético lineal*, tendremos que $\vec{B}_\lambda(x) = \lambda\vec{B}(x)$ y por lo tanto $\delta\vec{B}_\lambda(x) = d\lambda\vec{B}(x)$, y entonces

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{H}(x) \cdot \vec{B}(x) dV \quad (3.42)$$

o, alternativamente,

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{A} \cdot \vec{J} dV. \quad (3.43)$$

Usando (3.42) podemos escribir la energía almacenada en un sistema de campo magnético (y corrientes) como la integral de una **densidad de energía magnética**

$$U = \int_{R^3} u_B(x) dV, \quad u_B(x) := \frac{1}{2} \vec{H}(x) \cdot \vec{B}(x). \quad (3.44)$$

En el caso particular de medio lineales e isótropos la densidad de energía magnética se reduce a

$$u_B(x) = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2(x) = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2(x). \quad (3.45)$$

3.1.2. Fuerzas y torques sobre circuitos magnéticos

3.2. Ecuaciones de Maxwell

Hasta el momento,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3.46)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.47)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (3.48)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Note que aquí hemos suprimido, para no recargar la notación, la designación “ext” en la densidad de carga y corriente externa.

Vemos que (3.48) implica $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, que es una condición que *no es válida en general*, sino que sólo en los casos, de acuerdo a (2.9), en que $\partial\rho/\partial t = 0$. Esto lleva a pensar que (al menos) la ecuación (3.48) no es válida en el caso dinámico más general en el que las densidades de carga y corriente, y por lo tanto los campos eléctricos y magnéticos, varían en el tiempo.

Maxwell² (1861) generalizó la ecuación (3.48) de modo que sea compatible con (3.46) y la ley de conservación de la carga eléctrica, es decir, con la ecuación de continuidad (2.9). Usando (3.46), que suponemos por tanto válida en el caso general, podemos escribir (2.9) como

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (3.50)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (3.51)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right]. \quad (3.52)$$

De aquí vemos que en el caso de corrientes generales (no-estáticas), \vec{J} tiene divergencia no nula, pero la combinación $\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ *siempre tiene divergencia nula*. A partir de esta observación, Maxwell *postuló* que el lado derecho de la ecuación (3.48) debía ser reemplazada por la combinación $\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$. En otras palabras, Maxwell postuló que a la densidad de corriente debería agregarse el término $\partial\vec{D}/\partial t$, llamado *corriente de desplazamiento*.

Con esto, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3.53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.54)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.55)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.56)$$

Estas ecuaciones son completadas con las relaciones constitutivas entre \vec{E} y \vec{D} , y entre \vec{B} y \vec{H} , así como con la expresión de la (densidad de) fuerza de Lorentz:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (3.57)$$

3.3. Conservación de la energía y Vector de Poynting

Calculamos el producto escalar de \vec{E} con la ecuación (3.55). Usando notación tensorial, obtenemos:

$$E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} - E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k + E_i J_i = 0. \quad (3.58)$$

Análogamente, el producto escalar entre \vec{H} con la ecuación (3.56) implica,

$$H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + H_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0. \quad (3.59)$$

²James Clerk Maxwell (1831-1879): Físico escocés. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell.

Sumando estas ecuaciones, obtenemos

$$0 = E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} - E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k + E_i J_i + H_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k \quad (3.60)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \varepsilon_{ijk} (H_i \partial_j E_k - E_i \partial_j H_k) \quad (3.61)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \varepsilon_{ijk} (H_i \partial_j E_k + E_k \partial_j H_i) \quad (3.62)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \partial_j (\varepsilon_{jki} E_k H_i). \quad (3.63)$$

En resumen, las ecuaciones de Maxwell (3.55) y (3.56) implican que

$$\boxed{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0.} \quad (3.64)$$

Es útil definir el *vector de Poynting*³ como

$$\boxed{\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}.} \quad (3.65)$$

Vector de
Poynting

En un pequeño intervalo de tiempo dt los campos cambian (en cada punto fijo del espacio) en las pequeñas cantidades dadas por $d\vec{D} = dt (\partial \vec{D} / \partial t)$ y $d\vec{B} = dt (\partial \vec{B} / \partial t)$. Entonces podemos escribir

$$\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dt + \vec{E} \cdot \vec{J} dt = 0, \quad (3.66)$$

que, integrado en un volumen V conduce a

$$\boxed{\int_V [\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}] dV + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} dt + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV dt = 0.} \quad (3.67)$$

Identificamos el último término como el **trabajo realizado por el campo eléctrico sobre las corrientes**, es decir, la energía transferida del campo a las cargas (o viceversa, dependiendo del signo). Además, de acuerdo a los resultados previos (1.271) y (3.40) la primera integral puede interpretarse como el **cambio total de la energía almacenada en forma de campo eléctrico y magnético**, en el volumen V . Finalmente, interpretamos la integral de superficie como la **energía electromagnética neta que fluye a través de la superficie** ∂V . En otras palabras, interpretamos el vector de Poynting como la *densidad de flujo de energía* electromagnética (la energía electromagnética transportada por unidad de superficie y unidad de tiempo). De esta forma, (3.67) es una *ecuación de balance (o conservación) de la energía*.

En el caso particular de *medios lineales, no disipativos, y con susceptibilidades independientes del tiempo*, es decir, tales que

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad \partial_t \varepsilon_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (3.68)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j, \quad \partial_t \mu_{ij} = 0, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad (3.69)$$

podemos reescribir:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}), \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (3.70)$$

³John Henry Poynting (1852-1914): físico inglés. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/John_Henry_Poynting ← Esta página podría ser mejorada considerablemente, traduciendo la correspondiente en inglés!. ¿voluntarios?

Con esto, (3.64) es equivalente a

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0}, \quad (3.71)$$

donde hemos definido la *densidad de energía del campo electromagnético*:

$$\boxed{u := \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B})}. \quad (3.72)$$

La versión integral de (3.71) es

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{em}} + E_{\text{mec}}) + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.73)$$

donde

$$E_{\text{em}} = \int_V u dV \quad (3.74)$$

es la **energía electromagnética** y, de acuerdo al *teorema de trabajo-energía en el caso que no existan otras fuerzas que realicen trabajo sobre las cargas*,

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (3.75)$$

es la variación de energía mecánica total de las cargas contenidas en V .

3.4. Conservación del momentum lineal

La **fuerza total que el campo electromagnético ejerce sobre las cargas** contenidas en un volumen V es dada por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{\text{em}} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV. \quad (3.76)$$

Consideremos el integrando de la expresión anterior (es decir, la densidad de fuerza) y reemplacemos las fuentes ρ y \vec{J} usando las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (3.53) y (3.55). Con esto, tenemos que

$$f_i = \rho E_i + \varepsilon_{ijk} J_j B_k \quad (3.77)$$

$$= (\partial_j D_j) E_i + \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{jlm} \partial_l H_m - \partial_t D_j) B_k \quad (3.78)$$

$$= \partial_j (D_j E_i) - D_j \partial_j E_i + (\partial_k H_i) B_k - (\partial_i H_k) B_k - \varepsilon_{ijk} (\partial_t D_j) B_k \quad (3.79)$$

$$= \partial_j (D_j E_i) - D_j \partial_j E_i + \partial_k (H_i B_k) - H_i (\partial_k B_k) - \partial_i (H_k B_k) + H_k (\partial_i B_k) - \partial_t (\varepsilon_{ijk} D_j B_k) + \varepsilon_{ijk} D_j (\partial_t B_k) \quad (3.80)$$

$$= \partial_j (E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} H_k B_k) - D_j \partial_j E_i + H_j (\partial_i B_j) - \partial_t (\varepsilon_{ijk} D_j B_k) - \varepsilon_{ijk} D_j (\varepsilon_{klm} \partial_l E_m) \quad (3.81)$$

$$= \partial_j (E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} H_k B_k) - D_j \partial_j E_i + H_j (\partial_i B_j) - \partial_t (\varepsilon_{ijk} D_j B_k) - D_j (\partial_i E_j) + D_j (\partial_j E_i) \quad (3.82)$$

$$= \partial_j (E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} H_k B_k) - \partial_t (\varepsilon_{ijk} D_j B_k) + H_j (\partial_i B_j) - D_j (\partial_i E_j). \quad (3.83)$$

En el caso de medios *lineales, homogéneos y no disipativos*, es decir, para medios tales que

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad \partial_k \varepsilon_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (3.84)$$

$$B_i = \mu_{ij}H_j, \quad \partial_k\mu_{ij} = 0, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad (3.85)$$

podemos escribir

$$\partial_i(D_j E_j) = \varepsilon_{jk} \partial_i(E_k E_j) = 2\varepsilon_{jk} E_k (\partial_i E_j) = 2D_j(\partial_i E_j), \quad (3.86)$$

es decir,

$$D_j(\partial_i E_j) = \frac{1}{2} \partial_i(D_j E_j). \quad (3.87)$$

Análogamente,

$$H_j(\partial_i B_j) = \frac{1}{2} \partial_i(H_j B_j). \quad (3.88)$$

Reemplazando (3.87) y (3.88) en los últimos dos términos de (3.83), encontramos

$$\rho E_i + \varepsilon_{ijk} J_j B_k = \partial_j \left[E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E_k D_k + H_k B_k) \right] - \partial_t (\varepsilon_{ijk} D_j B_k). \quad (3.89)$$

Definimos la **densidad de momentum** del campo, π_i , y el **tensor de tensiones de Maxwell**, T_{ij} , por

$$\pi_i := \varepsilon_{ijk} D_j B_k, \quad (3.90)$$

$$T_{ij} := \frac{1}{2} \delta_{ij} (E_k D_k + H_k B_k) - E_i D_j - H_i B_j, \quad (3.91)$$

y entonces

$$f_i + \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \partial_j T_{ij} = 0. \quad (3.92)$$

Integrando (3.92) en un volumen V y usando el teorema de Gauss, encontramos

$$F_i^{\text{em}} + \frac{d}{dt} P_i^{\text{em}} + \oint_{\partial V} T_{ij} dS_j = 0, \quad (3.93)$$

donde F_i^{em} es la fuerza electromagnética total actuando sobre las cargas en V , y

$$P_i^{\text{em}} := \int_V \pi_i dV. \quad (3.94)$$

Si \vec{F}_{em} coincide con la *fuerza total* sobre las cargas (por ejemplo, si las únicas fuerzas involucradas son electromagnéticas, o si la fuerza neta de origen no electromagnético se anula) entonces, usando la *segunda ley de Newton*, tenemos que $\vec{F}_{\text{em}} = d\vec{P}_{\text{mec}}/dt$, donde \vec{P}_{mec} es el **momentum lineal total de las cargas** en V (mecánico). Bajo estas condiciones, podemos escribir

$$\frac{d}{dt} (P_i^{\text{mec}} + P_i^{\text{em}}) + \oint_{\partial V} T_{ij} dS_j = 0. \quad (3.95)$$

En casos en que los campos se anulan en ∂V , la relación (3.95) expresa que $P_i^{\text{mec}} + P_i^{\text{em}}$ es conservado. Esto permite interpretar (3.94) como el **momentum lineal total del campo electromagnético en el volumen V** . En el caso general $\oint_{\partial V} T_{ij} dS_j$ representa entonces el **flujo de momentum por unidad de tiempo a través de ∂S** . Consecuentemente, el tensor de Maxwell T_{ij} representa el momentum en la dirección i que se transfiere en la dirección j , por unidad de tiempo y área. Equivalentemente, $-T_{ij}n_j$ ($dS_j = n_j dS$) representa la *fuerza por unidad de área* (tensión) que actúa sobre el sistema de cargas y campos en V .

La expresión (3.95) puede ser usada para calcular la fuerza que actúa sobre cargas en presencia de campos electromagnéticos. Por ejemplo,

Para un medio lineal e isótropo, el tensor de Maxwell es simétrico $T_{ij} = T_{ji}$ y la densidad de momentum es proporcional al vector de Poynting, $\vec{\pi} = \varepsilon\mu\vec{S}$, de modo que la dirección del momentum de campo coincide con la del flujo de energía de éste.

3.5. Ondas Electromagnéticas

3.5.1. Campos electromagnéticos y ecuación de la onda

Consideremos un *medio lineal, isótropo y homogéneo*. En este caso, a ley de Ampère-Maxwell se reduce a

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial E_i}{\partial t}. \quad (3.96)$$

Derivando con respecto al tiempo y usando la ley de Faraday, podemos escribir

$$\mu\frac{\partial J_i}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \varepsilon_{ijk}\partial_j\frac{\partial B_k}{\partial t} \quad (3.97)$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l E_m) \quad (3.98)$$

$$= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l E_m \quad (3.99)$$

$$= \partial_j\partial_j E_i - \partial_j\partial_i E_j. \quad (3.100)$$

Usando la ley de Gauss, $\partial_j E_j = \rho/\varepsilon$ en el segundo término del lado derecho, obtenemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho + \mu\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}.} \quad (3.101)$$

Similarmente, calculando la derivada con respecto al tiempo de la ley de Faraday y usando la ley de Ampère-Maxwell, así como el hecho que el campo magnético siempre tiene divergencia nula, es decir (3.54), encontramos que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\nabla} \times \vec{J}.} \quad (3.102)$$

De esta forma encontramos que *las ecuaciones de Maxwell implican que los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda inhomogénea*. Es importante notar que *no todas* las soluciones de la ecuación de onda son necesariamente soluciones de las ecuaciones de Maxwell. En otras palabras, (3.101) y (3.102) son *condiciones necesarias, pero no suficientes* para que los campos satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

En regiones en libres de cargas y corrientes (3.101) y (3.102) se reducen a la ecuación de onda homogénea para cada componente (cartesiana) de los campos eléctrico y magnético:

$$\boxed{\nabla^2 E_i - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0.} \quad (3.103)$$

$$\boxed{\nabla^2 B_i - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = 0.} \quad (3.104)$$

3.5.2. Ondas electromagnéticas planas monocromáticas

Consideremos una solución de **onda plana monocromática polarizada linealmente**:

$$E_i = E_i^0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi_0). \quad (3.105)$$

Reemplazando (3.105) en (3.103) encontramos que

$$(k^2 - \varepsilon\mu\omega^2) E_i = 0, \quad k := |\vec{k}|, \quad (3.106)$$

por lo que las soluciones no triviales requieren que se satisfaga la *relación de dispersión*:

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} k^2, \quad (3.107)$$

de donde obtenemos la **velocidad de fase**, $v_f := \omega/k$,

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (3.108)$$

que además, coincide con la **velocidad de grupo**,

$$v_f = v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} =: c, \quad (3.109)$$

donde $v_g := \partial\omega/\partial k$. Esto implica que las ondas electromagnéticas se propagan de forma *no-dispersiva* (en medios lineales, isótropos y homogéneos).

La **velocidad de la luz en el medio** (c) puede ser escrita en términos de la **velocidad de la luz en el vacío** ($c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$), la susceptibilidad eléctrica relativa (κ) y la permeabilidad magnética relativa (κ_m), es decir, usando $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ y $\mu = \kappa_m\mu_0$:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\kappa\kappa_m}} = \frac{c_0}{n}. \quad (3.110)$$

Aquí $n := \sqrt{\kappa\kappa_m}$ es el **índice de refracción del medio**.

Además, usando (3.56) obtenemos

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}. \quad (3.111)$$

Similarmente, usando (3.55) encontramos que

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\mu\omega} \vec{k} \times \vec{B}. \quad (3.112)$$

Estas relaciones implican que \vec{k} , \vec{E} y \vec{B} son ortogonales entre sí y forman (en ese orden) un **sistema derecho**. Como consecuencia, *una onda electromagnética plana es transversal*, ya que las oscilaciones (de los campos eléctrico y magnético) se producen en el plano ortogonal a la dirección de propagación. Además, los módulos de los campos satisfacen

$$|\vec{E}| = c |\vec{B}|. \quad (3.113)$$

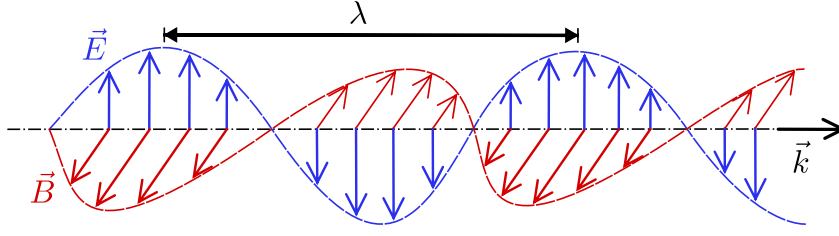


Figura 3.1: Campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana monocromática. Adaptada a partir de esta figura original.

Vector de Poynting

Evaluamos el vector de Poynting (3.65) para la solución de onda plana monocromática recién analizada. Usando (3.65), (3.111) y (3.107) podemos escribir

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.114)$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (3.115)$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \left[\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \right] \quad (3.116)$$

$$= \frac{1}{\mu\omega} \vec{E}^2 \vec{k} \quad (3.117)$$

$$= \frac{1}{\mu c} \vec{E}^2 \hat{k}. \quad (3.118)$$

Encontramos de este modo que el campo electromagnético correspondiente a la onda plana estudiada *transporta energía en la dirección del vector de onda \vec{k}* . Su magnitud, aunque siempre no-negativa, varía en el tiempo y con la posición, ya que $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$. Como la onda considerada es periódica, de periodo $T = 2\pi/\omega$, es usual considerar el **promedio del vector de Poynting en un periodo de oscilación**⁴ Para la onda sinusoidal (3.105) encontramos entonces que

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu c} \vec{E}_0^2 \hat{k}. \quad (3.120)$$

Esto implica que a través de una superficie de área A transversal al vector de onda \vec{k} , la onda transporta energía a una tasa (potencia) promedio (en una oscilación) de

$$\langle P \rangle = \frac{A}{2\mu c} \vec{E}_0^2. \quad (3.121)$$

⁴Si $f(t)$ es una función del tiempo, entonces definimos su promedio entre $t = 0$ y $t = T$ como

$$\langle f \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (3.119)$$

Densidad de Energía

Análogamente, calculamos la densidad de energía electromagnética, usando la expresión (3.72):

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) \quad (3.122)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu c^2} \vec{E}^2 \right) \quad (3.123)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \epsilon \vec{E}^2 \right) \quad (3.124)$$

$$= \epsilon \vec{E}^2. \quad (3.125)$$

Similarmente al caso del vector de Poynting, la densidad de energía (siempre no-negativa) varía en el tiempo y punto a punto. Usando (3.125) podemos reescribir el vector de Poynting (3.118) como

$$\vec{S} = u c \hat{k}. \quad (3.126)$$

Note que esta expresión es análoga a $\vec{J} = \rho \vec{v}$ que relaciona la densidad de corriente asociada al movimiento de una densidad ρ (de carga o masa, por ejemplo) con velocidad \vec{v} (“flujo convectivo”).

Para la onda periódica considerada, podemos calcular la densidad de energía promedio, obteniendo

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}_0^2. \quad (3.127)$$

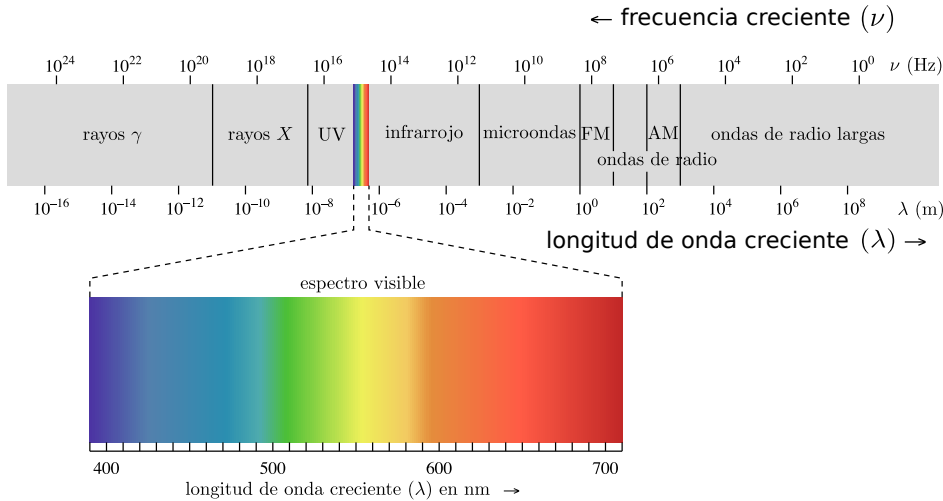


Figura 3.2: Espectro electromagnético. Adaptada a partir de esta figura original.

3.5.3. Ondas electromagnéticas en la materia

3.5.4. Índices de reflexión y refracción

3.5.5. Guías de onda y cavidades resonantes

3.6. Potenciales y transformaciones de gauge

Las ecuaciones de Maxwell conforman un conjunto de 8 ecuaciones diferenciales parciales para las 6 componentes del campo electromagnético. A menudo es *conveniente* reducir

el número de variables. Esto puede ser conseguido expresando los campos en términos de **potenciales electromagnéticos**, de modo que *las ecuaciones homogéneas de Maxwell sean satisfechas automáticamente* y el número de campos a determinar se reduce a 4. Estos potenciales se reducen en los casos estacionarios al conocido potencial electrostático y al potencial vectorial magnético.

En el caso dinámico general, de (3.54) podemos concluir que \vec{B} puede ser derivado de un **potencial vectorial**:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.} \quad (3.128)$$

Usando esto en (3.56), obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.129)$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{0}. \quad (3.130)$$

De aquí vemos que el campo vectorial dado por la suma $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ puede ser escrito como gradiente de un campo escalar, esto es:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (3.131)$$

de donde

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.} \quad (3.132)$$

Las ecuaciones (3.128) y (3.132) muestran que el campo electromagnético puede ser escrito en términos de un potencial vectorial \vec{A} y de un potencial escalar ϕ . Sin embargo, estas funciones *no son únicas* para \vec{E} y \vec{B} dados. Es fácil verificar que el campo electromagnético (y consecuentemente todas las predicciones de la teoría electromagnética) permanece invariante (es decir, con igual valor) bajo las siguientes transformaciones de los potenciales,

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t},} \quad (3.133) \quad \begin{array}{l} \text{Transformaciones} \\ \text{de gauge} \end{array}$$

conocidas como **transformaciones de gauge** y donde $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ es una función escalar *arbitraria* del espaciotiempo⁵.

Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en términos de los potenciales

Consideremos el caso de un medio lineal, isótropo y homogéneo. Usando (3.128) y (3.132) en las ecuaciones inhomogéneas (3.53) y (3.55) encontramos:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (3.134)$$

⁵La invariancia de la teoría electromagnética bajo transformaciones de gauge desempeña un rol muy importante. La generalización de esta propiedad de invariancia a **grupos de simetría interna** permitió formular teorías consistentes para las **interacciones débiles** unificadas con la electromagnética (**electrodébil**) y para la **interacción fuerte** (*Cromodinámica cuántica*). La **interacción gravitacional** también puede ser descrita, con algunas peculiaridades, como una *teoría de gauge*.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu \vec{J}. \quad (3.135)$$

De esta forma, hemos reducido las ecuaciones de Maxwell a un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales parciales para los 4 potenciales. Sin embargo, estas ecuaciones no determinan completamente los potenciales, puesto que las transformaciones de gauge (3.133) *dejan invariantes* (3.134) y (3.134). Esto es natural ya que estas ecuaciones dependen en realidad de los campos eléctrico y magnético, y como vimos las transformaciones de gauge no cambian los valores de estos campos. Además, las ecuaciones (3.134) y (3.134) están *acopladas*, en el sentido que cada una de estas ecuaciones involucra ambos potenciales electromagnéticos.

Es posible explotar la “**libertad de gauge**” de la electrodinámica (es decir, el hecho que los potenciales no son únicos) para *simplificar algunos cálculos*. Una forma de hacer esto es trabajar con potenciales que satisfagan alguna condición extra o **gauge**. De hecho, el imponer condiciones extras a los potenciales no sólo es conveniente, sino también *necesario*, ya que las ecuaciones (3.134) y (3.134) no determinan en forma única los campos ϕ y \vec{A} . Es posible imponer infinitos gauges diferentes para los potenciales (siempre que sean consistentes con las ecuaciones de Maxwell), pero existen algunos de especial utilidad y popularidad.

Gauge de Coulomb

Si el potencial vectorial satisface

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0}, \quad (3.136)$$

se dice que se satisface el **gauge de Coulomb**, **gauge de radiación** o **gauge transversal**. En este caso (3.134) y (3.135) se reducen a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (3.137)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (3.138)$$

Para probar que *siempre es posible imponer la condición de gauge de Coulomb*, podemos considerar el caso en que inicialmente se trabaje con potenciales ϕ_0 y \vec{A}_0 que no satisfacen la condición (3.136), es decir, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \neq 0$, y luego demostrar que es posible realizar una transformación de gauge (3.133) con una función χ tal que los nuevos potenciales sí satisfagan (3.136). Usando (3.133b) requerimos entonces que el nuevo potencial vectorial satisfaga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_0 - \vec{\nabla} \chi) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.139)$$

Esto implica, como condición necesaria y suficiente, que la función χ debe satisfacer

$$\nabla^2 \chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0, \quad (3.140)$$

es decir, la ecuación de Poisson con una “fuente” conocida ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$, dados los potenciales originales). Ya que han sido demostrados **teoremas de existencia** para esta ecuación, es decir, que ella siempre tiene soluciones, queda demostrado que es *posible* imponer el gauge de Coulomb. Note, sin embargo, que la función χ que determina los nuevos potenciales que satisfacen el gauge de Coulomb *no es única*, ya que si χ_1 es solución de (3.140) entonces $\chi_2 = \chi_1 + \tilde{\chi}$ también es solución, siempre que $\tilde{\chi}$ sea una solución de la ecuación de Laplace ($\nabla^2 \tilde{\chi} = 0$). Existe entonces una “**libertad remanente**” para seguir realizando transformaciones

de gauge, generadas por funciones $\tilde{\chi}$ que satisfacen la ecuación de Laplace, y que permiten imponer algunas condiciones⁶ adicionales a los potenciales, siempre dentro de la “familia de potenciales” que satisface el gauge de Coulomb.

Una de las conveniencias de este gauge es que la ecuación (3.137) tiene la misma forma que en el caso electrostático⁷. Debido a esto, y usando la “libertad remanente” mencionada anteriormente, es posible elegir⁸ el potencial escalar de la forma siguiente:

$$\boxed{\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'.} \quad (3.141)$$

Esta solución para el potencial puede entonces ser reemplazada en el lado derecho de (3.138). A partir de (3.141), y usando la ecuación de continuidad, podemos escribir el segundo término del lado derecho de (3.138) sólo en términos de la densidad de corriente, ya que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right) \quad (3.142)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{\nabla} \int \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (3.143)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{\nabla} \int \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (3.144)$$

Con esto, la ecuación (3.138) se reduce a

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_T,} \quad (3.145)$$

donde hemos introducido la **componente transversal de la densidad de corriente**

$$\vec{J}_T := \vec{J} - \frac{1}{c^2\mu} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (3.146)$$

$$= \vec{J} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (3.147)$$

Se dice que este campo es *transversal* porque satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T \equiv 0. \quad (3.148)$$

En resumen, en el gauge de Coulomb el potencial vectorial satisface la ecuación de onda inhomogénea, con un término fuente determinado sólo por la componente transversal de la densidad de corriente. Además, en este gauge sólo el potencial vectorial contribuye a los **campos radiativos**⁹. En cambio, el potencial escalar (3.141) es no-radiativo como consecuencia de que su valor decae al menos tan rápido como $1/r$ a grandes distancias de la fuente.

El gauge de Coulomb es a menudo usado en regiones donde no hay fuentes presentes. En este caso es posible elegir $\phi = 0$, ver (3.141), de modo que toda la información del campo electromagnético está contenida en el potencial vectorial \vec{A} .

⁶Ojo: no *cualquier* condición, sino aquellas que sean compatibles con el resto de las condiciones, y con las ecuaciones de Maxwell.

⁷Se dice por esto que es “coulombiano”, de ahí uno de los nombres asociados a este gauge.

⁸¡Pruebe esta afirmación!.

⁹Como veremos en el capítulo ??, se dice que un campo electromagnético es radiativo si su contribución a la energía radiada muy lejos de las fuentes (“en el infinito”) es no nula.

Gauge de Lorenz

Otro gauge común es el **gauge de Lorenz**¹⁰, que usualmente es escrito como

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0}, \quad (3.149)$$

y que *permite desacoplar las ecuaciones* (3.134) y (3.135). En efecto, si (3.149) es satisfecha entonces (3.134) y (3.135) se reducen a

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.150)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (3.151)$$

o, introduciendo el **operador de onda** (u operador de d'Alembert¹¹), $\square := c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$,

$$\square \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.152)$$

$$\square \vec{A} = \mu \vec{J}. \quad (3.153)$$

Análogamente al caso del gauge de Coulomb, puede probarse que *el gauge de Lorenz siempre puede ser impuesto*, considerando que inicialmente se usen potenciales (ϕ_0 y \vec{A}_0) que no lo satisfacen, y mostrando que puede encontrarse una función χ que genere la transformación de gauge apropiada para que los nuevos potenciales sí la satisfagan. En este caso, la condición sobre la función χ requerida es que

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (3.154)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_0 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A}_0 - \vec{\nabla} \chi \right) \quad (3.155)$$

$$= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2 \chi, \quad (3.156)$$

es decir, que satisfaga la ecuación de onda inhomogénea:

$$\square \chi = - \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \right). \quad (3.157)$$

La existencia de soluciones de esta ecuación está garantizada. Análogamente al caso del gauge de Coulomb, la función buscada no es única, sino que existe una libertad remanente para realizar transformaciones de gauge “dentro del gauge de Lorenz”, generadas por funciones $\tilde{\chi}$ que satisfagan la ecuación de onda, $\square \tilde{\chi} = 0$.

El gauge de Lorenz es usado comúnmente en el contexto de la teoría de Especial de la Relatividad, ya que en el vacío (cuando $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\mu = \mu_0$ y por lo tanto $c = c_0$) la condición (3.149) así como (3.152) y (3.153), *mantienen su forma inalterada en cualquier sistema de referencia inercial* (son *covariantes* bajo transformaciones de Lorentz). Esto tiene como consecuencia que toda expresión que involucre a los potenciales electromagnéticos (que satisfagan el gauge de Lorenz) tendrá la *misma forma en todo Sistema de Referencia Inercial*. Esto no ocurre, por ejemplo, si se usan potenciales que satisfagan el gauge de Coulomb.

¹⁰Nombrado en recuerdo de Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891): Matemático y Físico Danés. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Ludvig_Lorenz, quien consideró esta elección en 1867.

¹¹Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783): matemático, filósofo y enciclopedista francés. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert.

Apéndice A

Coordenadas curvilineas

A.1. Coordenadas Cartesianas

Vector

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (\text{A.1})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{A.2})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

Rotor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (\text{A.4})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.5})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (\text{A.6})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = dy \, dz \, \hat{x} + dx \, dz \, \hat{y} + dx \, dy \, \hat{z} \quad (\text{A.7})$$

Elemento de volumen:

$$dV = dx \, dy \, dz \quad (\text{A.8})$$

A.2. Coordenadas Cilíndricas

Definición:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (\text{A.9})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z \quad (\text{A.10})$$

Vector

$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z} \quad (\text{A.11})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{A.12})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

Rotor:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.15})$$

$$(\text{A.16})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z} \quad (\text{A.17})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = \rho d\varphi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\varphi} + \rho d\rho d\varphi \hat{z} \quad (\text{A.18})$$

Elemento de volumen:

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad (\text{A.19})$$

A.3. Coordenadas Esféricas

Definición:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A.20})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan(y/x) \quad (\text{A.21})$$

Vector

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi} \quad (\text{A.22})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \quad (\text{A.23})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{A.24})$$

Rotor:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right) \hat{r} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Laplaciano

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{A.26})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi} \quad (\text{A.27})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r} + r\sin\theta dr d\varphi\hat{\theta} + r dr d\theta\hat{\varphi} \quad (\text{A.28})$$

Elemento de volumen:

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{A.29})$$

Apéndice B

Campos vectoriales, rotores y divergencias

Todo campo vectorial en 3 dimensiones, continuo y diferenciable (de clase C^2), y *que se anula en el infinito más rápidamente que $r^{-3/2}$* , está únicamente determinado por “sus fuentes”: su rotor (“densidad de circulación”) y por su divergencia (“densidad de fuente”).

Considere un campo vectorial $\vec{V}(\vec{x})$, definimos su divergencia y su rotor, respectivamente, por

$$D(\vec{x}) := \vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \quad \vec{C}(\vec{x}) := \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (\text{B.1})$$

Entonces es posible descomponer $\vec{V}(\vec{x})$ del modo siguiente:

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (\text{B.2})$$

con

$$\phi(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV', \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{A}(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (\text{B.4})$$

En efecto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{B.5})$$

$$= -\nabla^2 \phi \quad (\text{B.6})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_{R^3} \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{B.7})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} D(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{B.8})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} D(\vec{x}') \left(-4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \right) dV' \quad (\text{B.9})$$

$$= \int_{R^3} D(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (\text{B.10})$$

$$= D(\vec{x}). \quad (\text{B.11})$$

Además

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{B.13})$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \vec{C}(\vec{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' + \int_{R^3} \vec{C}(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' + \vec{C}(\vec{x}). \quad (\text{B.17})$$

Probaremos ahora que el primer término de (B.17) es cero si \vec{C} es un campo acotado. Usando notación indicial, tenemos que la (componente i -ésima de la) expresión en el primer término de (B.17), puede escribirse como

$$\int_{R^3} C'_j \partial_j \partial_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \int_{R^3} C'_j \partial'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{B.18})$$

$$= \int_{R^3} \left[\partial'_j \left(C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - (\partial'_j C'_j) \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (\text{B.19})$$

$$= \int_{R^3} \left[\partial'_j \left(C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + 0 \right] dV' \quad (\text{B.20})$$

$$= \oint_{\partial R^3} C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_j \quad (\text{B.21})$$

$$(\text{B.22})$$

En el infinito (∂R^3), $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, de modo que $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{r}$, $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{r^2}$. Además $dS \sim r^2 d\Omega$ en el mismo límite, de modo que $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS_j \sim d\Omega$. En otras palabras, la contribución de $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS_j$ es finita en el infinito espacial. Por lo tanto, la integral en (B.17) se anulará si $\vec{C} \rightarrow \vec{0}$ en el infinito.

Hemos así verificado que, dada la divergencia y el rotor de un campo vectorial tridimensional, es posible reconstruir el campo original. Además, todo campo vectorial tridimensional puede ser descompuesto en un término derivado de un campo escalar (de rotor nulo) y un término derivado de un potencial vectorial (de divergencia nula). Note, sin embargo, que los campos “potenciales” ϕ no son únicos (siempre es posible sumar una constante al potencial escalar ϕ y un gradiente de otro campo escalar al potencial vectorial \vec{A}).

Por otro lado, el vector \vec{V} calculado usando (B.2) es el único que tiene divergencia D y rotor \vec{C} . En efecto, suponga que existen 2 campos \vec{V}_1 y \vec{V}_2 que satisfacen (B.1). Definiendo $\vec{W} := \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ encontramos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{0}. \quad (\text{B.23})$$

La condición (B.23b) implica que es posible escribir $\vec{W} = -\vec{\nabla} \psi$ con una campo escalar ψ . Con esto, (B.23a) implica que ψ debe satisfacer la ecuación de Laplace $\nabla^2 \psi = 0$.

Usando la identidad *primera identidad de Green*:

$$\oint_{\partial V} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S} \equiv \int_V \left[\psi \nabla^2 \psi + (\vec{\nabla} \psi)^2 \right] dV, \quad (\text{B.24})$$

encontramos:

$$\oint_{\partial V} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S} \equiv \int_V (\vec{\nabla} \psi)^2 dV. \quad (\text{B.25})$$

La integral del lado izquierdo de (B.25) se anula en el caso que $V = R^3$ puesto que la familia de campos vectoriales \vec{V} considerados decrece más rápido que $r^{-3/2}$ en el infinito¹. Finalmente, la anulaci3n del lado derecho de (B.25) requiere que $\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$, de modo que ψ puede a lo sumo ser una constante. En este caso, sin embargo, $\vec{W} = -\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$, es decir $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$.

Como consecuencia de lo anterior, podemos establecer los siguientes resultados para un campo vectorial \vec{V} que se anula en el infinito más r1pidamente que $r^{-3/2}$:

- Si la divergencia y el rotor de un campo vectorial son conocidos y si este campo no tiene fuentes en el infinito, entonces el campo est1 1nicamente determinado
- Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ entonces \vec{V} puede ser derivado de un campo escalar: $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$.
- Si $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \vec{0}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ entonces \vec{V} puede ser derivado de un campo vectorial: $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- \vec{V} puede ser descompuesto como una superposici3n (suma) de un campo libre de rotaci3n y uno libre de fuentes.
- Si $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ en una cierta regi3n, entonces \vec{V} puede ser derivado de un potencial ϕ que satisface $\nabla^2\phi = 0$. Decimos que \vec{V} es *arm3nico* en dicha regi3n.
- Si $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ en todo el espacio, entonces $\vec{V} = \vec{0}$.

¹Como consecuencia ψ decrece m1s r1pido que $r^{-3/2}$ y $\psi\vec{\nabla}\psi$ decrece m1s r1pido que r^{-2} , mientras que $d\vec{S}$ aumenta como r^2 .

Apéndice C

Sistemas de Unidades

Los diferentes sistemas de unidades usados en la teoría electromagnética pueden entenderse en función de la libertad que existe para definir las unidades de carga y campo eléctrico y magnético. Aquí discutiremos algunas posibilidades, que incluyen al sistema S.I. y al gaussiano. Discutiremos cómo estos sistemas de unidades “separan” de forma diferente la magnitud de la carga eléctrica de la de los campos electromagnéticos. Las cantidades mecánicas, sin embargo, no son alteradas por estas diferentes formas de separar cargas y campos.

Para esta discusión, es conveniente considerar las cantidades puramente mecánicas relacionadas con las definiciones básicas de las cantidades electromagnéticas. En particular, la ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas es proporcional al producto de cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$F_e \propto \frac{qq'}{r^2}. \quad (C.1)$$

Las unidades en que se miden las cargas depende del valor de la constante de proporcionalidad,

$$\vec{F}_e = \alpha_1 \frac{qq'}{r^2} \hat{r}. \quad (C.2)$$

Esto determina además las unidades del campo eléctrico que es dado, *por definición*¹, por $\vec{E} := \vec{F}_e/q$. De esta forma:

$$[q] = [\alpha_1]^{-1/2} [F]^{1/2} L = [\alpha_1]^{-1/2} M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}, \quad (C.3)$$

$$[E] = [\alpha_1]^{1/2} [F]^{1/2} L^{-1} = [\alpha_1]^{1/2} M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}. \quad (C.4)$$

Por otro lado, la fuerza magnética entre cargas en movimiento (corrientes) están dadas, por ejemplo, por la ley de Biot-Savart:

$$dF_m \propto II' dx \times dx' \frac{1}{r^2}. \quad (C.5)$$

Aquí debemos introducir nuevamente una constante, tal que,

$$dF_m = \alpha_2 II' dx \times dx' \frac{1}{r^2}. \quad (C.6)$$

El campo magnético, es *definido* tal que

$$d\vec{F}_m \propto I' d\vec{x}' \times d\vec{B}. \quad (C.7)$$

¹En principio, es posible definir el campo eléctrico y sus unidades asociadas introduciendo otra constante a elección, por ejemplo, $\vec{E} := 8\vec{F}_e/q$. No exploraremos aquí esta posibilidad.

En particular, existen sistemas de unidades que difieren en la constante de proporcionalidad de esta definición. Introducimos entonces otra constante de modo que

$$d\vec{F}_m = \alpha_3 I' d\vec{x}' \times d\vec{B}, \quad (\text{C.8})$$

y así

$$d\vec{B} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{Id\vec{x} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (\text{C.9})$$

Esto implica que

$$[B] = [\alpha_1]^{-1/2} [\alpha_2] [\alpha_3]^{-1} M^{1/2} L^{1/2} T^{-2}. \quad (\text{C.10})$$

De la expresión (C.8) encontramos, equivalentemente, que la fuerza que ejerce un campo magnético sobre cargas puntuales es dado por

$$\vec{F}_m = \alpha_3 q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (\text{C.11})$$

de modo que la fuerza de Lorentz adopta la forma

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \alpha_3 \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (\text{C.12})$$

Usando (C.6) encontramos en particular que la fuerza entre dos líneas de corriente I e I' , de largo L y separadas una distancia d es

$$F = 2\alpha_2 II' \frac{L}{d}. \quad (\text{C.13})$$

A partir de estas definiciones básicas es posible encontrar la forma de las ecuaciones de Maxwell correspondientes, de modo que se satisfaga la ley de Faraday y la ecuación de continuidad. Así obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\alpha_1\rho, \quad (\text{C.14})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \alpha_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (\text{C.16})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \vec{J} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{C.17})$$

En una región libre de fuentes podemos derivar la ecuación de onda para las componentes del campo eléctrico, obteniendo

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{C.18})$$

de donde encontramos que la velocidad de la luz es dada por la relación

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{C.19})$$

Ya que c es una cantidad mecánica, su valor no debe depender del sistema de unidades usado para las cantidades electromagnéticas. Esto significa que sólo 2 de las 3 constantes pueden elegirse arbitrariamente, por ejemplo, α_2 y α_3 , mientras que $\alpha_1 = \alpha_2 c^2$. A continuación resumiremos los dos sistemas de unidades más comúnmente usados.

$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$	$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$
$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$	$[\vec{B}] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{kg}}{\text{Cs}}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}}{\text{mV}}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$[\mu_0] = \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2}$
$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$[\vec{A}] = \frac{\text{N}}{\text{A}}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$[F] = \text{N}$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$[\phi] = \text{V}$

Cuadro C.1: Resumen Sistema Internacional de Unidades.

C.1. Sistema Internacional de unidades (S.I.)

En este sistema de unidades se define² un Ampere como “la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produce una fuerza igual a $2 \times 10^{-7} \text{N}$ por metro de longitud”. Esto implica que

$$\alpha_2 \stackrel{!}{=} 10^{-7} \text{N A}^{-2} =: \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (\text{C.20})$$

$$\alpha_3 \stackrel{!}{=} 1, \quad (\text{C.21})$$

y además se denota

$$\alpha_1 =: \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (\text{C.22})$$

Por lo tanto, la velocidad de la luz es dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (\text{C.23})$$

La tabla C.1 resume las ecuaciones de Maxwell en este sistema de unidades y las unidades en que son medidas cada cantidad.

C.2. Sistema Gaussiano de Unidades (C.G.S.)

En este caso, se impone que

$$\alpha_1 \stackrel{!}{=} 1, \quad \alpha_3 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c}, \quad (\text{C.24})$$

y como consecuencia

$$\alpha_2 = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{C.25})$$

Como resultado, las cargas eléctricas así como los campos electromagnéticos necesariamente se miden en unidades con exponentes fraccionarios de las magnitudes básicas de longitud, tiempo y masa:

$$[q] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}, \quad [E] = [B] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}. \quad (\text{C.26})$$

Una ventaja relativa de este sistema es que los campos eléctricos y magnéticos tienen las mismas unidades. Otra es que en las ecuaciones de Maxwell sólo aparece *una constante fundamental*, la velocidad de la luz.

²Ver, por ejemplo, la página correspondiente del Instituto Nacional de Estándars y Tecnología de Estados Unidos (NIST): <http://physics.nist.gov/cuu/Units/ampere.html>.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Cuadro C.2: Resumen Sistema Gaussiano de Unidades.

C.3. Conversión de magnitudes S.I. a Gaussianas

$$\vec{E}_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{E}_{\text{G}}, \quad \vec{B}_{\text{SI}} = \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{B}_{\text{G}}, \quad q_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_{\text{G}} \quad (\text{C.27})$$

$$\vec{A}_{\text{SI}} = \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{A}_{\text{G}}, \quad \phi_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \phi_{\text{G}}. \quad (\text{C.28})$$

Apéndice D

Constantes Físicas (S.I.)

Nombre	Símbolo	Valor	Unidad
Número π	π	3.1415926535...	
Número e	e	2.7182818284...	
Carga elemental	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	G	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Constante de Estructura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2,99792458 \cdot 10^8$	m/s (def)
Permitividad del vacío	ε_0	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m (def)
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8,9876 \cdot 10^9$	Nm^2C^{-2}
Constante de Planck	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9,2741 \cdot 10^{-24}$	Am^2
Radio de Bohr	a_0	0,52918	Å
Constante de Rydberg	Ry	13.595	eV
Longitud de Compton del electrón	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2,463 \cdot 10^{-12}$	m
Longitud de Compton del protón	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1,3214 \cdot 10^{-15}$	m
Masa del electrón	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa de protón	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa de neutrón	m_n	$1,674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Diámetro del Sol	D_\odot	$1392 \cdot 10^6$	m
Masa del Sol	M_\odot	$1,989 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo de rotación del Sol	T_\odot	25.38	días
Radio de la Tierra	R_A	$6,378 \cdot 10^6$	m
Masa de la Tierra	M_A	$5,976 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo de rotación de la Tierra	T_A	23.96	hours
Periodo orbital Terrestre	A no tropical	365.24219879	días
Unidad Astronómica	AU	$1,4959787066 \cdot 10^{11}$	m
A no Luz	ly	$9,4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$	m

Bibliografía

- [1] *VectorFieldPlot*, programa Python escrito por [Geek3](#), <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Geek3/VectorFieldPlot>. Ejemplos disponibles en http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Created_with_VectorFieldPlot.
- [2] MIT OpenCourseWare “Physics II: Electricity and Magnetism (2007)” <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Physics/8-02Spring-2007/CourseHome/index.htm>.
- [3] <http://hypertextbook.com/physics/waves/refraction/>
- [4] A. Michelson and E. Morley, *On the relative motion of the earth and the luminiferous ether*, *Am. Jour. Sci.* **34** (1887) 333-345.
- [5] P.J. Mohr and B.N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998**, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 351.
- [6] H. Müller et al., *Modern Michelson-Morley Experiment using Cryogenic Optical Resonators*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 020401.
- [7] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integral, series and products*, 6ta edición (2000), Academic Press.
- [8] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 5a edición (2001), Academic Press.
- [9] *Magnetic Field Researchers Meet Hundred-Tesla Goal*. [Comunidado de prensa](#), National High Magnetic Field Laboratory, Los Alamos National Laboratory (22 de Marzo, 2012). Video relacionado [aquí](#).
- [10] *World Record: The Highest Magnetic Fields Are Created in Dresden*, [Comunidado de prensa](#), Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf (28 de Junio, 2011).
- [11] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, (2004).
- [12] A. Einstein, *Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzips*, *Annalen der Physik* **23** (1907) 197-198.
- [13] H.E. Ives and G.R. Stilwell, *An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock*, *J. Opt. Soc. Am.* **28** (1938) 215-219. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSA.28.000215>.
- [14] G. Saathoff, S. Karpuk et al., *Improved Test of Time Dilation in Special Relativity*, *Phys.Rev.Lett.* **91** (2003) 190403. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.190403>.

- [15] S. Reinhardt, G. Saathoff et al., *Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities*, *Nature* **3** (2007) 861-864. <http://www.nature.com/doi/10.1038/nphys778>.
- [16] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband and D. J. Wineland, *Optical Clocks and Relativity*, *Science* **329** (2010) 1630-1633. <http://www.sciencemag.org/content/329/5999/1630.full.html>.
- [17] J. Bailey, K. Borer et al., *Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit*, *Nature* **268** (1977) 301-305. <http://dx.doi.org/10.1038/268301a0>.
- [18] J.C. Hafele and R. E. Keating. *Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains*, *Science* **177** (1972) 166-168. <http://www.jstor.org/stable/1734833>.
- [19] J.C. Hafele and R. E. Keating. *Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains*, *Science* **177** (1972) 168-170. <http://www.jstor.org/stable/1734834>.
- [20] T. Roberts and S. Schleif, *What is the experimental basis of Special Relativity?*, <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/experiments.html> (2007).
- [21] H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1907) 531-11. Wikisource translation: *The Fundamental Equations for Electromagnetic Processes in Moving Bodies*.
- [22] A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*, *Annalen der Physik* **18** (1905) 639-641. Una traducción al inglés está disponible aquí: *Does the Inertia of a Body Depend on its energy Content?*.
- [23] A. Einstein, *Elementary derivation of the equivalence of mass and energy*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **37** (1935) 39-44.
- [24] A. Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, *Phys. Rev.* **21** (1923) 483-502.
- [25] M. Planck *Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik*, *Verhandlungen Deutsche Physikalische Gesellschaft* **8** (1906) 136-141. Transcripción de la versión original (en alemán) [aquí \(wikilivres\)](#). Traducción al inglés [aquí \(wikilivres\)](#).